

Universitatea “Al. I. Cuza” Iași
Facultatea de Matematică

ghid pentru cursurile de mecanică pentru matematicieni

Modelare și metode matematice în mecanica clasică

Cuprins

1	Descrierea cadrului de lucru	3
1.2	Scurtă istorie	3
1.3	Domeniul mecanicii clasice	4
1.4	Despre modelare în mecanică	7
1.5	Modelul matematic al unui corp continuu	9
1.6	Bibliografie pentru curs și seminar	10
I	Elemente de mecanică rațională	11
2	Cinematica și dinamica punctului material	12
2.1	Traectoria. Ecuatii cinematice	12
2.2	Vectorul viteză, vectorul accelerație	15
2.3	Axiomele mecanicii punctului material în mecanica clasică	19
2.3.1	Axioma 1: Principiul inerției	19
2.3.2	Axioma 2: Principiul impulsului	20
2.3.3	Axioma 3: Principiul acțiunii și reacțiunii	21
2.4	Mișcarea relativă din mecanica clasică	22
2.5	Ecuatiile de mișcare în repere neinertiale	28
2.6	Existența soluției	33
2.7	Mișcări particulare. Teme de seminar	34
2.7.1	Mișcarea unui punct material greu	34
2.7.2	Mișcarea plană	36
2.7.3	Mișcarea punctului material sub o forță de tip central	38
2.7.4	Legile lui Kepler. Forța de atracție gravitațională	42
2.7.5	Mișcarea oscilatorie armonică	45
2.8	Teoreme generale ale dinamicii punctului material	48
2.9	Tensorul metric. Expresia vitezei unui punct material în coordonate curbilinii	51
2.10	Abordarea din mecanica rațională a mișcării unui punct material supus la legături	54
2.10.1	Pendulul matematic. Temă de seminar	56
2.11	Dificultățile mecanicii raționale dacă folosim ecuația lui Newton	58

II	Mecanică analitică	59
3	Dinamica sistemelor de puncte materiale libere	60
3.1	Ecuatiile de mişcare a sistemelor de puncte materiale libere	60
3.1.1	Expresia energiei cinetice a unui sistem de puncte materiale libere în coordonate curbilinii	61
3.2	Temă de seminar. Problema celor două corpuri	63
3.3	Mişcarea în spaţiul configuraţiilor	66
4	Elemente de calcul variaţional	71
4.1	Funcţionale diferentiabile, puncte staţionare	71
4.2	Ecuatiile Euler-Lagrange	73
5	Sisteme de puncte supuse legăturilor	78
5.1	Deplasări posibile. Deplasări virtuale	78
5.2	Axioma legăturilor ideale. Principiul lui D'Alembert	82
5.3	Spaţiul lui Lagrange	84
5.4	Ecuatiile lui Lagrange	85
5.5	Sisteme naturale	88
5.6	Transformări Legendre	91
5.7	Ecuatiile lui Hamilton. Parantezele Poisson	94
5.8	Transformări canonice	97
5.9	Teorema Hamilton-Jacobi	102
III	Medii continue deformabile	105
6	Cinemática mediilor continue deformabile	106
6.1	Corp deformabil vs. corp rigid	106
6.2	Descrierea deformării unui mediu continuu	109
7	Principiile mecanicii mediilor deformabile	118
8	Ecuatii constitutive	126
8.1	Ecuatiile solidelor elastice în teoria liniară	126
8.2	Ecuatiile fluidelor omogene şi izotrope	128
9	Unele probleme matematice privind mediile elastice izotrope	131
9.1	Unicitatea soluţiei pentru cazul dinamic	131
9.2	Unicitatea soluţiei problemelor de echilibru	133
9.2.1	Ecuatiile de echilibru	133
9.2.2	Reciprocitate şi unicitate în elastostatică	134
9.3	Inegalitatea lui Korn	135
9.4	Existenţa soluţiei problemei Dirichlet de echilibru	136

Capitolul 1

Descrierea cadrului de lucru

Mecanica este una dintre primele științe fundamentale ale naturii în cadrul căreia s-au introdus noțiuni fundamentale (traietorie, viteză, accelerație, forță, masă, energie etc.) și s-au stabilit legi fundamentale (principiile mecanicii, teoria impulsului, conservării energiei mecanice etc.), ea evoluând împreună cu civilizația și cu nevoile și preocupările omenirii. Noțiunile din mecanică sunt folosite în toate capitolele de fizică și au stat la baza introducerii multor noțiuni din matematică, a formulării unor probleme matematice și uneori chiar la indicarea celui mai potrivit mod de a le rezolva. Sigur, unele noțiuni care în trecut au fost revoluționare sunt considerate în prezent ca fiind banale, nu din cauza că ar fi evidente și neimportante de înțeles ci mai ales pentru că sunt clar formulate, au fost supuse unei perioade lungi de dezbateri și prezentate etapizat pe parcursul actului educațional, încât veridicitatea lor nu se mai pune sub semnul întrebării. Unele abordări au fost părăsite sau înlocuite cu altele ce sunt adaptate tehnologiilor și metodelor matematice actuale. Mai mult, limbajul și metoda de prezentare s-au modificat de-a lungul timpului, ajungându-se la o modalitate mult mai ușoară de transmis și înțeles. Cu toate acestea, trebuie insistat pe înțelegerea în profunzime a unui domeniu, acceptând doar adevărurile demonstrate și cunoscând în mod clar pe ce axiome și pe ce implicații logice se bazează întreaga construcție a unei afirmații sau a unei teorii. În știință nu este posibil și nici acceptabil să se spună orice fără să se argumenteze complet și logic.

1.2 Scurtă istorie

Fenomenele din natură sunt interesante pentru că sunt caracterizate de schimbări (transformări) perceptibile de către un observator. Deplasarea unui corp are loc în raport cu alte corpuri, prin mișcare (deplasare) înțelegându-se schimbarea poziției relative a unui corp față de altul. Perceperea schimbărilor, a deplasărilor, a dus la întrebări și la dorința de a le explica.

Mecanica s-a dezvoltat ca știință încă din antichitate, fiind strâns legată de problemele puse de tehnica construcțiilor, cu precădere în statică: Archytas din Tarent (428 î. Hr. – 347 î. Hr.) inițiază studiul scripetilor; Arhimede (287–212 î. Hr.) introduce noțiunea de moment, teoria centrului de greutate și a conceput teoria pârgurilor,

Primele rezultate remarcabile se obțin în perioada Renașterii: Leonardo da Vinci (1452–1519) dă o teorie a mecanismelor, studiază legile frecării, teoria planului înclinat, definește și aplică momentul forței; Nicolaus Copernicus (1473–1543) studiază mișcarea planete-

lor, studiu ce va fi continuat apoi de Johannes Kepler (1571-1665); Sir Francis Bacon (1561-1626) arată importanța cercetării experimentale ca mijloc de investigare în știință. Inițiatorul dinamicii este Galileo Galilei (1564-1642) care a descoperit legea inerției, legile căderii corpurilor etc. Legile dinamicii au fost date de Isaac Newton (1643-1727) în celebra sa carte *Philosophia naturalis Principia mathematica* (1687). Mecanica s-a bucurat apoi de contribuțiile aduse de Leonhard Euler (1707-1783), care studiază dinamica gazelor și introduce mijloace analitice pentru probleme din astronomie; Augustin-Louis Cauchy (1789-1857) introduce tensorul tensiune Cauchy și studiază echilibrul barelor și a membranelor elastice; Jean-Baptiste le Rond d'Alembert (1717-1783) introduce conceptul de forțe generalizate pentru sisteme accelerate cu constrângeri; Joseph-Louis Lagrange (1736-1813) pune bazele mecanicii analitice; Sir William Rowan Hamilton (1805-1865) formulează mecanica hamiltoniană; Henri Poincaré (1854-1912) și Aleksandr Mikhailovich Lyapunov (1857-1918) studiază stabilitatea sistemelor dinamice; Clifford Truesdell (1919-2000) și Walter Noll (1925-2017) axiomatizează mecanica mediilor continue și a termodinamicii.

Pentru viteze apropiate de viteza luminii a fost creată mecanica relativistă de către Albert Einstein (1879-1955), în timp ce pentru studiul particulelor de dimensiuni foarte mici Erwin Schrödinger (1887-1961) a introdus mecanica cuantică. Stephen Hawking (1942-2018) elaborează un model matematic asupra originii și evoluției universului în expansiune și studiază găurile negre din univers.

În ceea ce privește interesul școlii ieșene de mecanică, menționăm că numeroși cercetători au obținut rezultate importante prin elaborarea unor modele noi, prin studiul matematic al acestor modele sau prin rezolvarea unor probleme care apar în teoriile pur mecanice sau în cele în care se studiază interacțiunile dintre mișcarea mecanică și câmpul termic sau câmpul electromagnetic. Amintim contribuțiile profesorilor Constantin Popovici (1878-1956), Ioan Grindei (1914-1975), Alexandru Myller (1879-1965), Adolf Haimovici (1912-1993), Mendel Haimovici (1906-1973), Constantin I. Borș (1928-1998) precum și contribuțiile recente ale profesorilor Dorin Ieșan (teoria elasticității și termoelasticității, deformarea cilindrilor, medii cu microstructură), Stan Chiriță (teoria elasticității și termoelasticității, comportarea spațială a soluțiilor, propagarea undelor), Cătălin Galeș (mecanică cerească și astrodinamică, medii cu microstructură, elasto-magnetism) și Mircea Bîrsan (teoria plăcilor și pânzelor elastice).

