

Universitatea “Alexandru Ioan Cuza” din Iași
Facultatea de Matematică

Elasticitate matematică

De la cinematica deformării la metode variaționale și existență

Suport de curs pentru 14 săptămâni

Ionel-Dumitrel Ghiba

2026

Cuprins

Prefață și mod de utilizare	vi
1 Corpul continuu, configurații și deformări	1
1.1 De la corp material la domeniu de referință	1
1.2 Elemente de calcul diferențial și algebră liniară	2
1.3 Deplasare, viteză și cele două descrieri	15
1.4 Derivata materială și accelerația	16
1.5 Deformări elementare și calculul explicit al gradientului deformării	17
1.6 Transformarea lungimilor, volumelor și ariilor	20
1.7 Deformări radiale	27
1.8 Probleme pentru seminar	30
1.9 Exerciții rezolvate	30
1.10 Exerciții propuse suplimentare	34
2 Măsuri de deformare, descompunerea polară și distanța la rotații	39
2.1 Tensorii Cauchy–Green și întinderile principale	39
2.2 Rădăcina pătrată și calculul spectral	42
2.3 Descompunerea polară	44
2.4 Invarianti și valori singulare	47
2.5 Măsuri finite de deformare	48
2.6 Liniarizarea comună a măsurilor de deformare	49
2.7 Distanța euclidiană la rotații: teorema lui Grioli	50
2.8 Distanța geodezică și deformarea Hencky	52
2.9 Rigiditate: când absența deformării implică o mișcare rigidă	53
2.10 De la distanța neliniară la deformația infinitezimală	56
2.11 O inegalitate punctuală utilă și legătura cu rigiditatea geometrică	57
2.12 Măsurile de deformare pentru o deformare radială	58
2.13 Probleme pentru seminar	59
2.14 Exerciții rezolvate	59
2.15 Exerciții propuse suplimentare	63
3 Axiome din teoria elasticității, principiul lui Cauchy și ecuațiile de mișcare în configurația actuală	69
3.1 Conservarea masei	69
3.2 Forțe de volum și forțe de contact	70
3.3 Rezultate auxiliare pentru localizare	70
3.4 Bilanțul impulsului și ecuația locală de mișcare	75
3.5 Bilanțul momentului cinetic și simetria tensiunii	76
3.6 Tensiuni normale și tangențiale	77
3.7 Tensiuni principale și formula tracțiunii pe un plan	77

3.8	Exemplu: tracțiunea pe un plan și tensiunile principale	80
3.9	Puterea tensiunilor și bilanțul local al energiei mecanice	80
3.10	Schimbarea observatorului și principiul puterilor virtuale	82
3.11	Probleme pentru seminar	82
3.12	Exerciții rezolvate	83
3.13	Exerciții propuse suplimentare	86
4	Tensiuni Piola–Kirchhoff, transformarea Piola și lucru virtual	91
4.1	Descrierea în configurația de referință	91
4.2	De la formula lui Nanson la primul tensor Piola–Kirchhoff	91
4.3	Al doilea tensor Piola–Kirchhoff și tensiunea Kirchhoff	93
4.4	Ecuația de mișcare în configurația materială și transformarea divergenței	93
4.5	Puterea internă și perechile conjugate	95
4.6	Principiul lucrului virtual	97
4.7	Deducerea principiilor din invarianta lucrului	97
4.8	Exemple pentru tensorii Piola–Kirchhoff	98
4.9	Probleme pentru seminar	99
4.10	Exerciții rezolvate	100
4.11	Exerciții propuse suplimentare	104
5	Materiale elastice, obiectivitate, izotropie și hiperelasticitate	110
5.1	Funcții de răspuns și legea constitutivă	110
5.2	Hiperelasticitate și obiectivitatea energiei	112
5.3	Simetrii materiale și izotropie	113
5.4	Teorema de reprezentare Rivlin–Ericksen pentru funcții tensoriale izotrope	116
5.5	Derivatele invariantilor și tensiunile pentru energii izotrope	118
5.6	Tensiunile principale pentru energii izotrope	119
5.7	Energii hiperelastice clasice și calculul tensiunilor	120
5.8	Testul de extensie uniaxială pentru un material neo-Hookean incompresibil	123
5.9	Exemplu: energie dependentă numai de determinant	124
5.10	Comportamentul energiei pentru $J \downarrow 0$	124
5.11	Probleme pentru seminar	125
5.12	Exerciții rezolvate	125
5.13	Exerciții propuse suplimentare	130
6	Elasticitatea liniarizată: de la teoria finită la ecuațiile Navier–Lamé	136
6.1	Liniarizarea în jurul configurației naturale	136
6.2	Reprezentarea tensorului elastic izotrop	140
6.3	Constante ingineresti și conversii	144
6.4	Legea inversă a lui Hooke	145
6.5	Forma dinamică, elipticitatea și problema mixtă	146
6.6	Deformație plană și tensiune plană	146
6.7	Extensia unei bare prismatice	148
6.8	Cilindrul gros sub presiune: soluția Lamé	149

6.9	Sferă groasă sub presiune	152
6.10	Torsiunea unei bare circulare	155
6.11	Torsiunea Saint–Venant pentru o secțiune generală	156
6.12	Încovoierea pură: de la cinematică la formula lui Navier	158
6.13	Ecuatia Euler–Bernoulli și echilibrul unei grinzi	159
6.14	Problemă rezolvată: grindă simplu rezemată sub sarcină uniformă	160
6.15	Flexiune cu forță transversală și tensiuni de forfecare	161
6.16	Principiul Saint–Venant: interpretare matematică	162
6.17	Problema plană și funcția de tensiune Airy	162
6.18	Problema Saint–Venant de torsiune în formularea funcției de tensiune	164
6.19	Probleme pentru seminar	165
6.20	Exerciții rezolvate	166
6.21	Exerciții propuse suplimentare	171
7	Formularea variațională a elasticității liniare și existența statică	176
7.1	Integrarea prin părți și norma L^2	176
7.2	Derivate slabe, H^1 , H_0^1 și urma la frontieră	177
7.3	Rigiditatea infinitezimală în H^1 și două fapte de compactitate	177
7.4	Spațiul energetic	178
7.5	Inegalitatea lui Korn	179
7.6	Forma slabă: deducerea ecuației variaționale	180
7.7	Spații Hilbert și funcționale liniare continue	181
7.8	Teorema Lax–Milgram	182
7.9	Existență și unicitate	183
7.10	Cazurile pur Dirichlet și pur Neumann; observații de regularitate	185
7.11	Teorema lui Clapeyron pentru elasticitatea liniară	187
7.12	Teorema de reciprocitate a lui Betti	188
7.13	Principiul minimului energiei	188
7.14	Probleme pentru seminar	189
7.15	Exerciții rezolvate	189
7.16	Exerciții propuse suplimentare	194
8	Elastodinamica liniară, energie și propagarea undelor	199
8.1	Problema cu valori inițiale și la frontieră	199
8.2	Existența prin metoda Galerkin	199
8.3	Bilanțul energiei	207
8.4	Unde plane, tensorul acustic și modurile P/S	208
8.5	Problema unidimensională a barei și formula lui d’Alembert	211
8.6	Vibrațiile proprii ale unei bare finite	213
8.7	Frecvențele proprii ale unei bare fixate-liber	214
8.8	Dispersia într-un model cu gradient de deformare	215
8.9	Probleme pentru seminar	216
8.10	Exerciții rezolvate	216
8.11	Exerciții propuse suplimentare	221

9	Echilibrul neliniar și formularea variațională	226
9.1	Energia totală și clasa admisibilă	226
9.2	Prima variație și ecuațiile de echilibru	227
9.3	A doua variație și stabilitatea locală	230
9.4	Liniarizarea operatorului neliniar în jurul stării naturale	232
9.5	Convexitatea obișnuită și condiția $\det F > 0$	233
9.6	Injectivitate și condiția Ciarlet–Nečas	233
9.7	Existență locală pentru încărcări mici prin teorema funcției inverse	234
9.8	Probleme pentru seminar	237
9.9	Exerciții rezolvate	238
9.10	Exerciții propuse suplimentare	242
10	Eliplicitate Legendre–Hadamard și rank-one convexitate	246
10.1	Compatibilitatea Hadamard și direcțiile de rang unu	246
10.2	Tensorul tangent și condiția Legendre–Hadamard	247
10.3	Rank-one convexitate	247
10.4	Deducerea condiției Legendre–Hadamard din a doua variație	249
10.5	Exemplu: energia pătratică în F	253
10.6	Probleme pentru seminar	253
10.7	Exerciții rezolvate	254
10.8	Exerciții propuse suplimentare	259
11	Materiale izotrope și criterii în valori singulare	264
11.1	Energii izotrope și valorile singulare	264
11.2	Formule de variație folosite în criteriile spectrale	264
11.3	Convexitate separată și Baker–Ericksen	266
11.4	Criterii spectrale în trei dimensiuni	269
11.5	Criteriul pentru medii incompresibile izotrope	272
11.6	Unde incrementale și tensorul acustic	273
11.7	Interpretarea spectrală a exemplului Saint Venant–Kirchhoff	274
11.8	Exemplu: energia neo-Hooke compresibilă	275
11.9	Energie separabilă de tip Valanis–Landel	275
11.10	Rank-one convexitatea și existența	276
11.11	Probleme pentru seminar	276
11.12	Exerciții rezolvate	277
11.13	Exerciții propuse suplimentare	282
12	Quasiconvexitate, policonvexitate și minorii gradientului	287
12.1	Quasiconvexitatea și limitele rank-one convexității	287
12.2	Lagrangieni nuli și identitățile de medie ale minorilor	287
12.3	Policonvexitatea și minorii ca variabile independente	290
12.4	Policonvexitate $\Rightarrow$ quasiconvexitate: Jensen și Lagrangieni nuli	291
12.5	Criteriul lui Ball pentru policonvexitatea energiilor izotrope	292
12.6	Criteriul Steigmann prin invarianții lui U	292

12.7 Exponențierea și policonvexitatea	293
12.8 Quasiconvexitatea implică rank-one convexitatea	293
12.9 Ierarhia noțiunilor de convexitate	295
12.10 Exemple și teste de policonvexitate	296
12.11 Probleme pentru seminar	297
12.12 Exerciții rezolvate	297
12.13 Exerciții propuse suplimentare	301
13 Metoda directă a calculului variațional	305
13.1 Schema metodei directe și noțiunea de coercivitate	305
13.2 Convergența slabă	306
13.3 Semicontinuitate inferioară	309
13.4 Teorema abstractă a metodei directe	311
13.5 Distribuții și compactitatea Rellich–Kondrachov	312
13.6 Minorii gradientului și dificultățile trecerii la limită	313
13.7 Coercivitatea specifică elasticității	315
13.8 Păstrarea constrângerilor la limită	316
13.9 Probleme pentru seminar	317
13.10 Exerciții rezolvate	318
13.11 Exerciții propuse suplimentare	322
14 Teorema de existență a lui John Ball în elasticitatea neliniară	326
14.1 Cadrul problemei	326
14.2 Policonvexitatea și ipotezele structurale	326
14.3 Teorema de existență	327
14.4 Un model unidimensional înaintea demonstrației tridimensionale	328
14.5 Demonstrația teoremei	330
14.6 Verificarea ipotezelor pe un exemplu de energie	333
14.7 Limitele concluziei de existență	334
14.8 Probleme pentru seminar	334
14.9 Exerciții rezolvate	336
14.10 Exerciții propuse suplimentare	340
Bibliografie	345

Prefață și mod de utilizare

Organizarea cursului. Suportul este organizat în 14 capitole. Fiecare capitol folosește rezultatele introduse anterior, iar trimiterile la acestea sunt indicate în text. Exemplele clasice (extensie, torsiune, încovoiere, cilindri, unde etc.) sunt plasate în capitolul în care instrumentele necesare rezolvării lor devin disponibile. La sfârșitul fiecărui capitol se află zece exerciții cu rezolvări: primele cinci verifică noțiunile de bază, iar ultimele cinci sunt mai complexe. Fiecare set folosește exclusiv rezultate introduse în capitolul curent sau în capitolele precedente. După acestea este inclus un set complementar de nouă exerciții propuse, gradate pe trei niveluri: A (verificare directă), B (aplicare) și C (sinteză). Și aceste exerciții folosesc numai materia deja introdusă până la capitolul respectiv.

Acest suport este conceput pentru un curs de un semestru destinat studenților de la matematică. Presupunem cunoștințe de calcul diferențial și integral în mai multe variabile, algebră liniară și geometria curbelor și suprafețelor. Noțiunile de analiză funcțională, spații Sobolev și calcul variațional sunt introduse înainte de prima lor utilizare. Cursul este astfel conceput încât lectura să fie continuă: rezultatele auxiliare sunt enunțate, explicate și, atunci când demonstrația este accesibilă la nivelul cursului, demonstrate înainte de utilizare, fără a trimite studentul la un appendice separat.

Ordinea capitolelor este următoarea: descrierea deformării, măsurile geometrice, forțele și tensiunile, legile de bilanț și ecuațiile constitutive; urmează liniarizarea, formularea slabă și existența în teoria liniară; ultimele capitole tratează problema neliniară, rank-one convexitatea, quasiconvexitatea, policonvexitatea și metoda directă.

Exemplele mecanice sunt introduse acolo unde ajută la interpretarea noțiunilor matematice. Extensia unui cilindru ilustrează o deformare omogenă, forfecarea simplă separă efectele de rotație și întindere, iar torsiunea și încovoierea conduc la câmpuri de deplasări care pot fi calculate explicit. Undele elastice sunt folosite când apare condiția Legendre–Hadamard, iar problemele de minimizare sunt reluate în capitolele despre policonvexitate și existență.

Convenții de notație

Pentru a evita ambiguitățile, folosim pe tot parcursul cărții aceeași convenție. Simbolul $\|\cdot\|$ desemnează o normă: norma euclidiană pentru vectori, norma Frobenius pentru matrice și, atunci când este indicat prin indice, norma unui spațiu funcțional, de exemplu $\|u\|_{H^1(\Omega)}$. Pentru un scalar folosim $|a|$, iar pentru măsura Lebesgue tridimensională a unei mulțimi folosim $\mathcal{L}^3(A)$. În particular, nu vom folosi alternativ bare simple și duble pentru aceeași normă matricială.

Pentru operatorii matriciali păstrăm notațiile

$$\operatorname{tr} A, \quad \operatorname{sym} A = \frac{1}{2}(A + A^T), \quad \operatorname{skew} A = \frac{1}{2}(A - A^T), \quad \operatorname{dev} A = A - \frac{1}{3} \operatorname{tr}(A)I,$$

În mod particular, dacă $A = (A_{ij}) \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$, atunci $\|A\|^2 = \langle A, A \rangle = \sum_{i,j=1}^3 A_{ij}^2$ este întotdeauna norma Frobenius. Nu vom nota această normă prin bare simple. Barele simple sunt rezervate

valorii absolute a unui scalar și sunt scrise prin $|\cdot|$; pentru vectori folosim aceeași comandă de normă $\|\cdot\|$ ca pentru matrice.

Cofactorul este notat întotdeauna prin $\text{Cof } A$. Punctele materiale sunt notate cu X , iar punctele spațiale cu $x = \varphi(X, t)$; această convenție nu va fi inversată ulterior. Gradientul unei deformări este $F = \nabla_X \varphi$, jacobianul este $J = \det F$, iar tensorii de întindere din descompunerea polară sunt U și V . Pentru modulul lui Young folosim sistematic simbolul E_Y , pentru a nu-l confunda cu tensorul Green–Saint Venant $E = \frac{1}{2}(F^T F - I)$. Modulul de forfecare este notat cu μ ; pentru valorile proprii ale lui C vom folosi $c_i = \lambda_i^2$, tocmai pentru a evita coliziunea cu μ . În capitolele de bilanț, B va desemna forța de volum pe unitatea de masă, iar $f_0 = \rho_0 B$ densitatea de forță pe unitatea de volum de referință. Pentru o tracțiune $t = \sigma n$, tensiunea normală scalară este $\sigma_n = \langle t, n \rangle$, vectorul normal este $\sigma_n n$, iar partea tangențială este $t_\tau = t - \sigma_n n$.

Pentru operatorii de divergență păstrăm de asemenea o singură convenție:

$$(\text{div } \sigma)_i = \partial_{x_j} \sigma_{ij}, \quad (\text{Div } P)_i = \partial_{X_j} P_{iJ}.$$

În capitolul 4 vom introduce $L = \nabla_x v$, $D = \text{sym } L$ și $\tau = J\sigma$; pe unitatea de volum de referință perechile energetic conjugate sunt (τ, D) , $(P, \dot{F})$ și $(S, \dot{E})$.

Simbol	Semnificație fixată în întregul curs
X, x	punct material, respectiv punct spațial $x = \varphi(X, t)$
F, J	$F = \nabla_X \varphi$, $J = \det F$
div, Div	divergență pe al doilea indice, în coordonate spațiale, respectiv materiale
B, f_0	forță specifică materială și densitate de forță de referință, $f_0 = \rho_0 B$
t, t_0	tracțiune Cauchy $t = \sigma n$ și tracțiune nominală $t_0 = PN$
E_Y, μ, λ	modulul Young, modulul de forfecare și prima constantă Lamé
$c_i = \lambda_i^2$	valorile proprii ale lui C , pentru a nu coliziona cu μ
$\ \cdot\ , \cdot $	normă pentru vectori/matrice/spații funcționale, respectiv valoare absolută pentru scalari

Structura semestrului

Săpt.	Tema principală	Conținut și aplicații
1	Corp continuu și deformare	configurații, descriere lagrangiană/euleriană, F, J , masă, exemple elementare
2	Geometria deformării	lungimi, arii, volume, C, B , descompunere polară, valori singulare, distanța la $SO(3)$

3	Forțe și tensiuni	principiul lui Cauchy, tensorul Cauchy, principiul impulsului și momentului cinetic
4	Configurația de referință	utilizarea formulei lui Nanson, tensiunile Piola–Kirchhoff, transformarea Piola, lucru virtual și invarianta
5	Materiale elastice	obiectivitate, simetrii materiale, izotropie, hiperelasticitate, reprezentări prin invarianti și întinderi principale
6	Teoria liniarizată	deformarea infinitesimală, legea lui Hooke, ecuațiile Navier–Lamé, extensie, forfecare, torziune și încovoieri
7	Problema statică liniară	spații Sobolev, urmă, Korn, Lax–Milgram, formularea slabă și minimizarea energiei
8	Elastodinamică liniară	formularea slabă în timp, energie, unicitate, existență Galerkin, unde P și S
9	Echilibrul neliniar	energie totală, variația întâi, ecuația Euler–Lagrange, condiția $\det F > 0$, injectivitate
10	Rank-one convexitate	Legendre–Hadamard, linii de rang unu, tensorul acustic și pierderea elipticității
11	Criterii spectrale	materiale izotrope, valori singulare, Baker–Ericksen și criterii de rank-one convexitate
12	Quasiconvexitate și policonvexitate	minori, Lagrangieni nuli și ierarhia convexităților generalizate
13	Metoda directă	convergență slabă, coercivitate, semicontinuitate și continuitatea slabă a minorilor
14	Teorema lui Ball	existența minimizatorilor în elasticitatea neliniară, determinant pozitiv și exemple de energii

Corpul continuu, configurații și deformări

Surse și orientare. Pentru fundamentele cinematicii, formulele de transport și organizarea clasică a mecanicii mediilor continue ne bazăm în principal pe Gurtin [7], Ciarlet [3], Morro–Giorgi [11] și notele lui Neukamm [13]. Expunerea de aici este însă adaptată nivelului cursului și dezvoltă explicit calculele matriciale înainte de utilizarea lor.

1.1 De la corp material la domeniu de referință

În mecanica mediilor continue nu urmărim un număr finit de particule, ci un corp format idealizat dintr-un continuum de puncte materiale. Alegerea unei configurații de referință identifică aceste puncte cu poziții $X \in \bar{\Omega}$, unde $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ este un domeniu mărginit. În primele capitole presupunem, pentru a putea face toate calculele clasice fără dificultăți tehnice, că Ω are frontieră suficient de regulată, de exemplu de clasă C^1 . Când vom trece la formularea variațională vom preciza o ipoteză mai slabă asupra frontierei și vom introduce atunci instrumentele analitice corespunzătoare.

La momentul t , poziția particulei care avea eticheta materială X este

$$x = \varphi(X, t).$$

Pentru fiecare t fix, aplicația $\varphi_t = \varphi(\cdot, t)$ se numește *deformare*, iar $\Omega_t = \varphi_t(\Omega)$ este configurația actuală. Vom lucra cu deformări suficient de regulate pentru calculele clasice, apoi vom slăbi regularitatea în partea variațională.

Definiția 1.1.1. O deformare clasică este o aplicație $\varphi \in C^1(\bar{\Omega}; \mathbb{R}^3)$, injectivă pe Ω , cu

$$J(X) := \det \nabla_X \varphi(X) > 0 \quad \text{pentru } X \in \Omega.$$

Nu impunem aici injectivitatea pe întreaga frontieră: această alegere permite, la nivel geometric, auto-contactul unor porțiuni ale frontierei. Când o problemă cere excluderea auto-contactului, ipoteza de injectivitate se întărește explicit. Matricea $F = \nabla \varphi$ se numește *gradientul deformării*, iar $J = \det F$ este *jacobianul deformării*. În Secțiunea dedicată transformării volumelor vom demonstra că J reprezintă factorul local de variație a volumului.

Condiția $J > 0$ exprimă local păstrarea orientării. Ea nu este, singură, o condiție globală de injectivitate. Desigur, pentru $\varphi \in C^1(\Omega; \mathbb{R}^3)$ și $X_0 \in \Omega$, dacă

$$J(X_0) = \det \nabla \varphi(X_0) \neq 0,$$

teorema funcției inverse furnizează vecinătăți U ale lui X_0 și V ale lui $\varphi(X_0)$ astfel încât

$$\varphi : U \longrightarrow V$$

este un difeomorfism C^1 . Condiția $J > 0$ adaugă informația că orientarea este păstrată. Nici una dintre aceste afirmații nu este globală: din $J > 0$ nu rezultă injectivitatea pe întregul domeniu.