1.3 Domeniul mecanicii clasice

Mecanica clasică studiază deplasarea (mișcarea) macroscopică în spațiu și timp (univers) a corpurilor solide, lichide și gazoase precum și cauzele care produc această mișcare. Cu toate acestea, mecanica clasică oferă și modele generalizate ce iau în considerare structura microscopică a corpurilor, fiecare particulă din corp fiind înzestrată cu anumite funcții ce sunt capabile să descrie influența mișcării sale microscopice sau a structurii interne a corpului asupra mișcării macroscopice a întregului corp.

Acest curs se încadrează în totalitate în cadrul mecanicii clasice newtoniene al cărui domeniu de valabilitate este restrâns la corpurile de dimensiuni obișnuite sau mari și la viteze mici în comparație cu viteza luminii în vid ($c = 3 \cdot 10^8 \text{ m/s}$), scopul lui fiind de a insista asupra aspectelor matematice ale modelării din mecanică și nu asupra experimentelor. Se dorește deci ca în afara unor principii ce vor fi acceptate drept adevărate, toate celelalte

rezultate să fie justificate și deduse pur matematic. Prin crearea unui model matematic se ajunge la cunoașterea și înțelegerea realității fără a fi constrânși să realizăm iarăși și iarăși fenomenul studiat. Sigur, de multe ori aceste modele sunt ideale, însă pot fi adaptate unor situații concrete cerute, prin calibrare cu datele experimentale.

În mecanica clasică, spațiul locațiilor și timpul sunt considerate independente, adică nu se influențează reciproc. Timpul va fi modelat de noi folosind axa reală $\mathbb{R}$ (axa timpului), iar spațiul locațiilor va fi reprezentat de spațiul punctelor din spațiul afin $\mathbb{R}^3$. Universul va fi modelat de spațiul afin $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^3$. Considerând fixată o origine O în $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^3$, elementele universului sunt de forma $a = (t, \bar{r}) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^3$, unde $t \in \mathbb{R}$ și $\bar{r} \in \mathbb{R}^3$ este vectorul de poziție al unui punct din $\mathbb{R}^3$ față de origine. Elementele universului vor fi numite *evenimente*. Fie două evenimente $a_1 = (t_1, \bar{r})$ și $a_2 = (t_2, \bar{r}_2)$. Atunci $t = t_2 - t_1$ se numește intervalul de timp între evenimentele a_1 și a_2 iar dacă

- $t_1 = t_2$, atunci evenimentele a_1 și a_2 se numesc *simultane*;
- $t_1 < t_2$, atunci spunem că evenimentul a_1 are loc *înaintea* evenimentului a_2 ;
- $t_1 > t_2$, atunci spunem că evenimentul a_1 are loc *după* evenimentului a_2 .

Pentru două evenimente simultane $a = (t, \bar{r}_a)$ și $b = (t, \bar{r}_b)$ definim distanța dintre ele prin

$$d(a, b) = \|\bar{r}_a - \bar{r}_b\|,$$

norma fiind norma din $\mathbb{R}^3$.

Să remarcăm faptul că s-a definit noțiunea de distanță doar între evenimente simultane.

Prin evoluție a evenimentului $(t_0, \bar{r}_0)$ înțelegem mulțimea evenimentelor aparținând unei mulțimi de forma

$$X := \{(t, \bar{r}(t)) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^3 \mid t \in \mathbb{R}, \bar{r} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3 \text{ funcție continuă, a.î. } \bar{r}(t_0) = \bar{r}_0\},$$

mulțime ce se numește *linie de univers*.

Un fenomen poate fi studiat de către doi observatori care folosesc sisteme de coordonate diferite. Apar în mod firesc întrebările:

- Care este legătura dintre coordonatele unui eveniment indicat de către cei doi observatori?
- Care aspecte sau cantități implicate în descrierea unui fenomen sunt dependente de sistemul de coordonate (le vom numi *relative*) și care sunt independente de sistemul de coordonate (le vom numi *absolute*).

Caracterul absolut al spațiului și timpului enunțat de Newton (baza mecanii clasice) este dat de *Principiul relativității al lui Galilei*:

- *Dacă supunem liniile de univers ale tuturor punctelor oricărui sistem mecanic (evoluțiile evenimentelor) la una și aceeași transformare a lui Galilei, obținem liniile de univers ale aceluiași sistem.*

Transformările lui Galilei sunt următoarele izomorfisme de spații afine pe $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^3$

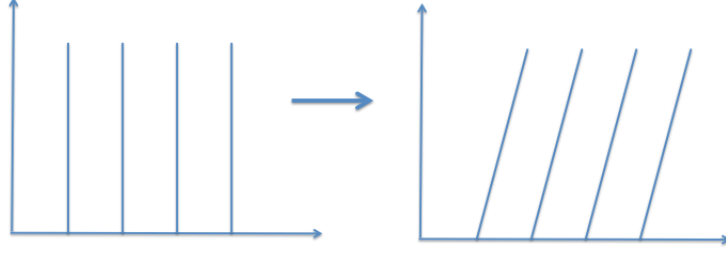


Figura 1.1: Principiul relativității lui Galilei.

- translația originii cu $(\hat{t}, \bar{a}) \in \mathbb{R}^4$:

$$g_1(t, \bar{r}) = (t + \hat{t}, \bar{r} + \bar{a}) \quad \forall t \in \mathbb{R}, \quad \forall \bar{r} \in \mathbb{R}^3.$$

- deplasarea rectilinie și uniformă cu viteza constantă $\bar{v} \in \mathbb{R}^3$:

$$g_2(t, \bar{r}) = (t, \bar{r} + \bar{v}t) \quad \forall t \in \mathbb{R}, \quad \forall \bar{r} \in \mathbb{R}^3.$$

- rotația axelor de coordonate:

$$g_3(t, \bar{r}) = (t, G\bar{r}) \quad \forall t \in \mathbb{R}, \quad \forall \bar{r} \in \mathbb{R}^3,$$

unde $G \in O(3) := \{X \in \mathbb{R}^{3 \times 3} \mid X^T X = I_3\}$ este o transformare ortogonală, $\mathbb{R}^{3 \times 3}$ este spațiul matricelor pătratice de ordin 3 iar I_3 este matricea identitate din $\mathbb{R}^{3 \times 3}$,

- toate compunerile morfismelor de mai sus.

Problema 1.3.1. Să se arate că transformările lui Galilei sunt automorfisme bijective pe $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^3$ ce păstrează intervalele de timp, duc evenimente simultane în evenimente simultane și păstrează distanța dintre evenimentele simultane.

Aceste transformări formează un grup împreună cu compunerea funcțiilor numit *grupul lui Galilei*¹. Orice transformare g aparținând grupului lui Galilei are proprietatea de a păstra intervalele de timp și distanțele dintre evenimentele simultane.

Acest principiu exprimă faptul că legile din mecanica clasică trebuie să fie invariante la transformările din grupul lui Galilei, în sensul că asupra legilor (ecuațiilor, formulărilor matematice, modelelor matematice ce vor defini liniile de univers) se impun condiții de invarianță față de transformările aparținând grupului transformărilor lui Galilei.

Cu alte cuvinte, dacă evenimentele aparținând unei linii de univers

$$X = \{(t, \bar{r}(t)) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^3 \mid t \in \mathbb{R}, \bar{r} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3 \text{ funcție continuă, a.î. } \bar{r}(t_0) = \bar{r}_0\},$$

verifică o lege (ecuație) atunci și evenimentele liniilor de univers

$$g(X) := \{g(t, \bar{r}(t)) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^3 \mid t \in \mathbb{R}, \bar{r} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3 \text{ funcție continuă, a.î. } \bar{r}(t_0) = \bar{r}_0\},$$

¹Despre Galileo Galilei (1564-1642) Stephen Hawking a spus: “Galileo, poate mai mult decât orice altă persoană, a fost responsabil pentru nașterea științei moderne.”

verifică aceeași lege, oricare ar fi g din grupul transformărilor lui Galilei.

Alegând t_0 fix în $\mathbb{R}$, un punct $O'(t) \in \mathbb{R}^3$ și o bază $\{\bar{f}_1(t), \bar{f}_2(t), \bar{f}_3(t)\}$ din $\mathbb{R}^3$, depinzând eventual de $t \in \mathbb{R}$, spunem că am ales un sistem galilean de coordonate. Dacă nu se specifică altceva, vom presupune că toate bazele sunt orientate drept. Dacă atât punctul O' cât și baza din $\mathbb{R}^3$ nu depind de timp, spunem că am ales un reper absolut (fix) în $\mathbb{R}^3$, în caz contrar spunem că reperul este mobil.