De exemplu, în plan,

$$\varphi(r, \theta) = (r \cos \theta, r \sin \theta)$$

pe $(1, 2) \times (0, 4\pi)$ are jacobian pozitiv, dar punctele cu unghiuri care diferă cu 2π au aceeași imagine. Vom păstra pe tot parcursul cursului distincția dintre inversabilitatea locală, controlată de determinant, și injectivitatea globală.

1.2 Elemente de calcul diferențial și algebră liniară

Fixăm de la început notația pentru produsele scalare. Pentru vectori $a, b \in \mathbb{R}^3$ folosim

$$\langle a, b \rangle = a^T b,$$

iar pentru matrice $A, B \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ folosim produsul Frobenius

$$\langle A, B \rangle = \text{tr}(A^T B) = \sum_{i,j=1}^3 A_{ij} B_{ij}, \quad \|A\| = \sqrt{\langle A, A \rangle}.$$

Pe parcursul cursului nu vom folosi “.” sau “:” pentru aceste produse scalare. Pentru $a, b \in \mathbb{R}^3$, produsul tensorial $a \otimes b$ este aplicația liniară

$$(a \otimes b)x = a \langle b, x \rangle,$$

de unde $(a \otimes b)_{ij} = a_i b_j$.

Vom folosi mulțimile

$$GL^+(3) := \{F \in \mathbb{R}^{3 \times 3} : \det F \neq 0\}, \quad GL^+(3) := \{F \in GL^+(3) : \det F > 0\},$$

$$O(3) := \{Q \in \mathbb{R}^{3 \times 3} : Q^T Q = I\}, \quad SO(3) := \{Q \in O(3) : \det Q = 1\},$$

precum și

$$\text{Sym}(3) := \{S \in \mathbb{R}^{3 \times 3} : S^T = S\},$$

$$\text{Sym}^+(3) := \{S \in \text{Sym}(3) : \langle x, Sx \rangle > 0 \text{ pentru orice } x \neq 0\}.$$

Descompunerea

$$A = \text{sym } A + \text{skew } A, \quad \text{sym } A = \frac{1}{2}(A + A^T), \quad \text{skew } A = \frac{1}{2}(A - A^T)$$

este ortogonală în produsul Frobenius. Într-adevăr,

$$\langle \text{sym } A, \text{skew } A \rangle = 0,$$

deoarece produsul scalar al unei matrice simetrice cu una antisimetrică este zero. Prin urmare

$$\|A\|^2 = \|\text{sym } A\|^2 + \|\text{skew } A\|^2.$$

Pentru $S \in \text{Sym}(3)$ folosim și

$$S = \text{dev } S + \frac{1}{3} \text{tr}(S)I, \quad \text{dev } S = S - \frac{1}{3} \text{tr}(S)I,$$

iar ortogonalitatea dintre partea deviatorică și partea sferică dă

$$\|S\|^2 = \|\text{dev } S\|^2 + \frac{1}{3}(\text{tr } S)^2.$$

1.2.1 Derivata Fréchet pentru funcții matriceale cu valori reale

Lucrăm aici în spațiul finit-dimensional $\mathbb{R}^{3 \times 3}$, echipat cu norma Frobenius. O funcție

$$\Phi : \mathbb{R}^{3 \times 3} \longrightarrow \mathbb{R}$$

este Fréchet-diferențiabilă în F dacă există o aplicație liniară continuă

$$D\Phi(F) : \mathbb{R}^{3 \times 3} \longrightarrow \mathbb{R}$$

astfel încât

$$\Phi(F + H) = \Phi(F) + D\Phi(F)[H] + r_F(H), \quad \frac{r_F(H)}{\|H\|} \longrightarrow 0 \quad \text{când } H \rightarrow 0.$$

Termenul $D\Phi(F)[H]$ este partea de ordin întâi a variației lui Φ atunci când F este perturbat cu H .

Pentru a lega această definiție de derivata direcțională, fixăm H și considerăm funcția de o variabilă

$$g_H(t) := \Phi(F + tH).$$

Dacă Φ este Fréchet-diferențiabilă în F , atunci

$$\Phi(F + tH) = \Phi(F) + tD\Phi(F)[H] + r_F(tH).$$

Pentru $t \neq 0$ împărțim prin t :

$$\frac{\Phi(F + tH) - \Phi(F)}{t} = D\Phi(F)[H] + \frac{r_F(tH)}{t}.$$

Cum

$$\frac{|r_F(tH)|}{|t|} = \|H\| \frac{|r_F(tH)|}{\|tH\|} \longrightarrow 0,$$

rezultă

$$\left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \Phi(F + tH) = D\Phi(F)[H].$$

Așadar diferențiabilitatea Fréchet implică existența tuturor derivatelor direcționale, iar derivata în direcția H se obține evaluând derivata Fréchet pe H . Reciproca nu este adevărată fără ipoteze suplimentare: simpla existență a tuturor derivatelor direcționale nu garantează existența unei aproximații liniare uniforme în toate direcțiile.

Orice funcțional liniar pe $\mathbb{R}^{3 \times 3}$ are un reprezentant unic în produsul Frobenius. Prin urmare există o unică matrice $D_F \Phi(F)$ astfel încât

$$D\Phi(F)[H] = \langle D_F \Phi(F), H \rangle \quad \forall H \in \mathbb{R}^{3 \times 3}.$$

Această matrice este gradientul lui Φ față de variabila matricială F .

Ca exemplu, pentru

$$\Phi(F) = \frac{1}{2} \|F\|^2$$

avem

$$\Phi(F + H) = \frac{1}{2} \|F\|^2 + \langle F, H \rangle + \frac{1}{2} \|H\|^2.$$

Cum $\|H\|^2 = o(\|H\|)$, obținem

$$D\Phi(F)[H] = \langle F, H \rangle, \quad D_F \Phi(F) = F.$$

1.2.2 Matricea cofactor și identități algebrice

Pentru $F = (F_{ij}) \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ definim

$$(\text{Cof } F)_{ij} = (-1)^{i+j} \det F^{(ij)},$$

unde $F^{(ij)}$ se obține eliminând linia i și coloana j .

Identitățile următoare vor fi folosite la derivarea determinantului, la transformarea ariilor și, mai târziu, la identitatea lui Piola.

Propoziția 1.2.1. Pentru $A, B \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ au loc

$$A^T \text{Cof } A = (\text{Cof } A)^T A = (\det A)I,$$

$$A(\text{Cof } A)^T = (\text{Cof } A)A^T = (\det A)I,$$

$$\text{Cof}(A^T) = (\text{Cof } A)^T, \quad \text{Cof}(AB) = \text{Cof } A \text{Cof } B.$$

Dacă $A \in GL^+(3)$, atunci

$$\text{Cof } A = (\det A)A^{-T}.$$

Demonstrație. Scriem $A = (a_{ij})$ și reamintim că

$$(\text{Cof } A)_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij},$$

unde M_{ij} este minorul obținut din A prin eliminarea liniei i și a coloanei j .

Mai întâi demonstrăm identitatea

$$(\text{Cof } A)^T A = (\det A)I.$$

Elementul (i, k) al produsului $(\text{Cof } A)^T A$ este

$$\left[(\text{Cof } A)^T A \right]_{ik} = \sum_{j=1}^3 (\text{Cof } A)_{ji} a_{jk}.$$

Dacă $i = k$, atunci

$$\left[(\text{Cof } A)^T A \right]_{ii} = \sum_{j=1}^3 (\text{Cof } A)_{ji} a_{ji}.$$

Aceasta este exact dezvoltarea lui $\det A$ după coloana i , deci

$$\left[(\text{Cof } A)^T A \right]_{ii} = \det A.$$

Să presupunem acum că $i \neq k$. Considerăm matricea $\tilde{A}$ obținută din A prin înlocuirea coloanei i cu coloana k , toate celelalte coloane rămânând neschimbate. Cu alte cuvinte, dacă $\tilde{A}_\ell$ și A_ℓ notează coloana ℓ a matricilor $\tilde{A}$, respectiv A , atunci

$$\tilde{A}_\ell = \begin{cases} A_k, & \ell = i, \\ A_\ell, & \ell \neq i. \end{cases}$$

Dezvoltăm determinantul lui $\tilde{A}$ după coloana i . Elementul de pe linia j a acestei coloane este a_{jk} . Mai mult, minorul asociat poziției (j, i) este același ca pentru matricea A . Într-adevăr, la formarea acestui minor se elimină tocmai coloana i , adică exact coloana care a fost înlocuită. Prin urmare,

$$\det \tilde{A} = \sum_{j=1}^3 a_{jk} (\text{Cof } A)_{ji}.$$

Pe de altă parte, deoarece $i \neq k$, matricea $\tilde{A}$ are două coloane egale: coloana i și coloana k sunt ambele egale cu coloana k a lui A . Așadar,

$$\det \tilde{A} = 0.$$

Rezultă

$$\sum_{j=1}^3 (\text{Cof } A)_{ji} a_{jk} = 0, \quad i \neq k.$$

Am obținut astfel

$$\left[(\text{Cof } A)^T A \right]_{ik} = \begin{cases} \det A, & i = k, \\ 0, & i \neq k, \end{cases}$$

adică

$$(\text{Cof } A)^T A = (\det A)I.$$

Transpunând această relație rezultă

$$A^T \operatorname{Cof} A = (\det A)I.$$

Demonstrăm acum relația

$$\operatorname{Cof}(A^T) = (\operatorname{Cof} A)^T.$$

Minorul de pe poziția (i, j) al lui A^T este determinantul transpusei matricei obținute din A prin eliminarea liniei j și a coloanei i . Cum determinantul nu se modifică prin transpunere,

$$M_{ij}(A^T) = M_{ji}(A).$$

Prin urmare,

$$\begin{aligned} (\operatorname{Cof}(A^T))_{ij} &= (-1)^{i+j} M_{ij}(A^T) \\ &= (-1)^{i+j} M_{ji}(A) \\ &= (\operatorname{Cof} A)_{ji}, \end{aligned}$$

de unde

$$\operatorname{Cof}(A^T) = (\operatorname{Cof} A)^T.$$

Aplicăm acum identitatea

$$(\operatorname{Cof} C)^T C = (\det C)I$$

matricei $C = A^T$. Obținem

$$(\operatorname{Cof}(A^T))^T A^T = (\det A)I.$$

Folosind

$$\operatorname{Cof}(A^T) = (\operatorname{Cof} A)^T,$$

rezultă

$$(\operatorname{Cof} A)A^T = (\det A)I.$$

Prin transpunere,

$$A(\operatorname{Cof} A)^T = (\det A)I.$$

Dacă $A \in GL^+(3)$, din

$$A^T \operatorname{Cof} A = (\det A)I$$

înmulțim la stânga cu A^{-T} și obținem

$$\operatorname{Cof} A = (\det A)A^{-T}.$$

Rămâne să demonstrăm formula pentru produs. Presupunem mai întâi că $A, B \in GL^+(3)$. Atunci

$$\begin{aligned} \operatorname{Cof}(AB) &= \det(AB)(AB)^{-T} \\ &= (\det A)(\det B)A^{-T}B^{-T} \\ &= ((\det A)A^{-T})((\det B)B^{-T}) \\ &= \operatorname{Cof} A \operatorname{Cof} B. \end{aligned}$$

Am folosit aici relația

$$(AB)^{-T} = A^{-T} B^{-T}.$$

Pentru matrici arbitrare $A, B \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ alegem șiruri de matrici inversabile

$$A_m \rightarrow A, \quad B_m \rightarrow B.$$

Acest lucru este posibil deoarece mulțimea matricilor inversabile este densă în $\mathbb{R}^{3 \times 3}$. Pentru fiecare m avem

$$\text{Cof}(A_m B_m) = \text{Cof } A_m \text{ Cof } B_m.$$

Fiecare componentă a lui $\text{Cof } A$ este un polinom în componentele lui A , deci aplicația

$$A \mapsto \text{Cof } A$$

este continuă. Trecând la limită pentru $m \rightarrow \infty$, obținem

$$\text{Cof}(AB) = \text{Cof } A \text{ Cof } B.$$

□

Formula cu simbolul Levi–Civita. Introducem

$$\varepsilon_{ijk} = \begin{cases} 1, & (i, j, k) \text{ este o permutare pară a lui } (1, 2, 3), \\ -1, & (i, j, k) \text{ este o permutare impară a lui } (1, 2, 3), \\ 0, & \text{cel puțin doi indici coincid.} \end{cases}$$

Cu convenția de sumare a lui Einstein,

$$(\text{Cof } A)_{ij} = \frac{1}{2} \varepsilon_{mni} \varepsilon_{pqj} a_{mp} a_{nq},$$

iar

$$\det A = \frac{1}{6} \varepsilon_{ijk} \varepsilon_{pqr} a_{ip} a_{jq} a_{kr}.$$

Nu vom folosi aceste formule pentru calcule elementare cu matrice 3×3 ; ele devin utile atunci când derivăm identități de divergență în capitolele următoare.

1.2.3 Derivata determinantului

Propoziția 1.2.2 (derivata determinantului). *Pentru orice $F, H \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$,*

$$D(\det)(F)[H] = \langle \text{Cof } F, H \rangle.$$

Dacă $F \in GL^+(3)$, atunci

$$D(\det)(F)[H] = (\det F) \text{tr}(F^{-1}H).$$

Demonstrație. Scriem coloanele lui F și H sub forma

$$F = (f_1 \mid f_2 \mid f_3), \quad H = (h_1 \mid h_2 \mid h_3).$$

Multilinearitatea determinantului dă dezvoltarea exactă

$$\begin{aligned} \det(F + H) &= \det F \\ &\quad + \det(h_1, f_2, f_3) + \det(f_1, h_2, f_3) + \det(f_1, f_2, h_3) \\ &\quad + \det(h_1, h_2, f_3) + \det(h_1, f_2, h_3) + \det(f_1, h_2, h_3) \\ &\quad + \det(h_1, h_2, h_3). \end{aligned}$$

Primul rând după $\det F$ este liniar în H . Celelalte două rânduri conțin cel puțin două coloane provenite din H . Deoarece determinantul este o formă trilineară continuă, există o constantă C_F astfel încât suma acestor termeni este mărginită în modul de

$$C_F(\|H\|^2 + \|H\|^3) = o(\|H\|).$$

Prin urmare termenul liniar este chiar derivata Fréchet.

Pentru fiecare coloană j , dezvoltarea Laplace după acea coloană arată că

$$\det(f_1 \mid \dots \mid h_j \mid \dots \mid f_3) = \sum_{i=1}^3 (\text{Cof } F)_{ij} H_{ij}.$$

Sumând după j ,

$$D(\det)(F)[H] = \sum_{i,j=1}^3 (\text{Cof } F)_{ij} H_{ij} = \langle \text{Cof } F, H \rangle.$$

Dacă F este inversabilă, identitatea

$$\text{Cof } F = (\det F) F^{-T}$$

dă

$$\langle \text{Cof } F, H \rangle = (\det F) \langle F^{-T}, H \rangle = (\det F) \text{tr}(F^{-1} H).$$

□

1.2.4 Derivata Fréchet pentru aplicații vectoriale

Definiția 1.2.3 (Derivata Fréchet pentru aplicații vectoriale). Fie $U \subset \mathbb{R}^n$ o mulțime deschisă și

$$f : U \rightarrow \mathbb{R}^m.$$

Spunem că f este diferențiabilă Fréchet în $x \in U$ dacă există o aplicație liniară

$$L : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$$

astfel încât

$$\frac{\|f(x+h) - f(x) - Lh\|}{\|h\|} \longrightarrow 0 \quad \text{pentru} \quad \|h\| \longrightarrow 0.$$

Aplicația liniară L este unică și se numește derivata Fréchet a lui f în x . O notăm prin

$$Df(x) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m.$$

Pentru o direcție $h \in \mathbb{R}^n$ scriem

$$Df(x)[h].$$

Echivalent,

$$f(x+h) = f(x) + Df(x)[h] + r(h),$$

unde

$$\frac{\|r(h)\|}{\|h\|} \longrightarrow 0 \quad \text{pentru} \quad \|h\| \longrightarrow 0.$$

Observația 1.2.4. Aceeași definiție se aplică fără nicio modificare aplicațiilor între spații de matrici. Identificând $\mathbb{R}^{3 \times 3}$ cu $\mathbb{R}^9$ și folosind norma Frobenius, pentru

$$\Phi : U \subset \mathbb{R}^{3 \times 3} \rightarrow \mathbb{R}^{3 \times 3}$$

derivata în F este o aplicație liniară

$$D\Phi(F) : \mathbb{R}^{3 \times 3} \rightarrow \mathbb{R}^{3 \times 3}$$

care satisface

$$\frac{\|\Phi(F+H) - \Phi(F) - D\Phi(F)[H]\|}{\|H\|} \longrightarrow 0$$

pentru $\|H\| \rightarrow 0$.

Propoziția 1.2.5 (Derivata inversei). *Dacă $F \in GL^+(3)$, atunci aplicația*

$$F \longmapsto F^{-1}$$

este diferențiabilă în F , iar

$$D(F^{-1})[H] = -F^{-1}HF^{-1}.$$

De asemenea,

$$D(F^{-T})[H] = -F^{-T}H^T F^{-T}.$$

Demonstrație. Notăm cu $\|\cdot\|$ norma Frobenius. Pentru o matrice $A \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ introducem și norma operatorială, definită prin

$$\|A\|_{\text{op}} := \sup_{\|x\|=1} \|Ax\|,$$

unde pentru vectori $\|\cdot\|$ desemnează norma euclidiană. Echivalent,

$$\|Ax\| \leq \|A\|_{\text{op}} \|x\| \quad \text{pentru orice } x \in \mathbb{R}^3.$$

Vom folosi relația

$$\|A\|_{\text{op}} \leq \|A\|.$$

Pentru a o demonstra, fie $x \in \mathbb{R}^3$ cu $\|x\| = 1$. Dacă $A = (a_{ij})$, atunci

$$(Ax)_i = \sum_{j=1}^3 a_{ij}x_j.$$

Prin inegalitatea Cauchy-Schwarz,

$$|(Ax)_i|^2 \leq \left(\sum_{j=1}^3 a_{ij}^2 \right) \left(\sum_{j=1}^3 x_j^2 \right) = \sum_{j=1}^3 a_{ij}^2.$$

Adunând după i , obținem

$$\|Ax\|^2 = \sum_{i=1}^3 |(Ax)_i|^2 \leq \sum_{i,j=1}^3 a_{ij}^2 = \|A\|^2.$$

Prin urmare,

$$\|Ax\| \leq \|A\| \quad \text{pentru orice } x \text{ cu } \|x\| = 1,$$

iar luând supremul după astfel de x rezultă

$$\|A\|_{\text{op}} \leq \|A\|.$$

Mai întâi arătăm că, pentru $\|H\|$ suficient de mic, matricea $F + H$ este inversabilă. Scriem

$$F + H = F(I + F^{-1}H).$$

Deoarece

$$\|F^{-1}H\|_{\text{op}} \leq \|F^{-1}\|_{\text{op}} \|H\|_{\text{op}} \leq \|F^{-1}\|_{\text{op}} \|H\|,$$

putem alege $\|H\|$ suficient de mic astfel încât

$$\|F^{-1}H\|_{\text{op}} < \frac{1}{2}.$$

Punem

$$A = F^{-1}H.$$

Pentru orice $x \in \mathbb{R}^3$ avem

$$\|(I + A)x\| \geq \|x\| - \|Ax\| \geq (1 - \|A\|_{\text{op}}) \|x\| \geq \frac{1}{2} \|x\|.$$

Prin urmare,

$$(I + A)x = 0 \implies x = 0.$$

Așadar $I + A$ este injectivă; fiind o aplicație liniară din $\mathbb{R}^3$ în $\mathbb{R}^3$, este și inversabilă. Rezultă că $F + H$ este inversabilă.

Aceeași estimare permite și controlul inversei. Dacă

$$y = (I + A)x,$$

atunci

$$\|y\| \geq \frac{1}{2} \|x\|,$$

de unde

$$\|x\| \leq 2 \|y\|.$$

Cum $x = (I + A)^{-1}y$, rezultă

$$\|(I + A)^{-1}\|_{\text{op}} \leq 2.$$

Prin urmare,

$$(F + H)^{-1} = (I + F^{-1}H)^{-1}F^{-1},$$

iar

$$\|(F + H)^{-1}\|_{\text{op}} \leq 2 \|F^{-1}\|_{\text{op}}.$$

Din

$$(F + H)^{-1}(F + H) = I$$

și

$$F^{-1}F = I$$

rezultă

$$[(F + H)^{-1} - F^{-1}]F + (F + H)^{-1}H = 0.$$

Înmulțind la dreapta cu F^{-1} , obținem

$$(F + H)^{-1} - F^{-1} = -(F + H)^{-1}HF^{-1}.$$

Vom folosi în continuare estimarea

$$\|ABC\| \leq \|A\|_{\text{op}} \|B\| \|C\|_{\text{op}},$$

unde $\|\cdot\|$ este norma Frobenius, iar $\|\cdot\|_{\text{op}}$ este norma operatorială.

Pentru a o justifica, observăm mai întâi că

$$\|AB\| \leq \|A\|_{\text{op}} \|B\|.$$

Dacă b_1, b_2, b_3 sunt coloanele matricei B , atunci coloanele matricei AB sunt Ab_1, Ab_2, Ab_3 .

Prin urmare,

$$\|AB\|^2 = \sum_{j=1}^3 \|Ab_j\|^2 \leq \sum_{j=1}^3 \|A\|_{\text{op}}^2 \|b_j\|^2 = \|A\|_{\text{op}}^2 \|B\|^2.$$

Rezultă

$$\|AB\| \leq \|A\|_{\text{op}} \|B\|.$$

Pentru produsul în ordine inversă, folosim faptul că norma Frobenius nu se modifică prin transpunere:

$$\|M^T\| = \|M\|.$$

Astfel,

$$\|BC\| = \|(BC)^T\| = \|C^T B^T\| \leq \|C^T\|_{\text{op}} \|B^T\| = \|C\|_{\text{op}} \|B\|.$$

Am folosit aici și relațiile

$$\|C^T\|_{\text{op}} = \|C\|_{\text{op}}, \quad \|B^T\| = \|B\|.$$

Aplicând succesiv cele două estimări, obținem

$$\|ABC\| \leq \|A\|_{\text{op}} \|BC\| \leq \|A\|_{\text{op}} \|B\| \|C\|_{\text{op}}.$$

Folosind inegalitatea

$$\|ABC\| \leq \|A\|_{\text{op}} \|B\| \|C\|_{\text{op}},$$

avem

$$\|(F + H)^{-1} - F^{-1}\| \leq \|(F + H)^{-1}\|_{\text{op}} \|H\| \|F^{-1}\|_{\text{op}} \leq 2 \|F^{-1}\|_{\text{op}}^2 \|H\|.$$

Așadar

$$\|(F + H)^{-1} - F^{-1}\| \leq C \|H\|$$

pentru $\|H\|$ suficient de mic.

Revenim acum la identitatea precedentă și scriem

$$(F + H)^{-1} - F^{-1} = -(F + H)^{-1} H F^{-1} = -F^{-1} H F^{-1} - [(F + H)^{-1} - F^{-1}] H F^{-1}.$$

Pentru ultimul termen obținem

$$\|[(F + H)^{-1} - F^{-1}] H F^{-1}\| \leq \|(F + H)^{-1} - F^{-1}\| \|H\|_{\text{op}} \|F^{-1}\|_{\text{op}} \leq C \|H\|^2.$$

Prin urmare,

$$(F + H)^{-1} = F^{-1} - F^{-1} H F^{-1} + R(H),$$

unde

$$\|R(H)\| \leq C \|H\|^2.$$

În particular,

$$\frac{\|R(H)\|}{\|H\|} \longrightarrow 0 \quad \text{pentru} \quad \|H\| \longrightarrow 0.$$

Prin definiția derivatei Fréchet rezultă

$$D(F^{-1})[H] = -F^{-1} H F^{-1}.$$

În final, deoarece

$$F^{-T} = (F^{-1})^T$$

și transpunerea este liniară, avem

$$D(F^{-T})[H] = \left(D(F^{-1})[H]\right)^T = -F^{-T}H^TF^{-T}.$$

□

1.2.5 Regula lanțului

Regula lanțului are aceeași formă ca în cazul funcțiilor de o variabilă, dar trebuie ținut cont de faptul că derivatele Fréchet sunt aplicații liniare între spațiile corespunzătoare.

Propoziția 1.2.6 (Regula lanțului). *Fie $U \subset \mathbb{R}^{m \times n}$, $V \subset \mathbb{R}^{p \times q}$ mulțimi deschise și fie $\Phi : U \rightarrow V$, $\Psi : V \rightarrow \mathbb{R}^{r \times s}$. Dacă Φ este diferențiabilă Fréchet în $F \in U$, iar Ψ este diferențiabilă Fréchet în $\Phi(F)$, atunci compunerea $\Psi \circ \Phi : U \rightarrow \mathbb{R}^{r \times s}$ este diferențiabilă Fréchet în F și*

$$D(\Psi \circ \Phi)(F) = D\Psi(\Phi(F)) \circ D\Phi(F).$$

Mai precis, pentru orice $H \in \mathbb{R}^{m \times n}$,

$$D(\Psi \circ \Phi)(F)[H] = D\Psi(\Phi(F))\left[D\Phi(F)[H]\right].$$

Aceeași formulă rămâne valabilă dacă Ψ ia valori în $\mathbb{R}$.

Demonstrație. Din diferențiabilitatea lui Φ în F avem

$$\Phi(F + H) = \Phi(F) + D\Phi(F)[H] + R_\Phi(H),$$

unde

$$\frac{\|R_\Phi(H)\|}{\|H\|} \longrightarrow 0 \quad \text{pentru} \quad \|H\| \longrightarrow 0.$$

Punem

$$K(H) := \Phi(F + H) - \Phi(F).$$

Atunci

$$K(H) = D\Phi(F)[H] + R_\Phi(H),$$

iar, deoarece $D\Phi(F)$ este liniară și continuă,

$$\|K(H)\| = O(\|H\|).$$

Din diferențiabilitatea lui Ψ în $\Phi(F)$ avem

$$\Psi(\Phi(F) + K) = \Psi(\Phi(F)) + D\Psi(\Phi(F))[K] + R_\Psi(K),$$

unde

$$\frac{\|R_\Psi(K)\|}{\|K\|} \longrightarrow 0 \quad \text{pentru} \quad \|K\| \longrightarrow 0.$$

Aplicând această relație pentru $K = K(H)$ rezultă

$$\begin{aligned}\Psi(\Phi(F + H)) - \Psi(\Phi(F)) &= D\Psi(\Phi(F))\big[D\Phi(F)[H]\big] \\ &\quad + D\Psi(\Phi(F))[R_\Phi(H)] + R_\Psi(K(H)).\end{aligned}$$

Primul termen de rest este $o(\|H\|)$, deoarece

$$\|R_\Phi(H)\| = o(\|H\|),$$

iar al doilea este tot $o(\|H\|)$, deoarece

$$\|K(H)\| = O(\|H\|)$$

și

$$\|R_\Psi(K)\| = o(\|K\|).$$

Prin urmare,

$$\Psi(\Phi(F + H)) = \Psi(\Phi(F)) + D\Psi(\Phi(F))\big[D\Phi(F)[H]\big] + o(\|H\|),$$

ceea ce demonstrează formula. □

Exemplul 1.2.7 (Derivata lui F^{-T}). Considerăm aplicațiile

$$\Phi(F) = F^{-1}, \quad \Psi(A) = A^T.$$

Atunci

$$F^{-T} = (\Psi \circ \Phi)(F).$$

Transpunerea este liniară, deci

$$D\Psi(A)[K] = K^T.$$

Cum

$$D\Phi(F)[H] = -F^{-1}HF^{-1},$$

regula lanțului dă

$$\begin{aligned}D(F^{-T})[H] &= D\Psi(F^{-1})\big[D\Phi(F)[H]\big] \\ &= \left(-F^{-1}HF^{-1}\right)^T \\ &= -F^{-T}H^T F^{-T}.\end{aligned}$$

Exemplul 1.2.8 (Compunerea unei funcții scalare cu determinantul). Fie $\Phi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ o funcție diferențiabilă și considerăm

$$W(F) = \Phi(\det F).$$

Scriem

$$W = \Phi \circ \det.$$

Cum

$$D(\det F)[H] = \langle \text{Cof } F, H \rangle,$$

regula lanțului dă

$$DW(F)[H] = \Phi'(\det F) \langle \text{Cof } F, H \rangle.$$

Prin urmare, gradientul lui W față de F este

$$D_F W(F) = \Phi'(\det F) \text{Cof } F.$$

1.3 Deplasare, viteză și cele două descrieri

Față de configurația de referință definim deplasarea

$$u(X, t) = \varphi(X, t) - X, \quad F = I + \nabla_X u.$$

Descrierea lagrangiană folosește punctul material X ca variabilă independentă. Descrierea euleriană folosește poziția actuală x . Dacă $\varphi_t = \varphi(\cdot, t)$ este inversabilă, câmpul eulerian al vitezei este definit prin

$$v(\varphi(X, t), t) = \partial_t \varphi(X, t),$$

sau, echivalent,

$$v(x, t) = \partial_t \varphi(\varphi_t^{-1}(x), t).$$

Această relație trebuie citită cu atenție: în membrul stâng viteza este o funcție de poziția actuală x , iar în membrul drept derivata se calculează la punctul material X fix.

Propoziția 1.3.1 (evoluția gradientului și a jacobianului). *Pentru o mișcare suficient de regulată,*

$$\dot{F} = (\nabla_x v)F, \quad \nabla_x v = \dot{F}F^{-1},$$

iar

$$\boxed{\dot{J} = J \operatorname{div}_x v.}$$

Demonstrație. Pornim de la

$$v(\varphi(X, t), t) = \partial_t \varphi(X, t).$$

Derivăm față de X_J . Pentru componenta i , regula lanțului dă

$$\partial_{X_J} [v_i(\varphi(X, t), t)] = \sum_{k=1}^3 \partial_{x_k} v_i(\varphi(X, t), t) \partial_{X_J} \varphi_k(X, t).$$

Membrul drept este componenta (i, J) a matricei $(\nabla_x v)F$. Pe de altă parte,

$$\partial_{X_J} \partial_t \varphi_i = \partial_t \partial_{X_J} \varphi_i = \dot{F}_{iJ}.$$

Rezultă

$$\dot{F} = (\nabla_x v)F,$$

iar înmulțirea la dreapta cu F^{-1} dă a doua formulă.

Aplicăm formula pentru derivata determinantului din Propoziția 1.2.2 curbei $t \mapsto F(t)$:

$$\dot{J} = D(\det)(F)[\dot{F}] = J \operatorname{tr}(F^{-1}\dot{F}).$$

Ciclicitatea urmei și relația $\dot{F}F^{-1} = \nabla_x v$ dau

$$\operatorname{tr}(F^{-1}\dot{F}) = \operatorname{tr}(\dot{F}F^{-1}) = \operatorname{tr}(\nabla_x v) = \operatorname{div}_x v.$$

Prin urmare $\dot{J} = J \operatorname{div}_x v$. □

1.4 Derivata materială și accelerația

Fie $q = q(x, t)$ un câmp scalar eulerian. Pentru particula etichetată prin X , valoarea observată de-a lungul traiectoriei este

$$Q(X, t) := q(\varphi(X, t), t).$$

Derivând în timp la X fix,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}Q(X, t) &= \partial_t q(\varphi(X, t), t) + \langle \nabla_x q(\varphi(X, t), t), \partial_t \varphi(X, t) \rangle \\ &= \partial_t q(\varphi(X, t), t) + \langle \nabla_x q(\varphi(X, t), t), v(\varphi(X, t), t) \rangle. \end{aligned}$$

Aceasta motivează notația

$$\boxed{\frac{Dq}{Dt} = \partial_t q + \langle \nabla_x q, v \rangle.}$$

Formula nu introduce o derivată nouă independentă; ea este derivata obișnuită în timp a lui q atunci când q este evaluat pe traiectoria unei particule.

Pentru un câmp vectorial regula se aplică pe componente. Alegând $q = v_i$ pentru fiecare componentă a vitezei,

$$\frac{Dv_i}{Dt} = \partial_t v_i + \sum_{j=1}^3 v_j \partial_{x_j} v_i.$$

În formă matricială,

$$\boxed{a = \frac{Dv}{Dt} = \partial_t v + (\nabla_x v)v.}$$

A doua formă evită notația cu produs scalar între v și operatorul ∇ . Ea arată de asemenea că termenul convectiv provine din regula lanțului.

De exemplu, pentru rotația staționară

$$v(x) = \omega \times x,$$

avem $\partial_t v = 0$, dar $(\nabla v)v \neq 0$. Calculul conduce la

$$a = \omega \times (\omega \times x),$$

adică la accelerația centripetă. Prin urmare un câmp de viteză independent explicit de timp poate produce o accelerație nenulă.

1.5 Deformări elementare și calculul explicit al gradientului deformării

Înainte de a dezvolta aparatul tensorial, este util să calculăm în detaliu câteva deformări care vor reapărea pe tot parcursul cursului. Scopul nu este doar de a obține matrici, ci de a învăța să citim geometric informația conținută în gradientul deformării.

1.5.1 Extensie uniaxială omogenă

Considerăm

$$\varphi(X_1, X_2, X_3) = (\lambda X_1, X_2, X_3), \quad \lambda > 0.$$

Atunci

$$F = \nabla \varphi = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad J = \det F = \lambda.$$

Un segment material paralel cu e_1 , de lungime inițială L , devine un segment de lungime λL . Segmentele paralele cu e_2, e_3 nu își schimbă lungimea. Un paralelipiped elementar de volum dV capătă volumul $dv = \lambda dV$. Dacă materialul este incompresibil, această deformare nu poate apărea singură, deoarece ar trebui să avem $J = 1$. O extensie uniaxială incompresibilă are, de exemplu, forma

$$F = \text{diag}(\lambda, \lambda^{-1/2}, \lambda^{-1/2}), \quad \det F = 1.$$

Pentru materiale aproape incompresibile, aceeași relație produce contracția transversală observată la întindere.

1.5.2 Dilatare sferică

Pentru

$$\varphi(X) = \alpha X,$$

avem $F = \alpha I$ și $J = \alpha^3$. Toate lungimile se multiplică prin α , ariile prin α^2 , iar volumele prin α^3 ; cele trei mărimi geometrice au deci factori de scară diferiți.

1.5.3 Forfecare simplă

Considerăm

$$\varphi(X_1, X_2, X_3) = (X_1 + \gamma X_2, X_2, X_3),$$

unde $\gamma \in \mathbb{R}$ este amplitudinea forfecării. Atunci

$$F = I + \gamma e_1 \otimes e_2 = \begin{pmatrix} 1 & \gamma & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \det F = 1.$$

Așadar forfecarea simplă este izocoră. Totuși ea nu este o rotație, deoarece

$$F^T F = \begin{pmatrix} 1 & \gamma & 0 \\ \gamma & 1 + \gamma^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \neq I$$

pentru $\gamma \neq 0$. Conservarea volumului nu implică rigiditate. Mai târziu vom separa partea de rotație de partea de întindere prin descompunerea polară.

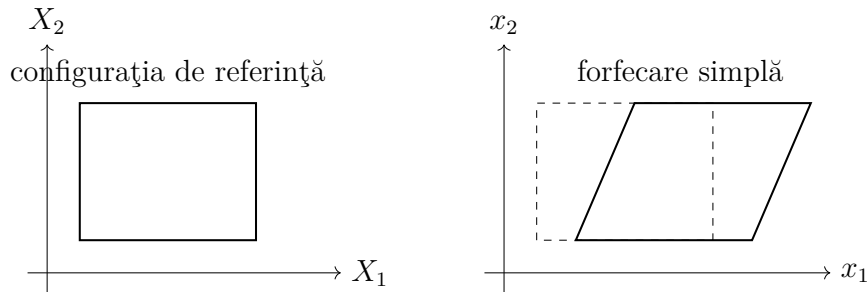


Figura 1.1: Forfecarea simplă păstrează aria în plan, dar modifică lungimi și unghiuri.

1.5.4 Deformare de tip torsiune a unui cilindru

Considerăm axa cilindrului paralelă cu e_3 și notăm cu ϑ rata de răsucire, adică unghiul de rotație pe unitatea de lungime. Punem

$$\psi(X_3) = \vartheta X_3$$

și considerăm deformarea exactă

$$\varphi(X) = (X_1 \cos \psi - X_2 \sin \psi, X_1 \sin \psi + X_2 \cos \psi, X_3).$$

Pentru a evita orice pas implicit, derivăm cele trei coloane ale lui $F = \nabla_X \varphi$. Avem

$$\partial_1 \varphi = (\cos \psi, \sin \psi, 0)^T, \quad \partial_2 \varphi = (-\sin \psi, \cos \psi, 0)^T,$$

iar, deoarece $\psi'(X_3) = \vartheta$,

$$\partial_3 \varphi = \begin{pmatrix} -\vartheta(X_1 \sin \psi + X_2 \cos \psi) \\ \vartheta(X_1 \cos \psi - X_2 \sin \psi) \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Prin urmare

$$F = \begin{pmatrix} \cos \psi & -\sin \psi & -\vartheta(X_1 \sin \psi + X_2 \cos \psi) \\ \sin \psi & \cos \psi & \vartheta(X_1 \cos \psi - X_2 \sin \psi) \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Matricea este bloc-triunghiulară. Dacă notăm cu

$$Q(\psi) = \begin{pmatrix} \cos \psi & -\sin \psi \\ \sin \psi & \cos \psi \end{pmatrix},$$

atunci blocul din stânga sus este $Q(\psi)$, iar ultima linie a lui F este $(0, 0, 1)$. Determinantul unei matrice bloc-triunghiulare este produsul determinantelor blocurilor diagonale, astfel

$$\det F = \det Q(\psi) \cdot 1 = (\cos^2 \psi + \sin^2 \psi) \cdot 1 = 1.$$

Prin urmare

$$\boxed{J = \det F = 1.}$$

Așadar această torsiune cinematică exactă este local izocoră. Primele două coloane reprezintă rotația secțiunii transversale, iar termenii proporționali cu ϑ din coloana a treia măsoară variația rotației de-a lungul axei.

Pentru $|\vartheta X_3| \ll 1$, folosim $\sin \psi = \psi + O(\psi^3)$ și $\cos \psi = 1 + O(\psi^2)$. Deplasarea $u = \varphi - X$ are atunci, la primul ordin,

$$u(X) \simeq \vartheta X_3(-X_2, X_1, 0),$$

forma pe care o vom utiliza în capitolul de elasticitate liniarizată. În coordonate cilindrice aceeași deformare se scrie compact

$$r = R, \quad \theta = \Theta + \vartheta Z, \quad z = Z.$$

Pentru moment reținem numai informația cinematică; relația dintre această deformare și tensiunile de torsiune va fi dedusă după introducerea legii constitutive.

Exemplul 1.5.1 (citirea coloanelor lui F). Coloana j a lui F este imaginea infinitesimală a direcției materiale e_j :

$$Fe_j = \partial_{X_j} \varphi.$$

În forfecarea simplă,

$$Fe_1 = e_1, \quad Fe_2 = \gamma e_1 + e_2, \quad Fe_3 = e_3.$$

Prin urmare, familia de segmente inițial paralelă cu e_2 este înclinată, în timp ce familia paralelă cu e_1 rămâne neschimbată.

1.6 Transformarea lungimilor, volumelor și ariilor

Fie

$$\varphi : \Omega \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$$

o deformare diferențiabilă și fixăm un punct $X_0 \in \Omega$. Notăm

$$x_0 = \varphi(X_0), \quad F = \nabla \varphi(X_0) \in GL^+(3).$$

Prin definiția diferențiabilității Fréchet,

$$\varphi(X_0 + H) = \varphi(X_0) + FH + r_{X_0}(H),$$

unde

$$\frac{\|r_{X_0}(H)\|}{\|H\|} \longrightarrow 0 \quad \text{pentru} \quad \|H\| \longrightarrow 0.$$

Prin urmare, într-o vecinătate a punctului X_0 , deformarea este descrisă la primul ordin de aplicația afină

$$X_0 + H \longmapsto x_0 + FH.$$

Acesta este sensul geometric al gradientului deformării: matricea F descrie transformarea locală a direcțiilor, lungimilor, volumelor și ariilor.

1.6.1 Transformarea vectorilor tangenți și a lungimilor

Considerăm o curbă materială regulată

$$\gamma : I \rightarrow \Omega, \quad s \longmapsto X(s),$$

care trece prin X_0 , adică

$$X(s_0) = X_0.$$

Imaginea curbei prin deformare este

$$\tilde{\gamma}(s) = \varphi(X(s)).$$

Vectorul tangent la curba materială în X_0 este

$$T = X'(s_0),$$

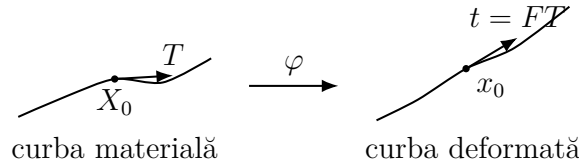
iar vectorul tangent la curba deformată în x_0 este

$$t = \tilde{\gamma}'(s_0).$$

Prin regula lanțului,

$$t = \nabla \varphi(X_0)T = FT.$$

Prin urmare, F transformă vectorii tangenți din configurația de referință în vectorii tangenți corespunzători din configurația actuală.



Pentru a descrie modificarea lungimii, observăm că

$$\|t\|^2 = \|FT\|^2 = \langle FT, FT \rangle = \langle T, F^T F T \rangle.$$

Propoziția 1.6.1 (Caracterizarea izometriilor liniare păstrătoare a orientării). *Pentru $F \in GL^+(3)$ sunt echivalente:*

- (i) $\|Fn\| = \|n\|$ pentru orice $n \in \mathbb{R}^3$;
- (ii) $F^T F = I$;
- (iii) $F \in SO(3)$.