Considerăm un sistem de referință fix (independent de timp) $\{O; \bar{e}_i\}$ și un reper mobil $\{O'(t); \bar{f}_i(t)\}$ dependent de timp, ambele baze fiind orientate drept, astfel încât

$$\bar{r}_{O'}(t) := \overline{O'O}(t) = \bar{c}_1 + \bar{c}_2 t, \quad \bar{c}_1, \bar{c}_2 = \text{constant} \quad (1.3.1)$$

iar matricea $Q(t) \in O(3)$ de trecere de la baza $\{\bar{e}_i\}$ la baza $\{\bar{f}_i\}$ nu depinde de timp.

Pentru o astfel de situație, spunem că *reperul mobil se mișcă rectiliniu și uniform în raport cu reperul absolut*.

Mai mult, prin *alergarea unei alte origini a timpului* înțelegem că t_0 este substituit cu $t_0 + \hat{t}$, $\hat{t}$ fixat.

De fapt, plecând de la un reper absolut, a considera un reper mobil care se mișcă rectiliniu și uniform în raport cu reperul absolut și o altă alegere a originii a timpului este echivalent cu a spune că aplicăm universului transformările lui Galilei. De aceea, *a respecta principiul relativității a lui Galilei* revine la a cere ca orice lege de mișcare din mecanica clasică să fie invariantă atunci când reperul absolut este înlocuit cu un reper mobil care se mișcă rectiliniu și uniform în raport față de el și atunci când se alege o altă origine a timpului.

Această invarianță a legilor de mișcare la transformările lui Galilei înseamnă de fapt că *spațiul este omogen* (invariant la translații) și *izotrop* (invariant la rotații) iar *timpul este omogen*.

Spre deosebire de mecanica clasică (newtoniană), în mecanica relativistă lungimile și duratele se schimbă atunci când trecem de la un sistem de referință la altul (contractia lungimilor și dilatarea duratelor), spațiul și timpul fiind considerate a fi mărimi între care există o legătură intrinsecă. În aceste teorii alte transformări de coordonate (transformările Lorentz) joacă rolul important în formulările matematice ale fenomenelor studiate.

1.4 Despre modelare în mecanică

De multe ori, un model util este un model care ia în considerare particularitățile principale ale fenomenului (obiectului, procesului fizic) studiat în problema considerată, ignorând aspectele secundare, neesențiale. Arta modelării mecanice constă în capacitatea de a ști ce să păstrezi și ce să neglijezi astfel încât rezultatele matematice să corespundă cât mai fidel realității dar în același timp modelul să fie unul cât mai simplu.

Toate corpurile sunt deformabile, unele “mai puțin” altele “mai mult”. Un corp material deformabil este un sistem complex dar foarte interesant.

Pentru a studia unele procese mecanice, este neapărat nevoie să considerăm deformare corpului studiat. De exemplu, în cazul studierii cutremurelor. Dacă neglijăm faptul că punctele din interiorul Pământului își schimbă poziția unele față de altele, descrierea cutremurelor nu este posibilă.



Figura 1.2: Despre modelare.

Figura 1.3: Un bolon vs. un diamant.



Figura 1.4: Efectele unui cutremur asupra suprafeței Pământului.

O primă simplificare în studiul mișcării corpurilor este neglijarea deformării corpului, adică considerarea corpului rigid. Un rigid este un corp material în care distanțele dintre oricare două părți ale corpului rămân constante, mai spunem că un rigid este un corp continuu ce nu se deformează, însă are posibilitatea de a fi traslatat sau de a se roti. Dar chiar și așa, vom remarca în cadrul acestui curs faptul că și o astfel de simplificare duce uneori la probleme dificile. De aceea vom studia mai întâi mișcarea unui corp ale cărui dimensiuni și rotații proprii sunt neglijabile în problema dată. Acesta este *punctul material*, adică un punct al spațiului afin $\mathbb{R}^3$ înzestrat cu o mărime scalară numită masa sa. După ce ne vom familiariza cu studiul mișcărilor unui punct material, ne vom îndrepta atenția asupra solidelor rigide.

Un același corp poate fi considerat punct material într-o problemă și nu într-o altă problemă. De exemplu, Pământul se poate aproxima cu un punct material atunci când se studiază mișcarea sa în jurul Soarelui, însă nu se folosește această simplificare atunci când vorbim de rotația proprie diurnă (în jurul axei sale). Uneori, pentru a surprinde anumite fenomene, însă a nu complica inutil formularea matematică a modelului, de punctul material se atașează diverși directori, a se vedea teoria firelor, a pânzelor sau teoria mediilor Cosserat.

Încheiem această introducere prin a preciza o altă împărțire, din punct de vedere didactic, a mecanicii:

- statică: studiază echilibrul corpurilor, sub acțiunea lor reciprocă și a unor solicitări externe precizate;
- cinematică: studiază mișcările posibile ale corpurilor, ținând seama de condițiile de legătură la care acestea sunt supuse;
- dinamică: studiază mișcările pe care le au efectiv corpurile sub acțiunea lor reciprocă și a forțelor date.

1.5 Modelul matematic al unui corp continuu

Printr-un *corp continuu* vom înțelege o mulțime $\mathcal{B}$ de puncte $A, B, \dots \in \mathbb{R}^3$ numite puncte materiale (particule), care are o structură dată de

- familia de aplicații $\mathcal{C} = \{\varphi : \mathcal{B} \rightarrow \mathbb{R}^3 \mid \varphi \text{ continuă și injectivă}\}$, numite *configurații ale corpului $\mathcal{B}$* (în spațiul $\mathbb{R}^3$);
- o funcție $m : \mathcal{P}(\mathcal{B}) \rightarrow \mathbb{R}_+$ numită *masă*, unde $\mathcal{P}(\mathcal{B})$ sunt părți ale corpului $\mathcal{B}$;

unde configurațiile și masa au următoarele proprietăți:

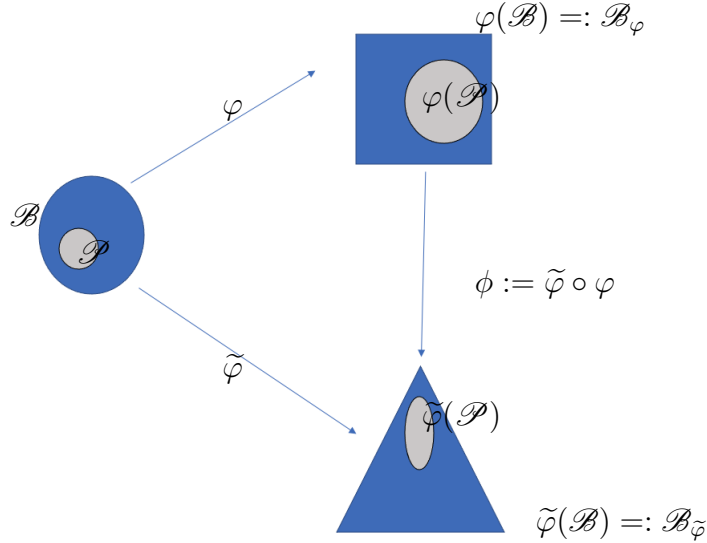


Figura 1.5: Corp. Deformare.

1. $\forall \varphi \in \mathcal{C}$ configurație, $\varphi(\mathcal{B}) = \mathcal{B}_\varphi$ este o regiune din $\mathbb{R}^3$, adică o mulțime compactă și conexă, având frontiera netedă pe porțiuni, adică $\partial \mathcal{B}_\varphi = \bigcup_{i=1}^n \overline{\Sigma_i}$ unde $n \in \mathbb{N}$ este finit și $\Sigma_i, i = 1, 2, \dots, n$ sunt suprafețe netede.
2. $\forall \varphi, \tilde{\varphi} \in \mathcal{C}$, aplicația $\phi = \tilde{\varphi} \circ \varphi^{-1} : \varphi(\mathcal{B}) \rightarrow \tilde{\varphi}(\mathcal{B})$ poate fi extinsă la o funcție de clasă $C^2(\mathbb{R}^3)$. Funcția ϕ se va numi *deformare*.

3. $\forall \varphi \in \mathcal{C}$, funcția $m_\varphi = m \circ \varphi^{-1} : \mathcal{P}(\mathcal{B}_\varphi) \rightarrow \mathbb{R}_+$ este o măsură absolut continuă în raport cu măsura de volum, adică pentru orice $\varphi(P)$ măsurabilă Lebesgue $\text{vol}(\varphi(P)) = 0$ implică $m_\varphi(\varphi(P)) = 0$.²

1.6 Bibliografie pentru curs și seminar

1. V.I. Arnold. *Mathematical Methods of Classical Mechanics*, Second Edition, Springer, New York-Berlin-Heidelberg, 2013.
2. S. Chiriță. *Mecanică rațională: Teorie și probleme*, Editura Matrixrom, București, 2014;
3. Ph.G. Ciarlet. *Mathematical Elasticity*, Vol. I, Elsevier, Amsterdam, 1988.
4. A. Hristev. *Mecanică și acustică*, Editura Didactică și Pedagogică, București, 1982.
5. D. Ieșan. *Mecanică-Medii elastice*, Editura Universității “Al. I. Cuza”, Iași, 2004.

² Aceasta implică (Teorema lui Radon-Nikodym care va fi stabilită la cursul Teoria măsurii) existența unei funcții $\varrho_\varphi : \mathcal{B}_\varphi \rightarrow \mathbb{R}_+$ continuă și mărginită astfel încât $m_\varphi(\varphi(\mathcal{P})) = \int_{\varphi(\mathcal{P})} \varrho_\varphi dV$, $\forall \mathcal{P} \in \mathcal{P}(\mathcal{B})$ având proprietatea că $\varphi(\mathcal{P})$ măsurabilă Lebesgue. Cititorul poate reveni asupra acestui aspect după parcurgerea completă a cursului Teoria măsurii.

Funcția $\varrho_\varphi : \mathcal{B}_\varphi \rightarrow \mathbb{R}_+$ definește repartiția masei lui $\mathcal{B}$ în configurația φ și se numește *densitate de masă* sau simplu *densitate*.

Valoarea acesteia în $x = \varphi(A)$, unde $A \in \mathcal{B}$, adică $\varrho(x)$, este densitatea de masă în particula $A \in \mathcal{B}$, în configurația φ .

Partea I

Elemente de mecanică rațională

Capitolul 2

Cinemática și dinamica punctului material

2.1 Traectoria. Ecuații cinematice

Fie O un punct fix din $\mathbb{R}^3$ și baza orientată drept formată dintr-un sistem ortonormat fix de vectori $\{\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3\}$ din $\mathbb{R}^3$. Punctul O se numește *origine în spațiu* sau simplu *origine* iar $\{O; \bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3\}$ se numește sistem de referință. Alegerea punctului fix O este în concordanță cu faptul că în mecanica clasică se consideră un corp fix, corp de referință, față de care se studiază deplasarea (Pământul, Soarele, stelele fixe și nebuloasele îndepărtate). Vom considera că 0 este origine a timpului.

Fie un punct material A din spațiul afin $\mathbb{R}^3$. Reamintim că prin *punct material înțelegem un punct al spațiului afin euclidian $\mathbb{R}^3$ căruia îi asociem o mărime scalară numită masa* și că el modelează matematic un corp care a fost redus la un punct geometric. Două configurații oarecare ale acestui corp, căruia i se neglijează dimensiunile, se reduc acum la două funcțiile care asociază acestui punct material un punct P_0 și, respectiv, un alt punct P . Spunem că punctul material *s-a deplasat* din $P_0 = (x_1^0, x_2^0, x_3^0) \in \mathbb{R}^3$ în $P = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$. Notăm cu $\bar{r}^0$ vectorul de poziție a lui P_0 față de O , adică $\bar{r}^0 = \overline{OP_0}$, și cu $\bar{r}$ vectorul de poziție a lui P , adică $\bar{r} = \overline{OP}$. Considerarea unei familii de configurații precum și percepția de mișcare “din aproape în aproape” ne conduce la următoarea definiție.

Prin *mișcare* a unui punct material A înțelegem mulțimea configurațiilor indexate după un parametru real, adică mulțimea configurațiilor $\{A \mapsto \varphi^t(A) : t \in \mathbb{R}\}$. Notând $\bar{r}(t) = \overline{O\varphi^t(A)}$, $t \in \mathbb{R}$, în continuare nu vom mai aduce în discuție punctul A al spațiului afin, ci prin mișcare a punctului material care avea vectorul de poziție $\bar{r}^0 = \overline{OP_0}$ într-o configurație înțelegem o aplicație¹

$$\bar{r} : [t_0, t_1) \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad t \mapsto \bar{r}(t) = x_1(t)\bar{e}_1 + x_2(t)\bar{e}_2 + x_3(t)\bar{e}_3 = \sum_{i=1}^3 x_i(t)\bar{e}_i \quad (2.1.1)$$

¹Dacă uneori lipsește semnul specific unei sume, va însemna că am folosit convenția de sumare după un indice care se repetă.

de clasă² $C^2(I)$ pentru care $\bar{r}(t_0) = \bar{r}^0$, unde

$$\bar{r}^0 = x_1^0 \bar{e}_1 + x_2^0 \bar{e}_2 + x_3^0 \bar{e}_3 = \sum_{i=1}^3 x_i^0 \bar{e}_i, \quad (2.1.2)$$

$t_1 > 0$ putând fi și ∞ . Intervalul deschis $I = (t_0, t_1) \subset \mathbb{R}$ se numește interval de timp în care se studiază mișcarea,

Vom numi (2.1.1) *ecuație vectorială a mișcării*. Prin intermediul funcțiilor componente ale ecuației vectoriale a mișcării, deoarece baza și originea nu depind de timp, mișcarea este dată de *ecuațiile scalare ale mișcării*

$$x_1 = x_1(t), \quad x_2 = x_2(t), \quad x_3 = x_3(t), \quad t \in [t_0, t_1].$$

Marcăm faptul că atât O cât și baza $\{\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3\}$ sunt constante prin a spune că *sistemul de referință este absolut*.

Mișcarea unui punct material arată diferit în sisteme de referință diferite. Orice sistem de referință este admisibil pentru descrierea mișcării, însă, pentru simplitate, se va alege un sistem de referință care ține cont de specificul problemei, astfel încât ecuațiile matematice să arate cât mai simplu.

Perechile $(t, \bar{r}(t))$ sunt evenimente din univers, grafurile acestor aplicații $t \mapsto \bar{r}(t)$ de la $\mathbb{R}$ la $\mathbb{R}^3$ sunt linii de univers.

Traietoria unui punct material reprezintă locul geometric al tuturor pozițiilor ocupate de punct în timpul mișcării, adică imaginea intervalului $[t_0, t_1)$ prin aplicația $\bar{r}$:

$$t \mapsto (x_1(t), x_2(t), x_3(t))^T, \quad t \in [t_0, t_1).$$

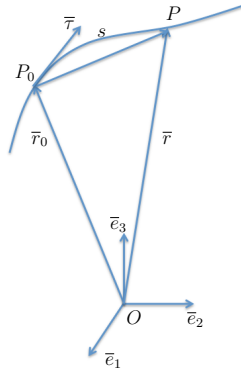


Figura 2.1: Traietorie. Lungime de arc.

O mișcare pentru care traietoria este submulțime a unei drepte se numește *mișcare rectilinie* iar o mișcare pentru care traietoria este conținută într-un plan se numește *mișcare plană*.

Problema 2.1.1. *Mișcarea unui punct material este dată prin $x_1 = R \cos \sqrt{t}$, $x_2 = R \sin \sqrt{t}$, $x_3 = R\sqrt{3t}$, $t \in [0, \pi^2]$, $R > 0$. Să se determine traietoria.*

²Adică o curbă rectificabilă. Nu se impune această condiție de regularitate în cazul ciocnirilor, de exemplu.

Să ne imaginăm că mergem pe un drum rutier între Iași și Pașcani. Atunci când suntem întrebați unde ne aflăm pe acest drum, nu spunem că ne aflăm în punctul X din spațiul afin sau că fixând un reper undeva, atunci vectorul de poziție este...etc. Se specifică kilometrul de drum față de un punct fix de pe drumul în discuție (se cunoaște afirmația “s-a întâmplat la kilometrul 10 de pe autostrada București–Constanța”). Altfel spus, dacă se cunoaște traiectoria mișcării, pentru studiul mișcării este convenabil uneori să utilizăm reprezentarea naturală a curbelor.

Considerând poziția inițială P_0 a punctului material la momentul t_0 și o direcție pozitivă (considerăm o orientare pe curbă) pe traiectorie, indicăm prin s *abscisa curbilinie* a lui P , care reprezintă distanța de la P_0 măsurată de-a lungul traiectoriei, adică

$$s(t) = \int_{t_0}^t \sqrt{(\dot{x}_1(\xi))^2 + (\dot{x}_2(\xi))^2 + (\dot{x}_3(\xi))^2} d\xi, \quad t \in I,$$

unde $(\dot{\cdot})$ reprezintă derivata funcțiilor respective. Vom folosi această notație pentru a marca derivata în raport cu timpul.

În mișcare, abscisa curbilinie s este o funcție de timp t , exprimată prin

$$s = s(t), \quad t \in I,$$

pe care o numim *ecuație orară* a mișcării punctului material.