Demonstrație. Demonstrăm implicațiile

$$(i) \Rightarrow (ii) \Rightarrow (iii) \Rightarrow (i).$$

Presupunem mai întâi (i). Atunci

$$\|Fn\|^2 = \|n\|^2 \quad \text{pentru orice } n \in \mathbb{R}^3.$$

Dar

$$\|Fn\|^2 = \langle n, F^T F n \rangle,$$

deci

$$\langle n, (F^T F - I)n \rangle = 0 \quad \text{pentru orice } n \in \mathbb{R}^3.$$

Notăm

$$A = F^T F - I.$$

Matricea A este simetrică. Alegând $n = e_i$, obținem

$$A_{ii} = 0.$$

Apoi, pentru $i \neq j$, alegem

$$n = e_i + e_j.$$

Rezultă

$$0 = \langle e_i + e_j, A(e_i + e_j) \rangle = A_{ii} + A_{jj} + 2A_{ij} = 2A_{ij}.$$

Prin urmare toate componentele lui A sunt nule și

$$F^T F = I.$$

Presupunem acum (ii). Atunci $F \in O(3)$. Luând determinantul,

$$(\det F)^2 = 1.$$

Deoarece $F \in GL^+(3)$,

$$\det F > 0,$$

de unde

$$\det F = 1.$$

Prin urmare

$$F \in SO(3).$$

În sfârșit, dacă $F \in SO(3)$, atunci

$$F^T F = I,$$

iar

$$\|Fn\|^2 = \langle n, F^T Fn \rangle = \|n\|^2$$

pentru orice $n \in \mathbb{R}^3$. Rezultă (i). □

1.6.2 Transformarea volumelor

Considerăm trei vectori liniar independenți

$$a, b, c \in \mathbb{R}^3.$$

Ei generează un paralelipiped orientat, al cărui volum orientat este

$$\langle a, b \times c \rangle.$$

Dacă

$$A = (a \mid b \mid c),$$

atunci

$$\langle a, b \times c \rangle = \det A.$$

Prin aplicația liniară F , vectorii devin

$$Fa, \quad Fb, \quad Fc.$$

Volumul orientat al paralelipipedului transformat este

$$\langle Fa, Fb \times Fc \rangle.$$

Matricea ale cărei coloane sunt acești vectori este

$$(Fa \mid Fb \mid Fc) = FA,$$

de unde

$$\begin{aligned}\langle Fa, Fb \times Fc \rangle &= \det(FA) \\ &= (\det F)(\det A) \\ &= (\det F)\langle a, b \times c \rangle.\end{aligned}$$

Această identitate explică rolul determinantului. Pentru a lega formula de deformarea neliniară φ , considerăm pentru $h > 0$ paralelipipedul

$$P_h = \{X_0 + h(\alpha a + \beta b + \gamma c) : 0 \leq \alpha, \beta, \gamma \leq 1\}.$$

Volumul său este

$$|P_h| = h^3 |\langle a, b \times c \rangle|.$$

Din diferențiabilitatea lui φ avem, uniform la primul ordin pe acest paralelipiped,

$$\varphi(X_0 + H) = x_0 + FH + o(\|H\|).$$

Prin urmare, când h este mic, imaginea lui P_h este aproximată la primul ordin de paralelipipedul generat de

$$hFa, \quad hFb, \quad hFc.$$

Volumul acestuia este

$$h^3 |\langle Fa, Fb \times Fc \rangle| = h^3 |\det F| |\langle a, b \times c \rangle|.$$

Rezultă că raportul local al volumelor tinde la

$$|\det F|.$$

Pentru deformările admisibile considerăm

$$F \in GL^+(3),$$

deci

$$J := \det F > 0.$$

Factorul local de variație a volumului este astfel

$$\boxed{J = \det F.}$$

Mai precis, pentru orice familie de paralelipipede P_h de forma de mai sus,

$$\frac{|\varphi(P_h)|}{|P_h|} \longrightarrow J \quad \text{pentru} \quad h \longrightarrow 0,$$

în sensul local descris de liniarizarea deformării.

Condiția

$$J > 0$$

arată și că orientarea locală este păstrată.

1.6.3 Transformarea ariilor și formula lui Nanson

Transformarea ariilor este mai subtilă, deoarece deformarea modifică simultan aria unei porțiuni de suprafață și direcția normalei sale.

Fie o suprafață materială regulată, parametrizată local prin

$$X = X(\xi_1, \xi_2).$$

Vectorii

$$A_1 = \frac{\partial X}{\partial \xi_1}, \quad A_2 = \frac{\partial X}{\partial \xi_2}$$

sunt liniar independenți și formează o bază a planului tangent la suprafață.

Vectorul

$$A_1 \times A_2$$

este perpendicular pe planul tangent. Definim normala unitară orientată prin

$$N = \frac{A_1 \times A_2}{\|A_1 \times A_2\|}.$$

Factorul

$$\|A_1 \times A_2\|$$

reprezintă raportul dintre aria unei porțiuni mici de suprafață și aria porțiunii corespunzătoare din planul parametrilor.

Imaginea suprafeței prin deformare este

$$x(\xi_1, \xi_2) = \varphi(X(\xi_1, \xi_2)).$$

Vectorii bazei tangente în configurația actuală sunt

$$a_\alpha = \frac{\partial x}{\partial \xi_\alpha}, \quad \alpha = 1, 2.$$

Prin regula lanțului,

$$a_\alpha = F A_\alpha, \quad \alpha = 1, 2.$$

Prin urmare,

$$a_1 = F A_1, \quad a_2 = F A_2.$$

Normala unitară la suprafața deformată este

$$n = \frac{a_1 \times a_2}{\|a_1 \times a_2\|}.$$

Pentru a compara aria în cele două configurații, avem nevoie de identitatea

$$(Fa) \times (Fb) = \text{Cof } F (a \times b).$$

Presupunem mai întâi că F este inversabilă. Pentru un vector arbitrar $c \in \mathbb{R}^3$,

$$\begin{aligned} \langle c, (Fa) \times (Fb) \rangle &= \det(c, Fa, Fb) \\ &= \det(F(F^{-1}c), Fa, Fb) \\ &= (\det F) \det(F^{-1}c, a, b) \\ &= (\det F) \langle F^{-1}c, a \times b \rangle \\ &= \langle c, (\det F) F^{-T}(a \times b) \rangle. \end{aligned}$$

Cum relația este valabilă pentru orice c , rezultă

$$(Fa) \times (Fb) = (\det F) F^{-T}(a \times b).$$

Folosind

$$\text{Cof } F = (\det F) F^{-T},$$

obținem

$$(Fa) \times (Fb) = \text{Cof } F (a \times b).$$

Identitatea rămâne valabilă și pentru matrici singulare, prin continuitate, deoarece ambii membri depind polinomial de componentele lui F .

Aplicând formula pentru

$$a = A_1, \quad b = A_2,$$

obținem

$$a_1 \times a_2 = \text{Cof } F (A_1 \times A_2).$$

Cum

$$A_1 \times A_2 = \|A_1 \times A_2\| N,$$

rezultă

$$a_1 \times a_2 = \|A_1 \times A_2\| \text{Cof } F N.$$

Pe de altă parte,

$$a_1 \times a_2 = \|a_1 \times a_2\| n.$$

Prin urmare,

$$\|a_1 \times a_2\| n = \|A_1 \times A_2\| \text{Cof } F N.$$

Aceasta este forma geometrică a formulei lui Nanson.

Cum

$$\text{Cof } F = J F^{-T},$$

ea poate fi scrisă

$$\|a_1 \times a_2\| n = J \|A_1 \times A_2\| F^{-T} N.$$

Luând norma în această relație și folosind

$$\|n\| = \|N\| = 1,$$

obținem

$$\|a_1 \times a_2\| = J \|F^{-T} N\| \|A_1 \times A_2\|.$$

Prin urmare factorul local de schimbare a ariei este

$$\boxed{\frac{\|a_1 \times a_2\|}{\|A_1 \times A_2\|} = J \|F^{-T} N\|}.$$

Formula are o interpretare geometrică directă. Pentru un dreptunghi mic

$$[\xi_1, \xi_1 + \Delta\xi_1] \times [\xi_2, \xi_2 + \Delta\xi_2]$$

din planul parametrilor, aria porțiunii corespunzătoare din configurația de referință este, la primul ordin,

$$\|A_1 \times A_2\| \Delta\xi_1 \Delta\xi_2,$$

iar aria porțiunii deformată este

$$\|a_1 \times a_2\| \Delta\xi_1 \Delta\xi_2.$$

Raportul dintre aceste două arii tinde astfel la

$$J \|F^{-T} N\|.$$

Pentru direcția normalei, folosim

$$a_1 \times a_2 = J \|A_1 \times A_2\| F^{-T} N.$$

După normalizare rezultă

$$\boxed{n = \frac{F^{-T} N}{\|F^{-T} N\|}}.$$

Prin urmare, $F^{-T} N$ determină direcția normalei deformată, iar factorul

$$J \|F^{-T} N\|$$

determină variația locală a ariei.

Exemplul 1.6.2 (Extensie diagonală). Fie

$$F = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3), \quad \lambda_i > 0.$$

Considerăm o suprafață al cărei plan tangent este generat de e_2, e_3 . Normala materială este atunci

$$N = e_1.$$

Avem

$$F^{-T}e_1 = \lambda_1^{-1}e_1,$$

iar

$$J = \lambda_1\lambda_2\lambda_3.$$

Factorul local de schimbare a ariei este

$$J \|F^{-T}e_1\| = \lambda_1\lambda_2\lambda_3 \frac{1}{\lambda_1} = \lambda_2\lambda_3.$$

Acest rezultat coincide cu interpretarea geometrică directă: cele două direcții tangente sunt multiplicare cu factorii λ_2 și λ_3 .

Exemplul 1.6.3 (Normală oblică). Exemplul precedent nu modifică direcția normalei, deoarece e_1 este o direcție principală a matricei diagonale.

Considerăm acum

$$F = \text{diag}(2, 1, 1/2), \quad N = \frac{e_1 + e_2}{\sqrt{2}}.$$

Avem

$$J = 1, \quad F^{-T} = \text{diag}(1/2, 1, 2).$$

Prin urmare,

$$F^{-T}N = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\frac{1}{2}, 1, 0 \right).$$

Norma acestui vector este

$$\|F^{-T}N\| = \sqrt{\frac{1}{2} \left(\frac{1}{4} + 1 \right)} = \frac{\sqrt{5}}{2\sqrt{2}}.$$

Factorul local de schimbare a ariei este deci $\boxed{\frac{\sqrt{5}}{2\sqrt{2}}}$.

Pentru normala deformată,

$$n = \frac{F^{-T}N}{\|F^{-T}N\|} = \frac{(1/2, 1, 0)}{\sqrt{(1/2)^2 + 1}} = \frac{(1, 2, 0)}{\sqrt{5}}.$$

Prin urmare, o suprafață cu normala materială

$$\frac{e_1 + e_2}{\sqrt{2}}$$

nu are după deformare aceeași direcție normală. Transformarea F^{-T} determină noua direcție, iar normalizarea produce versorul normal n .

1.7 Deformări radiale

Exemplele afine, dilatarea și forfecarea simplă au fost deja calculate. Considerăm acum două clase de deformări radiale, pentru care gradientul nu mai este constant.

1.7.1 Deformarea radială a unei sfere

Fie

$$\varphi(X) = \frac{r(R)}{R}X, \quad R = \|X\| > 0,$$

și notăm $e_R = X/R$. Atunci $\varphi(X) = r(R)e_R$. Pentru a calcula gradientul fără a apela la o formulă memorată, folosim

$$\nabla R = e_R, \quad \nabla e_R = \frac{1}{R}(I - e_R \otimes e_R).$$

Regula produsului dă

$$\begin{aligned} F = \nabla \varphi &= r'(R)e_R \otimes e_R + r(R)\nabla e_R \\ &= r'(R)e_R \otimes e_R + \frac{r(R)}{R}(I - e_R \otimes e_R). \end{aligned}$$

Astfel e_R este direcție proprie cu factor de întindere $r'(R)$, iar orice direcție tangentă la sfera $R = \text{const.}$ este întinsă cu factorul $r(R)/R$. Întinderile locale sunt deci

$$\lambda_R = r'(R), \quad \lambda_\theta = \lambda_\phi = \frac{r(R)}{R},$$

iar jacobianul este produsul lor:

$$J = r'(R) \left(\frac{r(R)}{R} \right)^2.$$

Condițiile locale $r'(R) > 0$ și $r(R) > 0$ asigură $J > 0$. Aceleași formule vor fi folosite mai târziu pentru deformări sferice simetrice.

1.7.2 Deformarea radială a unui cilindru

Considerăm, pentru $R = \sqrt{X_1^2 + X_2^2} > 0$,

$$\varphi(X_1, X_2, X_3) = \frac{r(R)}{R}(X_1, X_2, 0) + \lambda_z X_3 e_3, \quad \lambda_z > 0.$$

În baza cilindrică ortonormată

$$e_R = (X_1/R, X_2/R, 0), \quad e_\Theta = (-X_2/R, X_1/R, 0), \quad e_3,$$

avem $\varphi = r(R)e_R + \lambda_z X_3 e_3$. Pentru a nu ascunde calculul în expresia “perturbăm pe direcții”, calculăm mai întâi derivatele direcționale ale lui R și e_R . Pentru un increment arbitrar

$$H = h_R e_R + h_\Theta e_\Theta + h_3 e_3$$

avem

$$DR(X)[H] = \langle \nabla R, H \rangle = \langle e_R, H \rangle = h_R.$$

Deoarece $e_R = X_\perp / R$, unde $X_\perp = (X_1, X_2, 0)$, regula câtlui dă

$$\begin{aligned} De_R(X)[H] &= \frac{H_\perp}{R} - \frac{X_\perp}{R^2} DR(X)[H] \\ &= \frac{h_R e_R + h_\Theta e_\Theta}{R} - \frac{e_R}{R} h_R \\ &= \frac{h_\Theta}{R} e_\Theta. \end{aligned}$$

Acum aplicăm regula lanțului și regula produsului lui $\varphi(X) = r(R)e_R + \lambda_z X_3 e_3$:

$$\begin{aligned} D\varphi(X)[H] &= r'(R)DR(X)[H]e_R + r(R)De_R(X)[H] + \lambda_z h_3 e_3 \\ &= r'(R)h_R e_R + \frac{r(R)}{R} h_\Theta e_\Theta + \lambda_z h_3 e_3. \end{aligned}$$

Cum această formulă este valabilă pentru orice H , citim direct acțiunea gradientului pe baza (e_R, e_Θ, e_3) . Prin urmare

$$F = r'(R)e_R \otimes e_R + \frac{r(R)}{R}e_\Theta \otimes e_\Theta + \lambda_z e_3 \otimes e_3,$$

și, deoarece matricea este diagonală în această bază,

$$J = r'(R) \frac{r(R)}{R} \lambda_z.$$

Pentru păstrarea orientării este suficient să avem $r'(R) > 0$, $r(R) > 0$ și $\lambda_z > 0$.

Dacă deformarea este incompresibilă, $J = 1$, iar r trebuie să satisfacă

$$r(R)r'(R) = \frac{R}{\lambda_z}.$$

Cum $\frac{d}{dR}r(R)^2 = 2r(R)r'(R)$,

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dR}r(R)^2 = \frac{R}{\lambda_z},$$

și integrarea conduce la

$$r(R)^2 = C + \frac{R^2}{\lambda_z}.$$

De exemplu, condiția $r(R_i) = r_i$ determină

$$C = r_i^2 - \frac{R_i^2}{\lambda_z}.$$

Această deducție ilustrează cum o restricție geometrică asupra volumului se transformă într-o ecuație diferențială pentru deformare.

1.8 Probleme pentru seminar

1. Pentru $\varphi(X) = (2X_1, X_2/2, X_3)$ calculați F, J și variația densității.
2. Arătați că o mișcare rigidă $\varphi(X) = c + QX$, $Q \in SO(3)$, are $J = 1$.
3. Pentru forfecarea simplă calculați imaginea unui pătrat din planul $X_3 = 0$ și unghiul dintre imaginile vectorilor e_1, e_2 .
4. Pentru $\varphi(X, t) = e^{\alpha t}X$ determinați $v(x, t)$, $\nabla_x v$ și verificați $\dot{J} = J \operatorname{div} v$.
5. Un cub de aluminiu cu densitatea inițială 2700 kg/m^3 suferă deformarea diagonală $F = \operatorname{diag}(1.02, 0.99, 0.98)$. Determinați densitatea finală.
6. Formulați o deformare omogenă care păstrează volumul și alungește direcția e_1 cu factorul λ .

1.9 Exerciții rezolvate

Problema 1.9.1 (deformare afină și gradientul deformării). Fie $\varphi(X) = FX + b$, unde

$$F = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 \end{pmatrix}, \quad b \in \mathbb{R}^3.$$

Calculați gradientul deformării, determinantul său și interpretați geometric deformarea.

Rezolvare. Deoarece $\varphi_i(X) = \sum_j F_{ij}X_j + b_i$, avem

$$\frac{\partial \varphi_i}{\partial X_j} = F_{ij},$$

deci $\nabla \varphi = F$ în orice punct. Determinantul este produsul elementelor diagonale,

$$J = \det F = 2 \cdot 1 \cdot \frac{1}{2} = 1.$$

Un segment paralel cu e_1 își dublează lungimea, unul paralel cu e_2 își păstrează lungimea, iar unul paralel cu e_3 se înjumătățește. În ciuda acestor modificări de formă, volumul local este păstrat deoarece $J = 1$.

Problema 1.9.2 (aproximația afină locală). Pentru $\varphi \in C^1(\Omega; \mathbb{R}^3)$ și $X_0 \in \Omega$, explicați de ce

$$\varphi(X_0 + H) = \varphi(X_0) + F(X_0)H + o(\|H\|), \quad F = \nabla \varphi.$$

Ce semnificație mecanică are această formulă?

Rezolvare. Aceasta este chiar definiția diferențiabilității Fréchet a lui φ în X_0 . Există o aplicație liniară $D\varphi(X_0)$ astfel încât

$$\frac{\|\varphi(X_0 + H) - \varphi(X_0) - D\varphi(X_0)H\|}{\|H\|} \rightarrow 0.$$

În coordonate, matricea lui $D\varphi(X_0)$ este $F(X_0) = \nabla\varphi(X_0)$. Prin urmare, la scară foarte mică, deformarea este aproximată de aplicația afină $H \mapsto F(X_0)H$. Astfel coloanele lui F descriu imaginile locale ale direcțiilor coordonate.

Problema 1.9.3 (orientare locală). Considerați $\varphi(X_1, X_2, X_3) = (-X_1, X_2, X_3)$. Calculați F și J . De ce această aplicație nu este admisibilă ca deformare păstrătoare a orientării

Rezolvare. Avem

$$F = \text{diag}(-1, 1, 1), \quad J = \det F = -1.$$

Aplicația este o reflexie față de planul $X_1 = 0$. Ea păstrează lungimile și volumele ca mărime, dar inversează orientarea. Condiția mecanică $J > 0$ exclude asemenea reflexii.

Problema 1.9.4 (derivata determinantului în identitate). Arătați direct că, pentru orice $H \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$,

$$D(\det)(I)[H] = \text{tr } H.$$

Rezolvare. Din formula demonstrată în capitol,

$$D(\det)(F)[H] = \langle \text{Cof } F, H \rangle.$$

Pentru $F = I$ avem $\text{Cof } I = I$, deci

$$D(\det)(I)[H] = \langle I, H \rangle = \sum_{i,j} \delta_{ij} H_{ij} = \sum_i H_{ii} = \text{tr } H.$$

Echivalent, dezvoltarea $\det(I + \varepsilon H) = 1 + \varepsilon \text{tr } H + o(\varepsilon)$ arată că urma este variația de ordin întâi a volumului.

Problema 1.9.5 (viteza și accelerația unei mișcări omogene). Fie $\varphi(X, t) = \alpha(t)X$, cu $\alpha(t) > 0$. Determinați F , J , apoi calculați direct $\partial_t \varphi$ și $\partial_{tt} \varphi$ (viteza și accelerația materiale).

Rezolvare. Derivând după X ,

$$F(X, t) = \alpha(t)I, \quad J(t) = \alpha(t)^3.$$

La X fix,

$$\partial_t \varphi(X, t) = \dot{\alpha}(t)X,$$

iar

$$\partial_{tt} \varphi(X, t) = \ddot{\alpha}(t)X.$$

Dacă scriem poziția actuală $x = \alpha(t)X$, atunci $X = x/\alpha(t)$ și câmpul eulerian al vitezei este

$$v(x, t) = \frac{\dot{\alpha}(t)}{\alpha(t)}x.$$

Problema 1.9.6 (forfecare simplă). Fie

$$\varphi(X_1, X_2, X_3) = (X_1 + \gamma X_2, X_2, X_3), \quad \gamma \in \mathbb{R}.$$

Calculați F , J , imaginile vectorilor bazei și imaginea cubului unitate la nivel local.

Rezolvare. Derivăm fiecare componentă:

$$F = \nabla\varphi = \begin{pmatrix} 1 & \gamma & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Prin urmare

$$Fe_1 = e_1, \quad Fe_2 = \gamma e_1 + e_2, \quad Fe_3 = e_3.$$

Determinantul unei matrice triunghiulare este produsul diagonalei,

$$J = 1.$$

Un cub infinitesimal este transformat într-un paralelipiped cu același volum, dar cu fețele inițial dreptunghiulare înclinate. Așadar $J = 1$ exprimă numai păstrarea volumului, nu absența deformării.

Problema 1.9.7 (dilatatie omogenă transversală a unui cilindru). În coordonate carteziene considerați

$$\varphi(X_1, X_2, X_3) = (\lambda X_1, \lambda X_2, \mu X_3), \quad \lambda, \mu > 0.$$

Determinați condiția pentru păstrarea volumului și interpretați-o pentru un cilindru circular.

Rezolvare. Avem

$$F = \text{diag}(\lambda, \lambda, \mu), \quad J = \lambda^2 \mu.$$

Păstrarea volumului cere $J = 1$, adică

$$\mu = \lambda^{-2}.$$

Dacă raza cilindrului se multiplică cu λ , aria secțiunii se multiplică cu λ^2 . Pentru ca volumul arie $\times$ lungime să rămână constant, lungimea axială trebuie să se multiplice cu λ^{-2} .

Problema 1.9.8 (relația dintre $\dot{F}$ și gradientul spațial al vitezei). Pornind de la identitatea

$$v(\varphi(X, t), t) = \partial_t \varphi(X, t),$$

demonstrați pas cu pas că

$$\dot{F} = (\nabla_x v)F.$$

Rezolvare. Pentru componente,

$$\partial_t \varphi_i(X, t) = v_i(\varphi(X, t), t).$$

Derivăm după X_J . În membrul stâng,

$$\partial_{X_J} \partial_t \varphi_i = \partial_t \partial_{X_J} \varphi_i = \dot{F}_{iJ}.$$

În membrul drept folosim regula lanțului:

$$\partial_{X_J}[v_i(\varphi(X, t), t)] = \sum_{k=1}^3 \frac{\partial v_i}{\partial x_k}(\varphi(X, t), t) \frac{\partial \varphi_k}{\partial X_J}(X, t).$$

Aceasta este exact relația componentă

$$\dot{F}_{iJ} = (\nabla_x v)_{ik} F_{kJ},$$

deci, matricial, $\dot{F} = (\nabla_x v)F$.