Momentele la care $\dot{s} = 0$ sunt numite *momente de staționare*. În continuare vom presupune că nu există puncte staționare, adică presupunem că $\lim_{t \rightarrow t_0} \dot{s}(t) \neq 0$ și considerăm un moment $\tilde{t} \in [t_0, t_1)$ suficient de mic încât această presupunere să fie satisfăcută în intervalul $(t_0, \tilde{t})$. Aceasta nu reduce generalitatea pentru că în caz contrar am putea studia mișcarea separat, pe intervale de timp în care această presupunere este adevărată. Avem

$$s(t_0) = 0, \quad L := s(\tilde{t}), \quad \dot{s}(t) = \sqrt{(\dot{x}_1(t))^2 + (\dot{x}_2(t))^2 + (\dot{x}_3(t))^2} > 0.$$

Aplicația $s : [t_0, \tilde{t}] \rightarrow [0, L]$ este monoton crescătoare, deci inversabilă. Spunem că

$$t = t(s), \quad s \in [0, L].$$

Astfel, se obține faptul că traiectoria este dată de funcția

$$\bar{r} = \bar{r}(s), \quad s \in [0, L]. \quad (2.1.3)$$

Deci mișcarea punctului material poate fi descrisă de către sistemul

$$\bar{r} = \bar{r}(s), \quad s = s(t), \quad t \in [t_0, \tilde{t}], \quad (2.1.4)$$

unde prima funcție definește traiectoria, în timp ce legea temporală asociată punctului material oferă poziția instantanee a punctului de-a lungul traiectoriei. Pentru restul cursului, $\bar{r}(s)$ va fi notat tot cu $\bar{r}(s)$. Aceeași convenție va fi folosită pentru alte cantități, dependența de s sau de t deducându-se din context.

Problema 2.1.2. *Mișcarea unui punct material este dată prin $x_1 = R \cos \sqrt{t}$, $x_2 = R \cos \sqrt{t}$, $x_3 = R \sqrt{3t}$, $t \in [0, \pi^2]$, $R > 0$. Să se determine traiectoria și ecuația orară a mișcării.*

Problema 2.1.3. *Traietoria unui punct material P este cercul de intersecție dintre sfera $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = R^2$, $R > 0$ și planul $x_3 = R \cos \theta_0$, θ_0 parametru fixat în intervalul $(0, \pi)$. Să se determine legea de mișcare a punctului P dacă ecuația orară a mișcării este $s = t$, $t \in [0, \sqrt{2\pi R \sin \theta_0}]$.*

2.2 Vectorul viteză, vectorul accelerație

Considerăm un punct material P a cărui mișcare (trajectorie) este cunoscută, fixată.

Se numește *viteză medie* a punctului material P în intervalul $[t', t'']$, vectorul

$$\bar{v}_m = \frac{\bar{r}(t') - \bar{r}(t'')}{t' - t''}.$$

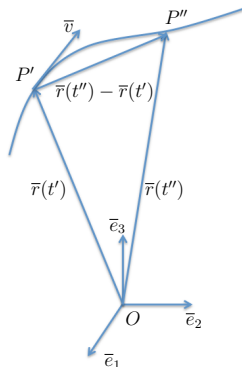


Figura 2.2: Viteza.

Se numește *viteză la momentul $t' \in I$* a punctului material P , vectorul

$$\bar{v}(t') = \lim_{t'' \rightarrow t'} \frac{\bar{r}(t') - \bar{r}(t'')}{t' - t''} = \dot{\bar{r}}(t').$$

Se numește *viteză* a punctului material P , aplicația

$$\bar{v} : [t_0, t_1) \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad t \mapsto \bar{v}(t) := \dot{\bar{r}}(t),$$

unde prin derivata în t_0 înțelegem derivata la dreapta.

Dacă se cunoaște mișcarea, atunci cunoaștem și vectorul viteză

$$\bar{v}(t) = \sum_{i=1}^3 v_i(t) \bar{e}_i, \quad v_i(t) = \dot{x}_i(t), \quad i = 1, 2, 3.$$

Mărimea vectorului viteză este

$$v(t) = \|\bar{v}(t)\| = \sqrt{(\dot{x}_1(t))^2 + (\dot{x}_2(t))^2 + (\dot{x}_3(t))^2} = \dot{s}(t).$$

Deducem astfel că mărimea v a vectorului viteza este derivata lui s .

Problema 2.2.1. Un punct material de masă $m = 5$ se mișcă după legea

$$\begin{aligned} x_1 &= 2 \sin \left(2t + \frac{\pi}{4} \right), \\ x_2 &= 4 \cos \left(2t + \frac{\pi}{4} \right), \\ x_3 &= 6. \end{aligned} \quad t \in [0, \infty),$$

Să se determine :

1. poziția punctului la momentul $t = 0$;

2. viteza și accelerația la momentul $t = \pi$;

3. traiectoria.

Revenind la exemplul nostru referitor la drumul rutier Iași–Pașcani, ne propunem să exprimăm viteza în funcție de poziția punctului material pe o curbă dată, într-un reper ortonormat legat de punctul curent pe curbă. Pentru aceasta, să ne reamintim faptul că versorii triedului lui Frénet reprezintă un instrument util pentru scopul nostru.

Definim vectorul unitar al tangentei la traiectorie în punctul P prin

$$\bar{\tau} = \frac{d\bar{r}(s)}{ds}.$$

Are loc relația

$$\bar{v}(t) = \frac{d\bar{r}(s)}{ds} \frac{ds(t)}{dt} = \dot{s}(t) \bar{\tau}(t) = v(t) \bar{\tau}(t),$$

de unde concluzia că viteza este tangentă la traiectorie și are sensul mișcării. Deducem astfel că vectorul vitezei este tangent la traiectorie și îndreptat în sensul mișcării.

De multe ori, în cele ce urmează, vom suprima argumentul funcțiilor, cu excepția situațiilor când pot interveni neclarități.

Într-o mișcare curbilinie oarecare viteza $\bar{v}$ variază ca mărime și ca direcție. O măsură a acestei variații este *vectorul accelerație* a punctului material P definit de

$$\bar{a} : [t_0, t_1] \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad t \mapsto \bar{a}(t) := \dot{\bar{v}}(t) = \ddot{\bar{r}}(t),$$

unde prin derivata în t_0 înțelegem derivata la dreapta.

Componentele accelerației sunt egale cu derivatele componentelor respective ale vitezei, în raport cu timpul

$$a_i(t) = \dot{v}_i(t), \quad i = 1, 2, 3 \quad \forall t \in [t_0, t_1]. \quad (2.2.5)$$

Problema 2.2.2. Un punct material P pleacă din poziția $P_0(-3, 2, 1)$ la momentul $t = 0$, cu viteza inițială $\bar{v}_0 = -\bar{e}_1 + 2\bar{e}_2 + 3\bar{e}_3$ și de deplasează cu accelerația $\bar{a} = e^{-t}\bar{e}_1 + 4\cos 2t\bar{e}_2 + 8\sin 2t\bar{e}_3$. Să se determine vectorul vitezei și legea de mișcare.

Problema 2.2.3. Accelerația unui punct material este dată de $\bar{a}(t) = \bar{e}_2 + t\bar{e}_3$. Știind că la momentul $t = 0$ punctul se afla în poziția $P_0(0, 0, 0)$ și avea viteza $\bar{v}(0) = \bar{e}_1$, să se determine

1. viteza punctului material;
2. mișcarea punctului material;
3. traiectoria punctului material;
4. ecuația orară a mișcării.

În timp ce viteza este tangentă la traiectorie și are sensul mișcării, accelerație este orientată spre “interiorul” traiectoriei, adică spre partea concavă a traiectoriei. Această explicație apare mereu la orele de fizică din liceu, însă fără nicio altă justificare sau interpretare deoarece aparatul matematic necesar nu era cunoscut elevilor (geometria curbelor și a suprafețelor). Vom dezvolta în continuare acest aspect.

Să remarcăm pentru început că o mișcare în care accelerația punctului material este coliniară cu viteza pe tot parcursul mișcării este de fapt o mișcare rectilie. Pentru a demonstra această afirmație să remarcăm egalitățile

$$\bar{a} = \frac{d}{dt}(v\bar{\tau}) = \frac{dv}{dt}\bar{\tau} + v\frac{d\bar{\tau}}{dt} = \dot{v}\bar{\tau} + v\frac{d\bar{\tau}}{ds}\frac{ds}{dt} = \dot{v}\bar{\tau} + v^2\frac{d\bar{\tau}}{ds}. \quad (2.2.6)$$

Prin urmare, impunând ca

$$\bar{a}(t) = k(t)\bar{v}(t) \quad \forall t \in [t_0, \tilde{t}]$$

obținem

$$\dot{v}\bar{\tau} + v^2\frac{d\bar{\tau}}{ds} = k(t)v\bar{\tau},$$

de unde, prin înmulțire cu $\bar{\tau}$ și ținând cont că $\langle \bar{\tau}(s), \frac{\bar{\tau}}{ds} \rangle = 0$, obținem

$$\dot{v} = k(t)v \quad \text{și} \quad v^2\frac{d\bar{\tau}}{ds} = 0,$$

adică (deoarece am exclu punctele staționare)

$$\bar{\tau} = \bar{c}_1 \text{ constant} \Leftrightarrow \frac{d\bar{\tau}}{ds} = \bar{c}_1 \Rightarrow \bar{r}(s) = \bar{c}_1 s + \bar{c}_2, \quad \forall s \in [0, L],$$

ceea ce spune că traiectoria este un segment de dreaptă.