Problema 1.9.9 (evoluția jacobianului). Folosind exercițiul precedent și formula pentru derivata determinantului, demonstrați

$$\dot{J} = J \operatorname{div} v.$$

Apoi verificați formula pentru mișcarea $\varphi(X, t) = \alpha(t)X$.

Rezolvare. Din formula Jacobi,

$$\dot{J} = J \operatorname{tr}(F^{-1} \dot{F}).$$

Cum $\dot{F} = (\nabla_x v)F$,

$$F^{-1} \dot{F} = F^{-1}(\nabla_x v)F.$$

Folosind ciclicitatea urmei,

$$\operatorname{tr}(F^{-1}(\nabla_x v)F) = \operatorname{tr}((\nabla_x v)FF^{-1}) = \operatorname{tr}(\nabla_x v) = \operatorname{div} v.$$

Deci $\dot{J} = J \operatorname{div} v$. Pentru $\varphi = \alpha X$, $J = \alpha^3$, deci $\dot{J} = 3\alpha^2 \dot{\alpha}$. Pe de altă parte, $v = (\dot{\alpha}/\alpha)x$, astfel

$$\operatorname{div} v = 3 \frac{\dot{\alpha}}{\alpha}, \quad J \operatorname{div} v = \alpha^3 3 \frac{\dot{\alpha}}{\alpha} = 3\alpha^2 \dot{\alpha}.$$

Cele două expresii coincid.

Problema 1.9.10 (local versus global: un exemplu de neinjectivitate). Pe domeniul de parametri

$$D = (1, 2) \times (0, 4\pi) \times (0, 1)$$

considerați aplicația

$$\Phi(r, \theta, z) = (r \cos \theta, r \sin \theta, z).$$

Arătați că determinantul jacobianului este pozitiv în orice punct, dar aplicația nu este injectivă global. Explicați de ce acest exemplu separă inversabilitatea locală de injectivitatea globală.

Rezolvare. Pentru $r > 0$, vectorii tangenți sunt

$$\partial_r \Phi = (\cos \theta, \sin \theta, 0), \quad \partial_\theta \Phi = (-r \sin \theta, r \cos \theta, 0), \quad \partial_z \Phi = (0, 0, 1).$$

Produsul mixt are valoarea

$$\langle \partial_r \Phi \times \partial_\theta \Phi, \partial_z \Phi \rangle = r > 0.$$

Așadar parametrizarea este local păstrătoare a orientării și local inversabilă. Totuși

$$\Phi(r, \theta, z) = \Phi(r, \theta + 2\pi, z),$$

iar intervalul $0 < \theta < 4\pi$ conține ambele valori. Prin urmare aplicația nu este injectivă global. Exemplul separă clar condiția locală $J > 0$ de condiția globală de neinterpenetrare.

1.10 Exerciții propuse suplimentare

Nivelul A

1.A.1 (*deformare afină: gradient, cofactor, densitate*) Fie $b \in \mathbb{R}^3$ fixat și deformarea afină

$$\varphi(X) = (X_1 + 2X_2, 3X_2, X_3 - X_1) + b, \quad X \in \Omega \subset \mathbb{R}^3,$$

cu Ω deschis, mărginit și conex. Calculați $F = \nabla\varphi$, $J = \det F$, verificați admisibilitatea ($J > 0$), calculați $\text{Cof } F$ și determinați densitatea în configurația deformată, știind că densitatea de referință este constantă, $\rho_0 = 6000 \text{ kg/m}^3$.

Indicație. Pentru o aplicație afină $\varphi(X) = FX + b$ avem $\nabla\varphi = F$ în orice punct (ca în Problema 1.15.1). Folosiți identitatea lui Cramer $\text{Cof } F = (\det F)F^{-T}$ din § 1.3 și formula conservării masei $\rho J = \rho_0$ din § 1.10.

Răspuns.

$$F = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad J = 3 > 0, \quad \text{Cof } F = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 3 \\ -2 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}, \quad \rho = \frac{\rho_0}{J} = 2000 \text{ kg/m}^3.$$

1.A.2 (*cele două descrieri și evoluția jacobianului*) Pentru mișcarea

$$\varphi(X, t) = (X_1 + tX_2, X_2, (1+t)X_3), \quad t \geq 0,$$

calculați $F(t)$, $J(t)$, deplasarea $u(X, t)$, viteza materială $V(X, t)$ și câmpul eulerian al vitezei $v(x, t)$. Verificați apoi direct identitatea $\dot{J} = J \text{div}_x v$.

Indicație. Inversați $x = \varphi(X, t)$ pentru a exprima X în funcție de x și t , apoi aplicați Propoziția 1.4.1.

Răspuns.

$$F = \begin{pmatrix} 1 & t & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1+t \end{pmatrix}, \quad J = 1+t,$$

$$u = (tX_2, 0, tX_3), \quad V = (X_2, 0, X_3), \quad v(x, t) = \left(x_2, 0, \frac{x_3}{1+t}\right),$$

$$\text{div}_x v = \frac{1}{1+t}, \quad \dot{J} = 1 = J \text{div}_x v.$$

1.A.3 (*elemente de volum și de arie*) Fie deformarea omogenă cu

$$F = \text{diag} \left(2, 3, \frac{1}{2} \right)$$

aplicată cubului unitate $[0, 1]^3$. Determinați: (i) volumul imaginii cubului; (ii) pentru fiecare dintre fețele cu normale materiale $N = e_1$, $N = e_2$, $N = e_3$, vectorul-arie deformat $\text{Cof } F N$ și aria imaginii feței.

Indicație. Folosiți $dv = J dV$ și $n da = \text{Cof } F N dA = J F^{-T} N dA$ din § 1.9; pentru F diagonal, $\text{Cof } F$ este diagonală cu elementele date de produsele perechilor de factori.

Răspuns. $J = 3$, deci volumul imaginii este 3. Mai mult,

$$\text{Cof } F = \text{diag} \left(\frac{3}{2}, 1, 6 \right),$$

$$N = e_1 : \frac{3}{2}e_1, \text{ arie } \frac{3}{2}; \quad N = e_2 : e_2, \text{ arie } 1; \quad N = e_3 : 6e_3, \text{ arie } 6.$$

Normalele nu se rotesc (deformare diagonală), dar ariile se modifică diferit de volum.

Nivelul B

1.B.1 (*derivata lui $\log \det$ și interpretarea ei cinematică*) Fie $\Phi : GL^+(3) \rightarrow \mathbb{R}$, $\Phi(F) = \log \det F$. (a) Arătați că Φ este Fréchet-diferențiabilă și că

$$D\Phi(F)[H] = \text{tr}(F^{-1}H) \quad \forall H \in \mathbb{R}^{3 \times 3},$$

deci $D_F\Phi(F) = F^{-T}$. (b) Deduceți că, pentru o mișcare netedă cu $J > 0$,

$$\frac{d}{dt} \log J = \text{div}_x v,$$

și interpretați mecanic: $\text{div } v$ este viteza relativă de variație a volumului.

Indicație. (a) Aplicați regula lanțului pornind de la Propoziția 1.2.1, $D(\det)(F)[H] = \det F \text{tr}(F^{-1}H)$. (b) Luați $H = \dot{F}$ și folosiți $L = \nabla_x v = \dot{F}F^{-1}$ (Propoziția 1.4.1).

Răspuns.

$$D\Phi(F)[H] = \text{tr}(F^{-1}H) = \langle F^{-T}, H \rangle,$$

prin urmare

$$\frac{d}{dt} \log J = \text{tr}(F^{-1}\dot{F}) = \text{tr } L = \text{div}_x v.$$

O mișcare este izocoră ($J \equiv 1$) dacă și numai dacă $\text{div } v \equiv 0$.

1.B.2 (*torsiunea unui cilindru: factorizarea gradientului*) Fie $\vartheta > 0$ și deformarea de tip torsiune

$$\varphi(X) = (X_1 \cos \theta - X_2 \sin \theta, X_1 \sin \theta + X_2 \cos \theta, X_3), \quad \theta = \vartheta X_3.$$

(a) Calculați $F = \nabla \varphi$ și arătați că $J = 1$ în orice punct. (b) Notând $R(\theta)$ rotația de unghi θ

în jurul axei e_3 , arătați că

$$F = R(\theta) \left[I + \vartheta (X_1 e_2 - X_2 e_1) \otimes e_3 \right].$$

(c) Deduceți că $\|F - R(\theta)\| = \vartheta R$, unde $R = \sqrt{X_1^2 + X_2^2}$ este distanța la axă, și interpretați mecanic.

Indicație. Derivați după X_3 ținând cont că θ depinde de X_3 (§ 1.6.4); pentru (b) înmulțiți la stânga cu $R(\theta)^T$ și simplificați folosind $\cos^2 \theta + \sin^2 \theta = 1$.

Răspuns.

$$F = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & -\vartheta (X_1 \sin \theta + X_2 \cos \theta) \\ \sin \theta & \cos \theta & \vartheta (X_1 \cos \theta - X_2 \sin \theta) \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad J = 1.$$

Factorizarea din (b) este validă, iar

$$\|F - R(\theta)\| = \vartheta \sqrt{X_1^2 + X_2^2} = \vartheta R.$$

Abaterea locală de la o rotație rigidă crește liniar cu distanța la axă; de aici forfecarea proporțională cu raza, care conduce în teoria liniară la $\tau_{\theta z} = \mu \kappa R$.

1.B.3 (*derivata cofactorului în identitate și variația ariilor*) (a) Pornind de la $\text{Cof } F = (\det F) F^{-T}$, demonstrați că

$$D(\text{Cof})(I)[H] = (\text{tr } H)I - H^T, \quad H \in \mathbb{R}^{3 \times 3}.$$

(b) Deduceți că, pentru $F_\varepsilon = I + \varepsilon H$ și o normală materială unitară N , variația relativă de arie este

$$\frac{da - dA}{dA} = \varepsilon (\text{tr } H - \langle N, HN \rangle) + O(\varepsilon^2).$$

(c) Verificați pe cazul $H = e_1 \otimes e_1$ că ariile fețelor cu $N = e_1$ nu se modifică la ordinul întâi, în timp ce ariile cu $N = e_2$ cresc cu ε .

Indicație. Folosiți Propozițiile 1.2.1 și 1.2.2 (sau formula din § 1.9.4 pentru $D(\text{Cof})$) și $\text{Cof } I = I$. La (b) dezvoltați $\|\text{Cof } F_\varepsilon N\|$ și rețineți $\langle N, H^T N \rangle = \langle N, HN \rangle$.

Răspuns. (a) $D(\text{Cof})(I)[H] = (\text{tr } H)I - H^T$. (b) Formula indicată. (c) Pentru $H = e_1 \otimes e_1$, $\text{tr } H = 1$; cu $N = e_1$ avem $\langle N, HN \rangle = 1$, deci variația este nulă la ordinul întâi; cu $N = e_2$ avem $\langle N, HN \rangle = 0$, deci variația relativă este ε .

Nivelul C

1.C.1 (*forfecare simplă dependentă de timp: cele două descrieri, accelerație, jacobian*) Se consideră mișcarea

$$\varphi(X, t) = (X_1 + \gamma(t)X_2, X_2, X_3), \quad \gamma(t) = t^2, \quad t \geq 0,$$

pe un domeniu Ω deschis, mărginit și conex, cu densitate de referință constantă ρ_0 . (a) Calculați $F(t)$, $J(t)$, deplasarea $u(X, t)$, viteza materială $V(X, t)$ și câmpul eulerian $v(x, t)$.

(b) Calculați accelerația în ambele moduri: $A(X, t) = \partial_{tt}\varphi$ și $a = \partial_t v + (\nabla_x v)v$, și verificați că $A(X, t) = a(\varphi(X, t), t)$. (c) Verificați $\dot{J} = J \operatorname{div}_x v$ și deduceți densitatea $\rho(x, t)$. Este mișcarea izocoră? Dar rigidă?

Indicație. (a) $X_2 = x_2$, deci inversarea este imediată. (b) Observați că v depinde numai de x_2 , iar $v_2 = 0$, deci termenul convectiv se simplifică (§ 1.5, § 1.9.5). (c) Propoziția 1.4.1 și § 1.10; pentru rigiditate, comparați F cu $SO(3)$ (Propoziția 1.8.1).

Răspuns. (a)

$$F = I + t^2 e_1 \otimes e_2, \quad J = 1, \quad u = (t^2 X_2, 0, 0), \quad V = (2t X_2, 0, 0),$$

$$v(x, t) = (2tx_2, 0, 0).$$

(b) $A = (2X_2, 0, 0)$, $\partial_t v = (2x_2, 0, 0)$ și $(\nabla v)v = 0$, deci $a = (2x_2, 0, 0)$ și cele două expresii coincid. (c) $\operatorname{div}_x v = 0$ și $\dot{J} = 0$; mișcarea este izocoră, $\rho \equiv \rho_0$, dar nu este rigidă, deoarece

$$C = F^T F = I + t^2(e_1 \otimes e_2 + e_2 \otimes e_1) + t^4 e_2 \otimes e_2 \neq I$$

pentru $t > 0$.

1.C.2 (*deformare radială cilindrică izocoră și apariția unei cavități*) Pentru $R = \sqrt{X_1^2 + X_2^2} > 0$ se consideră deformarea

$$\varphi(X) = \frac{r(R)}{R}(X_1, X_2, 0) + \lambda_z X_3 e_3, \quad r \in C^1, \quad r > 0, \quad r' > 0, \quad \lambda_z > 0.$$

(a) Arătați că, în baza ortonormată cilindrică (e_R, e_Θ, e_3) ,

$$F = r'(R)e_R \otimes e_R + \frac{r(R)}{R}e_\Theta \otimes e_\Theta + \lambda_z e_3 \otimes e_3, \quad J = r'(R)\frac{r(R)}{R}\lambda_z.$$

(b) Impuneți izocoria $J \equiv 1$ și integrați ecuația diferențială rezultată; arătați că soluția generală este

$$r(R)^2 = \frac{R^2}{\lambda_z} + a^2, \quad a \geq 0.$$

(c) Luați $\lambda_z = 4$ și $a = 1$. Calculați $r(0)$, $r(3)$ și volumul imaginii cilindrului material $\{R \leq 3, 0 \leq X_3 \leq 2\}$; comparați-l cu volumul inițial și explicați rolul constantei a .

Indicație. (a) Perturbați punctul material separat pe cele trei direcții cilindrice, ca în § 1.12.5.

(b) $J = 1$ se scrie $(r^2)' = 2R/\lambda_z$. (c) Imaginea este un tub: raza interioară este $r(0) = a$, iar volumul se calculează ca $\pi(r(3)^2 - a^2)\lambda_z \cdot 2$; comparați cu § 1.10.

Răspuns. (b) $r^2 = R^2/\lambda_z + a^2$. (c)

$$r(0) = a = 1, \quad r(3) = \sqrt{\frac{9}{4} + 1} = \frac{\sqrt{13}}{2} \approx 1.8028.$$

Volumul imaginii este

$$\pi(r(3)^2 - a^2)\lambda_z \cdot 2 = \pi \frac{9}{4} \cdot 4 \cdot 2 = 18\pi,$$

egal cu volumul inițial $\pi \cdot 3^2 \cdot 2 = 18\pi$. Deformarea conservă volumul și $\rho \equiv \rho_0$. Constanta

$a > 0$ descrie o cavitate: axa materială $R = 0$ devine un cilindru de rază a . Volumul total se conservă numai dacă cavitatea este luată în calcul.

1.C.3 (*deformare neafină: admisibilitate, injectivitate, arii, masă*) Fie $\Omega = (0, 1)^3$ și

$$\varphi(X) = (X_1 + X_2^2, X_2, X_3).$$

(a) Calculați F , J și $\text{Cof } F$; verificați că φ este o deformare admisibilă (clasă C^1 , $J > 0$) și arătați că φ este global injectivă pe Ω . (b) Calculați aria imaginii feței $\{X_1 = 0\} \cap \Omega$, cu normala materială $N = e_1$. (c) Arătați că densitatea nu se modifică și verificați direct, prin schimbare de variabilă, că $\text{vol } \varphi(\Omega) = \text{vol } \Omega$.

Indicație. (a) J se citește imediat din structura triunghiulară a lui F ; pentru injectivitate observați că x_2, x_3 determină X_2, X_3 , apoi X_1 . (b) Aria deformată este $\int \|\text{Cof } F N\| dA$ (§ 1.9); apare integrala $\int_0^1 \sqrt{1+4t^2} dt$. (c) § 1.10.

Răspuns. (a)

$$F = \begin{pmatrix} 1 & 2X_2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad J = 1, \quad \text{Cof } F = F^{-T} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2X_2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Aplicația este injectivă; inversa este $X = (x_1 - x_2^2, x_2, x_3)$. (b) $\text{Cof } F e_1 = (1, -2X_2, 0)$, deci

$$\text{aria} = \int_0^1 \int_0^1 \sqrt{1+4X_2^2} dX_2 dX_3 = \frac{\sqrt{5}}{2} + \frac{1}{4} \ln(2 + \sqrt{5}) \approx 1.4789.$$

(c) $J \equiv 1$ implică $\rho \equiv \rho_0$ și

$$\text{vol } \varphi(\Omega) = \int_{\Omega} J dX = 1.$$

Volumul se conservă, dar ariile nu: izocoria este o condiție asupra determinantului, nu asupra cofactorului.

Măsurile de deformare, descompunerea polară și distanța la rotații

Surse și orientare. Pentru descompunerea polară, întinderile principale și măsurile finite de deformare folosim [3, 14]. Proprietatea de minim a factorului polar și interpretarea distanței la rotații sunt prezentate și în [12].

2.1 Tensorii Cauchy–Green și întinderile principale

Fie

$$F \in GL^+(3)$$

gradientul local al unei deformări. Dacă $T \in \mathbb{R}^3$ este un vector material, atunci vectorul corespunzător în configurația actuală este

$$t = FT.$$

Lungimea sa satisface

$$\|t\|^2 = \|FT\|^2 = \langle FT, FT \rangle = \langle T, F^T F T \rangle.$$

Această relație motivează introducerea tensorului Cauchy–Green drept

$$\boxed{C := F^T F.}$$

Astfel,

$$\|FT\|^2 = \langle T, CT \rangle.$$

Dacă M este o direcție materială unitară,

$$\|M\| = 1,$$

definim factorul local de întindere în direcția M prin

$$\lambda(M) := \|FM\|.$$

Prin urmare,

$$\boxed{\lambda(M)^2 = \langle M, CM \rangle.}$$

Tensorul C descrie astfel modificarea locală a lungimilor în funcție de direcția materială.

Matricea C este simetrică, deoarece

$$C^T = (F^T F)^T = F^T F = C.$$

Mai mult, pentru orice $x \neq 0$,

$$\langle x, Cx \rangle = \langle x, F^T Fx \rangle = \|Fx\|^2.$$

Cum F este inversabilă, din $x \neq 0$ rezultă $Fx \neq 0$, deci

$$\langle x, Cx \rangle > 0.$$

Prin urmare,

$$\boxed{C \in \text{Sym}^+(3)}.$$

Introducem și tensorul Cauchy–Green stâng

$$\boxed{B := FF^T}.$$

Acesta este de asemenea simetric, deoarece

$$B^T = (FF^T)^T = FF^T = B.$$

Pentru orice $y \neq 0$,

$$\langle y, By \rangle = \langle y, FF^T y \rangle = \|F^T y\|^2.$$

Cum F^T este inversabilă,

$$\|F^T y\|^2 > 0 \quad \text{pentru } y \neq 0,$$

deci

$$\boxed{B \in \text{Sym}^+(3)}.$$

Cei doi tensori apar în configurații diferite. Tensorul C acționează asupra direcțiilor materiale, deoarece

$$\lambda(M)^2 = \langle M, CM \rangle$$

este exprimată în funcție de direcția M din configurația de referință. Tensorul B este asociat configurației actuale. Această diferență va deveni mai clară odată cu descompunerea polară a lui F .

Tensorul C permite compararea lungimii unui vector material cu lungimea vectorului corespunzător după deformare. Pentru orice $T \in \mathbb{R}^3$,

$$\begin{aligned} \|FT\|^2 - \|T\|^2 &= \langle T, CT \rangle - \langle T, T \rangle \\ &= \langle T, (C - I)T \rangle. \end{aligned}$$

Această relație motivează introducerea tensorului Green–Saint Venant

$$E := \frac{1}{2}(C - I).$$

Rezultă

$$\|FT\|^2 - \|T\|^2 = 2\langle T, ET \rangle.$$

Tensorul E măsoară astfel variația pătratului lungimilor.

Dacă

$$E = 0,$$

atunci

$$C = I.$$

Prin urmare,

$$\|FT\|^2 = \langle T, CT \rangle = \|T\|^2$$

pentru orice $T \in \mathbb{R}^3$. Cum $F \in GL^+(3)$, aceasta este echivalent cu

$$F \in SO(3).$$

Așadar tensorul E se anulează exact pentru transformările liniare orientare-păstrătoare care conservă lungimile.

Interpretarea locală a tensorului C se extinde direct la lungimea curbilor.