Pentru restul acestei secțiuni vom exclude această situație, adică vom presupune că

$$\dot{\bar{r}}(t) \times \ddot{\bar{r}}(t) \neq \bar{0} \quad \forall t \in [t_0, t_1].$$

Numim reper Frénet la traiectoria punctului material reperul $\{P; \bar{\tau}, \bar{n}, \bar{\beta}\}$ dat de punctul P având vectorul de poziție $\bar{r}(t)$ și

$$\begin{aligned} \bar{\tau} &= \frac{\dot{\bar{r}}}{\|\dot{\bar{r}}\|} = \frac{d\bar{r}}{ds} && \text{vectorul tangentei,} \\ \bar{\beta} &= \frac{\dot{\bar{r}} \times \ddot{\bar{r}}}{\|\dot{\bar{r}} \times \ddot{\bar{r}}\|} && \text{binormala,} \\ \bar{n} &= \bar{\beta} \times \bar{\tau} && \text{normala principală.} \end{aligned} \quad (2.2.7)$$

Planul descris de $\bar{\tau}$ și $\bar{n}$ se numește *plan osculator*. Planul descris de $\bar{\beta}$ și $\bar{n}$ se numește *plan normal*, în timp ce planul determinat de $\bar{\tau}$ și $\bar{\beta}$ se numește *plan rectificator*. Punctul C situat pe direcția normalei principale, la distanța R de P și în sensul normalei poartă numele de *centru de curbura*, unde

$$\frac{1}{R} = \frac{\|\dot{\bar{r}} \times \ddot{\bar{r}}\|}{\|\dot{\bar{r}}\|^3}$$

este *raza de curbura* a traiectoriei. Dacă traiectoria ar fi un cerc, raza de curbura ar fi raza cercului.

Pentru a exprima și vectorul accelerație în reperul Frénet, vom folosi formulele lui Frénet, mai exact, vom folosi doar relația care ne indică variația vectorului tangent

$$\frac{d\bar{\tau}}{ds} = \frac{1}{R} \bar{n}.$$

Folosind aceste relații și (2.2.6) vom deduce expresia accelerației în reperul lui Frénet

$$\bar{a} = \dot{v} \bar{\tau} + v^2 \frac{d\bar{\tau}}{ds} = \dot{v} \bar{\tau} + v^2 \frac{1}{R} \bar{n}, \quad (2.2.8)$$

ceea ce exprimă faptul că vectorul accelerație este conținut în planul osculator.

Putem descompune vectorul accelerație astfel

$$\bar{a} = \bar{a}_\tau + \bar{a}_n,$$

unde

$$\bar{a}_\tau = \dot{v} \bar{\tau}$$

este *accelerația tangențială*, iar

$$\bar{a}_n = v^2 \frac{1}{R} \bar{n}$$

reprezintă *accelerația normală*.

Ramercam că accelerația normală este orientată întotdeauna spre centrul de curbura. Mișcarea în care mărimea vitezei este constantă, $\dot{v} = 0$, se numește *mișcare uniformă*. Altfel spus, o mișcare este uniformă dacă și numai dacă $\bar{a}_\tau = \bar{0}$.

Mișcarea în care accelerația tangențială are mărime constantă se numește mișcare *uniform variată*. Într-o mișcare uniform variată, dacă $\dot{v} > 0$, atunci vom vorbi de o mișcare *uniform accelerată*, iar dacă $\dot{v} < 0$, atunci vom vorbi de o mișcare *uniform încetinită*.

Problema 2.2.4. Un punct material P aflat în poziția $A(1, 0, -2)$ se mișcă cu viteza $\bar{v} = t\bar{e}_1 + \sqrt{2}t\bar{e}_2 + \bar{e}_3$. Să se determine:

1. legea de mișcare și poziția punctului la momentul $t = 4$;
2. ecuația orară a mișcării;
3. versorii triedrului lui Frenet;
4. accelerația tangențială și normală;
5. curbura traiectoriei.

Problema 2.2.5. Un punct material P se deplasează uniform cu viteza v_0 pe cilindrul $x_1^2 + x_2^2 = R^2$, în așa fel încât unghiul α dintre tangenta la traiectorie și tangenta în P la cercul de secțiune transversală rămâne constant în timpul acestei mișcări. Presupunând că P pornește din poziția $P_0(R, 0, 0)$, să se determine legea de mișcare și accelerația în coordonate cilindrice.

Problema 2.2.6. Un punct material P se deplasează pe sfera $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = R^2$, pornind din poziția $M_0(R, 0, 0)$. Să se găsească traiectoria punctului dacă aceasta face unghiul constant α cu meridianele pe care le intersectează. În ipoteza că mișcarea punctului este uniformă, determinați ecuațiile de mișcare, curbura traiectoriei și accelerația.

2.3 Axiomele mecanicii punctului material în mecanica clasică

2.3.1 Axioma 1: Principiul inerției

Am afirmat în introducere faptul că partea mecanicii care studiază mișcarea corpurilor, în contextul cauză-efect, este *dinamica*. Dinamica (newtoniană) se bazează pe trei principii, care sunt formulate ținând cont de experiențe din realitate și nu trebuiesc demonstrate. Aceste principii au fost formulate de Isaac Newton în celebra sa carte *Principiile matematice ale filozofiei naturale* (1687) și sunt valabile atunci când mișcarea se face cu viteze mult inferioare vitezei luminii ($c = 3 \cdot 10^8 \text{ m/s}$) și are loc în domenii spațiale macroscopice.

Cele trei principii de bază acceptă și se bazează și pe presupunerea dată de *principiul acțiunii locale*: *Efectele lumii înconjurătoare asupra punctului material P sunt neglijabile în afara unei vecinătăți potrivite punctului material și în afara unui interval de timp limitat.*

Interacțiunea dintre corpuri este exprimată prin noțiunea de *forță* care are la origine senzația de efort. În mecanică, forța este un concept derivat din mișcare când se constată o variație a vitezei unui corp. Această interacțiune dintre corpuri se realizează, fie direct (prin contact fizic), fie la distanță, prin intermediul câmpului (gravitațional, electromagnetic, nucleare tari și nucleare slabe) și pot fi continue sau discontinue. Putem indica intensitatea efortului, direcția și sensul în care aplicăm acest efort. De aceea, prin forță ce acționează asupra unui punct material înțelegem un vector $\vec{F}$ definit în spațiul vectorial $\mathbb{R}^3$.

Sigur, în general forțele nu sunt de natură pur mecanică și se consideră a fi date, însă în cadrul cursului nostru noi ne vom ocupa doar de studiul mișcării fără a părăsi domeniul pur mecanic. Prin urmare, toate forțele pe care le vom considera vor fi pur mecanice.

Forțele produc efecte statice (de echilibrarea a altor forțe) sau efecte dinamice de modificare a vitezei, adică de creare a accelerației. Măsurarea forței se face pe baza efectelor lor. Exemple de forțe:

- Greutatea corpurilor: forța cu care un corp din apropierea suprafeței terestre este atras de Pământ, $\vec{F} = m\vec{g}$, accelerație $\vec{g}$ fiind orientată spre centrul Pământului, independentă de masă, natură, dimensiunile sau forma corpului. Local se poate presupune că $\vec{g}$ este un vector constant, dar doar pentru mișcări pe distanțe mici.
- Forța de atracție gravitațională: $\vec{F} = -\gamma \frac{m_1 m_2}{r^2} \frac{\vec{r}}{\|\vec{r}\|}$;
- Forță elastică: $\vec{F} = -k\vec{r}$;
- Forță de rezistență la înaintare: $\vec{F} = -k\vec{v}$;

- Tensiuni: forțe ce apar în cazul mediilor deformabile.

De unde apar expresiile forțelor? Expresiile forțelor sunt determinate pe baze experimentale, identificând un tipar între cauză și efect, tipar care se dovedește a fi util prin comparația soluțiilor analitice (numerice) cu cele obținute experimental pe un număr suficient de situații. Sigur, formele acestor forme se pot îmbunătăți și teoretic, cu scopul de a surprinde cât mai exact realitățile observate în experimente, dar pentru care tiparul identificat de tehnică nu-l poate surprinde deloc sau nu în totalitate.

Întrucât în majoritatea cazurilor, forțele depind de poziția relativă a corpurilor, de viteză, sau de timp, presupunem

$$\overline{F} = \overline{F}(\bar{r}(t) - \bar{r}^{\text{sursa}}(t), \bar{v}(t) - \bar{v}^{\text{sursa}}(t), t), \quad t \in I. \quad (2.3.9)$$

Viteza este o mărime primară. O mărime fizică importantă definită cu ajutorul vitezei este *impulsul mecanic*, introdusă de Descartes (1645) și utilizată apoi de Newton în 1686,

$$\overline{H} = m \bar{v}.$$

Numele *impuls* provine din rolul esențial al acestei cantități în problemele de ciocnire. Vectorul viteză depinde de sistemul de referință ales. Prin urmare, și impulsul este definit în raport cu sistemul de referință ales.