Propoziția 2.1.1 (Lungimea unei curbe și a imaginii sale). *Fie $[a, b] \subset \mathbb{R}$ și*

$$c : [a, b] \rightarrow \overline{\Omega}$$

o curbă de clasă C^1 . Atunci

$$L(c) = \int_a^b \|c'(t)\| \, dt.$$

Pentru curba deformată $\varphi \circ c$,

$$L(\varphi \circ c) = \int_a^b \|F(c(t))c'(t)\| \, dt.$$

Echivalent,

$$L(\varphi \circ c) = \int_a^b \sqrt{\langle c'(t), C(c(t))c'(t) \rangle} \, dt.$$

Demonstrație. Prima formulă este definiția lungimii unei curbe de clasă C^1 . Pentru curba deformată, regula lanțului dă

$$(\varphi \circ c)'(t) = \nabla \varphi(c(t))c'(t) = F(c(t))c'(t).$$

Prin urmare,

$$L(\varphi \circ c) = \int_a^b \|F(c(t))c'(t)\| \, dt.$$

Cum

$$C(c(t)) = F(c(t))^T F(c(t)),$$

avem

$$\begin{aligned} \|F(c(t))c'(t)\|^2 &= \langle F(c(t))c'(t), F(c(t))c'(t) \rangle \\ &= \langle c'(t), C(c(t))c'(t) \rangle. \end{aligned}$$

Luând rădăcina pătrată și integrând, obținem formula dorită. $\square$

Tensorul C este tensorul Cauchy–Green drept și este asociat configurației de referință, în timp ce B este tensorul Cauchy–Green stâng și este asociat configurației actuale. Ambii sunt tensori de *deformare*. Ei nu trebuie confundați cu tensorul de *tensiune* Cauchy σ , care va fi introdus ulterior.

2.2 Rădăcina pătrată și calculul spectral

Fie $S = S^T \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$. Teorema spectrală furnizează o matrice ortogonală Q și valori proprii reale s_1, s_2, s_3 astfel încât

$$S = Q \operatorname{diag}(s_1, s_2, s_3) Q^T.$$

Dacă $S \in \operatorname{Sym}^+(3)$, atunci toate valorile proprii sunt strict pozitive. Vom folosi această descompunere pentru a defini funcții de matrice. Mai întâi tratăm cazul de care avem nevoie pentru descompunerea polară: rădăcina pătrată pozitivă.

2.2.1 Rădăcina pătrată pozitivă

Lema 2.2.1. *Pentru orice $S \in \operatorname{Sym}^+(3)$ există o unică matrice $U \in \operatorname{Sym}^+(3)$ astfel încât*

$$U^2 = S.$$

Demonstrație. Existența. Scriem

$$S = Q \operatorname{diag}(s_1, s_2, s_3) Q^T, \quad s_i > 0,$$

și definim

$$U := Q \operatorname{diag}(\sqrt{s_1}, \sqrt{s_2}, \sqrt{s_3}) Q^T.$$

Matricea U este simetrică. Pentru $x \neq 0$, dacă $y = Q^T x$, atunci

$$\langle x, Ux \rangle = \sum_{i=1}^3 \sqrt{s_i} y_i^2 > 0,$$

deci $U \in \operatorname{Sym}^+(3)$. În plus,

$$U^2 = Q \operatorname{diag}(\sqrt{s_i}) Q^T Q \operatorname{diag}(\sqrt{s_i}) Q^T$$

$$= Q \operatorname{diag}(s_i) Q^T = S.$$

Unicitatea. Fie $V \in \operatorname{Sym}^+(3)$ o altă matrice cu $V^2 = S$. Primul pas este să vedem că V lasă invariante subspațiile proprii ale lui S . Din $S = V^2$ avem

$$VS = VV^2 = V^3 = V^2V = SV.$$

Fie $s > 0$ o valoare proprie a lui S și

$$E_s := \{x \in \mathbb{R}^3 : Sx = sx\}.$$

Dacă $x \in E_s$, atunci

$$S(Vx) = V(Sx) = V(sx) = sVx,$$

deci $Vx \in E_s$. Așadar restricția

$$V_s := V|_{E_s} : E_s \rightarrow E_s$$

este bine definită.

Deoarece V este simetrică, și V_s este simetrică pe spațiul euclidian E_s . Putem alege o bază ortonormată $(y_1, \dots, y_m)$ a lui E_s formată din vectori proprii ai lui V_s :

$$Vy_j = \mu_j y_j.$$

Pozitivitatea definită a lui V implică, pentru $\|y_j\| = 1$,

$$\mu_j = \langle y_j, Vy_j \rangle > 0.$$

Pe de altă parte, $y_j \in E_s$, deci

$$V^2 y_j = Sy_j = sy_j.$$

Dar din $Vy_j = \mu_j y_j$ rezultă

$$V^2 y_j = \mu_j^2 y_j.$$

Comparând cele două relații obținem

$$\mu_j^2 = s.$$

Există două rădăcini scalare, $\pm\sqrt{s}$, dar condiția $\mu_j > 0$ elimină rădăcina negativă. Prin urmare

$$\mu_j = \sqrt{s} \quad \text{pentru fiecare } j.$$

Asta arată că pe întregul subspațiu propriu E_s avem

$$V_s = \sqrt{s} I_{E_s}.$$

Repetăm argumentul pentru fiecare valoare proprie distinctă a lui S . Pe suma ortogonală a subspațiilor proprii, care este $\mathbb{R}^3$, matricea V coincide astfel cu matricea construită la pasul de existență. Deci $V = U$. $\square$

Vom nota această unică rădăcină prin

$$S^{1/2} := Q \operatorname{diag}(\sqrt{s_1}, \sqrt{s_2}, \sqrt{s_3}) Q^T.$$

Definiția nu depinde de alegerea bazei ortonormate într-un subspațiu propriu multiplu: pe un asemenea subspațiu $S^{1/2}$ este pur și simplu $\sqrt{s}$ ori identitatea.

Aceeași idee permite definirea altor funcții spectrale. Dacă $f : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, punem

$$f(S) := Q \operatorname{diag}(f(s_1), f(s_2), f(s_3)) Q^T.$$

În particular,

$$\log S = Q \operatorname{diag}(\log s_1, \log s_2, \log s_3) Q^T.$$

Pentru $C = F^T F \in \operatorname{Sym}^+(3)$ vom nota

$$U = C^{1/2}.$$

Dacă $Cq_i = c_i q_i$, $c_i > 0$, atunci

$$Uq_i = \sqrt{c_i} q_i.$$

Numerele

$$\lambda_i := \sqrt{c_i}$$

se numesc *întinderi principale*; ele sunt valorile singulare ale lui F . Astfel

$$U = \sum_{i=1}^3 \lambda_i q_i \otimes q_i.$$

2.3 Descompunerea polară

Rădăcina pătrată pozitivă introdusă mai sus permite construirea factorului de întindere din descompunerea polară. Construcția lui U , verificarea faptului că R este rotație și unicitatea sunt făcute în demonstrația următoare.

Teorema 2.3.1 (descompunerea polară). *Pentru orice $F \in GL^+(3)$ există în mod unic $R \in SO(3)$ și $U, V \in \operatorname{Sym}^+(3)$ astfel încât*

$$F = RU = VR, \quad U = (F^T F)^{1/2}, \quad V = (FF^T)^{1/2}, \quad V = RUR^T.$$

Demonstrație. Demonstrația se bazează pe teorema spectrală pentru matrice simetrice pozitiv definite și pe unicitatea rădăcinii pătrate pozitive.

1. Construcția lui U . Deoarece $F \in GL^+(3)$, pentru orice $x \neq 0$ avem $Fx \neq 0$. Prin urmare

$$\langle x, F^T Fx \rangle = \|Fx\|^2 > 0.$$

Așadar $C := F^T F$ este simetrică pozitiv definită. Teorema spectrală furnizează

$$C = Q \operatorname{diag}(c_1, c_2, c_3) Q^T, \quad c_i > 0.$$

Definim

$$U := C^{1/2} = Q \operatorname{diag}(\sqrt{c_1}, \sqrt{c_2}, \sqrt{c_3}) Q^T.$$

Atunci $U \in \operatorname{Sym}^+(3)$, $U^2 = C$ și U este inversabilă.

2. Construcția rotației. Punem $R := FU^{-1}$. Atunci

$$\begin{aligned} R^T R &= (FU^{-1})^T (FU^{-1}) = U^{-T} F^T F U^{-1} \\ &= U^{-1} U^2 U^{-1} = I, \end{aligned}$$

unde am folosit simetria lui U . Deci $R \in O(3)$. Din $U^2 = F^T F$ rezultă

$$(\det U)^2 = (\det F)^2.$$

Valorile proprii ale lui U sunt $\sqrt{c_i} > 0$, deci

$$\det U = \sqrt{c_1 c_2 c_3} > 0.$$

Cum $\det F > 0$ prin ipoteză și $(\det U)^2 = (\det F)^2$, rezultă $\det U = \det F$, iar

$$\det R = \frac{\det F}{\det U} = 1.$$

Prin urmare $R \in SO(3)$ și $F = RU$.

3. Unicitatea. Dacă $F = \tilde{R}\tilde{U}$ cu $\tilde{R} \in SO(3)$ și $\tilde{U} \in \operatorname{Sym}^+(3)$, atunci

$$F^T F = \tilde{U}^T \tilde{R}^T \tilde{R} \tilde{U} = \tilde{U}^2.$$

Dar $F^T F = U^2$. Unicitatea rădăcinii pătrate pozitive dă $\tilde{U} = U$, iar apoi $\tilde{R} = F\tilde{U}^{-1} = FU^{-1} = R$.

4. Forma polară stângă. Definim $V := RUR^T$. Atunci $V \in \operatorname{Sym}^+(3)$ și

$$VR = RUR^T R = RU = F.$$

În plus,

$$V^2 = RU^2 R^T = R(F^T F) R^T = FF^T,$$

deci V este o rădăcină pătrată simetrică pozitiv definită a lui FF^T . Dacă $\tilde{V} \in \operatorname{Sym}^+(3)$ ar satisface și $\tilde{V}^2 = FF^T$, atunci $V^2 = \tilde{V}^2 = FF^T$; unicitatea rădăcinii pătrate pozitive, demonstrată în Subsecțiunea 2.2.1, impune $\tilde{V} = V$. Așadar

$$V = (FF^T)^{1/2}$$

este unic. □

Factorul R reprezintă rotația locală, iar U întinderea pură în configurația de referință. Valorile proprii $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 > 0$ ale lui U se numesc *întinderi principale* sau valori singulare ale lui F . Avem

$$J = \det F = \det R \det U = \det U = \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3.$$

Observația 2.3.2. Aceeași demonstrație este valabilă în $\mathbb{R}^n$: pentru $F \in GL^+(n)$ există unic $F = RU$, cu $R \in SO(n)$ și $U \in \text{Sym}^+(n)$. În particular putem folosi fără o nouă demonstrație versiunea bidimensională în exemplele de forfecare simplă.

2.3.1 Descompunerea în valori singulare

Diagonalizăm U :

$$U = Q \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) Q^T, \quad \lambda_i > 0.$$

Atunci

$$F = (RQ) \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) Q^T.$$

Numerele λ_i sunt valorile singulare ale lui F și reprezintă întinderile principale. Dacă q_i sunt vectorii proprii ai lui U , atunci

$$Fq_i = \lambda_i r_i, \quad r_i = Rq_i,$$

cu (q_i) și (r_i) baze ortonormate. Așadar deformarea afină se descompune într-o rotație a sistemului de axe, trei întinderi pure și o rotație finală.

2.3.2 Forfecarea simplă: valori singulare și rotația polară

În plan considerăm

$$F = \begin{pmatrix} 1 & \gamma \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Atunci

$$C = F^T F = \begin{pmatrix} 1 & \gamma \\ \gamma & 1 + \gamma^2 \end{pmatrix}, \quad \text{tr } C = 2 + \gamma^2, \quad \det C = 1.$$

Valorile proprii $c_{1,2}$ ale lui C sunt rădăcinile ecuației

$$c^2 - (2 + \gamma^2)c + 1 = 0,$$

deci

$$c_{1,2} = 1 + \frac{\gamma^2}{2} \pm \frac{|\gamma|}{2} \sqrt{\gamma^2 + 4}.$$

Întinderile principale sunt $\lambda_i = \sqrt{c_i}$ și satisfac $\lambda_1 \lambda_2 = 1$, deoarece $\det F = 1$.

Pentru rotația polară căutăm $R(\theta)$ astfel încât $U = R(\theta)^T F$ să fie simetric. Scriem

$$R(\theta) = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}.$$

Atunci

$$R(\theta)^T F = \begin{pmatrix} \cos \theta & \gamma \cos \theta + \sin \theta \\ -\sin \theta & -\gamma \sin \theta + \cos \theta \end{pmatrix}.$$

Simetria impune

$$\gamma \cos \theta + \sin \theta = -\sin \theta,$$

adică

$$\tan \theta = -\frac{\gamma}{2}.$$

Ecuția pentru tangentă determină unghiul numai modulo π . Factorul polar trebuie însă să satisfacă $U = R(\theta)^T F \in \text{Sym}^+(2)$. Alegem astfel ramura continuă cu $\theta(0) = 0$, adică $\theta \in (-\pi/2, \pi/2)$ și

$$\theta = -\arctan(\gamma/2).$$

Pentru această ramură, elementele diagonale relevante ale lui U sunt pozitive; cealaltă ramură diferă cu π și ar schimba semnul lui U , încălcând pozitivitatea definită. Prin unicitatea descompunerii polare, aceasta este rotația polară. Așadar rotația polară nu este zero, deși deformarea este numită “forfecare simplă”. Ea conține simultan o rotație și o întindere pură.

2.4 Invarianți și valori singulare

Pentru un material izotrop, direcțiile principale nu trebuie să apară explicit în legea constitutivă. Folosim de aceea invarianții principali ai lui C :

$$I_1(C) = \text{tr } C, \quad I_2(C) = \frac{1}{2}[(\text{tr } C)^2 - \text{tr}(C^2)], \quad I_3(C) = \det C = J^2.$$

Să vedem cum se citesc aceste cantități din valorile proprii. Dacă

$$Cq_i = \lambda_i^2 q_i, \quad i = 1, 2, 3,$$

cu (q_1, q_2, q_3) bază ortonormată, atunci, în această bază,

$$C = \text{diag}(\lambda_1^2, \lambda_2^2, \lambda_3^2).$$

Prin urmare

$$I_1 = \text{tr } C = \lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2$$

și

$$\text{tr}(C^2) = \lambda_1^4 + \lambda_2^4 + \lambda_3^4.$$

Introducând aceste două formule în definiția lui I_2 ,

$$\begin{aligned} I_2 &= \frac{1}{2} \left[(\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2)^2 - (\lambda_1^4 + \lambda_2^4 + \lambda_3^4) \right] \\ &= \lambda_1^2 \lambda_2^2 + \lambda_1^2 \lambda_3^2 + \lambda_2^2 \lambda_3^2. \end{aligned}$$

De asemenea,

$$I_3 = \det C = \lambda_1^2 \lambda_2^2 \lambda_3^2.$$

Aceleași trei expresii apar când dezvoltăm polinomul caracteristic. În baza proprie,

$$\begin{aligned} \det(C - \mu I) &= (\lambda_1^2 - \mu)(\lambda_2^2 - \mu)(\lambda_3^2 - \mu) \\ &= -\mu^3 + I_1\mu^2 - I_2\mu + I_3. \end{aligned}$$

Așadar (I_1, I_2, I_3) determină polinomul caracteristic al lui C și, prin urmare, mulțimea neordonată a valorilor proprii λ_i^2 . Din acest motiv, o funcție spectrală simetrică poate fi descrisă, local și sub ipotezele de regularitate necesare, fie prin (I_1, I_2, I_3) , fie ca funcție simetrică de $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$.

2.5 Măsurile finite de deformare

Tensorul U permite definirea mai multor măsuri ale deformării. Ele conțin aceeași informație spectrală, dar transformă diferit întinderile principale la deformări finite.

Măsură	definiție	valori proprii
Biot	$E_B = U - I$	$\lambda_i - 1$
Green–Saint Venant	$E_G = \frac{1}{2}(U^2 - I)$	$\frac{1}{2}(\lambda_i^2 - 1)$
Hencky	$E_H = \log U$	$\log \lambda_i$
Almansi	$e_A = \frac{1}{2}(I - B^{-1})$	$\frac{1}{2}(1 - \lambda_i^{-2})$

Toate se anulează pentru $U = I$. Diferența dintre ele se vede deja pe o întindere principală scalară: pentru aceeași valoare λ , numerele $\lambda - 1$, $(\lambda^2 - 1)/2$ și $\log \lambda$ nu coincid în general.

O familie care le include pe primele trei este familia Seth–Hill:

$$E^{(m)} = \frac{U^{2m} - I}{2m}, \quad m \neq 0.$$

În baza principală,

$$E^{(m)} = \sum_{i=1}^3 \frac{\lambda_i^{2m} - 1}{2m} N_i \otimes N_i.$$

Pentru $m = \frac{1}{2}$ obținem

$$E^{(1/2)} = U - I,$$

iar pentru $m = 1$,

$$E^{(1)} = \frac{U^2 - I}{2} = \frac{C - I}{2}.$$

Rămâne de explicat cazul $m = 0$. Pentru un scalar $\lambda > 0$,

$$\lambda^{2m} = e^{2m \log \lambda} = 1 + 2m \log \lambda + O(m^2) \quad (m \rightarrow 0).$$

Prin urmare

$$\frac{\lambda^{2m} - 1}{2m} = \log \lambda + O(m),$$

și

$$\lim_{m \rightarrow 0} \frac{\lambda^{2m} - 1}{2m} = \log \lambda.$$

Aplicând acest calcul pe fiecare valoare proprie a lui U ,

$$\lim_{m \rightarrow 0} E^{(m)} = \log U.$$

Putem deci completa familia prin

$$E^{(0)} := \log U.$$

Astfel măsura Hencky apare ca limita familiei Seth–Hill, nu ca o formulă separată fără legătură cu celelalte măsuri.

Mai notăm aici identitatea spectrală pe care o vom folosi ulterior:

$$\operatorname{tr}(\log U) = \sum_{i=1}^3 \log \lambda_i = \log(\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3) = \log \det U = \log J.$$

Ea rezultă direct din definiția spectrală a lui $\log U$ și din $\det U = \det F = J > 0$. Descompunerea deviatorică a lui $\log U$ va fi folosită atunci când introducem energia Hencky, în Capitolul 5.

2.6 Liniarizarea comună a măsurilor de deformare

Considerăm o familie de gradienti

$$F_\varepsilon = I + \varepsilon H, \quad \varepsilon \rightarrow 0.$$

Calculăm mai întâi tensorul Cauchy–Green:

$$\begin{aligned} C_\varepsilon &= F_\varepsilon^T F_\varepsilon \\ &= (I + \varepsilon H^T)(I + \varepsilon H) \\ &= I + \varepsilon(H + H^T) + \varepsilon^2 H^T H \\ &= I + 2\varepsilon \operatorname{sym} H + \varepsilon^2 H^T H. \end{aligned}$$

Dorim acum dezvoltarea lui

$$U_\varepsilon = C_\varepsilon^{1/2}.$$

Scriem

$$U_\varepsilon = I + \varepsilon K + O(\varepsilon^2)$$

și folosim identitatea $U_\varepsilon^2 = C_\varepsilon$. Membrul stâng devine

$$U_\varepsilon^2 = I + 2\varepsilon K + O(\varepsilon^2).$$

Comparând termenii de ordin ε cu dezvoltarea lui C_ε ,

$$2K = 2 \operatorname{sym} H,$$

deci

$$\boxed{U_\varepsilon = I + \varepsilon \operatorname{sym} H + O(\varepsilon^2)}.$$

Partea antisimetrică a lui H nu apare deci în deformarea de ordin întâi.

Pentru Green–Saint Venant,

$$E_G(F_\varepsilon) = \frac{1}{2}(C_\varepsilon - I) = \varepsilon \operatorname{sym} H + \frac{\varepsilon^2}{2} H^T H.$$

Pentru Biot,

$$E_B(F_\varepsilon) = U_\varepsilon - I = \varepsilon \operatorname{sym} H + O(\varepsilon^2).$$

Pentru Hencky folosim dezvoltarea scalară $\log(1+s) = s + O(s^2)$ pe spectrul matricei simetrice $U_\varepsilon - I$:

$$\log U_\varepsilon = (U_\varepsilon - I) + O(\|U_\varepsilon - I\|^2) = \varepsilon \operatorname{sym} H + O(\varepsilon^2).$$

Mai general, pentru fiecare m fix,

$$E^{(m)}(F_\varepsilon) = \varepsilon \operatorname{sym} H + O(\varepsilon^2).$$

Prin urmare toate aceste măsuri au aceeași parte liniară:

$$\boxed{E_{\text{lin}} = \operatorname{sym} H}.$$

Dacă $H = \nabla u$, obținem tensorul deformației infinitezimale

$$\varepsilon(u) = \operatorname{sym} \nabla u.$$

Diferențele dintre Biot, Green–Saint Venant, Hencky și celelalte măsuri apar de la ordinul al doilea în sus.

2.7 Distanța euclidiană la rotații: teorema lui Grioli

Proprietatea de minim a factorului polar este clasică; pentru formulări matriciale moderne și extensii vezi [12].

Teorema 2.7.1. *Pentru $F \in GL^+(3)$ cu descompunerea polară $F = RU$,*

$$\min_{Q \in SO(3)} \|F - Q\|^2 = \|U - I\|^2 = \sum_{i=1}^3 (\lambda_i - 1)^2,$$

iar minimizatorul este $Q = R$.

Demonstrație. Demonstrația folosește numai proprietăți elementare ale normei Frobenius și ale descompunerii spectrale; proprietatea este forma clasică a teoremei lui Grioli, pentru care

vezi și [12].