Principiul inerției (prima lege a lui Newton) afirmă că: *Există un sistem de referință față de care orice punct asupra căruia nu acționează nicio forță are impulsul constant.*

Un astfel de sistem, a cărui existență este postulat de principiul inerției, se numește *sistem de referință inerțial* (absolut sau galilean). Fie un astfel de sistem, adică un timp inițial t_0 și $\{O; \bar{e}_i\}$ reper cartezian în $\mathbb{R}^3$. Conform principiului inerției vom avea implicația

$$\begin{aligned} \overline{F}(\bar{r}(t) - \bar{r}^{\text{sursa}}(t), \bar{v}(t) - \bar{v}^{\text{sursa}}(t), t) &= \bar{0} \quad \forall t \in (t_0, t_1) \\ \Rightarrow m \dot{\bar{r}}(t) &= c \quad (c = \text{constant}) \quad \forall t \in (t_0, t_1). \end{aligned}$$

Integrând ultima egalitate, deducem

$$\bar{r}(t) = \bar{r}_0 + \frac{1}{m} \bar{c}(t - t_0) \quad \forall t \in [t_0, t_1],$$

ceea ce înseamnă că traiectoria mișcării este o dreaptă. Mai mult, mișcarea este uniformă.

Putem deci reformula principiul inerției: *Există un sistem de referință față de care orice punct sub acțiunea unei forțe nule are o mișcare rectilinie și uniformă.*

Ne întrebăm în continuare dacă există mai multe sisteme inerțiale și care este legătura dintre două sisteme inerțiale. Vom da răspuns la această întrebare după enunțarea celor trei axiome.

2.3.2 Axioma 2: Principiul impulsului

A doua lege a lui Newton este *principiul impulsului*: *Într-un reper inerțial, derivata în raport cu timpul a impulsului oricărui punct material este egală cu forța care îl solicită, adică într-un reper inerțial are loc identitatea (ecuația lui Newton):*

$$\dot{\overline{H}}(t) = \overline{F}(\bar{r}(t) - \bar{r}^{\text{sursa}}(t), \bar{v}(t) - \bar{v}^{\text{sursa}}(t), t) \quad \forall t \in (t_0, t_1)$$

sau echivalent

$$\begin{aligned} m \bar{a}(t) &= \bar{F}(\bar{r}(t) - \bar{r}^{\text{sursa}}(t), \bar{v}(t) - \bar{v}^{\text{sursa}}(t), t) \\ \Leftrightarrow \quad m \ddot{\bar{r}}(t) &= \bar{F}(\bar{r}(t) - \bar{r}^{\text{sursa}}(t), \bar{v}(t) - \bar{v}^{\text{sursa}}(t), t) \quad \forall t \in (t_0, t_1). \end{aligned} \quad (2.3.10)$$

Observăm faptul că principiul impulsului este compatibil cu principiul inerției, întrucât

$$\bar{F} = \bar{0} \quad \Rightarrow \quad \bar{H} = \text{constant},$$

dar nu este o consecință a acestuia și nu îl face redundant pe acesta.

Observație 2.3.1. *Ca orice altă lege din mecanica clasică, principiul impulsului trebuie să fie invariant la grupul transformărilor lui Galilei.*

Problema 2.3.1. *Să se determine legea de mișcare a unui punct de masă $m = 1$ dacă asupra sa acționează forța:*

1. $\bar{F} = -4(x_1 \bar{e}_1 + x_2 \bar{e}_2);$
2. $\bar{F} = 4(x_2 \bar{e}_1 + x_1 \bar{e}_2),$

știind că la momentul inițial

1. $\bar{r}(0) = 2\bar{e}_1, \bar{v}(0) = 2\bar{e}_2;$
2. $\bar{r}(0) = 2\bar{e}_1, \bar{v}(0) = 2\bar{e}_2.$

În cazul punctului (a) aflați și traiectoria mișcării.

Problema 2.3.2. *Un glonte de masă m lovește un perete și parcurge distanța l până la oprire. Știind că forța de rezistență pe care o opune peretele la înaintarea glontelui are mărimea constantă și considerând că asupra sa nu acționează nicio altă forță, să se determine viteza inițială.*

Problema 2.3.3. *În vârful unui triunghi dreptunghic isoscel ABC în care ipotenuza $AC = 2a$, se află un punct M de masă m fără viteză inițială. Fiecare dintre cele 3 vârfuri ale triunghiului atrage punctul M cu o forță a cărei mărime este $F = mk^2d$, unde $k = \text{constant}$, $d = \text{distanța de la } M \text{ la vârful corespunzător}$. Să se studieze mișcarea și să se determine traiectoria.*

Problema 2.3.4. *Un punct material e atras spre axa Ox_1 de o forță perpendiculară pe această axă și proporțională cu distanța $d(M, Ox_1)$, factorul de proporționalitate fiind mk^2 . Să se afle traiectoria punctului dacă la momentul inițial $x_1(0) = 0$, $x_2(0) = h$, iar viteza inițială are mărimea v_0 și e paralelă cu axa Ox_1 . În ce puncte ale traiectoriei mărimea vitezei e maximă?*

2.3.3 Axioma 3: Principiul acțiunii și reacțiunii

Să ne reamintim că am definit noțiunea de forță ca fiind o caracterizare a interacțiunii dintre corpuri. Al treilea principiu al lui Newton postulează următoarele: Când două puncte materiale interacționează, forțele mutuale corespunzătoare aparțin drepte care trece prin pozițiile particulelor, au mărimi egale și sensuri opuse.

Altfel spus, folosind notațiile

$$\begin{aligned} \bar{F}_{12} &= \text{forța cu care particula } P_1 \text{ acționează asupra particulei } P_2, \\ \bar{F}_{21} &= \text{forța cu care particula } P_2 \text{ acționează asupra particulei } P_1, \end{aligned}$$

principiul acțiunii și reacțiunii spune că

$$\bar{F}_{12} = -\bar{F}_{21} \quad \bar{F}_{12} = (\bar{r}_2 - \bar{r}_1) F_{12},$$

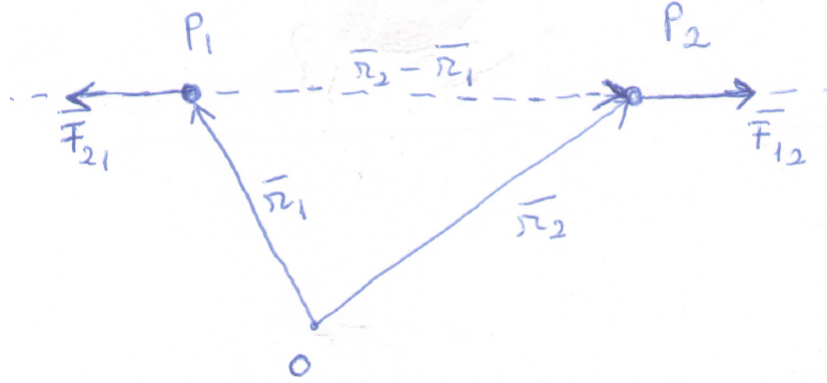


Figura 2.3: Principiul acțiunii și reacțiunii.

unde $\bar{r}_1$ este vectorul de poziție al particulei P_1 , iar $\bar{r}_2$ este vectorul de poziție al particulei P_2 .

Principiul impulsului afirmă că, în lipsa altor forțe, mișcarea celor două particule este descrisă de sistemul de ecuațiile

$$m_\alpha \ddot{\bar{r}}_\alpha = (\bar{r}_2 - \bar{r}_1) F_{12}(\bar{r}_\beta, \dot{\bar{r}}_\beta) \quad \alpha, \beta = 1, 2.$$

Invarianța acestui sistem de ecuații la transformările g_2 din grupul lui Galilei, impune ca

$$F_{12}(\bar{r}_\beta, \dot{\bar{r}}_\beta) = F_{12}(\bar{r}_2 - \bar{r}_1, \dot{\bar{r}}_2 - \dot{\bar{r}}_1).$$

2.4 Mișcarea relativă din mecanica clasică

Ca o primă observație, să ne reamintim că principiul relativității al lui Galilei impune ca și după aplicarea transformărilor din grupul lui Galilei impulsul să rămână constant atâta timp cât asupra corpului nu acționează nicio forță. Dar și ecuațiile de mișcare date de principiul inerției trebuie să respecte principiul lui Galilei. Vom avea deci nevoie să studiem modul în care se modifică impulsul și accelerația atunci când schimbăm sistemul de coordonate.

În mecanica clasică, prin mișcare relativă înțelegem mișcarea punctului material în raport cu un sistem de coordonate mobil față de un sistem fix (absolut).

Considerăm un sistem de referință fix (independent de timp) $\{O; \bar{e}_i\}$ și un reper mobil $\{O'(t); \bar{f}_i(t)\}$ dependent de timp, ambele baze fiind orientate drept.