Pasul 1: eliminarea rotației polare. Pentru orice matrice ortogonală P și orice matrice A ,

$$\|PA\|^2 = \langle PA, PA \rangle = \text{tr}(A^T P^T P A) = \text{tr}(A^T A) = \|A\|^2.$$

Așadar înmulțirea la stânga cu o rotație nu schimbă norma Frobenius. Aplicând aceasta cu $P = R^T$,

$$\begin{aligned} \|F - Q\| &= \|R^T(F - Q)\| = \|R^T R U - R^T Q\| \\ &= \|U - R^T Q\|. \end{aligned}$$

Punem $S = R^T Q$. Deoarece produsul a două rotații aparține din nou lui $SO(3)$, problema inițială este echivalentă cu

$$\min_{S \in SO(3)} \|U - S\|^2.$$

Pasul 2: dezvoltarea pătratului normei. Folosind produsul Frobenius,

$$\begin{aligned} \|U - S\|^2 &= \langle U - S, U - S \rangle \\ &= \langle U, U \rangle + \langle S, S \rangle - 2\langle U, S \rangle \\ &= \|U\|^2 + \|S\|^2 - 2\text{tr}(U^T S). \end{aligned}$$

Tensorul U este simetric, deci $U^T = U$. Pentru $S \in SO(3)$,

$$\|S\|^2 = \text{tr}(S^T S) = \text{tr} I = 3.$$

Prin urmare

$$\|U - S\|^2 = \|U\|^2 + 3 - 2\text{tr}(US).$$

Primele două termene nu depind de S ; minimizarea normei este deci echivalentă cu maximizarea lui $\text{tr}(US)$.

Pasul 3: trecerea în baza principală. Teorema spectrală furnizează o rotație $Q_0 \in SO(3)$ și valori proprii pozitive $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ astfel încât

$$U = Q_0 \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) Q_0^T.$$

Prin invarianta ciclică a urmei,

$$\begin{aligned} \text{tr}(US) &= \text{tr}(Q_0 \text{diag}(\lambda_i) Q_0^T S) \\ &= \text{tr}(\text{diag}(\lambda_i) Q_0^T S Q_0). \end{aligned}$$

Notăm $\tilde{S} = Q_0^T S Q_0 \in SO(3)$. Atunci

$$\text{tr}(US) = \lambda_1 \tilde{s}_{11} + \lambda_2 \tilde{s}_{22} + \lambda_3 \tilde{s}_{33}.$$

Pasul 4: estimarea diagonalelor unei rotații. Fiecare coloană a lui $\tilde{S}$ este un vector unitate.

În particular, pentru fiecare i ,

$$|\tilde{s}_{ii}| \leq 1, \quad \text{deci} \quad \tilde{s}_{ii} \leq 1.$$

Cum toate λ_i sunt strict pozitive,

$$\text{tr}(US) \leq \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = \text{tr} U.$$

Valoarea din dreapta este atinsă pentru $\tilde{S} = I$, adică pentru $S = I$. Mai mult, dacă avem egalitate, atunci fiecare termen pozitiv $\lambda_i(1 - \tilde{s}_{ii})$ trebuie să fie zero; rezultă $\tilde{s}_{ii} = 1$ pentru toți i . O matrice ortogonală ale cărei trei elemente diagonale sunt toate egale cu 1 este identitatea. Minimizatorul este deci unic.

Pasul 5: valoarea minimă. Pentru $S = I$,

$$\min_{S \in SO(3)} \|U - S\|^2 = \|U - I\|^2.$$

În baza principală,

$$\|U - I\|^2 = \sum_{i=1}^3 (\lambda_i - 1)^2.$$

În variabilele inițiale, condiția $S = R^T Q = I$ înseamnă $Q = R$. Prin urmare

$$\boxed{\min_{Q \in SO(3)} \|F - Q\|^2 = \|U - I\|^2 = \sum_{i=1}^3 (\lambda_i - 1)^2,}$$

iar rotația polară R este unica rotație cea mai apropiată de F în norma Frobenius. $\square$

Legătura cu regimul de deformății mici va fi reluată după teorema de rigiditate. Acolo dezvoltăm U_ε la ordinul necesar și folosim formula de mai sus pentru a obține comportarea lui $\text{dist}(I + \varepsilon H, SO(3))$.

2.8 Distanța geodezică și deformarea Hencky

Distanța euclidiană depinde de geometria liniară a spațiului matricelor. Pe grupul $GL^+(3)$ se poate introduce o metrică riemanniană stâng-invariantă și dreapta- $O(3)$ -invariantă, pentru care distanța la $SO(3)$ se exprimă prin $\log U$; vezi [12] și referințele de acolo. Nu dezvoltăm aici teoria geodezicelor pe grupuri Lie; folosim numai formula de distanță și identitățile spectrale. Pentru acestea este suficientă diagonalizarea ortogonală a lui U : dacă $U = Q \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) Q^T$, atunci $\log U = Q \text{diag}(\log \lambda_1, \log \lambda_2, \log \lambda_3) Q^T$, iar urma și partea deviatorică se calculează pe valorile proprii. În forma izotropă utilizată aici,

$$\text{dist}_{\text{geod}}^2(F, SO(3)) = \alpha \|\text{dev} \log U\|^2 + \frac{\beta}{2} [\text{tr}(\log U)]^2, \quad \alpha, \beta > 0.$$

Cele două contribuții au interpretări separate. Deoarece

$$\operatorname{tr}(\log U) = \log \det U = \log J,$$

termenul sferic măsoară modificarea de volum. În schimb

$$\operatorname{dev} \log U = \log U - \frac{1}{3} \operatorname{tr}(\log U)I = \log U - \frac{1}{3}(\log J)I.$$

Deoarece matricea scalară $J^{-1/3}I$ comută cu U , calculul spectral permite adunarea logaritmulor:

$$\log(J^{-1/3}U) = \log U + \log(J^{-1/3}I) = \log U - \frac{1}{3}(\log J)I.$$

Prin urmare

$$\operatorname{dev} \log U = \log(J^{-1/3}U).$$

măsoară numai distorsiunea izocoră.

2.8.1 Simetria întindere–compresiune

Dacă întinderea principală λ este înlocuită cu $1/\lambda$, atunci

$$\log(1/\lambda) = -\log \lambda.$$

Prin urmare energia pătratică în $\log U$ tratează simetric extensia și compresia multiplicativ inversă, proprietate pe care măsura Biot $\lambda - 1$ nu o are.

Forfecarea simplă și distanța la rotații. Pentru forfecarea simplă, valorile singulare și rotația polară au fost calculate în Subsecțiunea 2.3.2. Teorema lui Grioli se aplică direct valorilor singulare calculate acolo și dă

$$\operatorname{dist}^2(F, SO(2)) = (\lambda_1 - 1)^2 + (\lambda_2 - 1)^2.$$

Exemplul arată că partea de rotație dintr-o forfecare simplă este eliminată de minimizarea față de $SO(2)$, iar distanța măsoară numai partea de întindere.

2.9 Rigiditate: când absența deformării implică o mișcare rigidă

Deoarece $SO(3)$ este închis, condiția $\operatorname{dist}(\nabla\varphi, SO(3)) = 0$ este echivalentă cu $\nabla\varphi \in SO(3)$. Prin formula lui Grioli aceasta este, la rândul ei, echivalentă cu $U = I$. Dacă această proprietate este valabilă în toate punctele unui domeniu conex, compatibilitatea gradientului nu permite ca rotația să varieze arbitrar de la punct la punct.

Teorema 2.9.1 (Liouville pentru deformări fără întindere). *Fie $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ deschis și conex și*

fie $\varphi \in C^2(\Omega; \mathbb{R}^3)$. Dacă

$$(\nabla\varphi(x))^T \nabla\varphi(x) = I \quad \text{pentru orice } x \in \Omega,$$

și $\det \nabla\varphi > 0$, atunci există o rotație constantă $Q \in SO(3)$ și un vector constant $b \in \mathbb{R}^3$ astfel încât

$$\varphi(x) = Qx + b \quad \text{în } \Omega.$$

Demonstrație. Notăm $R(x) = \nabla\varphi(x)$. Ipoteza spune că $R(x) \in SO(3)$. Derivând identitatea $R^T R = I$ în direcția x_k , obținem

$$(\partial_k R)^T R + R^T \partial_k R = 0.$$

Prin urmare

$$A_k := R^T \partial_k R \in \mathfrak{so}(3), \quad \partial_k R = R A_k,$$

unde $\mathfrak{so}(3)$ este spațiul matricelor antisimetrice.

Coloana j a lui R este $\partial_j \varphi$. Egalitatea derivatelor mixte dă

$$\partial_k (R e_j) = \partial_k \partial_j \varphi = \partial_j \partial_k \varphi = \partial_j (R e_k),$$

deci, după înmulțire la stânga cu R^T ,

$$A_k e_j = A_j e_k \quad (j, k = 1, 2, 3). \quad (2.R1)$$

Reamintim aici corespondența dintre matricile antisimetrice și vectorii axiali. Pentru

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -a_3 & a_2 \\ a_3 & 0 & -a_1 \\ -a_2 & a_1 & 0 \end{pmatrix}$$

avem, pentru orice $v \in \mathbb{R}^3$,

$$Av = a \times v, \quad a = (a_1, a_2, a_3)^T.$$

Reciproc, orice $A^T = -A$ are în mod unic această formă, cu $a = (A_{32}, A_{13}, A_{21})^T$. Prin urmare, pentru fiecare k , există un unic $a_k \in \mathbb{R}^3$ astfel încât $A_k v = a_k \times v$.

Relația (2.R1) devine

$$a_k \times e_j = a_j \times e_k. \quad (2.R2)$$

Scriem $a_k = (a_{1k}, a_{2k}, a_{3k})$. Alegând succesiv perechile $(j, k) = (1, 2), (1, 3), (2, 3)$ și comparând componentele în (2.R2), se obține

$$a_{12} = a_{21} = a_{13} = a_{31} = a_{23} = a_{32} = 0,$$

iar componentele diagonale satisfac simultan

$$a_{11} = -a_{22}, \quad a_{11} = -a_{33}, \quad a_{22} = -a_{33}.$$

Rezultă $a_{11} = a_{22} = a_{33} = 0$, deci $a_k = 0$ și astfel $A_k = 0$ pentru fiecare k . Prin urmare $\partial_k R = 0$, adică R este constant pe domeniul conex Ω . Notăm această constantă cu $Q \in SO(3)$. Atunci $\nabla(\varphi - Qx) = 0$, iar conexitatea lui Ω implică $\varphi(x) - Qx = b$, cu b constant. $\square$

Observația 2.9.2. Rezultatul explică de ce tensorii $C - I$, $U - I$, $\log U$ și distanța la $SO(3)$ sunt măsuri de deformare: anularea lor peste tot nu descrie o stare nouă de deformare, ci numai o translație și o rotație globală a corpului.

Teorema 2.9.3 (rigiditatea infinitezimală, versiunea clasică). *Fie $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ un domeniu deschis și conex și fie $u \in C^2(\Omega; \mathbb{R}^3)$. Dacă*

$$e(u) = \text{sym } \nabla u = 0 \quad \text{în } \Omega,$$

atunci există $a \in \mathbb{R}^3$ și o matrice constantă $W \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$, $W^T = -W$, astfel încât

$$u(x) = a + Wx \quad \forall x \in \Omega.$$

Demonstrație. Pentru $i, j, k \in \{1, 2, 3\}$ verificăm identitatea

$$\partial_{ij}u_k = \partial_i e_{jk}(u) + \partial_j e_{ik}(u) - \partial_k e_{ij}(u).$$

Într-adevăr,

$$\begin{aligned} & \partial_i e_{jk} + \partial_j e_{ik} - \partial_k e_{ij} \\ &= \frac{1}{2} (\partial_{ik}u_j + \partial_{ij}u_k + \partial_{jk}u_i + \partial_{ji}u_k - \partial_{ki}u_j - \partial_{kj}u_i) \\ &= \partial_{ij}u_k, \end{aligned}$$

unde am folosit egalitatea derivatelor mixte, permisă de regularitatea C^2 . Dacă $e(u) = 0$, membrul drept este zero, deci toate derivatele de ordin doi ale lui u se anulează. Prin urmare fiecare componentă a lui ∇u este constantă pe domeniul conex Ω ; notăm această matrice constantă cu W . Condiția $\text{sym } \nabla u = 0$ dă $W^T = -W$. În sfârșit,

$$\nabla(u - Wx) = 0,$$

iar pe un domeniu conex o funcție C^1 cu gradient nul este constantă. Rezultă $u(x) = a + Wx$. $\square$

Observația 2.9.4. Rezultatul identifică nucleul deformației infinitezimale: $e(u) = \text{sym } \nabla u$ nu detectează translațiile și rotațiile infinitezimale. În Capitolul 7, inegalitatea lui Korn va transforma această observație geometrică într-o estimare cantitativă.

2.10 De la distanța neliniară la deformația infinitezimală

În Secțiunea 2.6 am obținut dezvoltarea la primul ordin $U_\varepsilon = I + \varepsilon \operatorname{sym} H + O(\varepsilon^2)$. Pentru distanța la $SO(3)$ avem nevoie de un pas suplimentar: calculăm aici și termenul de ordinul al doilea. Considerăm o familie de deformări mici

$$\varphi_\varepsilon(x) = x + \varepsilon u(x), \quad F_\varepsilon = I + \varepsilon H, \quad H = \nabla u.$$

Punem $S = \operatorname{sym} H$ și $A = \operatorname{skew} H$. Atunci

$$C_\varepsilon = F_\varepsilon^T F_\varepsilon = I + 2\varepsilon S + \varepsilon^2 H^T H.$$

Aplicația $U \mapsto U^2$ este netedă pe $\operatorname{Sym}(3)$, iar diferențiala sa în I este $X \mapsto 2X$, izomorfism pe $\operatorname{Sym}(3)$. Teorema funcției inverse arată că rădăcina pătrată pozitivă depinde neted de matrice în vecinătatea lui I . Prin urmare $\varepsilon \mapsto U_\varepsilon = \sqrt{C_\varepsilon}$ admite o dezvoltare Taylor și putem scrie

$$U_\varepsilon = I + \varepsilon S + \varepsilon^2 K + O(\varepsilon^3).$$

Ridicând la pătrat,

$$U_\varepsilon^2 = I + 2\varepsilon S + \varepsilon^2(S^2 + 2K) + O(\varepsilon^3).$$

Comparând cu C_ε , rezultă

$$K = \frac{1}{2}(H^T H - S^2).$$

Această dezvoltare rafinează formula de ordinul întâi din Secțiunea 2.6. Prin teorema lui Grioli,

$$\operatorname{dist}^2(I + \varepsilon H, SO(3)) = \|U_\varepsilon - I\|^2 = \varepsilon^2 \|\operatorname{sym} H\|^2 + O(\varepsilon^3). \quad (2.R3)$$

Formula (2.R3) leagă direct teoria neliniară de elasticitatea liniară. Partea antisimetrică $\operatorname{skew} H$ reprezintă, la ordinul întâi, o rotație infinitesimală și nu contribuie la deformația elastică. Partea simetrică $\operatorname{sym} H$ este tensorul de deformație liniarizată.

Exemplu: rotație infinitesimală. Dacă $H = A$ este antisimetrică, atunci $\operatorname{sym} H = 0$. Mai precis,

$$C_\varepsilon = I - \varepsilon^2 A^2, \quad U_\varepsilon = I - \frac{\varepsilon^2}{2} A^2 + O(\varepsilon^4),$$

și astfel

$$\operatorname{dist}(I + \varepsilon A, SO(3)) = \frac{\varepsilon^2}{2} \|A^2\| + O(\varepsilon^4).$$

În particular distanța este $O(\varepsilon^2)$, deși $\|I + \varepsilon A - I\| = O(\varepsilon)$. Norma deplasării față de identitate confundă rotația cu deformarea; distanța la grupul rotațiilor nu face această confuzie.

Exemplu: întindere infinitesimală. Pentru $H = \text{diag}(h_1, h_2, h_3)$, avem $H = S$, iar

$$\text{dist}^2(I + \varepsilon H, SO(3)) = \varepsilon^2(h_1^2 + h_2^2 + h_3^2) + O(\varepsilon^3).$$

În acest caz nu există rotație la ordinul întâi; întreaga perturbație este deformantă.

2.11 O inegalitate punctuală utilă și legătura cu rigiditatea geometrică

Pentru orice $F \in GL^+(3)$, dacă $F = RU$ este descompunerea polară, atunci

$$\text{dist}(F, SO(3)) = \|U - I\|.$$

Cum valorile singulare ale lui F sunt $\lambda_i > 0$, rezultă

$$\text{dist}^2(F, SO(3)) = \sum_{i=1}^3 (\lambda_i - 1)^2.$$

În particular, dacă F rămâne într-o vecinătate fixă a lui $SO(3)$, atunci $\|F^T F - I\|$ și $\text{dist}(F, SO(3))$ controlează reciproc aceeași mărime, cu constante locale. Într-adevăr,

$$\|F^T F - I\|^2 = \sum_{i=1}^3 (\lambda_i^2 - 1)^2 = \sum_{i=1}^3 (\lambda_i - 1)^2 (\lambda_i + 1)^2.$$

Dacă $\lambda_{\min} \leq \lambda_i \leq \lambda_{\max}$, atunci

$$(1 + \lambda_{\min})^2 \text{dist}^2(F, SO(3)) \leq \|F^T F - I\|^2 \leq (1 + \lambda_{\max})^2 \text{dist}^2(F, SO(3)). \quad (2.R4)$$

Dacă F rămâne într-o vecinătate suficient de mică a lui $SO(3)$, valorile singulare rămân într-un interval compact din jurul lui 1, deci constantele de mai sus pot fi alese uniform.

Teorema 2.11.1 (rigiditatea geometrică Friecke–James–Müller, consecință clasică a rezultatului admis). *Fie $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ mărginit, conex și cu frontieră Lipschitz. Există $C(\Omega) > 0$ astfel încât pentru orice $v \in C^1(\overline{\Omega}; \mathbb{R}^3)$ există o rotație constantă $Q \in SO(3)$ pentru care*

$$\left(\int_{\Omega} \|\nabla v - Q\|^2 dX \right)^{1/2} \leq C(\Omega) \left(\int_{\Omega} \text{dist}^2(\nabla v, SO(3)) dX \right)^{1/2}.$$

Constanta poate fi aleasă invariantă la dilatări uniforme ale domeniului.

Nu afirmăm unicitatea rotației Q ; teorema garantează existența unei rotații constante cu estimarea de mai sus. Rezultatul general este formulat în spațiul Sobolev $W^{1,2}$; am scris aici numai consecința pentru funcții C^1 , astfel încât să nu folosim spații funcționale înainte de introducerea lor în Capitolul 7. Demonstrația generală este profundă și depășește obiectivele cursului; vezi [18].

2.12 Măsurile de deformare pentru o deformare radială

Gradientul unei deformări sferic simetrice a fost calculat în Subsecțiunea 1.7.1. Pentru

$$\varphi(X) = \frac{r(R)}{R}X, \quad R = \|X\|,$$

știm că, în baza sferică $(e_R, e_\vartheta, e_\psi)$,

$$F = \text{diag} \left(r'(R), \frac{r(R)}{R}, \frac{r(R)}{R} \right).$$

Dacă

$$r'(R) > 0, \quad r(R) > 0,$$

atunci F este deja simetrică pozitiv definită. Prin unicitatea descompunerii polare,

$$R_{\text{pol}} = I, \quad U = F.$$

Prin urmare întinderile principale sunt

$$\lambda_R = r'(R), \quad \lambda_\vartheta = \lambda_\psi = \frac{r(R)}{R}.$$

Acum putem calcula fără a reface cinematica din Capitolul 1. Măsura Biot este

$$E_B = \text{diag} \left(r'(R) - 1, \frac{r(R)}{R} - 1, \frac{r(R)}{R} - 1 \right),$$

măsura Green–Saint Venant este

$$E_G = \frac{1}{2} \text{diag} \left(r'(R)^2 - 1, \frac{r(R)^2}{R^2} - 1, \frac{r(R)^2}{R^2} - 1 \right),$$

iar deformația Hencky este

$$\log U = \text{diag} \left(\log r'(R), \log \frac{r(R)}{R}, \log \frac{r(R)}{R} \right).$$

Urma ultimei matrice este

$$\text{tr}(\log U) = \log \left[r'(R) \left(\frac{r(R)}{R} \right)^2 \right] = \log J.$$

Astfel exemplul radial verifică direct relația generală $\text{tr}(\log U) = \log J$.

2.13 Probleme pentru seminar

1. Pentru $U = \text{diag}(2, 1, 1/2)$ calculați $E^{(m)}$ pentru $m = 1/2, 1$ și limita $m \rightarrow 0$.
2. Calculați U, R pentru o matrice diagonală $F = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$, $\lambda_i > 0$, și pentru o rotație pură.
3. Verificați formula distanței la $SO(3)$ pentru $F = \text{diag}(2, 1, 1/2)$.
4. Dezvoltați $\log U$ până la ordinul întâi în $H = F - I$, folosind dezvoltarea spectrală din secțiunea de liniarizare a măsurilor de deformare.
5. Pentru forfecarea simplă calculați exact I_1, I_2, I_3 și verificați că $I_1 = I_2 = 3 + \gamma^2$, $I_3 = 1$.
6. Arătați că două matrice $F, \hat{F} \in GL^+(3)$ verifică $F^T F = \hat{F}^T \hat{F}$ dacă și numai dacă $F = Q\hat{F}$ pentru un $Q \in SO(3)$.
7. Arătați că $\det U = \det V = \det F$.
8. Pentru $F = \text{diag}(\lambda, \lambda^{-\nu}, \lambda^{-\nu})$, calculați variația de volum și discutați limita $\lambda \rightarrow 1$.

2.14 Exerciții rezolvate

Problema 2.14.1 (tensorul Cauchy–Green pentru o întindere diagonală). Pentru $F = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$, $\lambda_i > 0$, calculați $C = F^T F$ și $B = F F^T$.

Rezolvare. Deoarece $F^T = F$,

$$C = F^T F = \text{diag}(\lambda_1^2, \lambda_2^2, \lambda_3^2),$$

și identic $B = F F^T = C$. Valorile proprii ale lui C sunt λ_i^2 , deci întinderile principale sunt λ_i .

Problema 2.14.2 (lungimea unui segment material). Fie dX un vector material infinitesimal. Arătați că lungimea sa după deformare satisface

$$\|dx\|^2 = \langle dX, C dX \rangle.$$

Rezolvare. La ordinul întâi, $dx = F dX$. Atunci

$$\|dx\|^2 = \langle F dX, F dX \rangle = \langle dX, F^T F dX \rangle = \langle dX, C dX \rangle.$$

De aceea C conține exact informația privind modificarea lungimilor în descriere materială.

Problema 2.14.3 (deformare rigidă). Dacă $F = Q \in SO(3)$, calculați C , U și tensorul Green–Saint Venant $E = (C - I)/2$.

Rezolvare. Din $Q^T Q = I$ rezultă $C = I$. Rădăcina pătrată pozitivă a lui I este $U = I$, iar

$$E = \frac{1}{2}(I - I) = 0.$$

Prin urmare o rotație pură nu produce deformare, deși F poate fi foarte diferit de I .

Problema 2.14.4 (matrice diagonală). Pentru $F = \text{diag}(2, 1, 1/2)$ determinați R și U în $F = RU$.

Rezolvare. Avem

$$F^T F = \text{diag}(4, 1, 1/4),$$

deci

$$U = (F^T F)^{1/2} = \text{diag}(2, 1, 1/2) = F.$$

Prin urmare $R = FU^{-1} = I$. Deformarea este o întindere pură, fără rotație polară.

Problema 2.14.5 (măsurile clasice de deformare). Pentru întinderea uniaxială $F = \text{diag}(\lambda, 1, 1)$ calculați măsurile Biot $U - I$, Green $\frac{1}{2}(C - I)$ și Hencky $\log U$.

Rezolvare. Aici $U = F$ și $C = F^2$. Prin urmare

$$U - I = \text{diag}(\lambda - 1, 0, 0),$$

$$E = \frac{1}{2} \text{diag}(\lambda^2 - 1, 0, 0),$$

și, prin calcul funcțional spectral,

$$\log U = \text{diag}(\log \lambda, 0, 0).$$

Cele trei măsuri coincid numai la ordinul întâi în jurul lui $\lambda = 1$.

Problema 2.14.6 (descompunerea polară a forfecării simple). Pentru

$$F = \begin{pmatrix} 1 & \gamma \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

în plan, calculați C și valorile sale proprii. Deduceți întinderile principale.

Rezolvare. Avem

$$C = F^T F = \begin{pmatrix} 1 & \gamma \\ \gamma & 1 + \gamma^2 \end{pmatrix}.$$

Polinomul caracteristic este

$$\mu^2 - (2 + \gamma^2)\mu + 1 = 0,$$

deoarece $\text{tr } C = 2 + \gamma^2$ și $\det C = (\det F)^2 = 1$. Astfel

$$c_{1,2} = \frac{2 + \gamma^2 \pm |\gamma| \sqrt{\gamma^2 + 4}}{2}.$$

Întinderile principale sunt

$$\lambda_{1,2} = \sqrt{c_{1,2}},$$

iar produsul lor este 1, în acord cu $\det F = 1$.

Problema 2.14.7 (teorema lui Grioli pentru o matrice diagonală). Pentru $F = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ cu $\lambda_i > 0$, calculați explicit

$$\text{dist}^2(F, SO(3)).$$

Rezolvare. Factorul polar este $R = I$, iar $U = F$. Teorema lui Grioli demonstrată în capitol dă

$$\text{dist}^2(F, SO(3)) = \|U - I\|^2.$$

Cum pătratul normei Frobenius a unei matrice diagonale este suma pătratelor elementelor diagonale,

$$\boxed{\text{dist}^2(F, SO(3)) = (\lambda_1 - 1)^2 + (\lambda_2 - 1)^2 + (\lambda_3 - 1)^2.}$$

Problema 2.14.8 (liniarizarea măsurilor de deformare). Fie $F_\varepsilon = I + \varepsilon H$. Arătați până la ordinul întâi că

$$C_\varepsilon = I + 2\varepsilon \text{sym } H + O(\varepsilon^2), \quad E_\varepsilon = \varepsilon \text{sym } H + O(\varepsilon^2).$$

Rezolvare. Calculăm

$$C_\varepsilon = (I + \varepsilon H)^T (I + \varepsilon H) = I + \varepsilon (H^T + H) + \varepsilon^2 H^T H.$$

Dar $H^T + H = 2 \text{sym } H$, deci

$$C_\varepsilon = I + 2\varepsilon \text{sym } H + \varepsilon^2 H^T H.$$

Prin definiție,

$$E_\varepsilon = \frac{1}{2}(C_\varepsilon - I) = \varepsilon \text{sym } H + \frac{\varepsilon^2}{2} H^T H.$$

Aceasta explică apariția lui $\text{sym } \nabla u$ în teoria liniarizată.

Problema 2.14.9 (distanța la rotații în regim de deformări mici). Folosind dezvoltarea lui U_ε , arătați că

$$\text{dist}^2(I + \varepsilon H, SO(3)) = \varepsilon^2 \|\text{sym } H\|^2 + O(\varepsilon^3).$$

Rezolvare. Din rezultatul demonstrat în capitol,

$$U_\varepsilon = (F_\varepsilon^T F_\varepsilon)^{1/2} = I + \varepsilon \text{sym } H + O(\varepsilon^2).$$

Teorema lui Grioli dă

$$\text{dist}^2(F_\varepsilon, SO(3)) = \|U_\varepsilon - I\|^2.$$

Înlocuind dezvoltarea,

$$\|\varepsilon \text{sym } H + O(\varepsilon^2)\|^2 = \varepsilon^2 \|\text{sym } H\|^2 + O(\varepsilon^3).$$

Partea antisimetrică nu apare la ordinul principal deoarece ea reprezintă rotația infinitezimală.

Problema 2.14.10 (separarea volumetrică-izocoră). Pentru $F \in GL^+(3)$ definiți

$$F_{\text{iso}} = J^{-1/3} F, \quad J = \det F.$$

Arătați că $\det F_{\text{iso}} = 1$ și explicați cum se descompune $\log U$ în parte sferică și deviatorică.

Rezolvare. Folosind omogenitatea determinantului în dimensiunea trei,

$$\det(J^{-1/3}F) = J^{-1} \det F = 1.$$

Pentru U pozitiv definit, $\text{tr}(\log U) = \log \det U = \log J$. Orice matrice simetrică se descompune în

$$\log U = \text{dev} \log U + \frac{1}{3} \text{tr}(\log U)I = \text{dev} \log U + \frac{1}{3}(\log J)I.$$

Prima parte descrie schimbarea de formă la volum constant, iar a doua schimbarea pur volumetrică.

2.15 Exerciții propuse suplimentare

Nivelul A

2.A.1 (*tensorii de deformare pentru o întindere diagonală*) Fie

$$F = \text{diag} \left(4, 1, \frac{1}{2} \right).$$

Calculați J, C, B, U, V , tensorul Green–Saint Venant E , deformarea Hencky $\log U$, invariantii I_1, I_2, I_3 ai lui C și distanța euclidiană $\text{dist}^2(F, SO(3))$.

Indicație. Pentru F diagonal cu elemente pozitive, descompunerea polară este $R = I$, $U = V = F$ (Teorema 2.3.1); folosiți teorema lui Grioli pentru distanță și definiția spectrală a lui $\log U$.

Răspuns.

$$J = 2, \quad C = B = \text{diag} \left(16, 1, \frac{1}{4} \right),$$

$$U = V = \text{diag} \left(4, 1, \frac{1}{2} \right), \quad R = I,$$

$$E = \text{diag} \left(\frac{15}{2}, 0, -\frac{3}{8} \right), \quad \log U = \text{diag}(2 \ln 2, 0, -\ln 2), \quad \text{tr} \log U = \ln 2 = \ln J,$$

$$I_1 = \frac{69}{4}, \quad I_2 = \frac{81}{4}, \quad I_3 = 4 = J^2,$$

$$\text{dist}^2(F, SO(3)) = \sum_i (\lambda_i - 1)^2 = \frac{37}{4} = 9.25.$$

2.A.2 (*descompunere polară cu rotație nebanală*) Fie

$$F = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Verificați că $F \in GL^+(3)$, calculați C, B, U, V, R și verificați relațiile $F = RU = VR$ și $V = RUR^T$. Care sunt întinderile principale și direcțiile principale materiale și spațiale?

Indicație. Calculați mai întâi $C = F^T F$ (care este diagonal), extrageți $U = \sqrt{C}$ (Lema 2.2.1) și apoi $R = FU^{-1}$; verificați $R^T R = I$, $\det R = 1$.

Răspuns.

$$\det F = 6 > 0, \quad C = \text{diag}(9, 4, 1), \quad B = \text{diag}(4, 9, 1),$$

$$U = \text{diag}(3, 2, 1), \quad V = \text{diag}(2, 3, 1), \quad R = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in SO(3).$$

Întinderile principale sunt $\lambda = (3, 2, 1)$; direcțiile principale materiale sunt e_1, e_2, e_3 , iar cele spațiale sunt $Re_1 = e_2$, $Re_2 = -e_1$, $Re_3 = e_3$. Matricea R este rotația de 90° în jurul lui e_3 .

2.A.3 (*descompunerea volumetric-izocoră a deformării logaritmice*) Fie $F = \text{diag}(4, 2, 1/2)$. Calculați J , $\log U$, $\log J$, partea deviatorică $\text{dev} \log U$ și verificați identitatea de ortogonalitate

$$\|\log U\|^2 = \|\text{dev} \log U\|^2 + \frac{1}{3}(\log J)^2.$$

Indicație. Folosiți $\text{tr} \log U = \log J$ și $\text{dev} A = A - \frac{1}{3}(\text{tr} A)I$; calculele se fac pe valorile proprii ale lui U .

Răspuns.

$$J = 4, \quad \log U = \ln 2 \text{ diag}(2, 1, -1), \quad \log J = 2 \ln 2,$$

$$\text{dev} \log U = \frac{\ln 2}{3} \text{diag}(4, 1, -5),$$

$$\|\log U\|^2 = 6(\ln 2)^2, \quad \|\text{dev} \log U\|^2 = \frac{14}{3}(\ln 2)^2.$$

Astfel $\frac{14}{3}(\ln 2)^2 + \frac{1}{3}4(\ln 2)^2 = 6(\ln 2)^2$.

Nivelul B

2.B.1 (*descompunere polară, Grioli și Hencky pentru o matrice nediagonală*) Fie

$$F = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

(a) Verificați $\det F > 0$, calculați C și arătați că

$$U = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad R = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

(b) Determinați întinderile principale și calculați $\text{dist}^2(F, SO(3))$ folosind teorema lui Grioli; verificați rezultatul calculând direct $\|F - R\|^2$. (c) Calculați $\log U$.

Indicație. (a) $C = U^2$; căutați U în forma $\alpha I + \beta(e_1 \otimes e_2 + e_2 \otimes e_1)$ și folosiți unicitatea rădăcinii pătrate pozitive (Lema 2.2.1). (b) Teorema 2.11.1. (c) Diagonalizați U în baza $2^{-1/2}(1, 1, 0)$, $2^{-1/2}(1, -1, 0)$, e_3 .

Răspuns.

$$\det F = 3, \quad C = \begin{pmatrix} 5 & 4 & 0 \\ 4 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = U^2.$$

Valorile proprii ale lui U sunt $(3, 1, 1)$, deci

$$\text{dist}^2(F, SO(3)) = (3 - 1)^2 = 4, \quad \|F - R\|^2 = 4.$$

Mai mult,

$$\log U = \frac{\ln 3}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

2.B.2 (*trei identități spectrale utile*) Fie $F \in GL^+(3)$ cu descompunerea polară $F = RU$ și întinderile principale $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 > 0$. Demonstrați:

$$(a) \quad \|F\|^2 = \|U\|^2 = \lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2 = I_1(C),$$

$$(b) \quad \|\text{Cof } F\|^2 = \lambda_1^2 \lambda_2^2 + \lambda_2^2 \lambda_3^2 + \lambda_3^2 \lambda_1^2 = I_2(C),$$

$$(c) \quad \text{dist}^2(F, SO(3)) = \|F\|^2 + 3 - 2 \text{tr } U.$$

Deduceți din (c) că minimizarea lui $\|F - Q\|^2$ pe $SO(3)$ este echivalentă cu maximizarea termenului corespunzător de urmă și regăsiți enunțul teoremei lui Grioli.

Indicație. Folosiți invarianța normei Frobenius la înmulțirea cu matrice ortogonale, $\|QA\| = \|A\|$, relația $\text{Cof}(RU) = R \text{Cof } U$ și diagonalizarea lui U (§ 2.4, Teorema 2.11.1).

Răspuns. Toate cele trei identități sunt adevărate. Pentru $Q \in SO(3)$,

$$\|F - Q\|^2 = \|F\|^2 + 3 - 2 \text{tr}(UR^T Q),$$

iar $\text{tr}(UR^T Q) \leq \text{tr } U$, cu egalitate pentru $Q = R$. Rezultă

$$\min_{Q \in SO(3)} \|F - Q\|^2 = \|U - I\|^2.$$

2.B.3 (*contraexemplu: deformarea Hencky nu este aditivă*) Fie

$$F_1 = \text{diag}\left(2, \frac{1}{2}, 1\right), \quad F_2 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in SO(3).$$

(a) Calculați $\log U(F_1)$ și $\log U(F_2)$. (b) Calculați $\log U(F_1 F_2)$ și $\log U(F_2 F_1)$. (c) Concluzionați că, în general,

$$\log U(F_1 F_2) \neq \log U(F_1) + \log U(F_2),$$

$$\log U(F_1 F_2) \neq \log U(F_2 F_1),$$

deși $\|\log U\|$ este invariantă la compunerea cu rotații la stânga. Explicați diferența dintre

rotația configurației deformate și rotația configurației de referință.

Indicație. $C(F_1 F_2) = F_2^T C(F_1) F_2$ dacă $F_2 \in SO(3)$; o rotație la dreapta rotește direcțiile principale materiale, iar una la stânga nu schimbă U .

Răspuns.

$$\log U(F_1) = \text{diag}(\ln 2, -\ln 2, 0), \quad \log U(F_2) = 0,$$

$$\log U(F_1 F_2) = \text{diag}(-\ln 2, \ln 2, 0),$$

$$\log U(F_2 F_1) = \text{diag}(\ln 2, -\ln 2, 0).$$

Prin urmare aditivitatea este falsă. Rotația la stânga lasă U neschimbat, pe când rotația la dreapta schimbă direcțiile materiale principale. Normele rămân egale: $\|\log U\| = \sqrt{2} \ln 2$ în cazurile nebanale de mai sus.

Nivelul C

2.C.1 (*întindere uniaxială izocoră: toate măsurile de deformare și linearizarea lor*) Fie $\lambda > 0$ și

$$F = \text{diag}(\lambda, \lambda^{-1/2}, \lambda^{-1/2}).$$

(a) Calculați J, C, U, R și invariantii I_1, I_2, I_3 ai lui C . Ce interpretare mecanică are J ? (b) Calculați măsurile din familia Seth–Hill $E^{(1)} = U - I$ (Biot), $E^{(2)} = \frac{1}{2}(C - I)$ (Green–Saint Venant) și $E^{(0)} = \log U$ (Hencky). Care dintre ele are urma nulă pentru orice $\lambda > 0$ și de ce? (c) Puneți $\lambda = 1 + \epsilon$ și dezvoltăți cele trei măsurile până la ordinul întâi în ϵ ; arătați că toate coincid cu $\epsilon = \text{sym } \nabla u$ și identificați coeficientul lui Poisson al acestei familii de deformări în regim infinitesimal.

Indicație. (a) F este diagonal pozitiv, deci $R = I$, $U = F$ (Teorema 2.3.1). (b) Folosiți liniarizarea comună a măsurilor de deformare și identitatea $\text{tr } \log U = \log J$. (c) Folosiți aceeași dezvoltare pentru U_ϵ .

Răspuns.

$$J = 1, \quad C = \text{diag}(\lambda^2, \lambda^{-1}, \lambda^{-1}), \quad U = F, \quad R = I,$$

$$I_1 = \lambda^2 + 2\lambda^{-1}, \quad I_2 = \lambda^{-2} + 2\lambda, \quad I_3 = 1.$$

$$E^{(1)} = \text{diag}(\lambda - 1, \lambda^{-1/2} - 1, \lambda^{-1/2} - 1),$$

$$E^{(2)} = \frac{1}{2} \text{diag}(\lambda^2 - 1, \lambda^{-1} - 1, \lambda^{-1} - 1),$$

$$E^{(0)} = \ln \lambda \text{diag}\left(1, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right).$$

Numai $\log U$ are urma nulă pentru orice λ , deoarece $\text{tr } \log U = \log J = 0$. Pentru $\lambda = 1 + \epsilon$, toate trei devin

$$\epsilon \text{diag}\left(1, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right) + O(\epsilon^2),$$

deci $\nu = 1/2$.

2.C.2 (*rigiditate: rolul conexității și echivalența măsurilor lângă $SO(3)$*) (a) Fie $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ deschis și conex și $\varphi \in C^2(\Omega; \mathbb{R}^3)$ cu $\nabla \varphi^T \nabla \varphi = I$ și $\det \nabla \varphi > 0$ în Ω . Enunțați concluzia

și explicați unde intervine, în demonstrație, egalitatea derivatelor mixte. (b) Construiți un contraexemplu care arată că ipoteza de conexitate este necesară: găsiți Ω deschis, neconex, și $\varphi \in C^\infty(\Omega; \mathbb{R}^3)$ cu $\nabla \varphi \in SO(3)$ peste tot, dar care nu este restricția unei singure mișcări rigide. (c) Pentru $F = \text{diag}(4, 1, 1/2)$ verificați numeric inegalitatea din § 2.17,

$$(1 + m)^2 \text{dist}^2(F, SO(3)) \leq \|F^T F - I\|^2 \leq (1 + M)^2 \text{dist}^2(F, SO(3)),$$

cu $m = \min_i \lambda_i$, $M = \max_i \lambda_i$, și comentați ce se întâmplă cu constantele când F se apropie de $SO(3)$.

Indicație. (a) Teorema 2.15.1 (Liouville). (b) Luați reuniunea a două bile disjuncte. (c) $\|C - I\|^2 = \sum_i (\lambda_i - 1)^2 (\lambda_i + 1)^2$.

Răspuns. (a) $\varphi(x) = Qx + b$, cu $Q \in SO(3)$, $b \in \mathbb{R}^3$ constante. Egalitatea $\partial_k \partial_j \varphi = \partial_j \partial_k \varphi$ conduce la relațiile $A_k e_j = A_j e_k$, care forțează $A_k = R^T \partial_k R = 0$, deci R este constant. (b) De exemplu,

$$\Omega = B(0, 1) \cup B(5e_1, 1), \quad \varphi(x) = \begin{cases} x, & x \in B(0, 1), \\ Q_0 x + b_0, & x \in B(5e_1, 1), \end{cases}$$

cu $Q_0 \in SO(3)$, $Q_0 \neq I$. (c)

$$\text{dist}^2(F, SO(3)) = \frac{37}{4} = 9.25, \quad \|C - I\|^2 = 225.5625,$$

$$m = \frac{1}{2}, \quad M = 4,$$

$$20.8125 \leq 225.5625 \leq 231.25.$$

Când $\lambda_i \rightarrow 1$, ambele constante tind la 4, deci $\|C - I\| \approx 2 \text{dist}(F, SO(3))$.

2.C.3 (*distanță euclidiană vs. distanță geodezică: simetria tensiune–compresiune*) Fie $Q_0 \in SO(3)$ oarecare, $U_0 = \text{diag}(4, 1, 1)$ și $F = Q_0 U_0$. (a) Calculați descompunerea polară a lui F , întinderile principale, J și $\log U$. (b) Calculați

$$\text{dist}_{\text{eucl}}^2(F, SO(3)) = \sum_i (\lambda_i - 1)^2$$

și

$$\text{dist}_{\text{geod}}^2(F, SO(3)) = \mu \|\text{dev} \log U\|^2 + \frac{\kappa}{2} (\log J)^2.$$

(c) Repetați calculul pentru F^{-1} și comparați. Ce proprietate de simetrie tensiune–compresiune are măsura geodezică și pe care o pierde cea euclidiană?

Indicație. § 2.11 pentru distanța euclidiană, § 2.12 pentru cea geodezică; folosiți faptul că valorile singulare ale lui F^{-1} sunt $1/\lambda_i(F)$.

Răspuns. (a) $R = Q_0$, $U = U_0$, $\lambda = (4, 1, 1)$, $J = 4$, $\log U = \text{diag}(2 \ln 2, 0, 0)$. (b)

$$\text{dist}_{\text{eucl}}^2 = 9,$$

$$\begin{aligned}\operatorname{dev} \log U &= \frac{2 \ln 2}{3} \operatorname{diag}(2, -1, -1), & \|\operatorname{dev} \log U\|^2 &= \frac{8}{3} (\ln 2)^2, \\ (\log J)^2 &= 4(\ln 2)^2,\end{aligned}$$

prin urmare

$$\operatorname{dist}_{\text{geod}}^2 = \frac{8}{3} \mu (\ln 2)^2 + 2\kappa (\ln 2)^2.$$

(c) Pentru F^{-1} , valorile singulare sunt $(1/4, 1, 1)$, deci

$$\operatorname{dist}_{\text{eucl}}^2 = \left(\frac{1}{4} - 1\right)^2 = \frac{9}{16} \neq 9,$$

în timp ce $\|\operatorname{dev} \log U\|^2$ și $(\log J)^2$ rămân neschimbate. Măsura logaritmică tratează simetric o întindere λ și compresia inversă $1/\lambda$; măsura euclidiană nu are această proprietate.