După cum am afirmat și în introducere, mișcarea punctului material P în raport cu reperul $\{O; \bar{e}_i\}$ se numește *mișcare absolută*, în timp ce mișcarea punctului material P în raport cu reperul $\{O'(t); \bar{f}_i(t)\}$ se numește *mișcare relativă*. Mișcarea reperului $\{O'(t); \bar{f}_i(t)\}$ în raport cu reperul fix $\{O; \bar{e}_i\}$ se numește *mișcare de transport*.

Vom nota cu

$$\bar{r}(t) = \sum_{i=1}^3 x_i(t) \bar{e}_i$$

vectorul de poziție al punctului material față de reperul fix și cu

$$\vec{r}'(t) = \sum_{i=1}^3 y_i(t) \vec{f}_i(t)$$

vectorul de poziție al punctului material față de reperul mobil.

Vom mai folosi notațiile

$$\vec{v}_a = \dot{\vec{r}} = \sum_{i=1}^3 \dot{x}_i \vec{e}_i, \quad \vec{a}_a = \dot{\vec{v}}_a = \ddot{\vec{r}} = \sum_{i=1}^3 \ddot{x}_i \vec{e}_i, \quad \vec{v}_r = \sum_{i=1}^3 \dot{y}_i \vec{f}_i, \quad \vec{a}_r = \sum_{i=1}^3 \ddot{y}_i \vec{f}_i.$$

pentru *viteza absolută*, *acelerația absolută*, *viteza relativă* și respectiv *acelerația relativă*, iar mișcarea lui O' în reperul fix va fi dată prin

$$\vec{r}_{O'} = \vec{r}_{O'}(t) = x_i^{O'}(t) \vec{e}_i, \quad \vec{v}_{O'} = \dot{\vec{r}}_{O'}, \quad \vec{a}_{O'} = \dot{\vec{v}}_{O'} = \ddot{\vec{r}}_{O'}.$$

În timp ce cantitățile absolute reflectă modul în care aceste cantități sunt percepute de un observator în raport cu reperul fix, cantitățile relative efectă modul în care aceste cantități sunt percepute de un observator în raport cu reperul mobil.

Cunoscând mișcarea relativă și mișcarea de transport, cunoaștem mișcarea absolută prin

$$\vec{r}(t) = \vec{r}'(t) + \vec{r}_{O'}(t),$$

însă știm coordonatele primului vector în baza mobilă iar pe ale celui de-al doilea în baza fixă.

Notăm cu $Q(t) \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ matricea de trecere de la baza $\{\vec{e}_i\}$ la baza $\{\vec{f}_i\}$, adică $Q(t) = (Q_{ij}(t))$ verifică

$$\vec{f}_i(t) = \sum_{j=1}^3 Q_{ji}(t) \vec{e}_j, \quad (\vec{f}_1 | \vec{f}_2 | \vec{f}_3) = (\vec{e}_1 | \vec{e}_2 | \vec{e}_3) Q(t)$$

Deci, avem

$$\sum_{i=1}^3 x_i \vec{e}_i = \sum_{i=1}^3 x_i^{O'} \vec{e}_i + \sum_{i,j=1}^3 y_i Q_{ji}(t) \vec{e}_j, \quad x_i = x_i^{O'} + \sum_{j=1}^3 Q_{ij}(t) y_j, \quad \text{sau altfel scris} \quad (2.4.11)$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1^{O'} \\ x_2^{O'} \\ x_3^{O'} \end{pmatrix} + Q \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}.$$

Întrucât bazele considerate sunt ambele baze ortonormate orientate drept, avem

$$\langle \bar{f}_i, \bar{f}_j \rangle = \delta_{ij}, \quad \langle \bar{e}_i, \bar{e}_j \rangle = \delta_{ij}$$

unde $\delta_{ij} = 1$ dacă $i = j$ și $\delta_{ij} = 0$ dacă $i \neq j$, și cum

$$\begin{aligned} \langle \bar{f}_i, \bar{f}_j \rangle &= \left\langle \sum_{r=1}^3 Q_{ri}(t) \bar{e}_r, \sum_{s=1}^3 Q_{sj}(t) \bar{e}_s \right\rangle = \sum_{r,s=1}^3 Q_{ri}(t) Q_{sj}(t) \langle \bar{e}_r, \bar{e}_s \rangle \\ &= \sum_{r,s=1}^3 Q_{ri}(t) Q_{sj}(t) \delta_{rs} = \sum_{r=1}^3 Q_{ri}(t) Q_{rj}(t), \end{aligned}$$

va rezulta că matricea

$$Q(t) \in \text{SO}(3) := \{X \in \mathbb{R}^{3 \times 3} \mid X^T X = I_3, \det X = 1\} \quad (\text{transformare ortogonală proprie}).$$

Obținem

$$\begin{aligned} (\bar{f}_1 | \bar{f}_2 | \bar{f}_3) &= (\bar{e}_1 | \bar{e}_2 | \bar{e}_3) Q(t), \quad (\bar{f}_1 | \bar{f}_2 | \bar{f}_3) Q^T(t) = (\bar{e}_1 | \bar{e}_2 | \bar{e}_3), \\ (\dot{\bar{f}}_1 | \dot{\bar{f}}_2 | \dot{\bar{f}}_3) &= (\bar{e}_1 | \bar{e}_2 | \bar{e}_3) \dot{Q}(t) \end{aligned}$$

și apoi

$$(\dot{\bar{f}}_1 | \dot{\bar{f}}_2 | \dot{\bar{f}}_3) = (\bar{f}_1 | \bar{f}_2 | \bar{f}_3) Q^T(t) \dot{Q}(t). \quad (2.4.12)$$

Din $Q^T Q = I_3$ deducem

$$\dot{Q}^T Q + Q^T \dot{Q} = 0_3, \quad \dot{Q}^T Q = -Q^T \dot{Q},$$

ceea ce arată că

$$A = Q^T(t) \dot{Q}(t) \in \mathfrak{so}(3) := \{X \in \mathbb{R}^{3 \times 3} \mid X^T = -X\} \quad \text{antisimetrică}.$$

Prin urmare, această matrice va avea forma

$$Q^T(t) \dot{Q}(t) = \begin{pmatrix} 0 & -\omega_3 & \omega_2 \\ \omega_3 & 0 & -\omega_1 \\ -\omega_2 & \omega_1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \omega_i \in \mathbb{R}, \quad i = 1, 2, 3. \quad (2.4.13)$$

Rescriem (2.4.12) sub forma

$$(\dot{\bar{f}}_1 | \dot{\bar{f}}_2 | \dot{\bar{f}}_3) = (\bar{f}_1 | \bar{f}_2 | \bar{f}_3) \begin{pmatrix} 0 & -\omega_3 & \omega_2 \\ \omega_3 & 0 & -\omega_1 \\ -\omega_2 & \omega_1 & 0 \end{pmatrix},$$

de unde rezultă

$$\begin{aligned}\dot{\bar{f}}_1 &= \omega_3 \bar{f}_2 - \omega_2 \bar{f}_3, \\ \dot{\bar{f}}_2 &= -\omega_3 \bar{f}_1 + \omega_1 \bar{f}_3, \\ \dot{\bar{f}}_3 &= \omega_2 \bar{f}_1 - \omega_1 \bar{f}_2.\end{aligned}$$

Am putea scrie și

$$\dot{\bar{f}}_i = \sum_{j,k=1}^3 \varepsilon_{ijk} \bar{f}_j \omega_k,$$

unde

$$\varepsilon_{ijk} = \begin{cases} +1 & \text{dacă } (i, j, k) \text{ este permutare pară} \\ -1 & \text{dacă } (i, j, k) \text{ este permutare impară} \\ 0 & \text{altfel} \end{cases}$$

definește simbolul Levi-Civita. Aceste formule poartă numele de *formulele lui Poisson* sau *ecuațiile de mișcare ale triedrului mobil*.

Să remarcă faptul că de fapt coloanele matricei $Q^T(t) \dot{Q}(t)$ sunt componentele vectorilor $\dot{\bar{f}}_i$ scriși în baza $\bar{f}$. Numim vectorul

$$\bar{\omega} = \sum_{i=1}^3 \omega_i \bar{f}_i$$

viteză unghiulară (se mai regăsește în literatură sub denumirea de vector axial) a reperului mobil față de reperul fix. Vectorul $\bar{\omega}$ depinde numai de timp și nu depinde de punctul considerat.

Astfel

$$\begin{aligned}\dot{\bar{r}}'(t) &= \sum_{i=1}^3 \dot{y}_i \bar{f}_i + \sum_{i=1}^3 y_i \dot{\bar{f}}_i = \sum_{i=1}^3 \dot{y}_i \bar{f}_i + y_1(\omega_3 \bar{f}_2 - \omega_2 \bar{f}_3) + y_2(-\omega_3 \bar{f}_1 + \omega_1 \bar{f}_3) + y_3(\omega_2 \bar{f}_1 - \omega_1 \bar{f}_2) \\ &= \sum_{i=1}^3 \dot{y}_i \bar{f}_i + (-\omega_3 y_2 + \omega_2 y_3) \bar{f}_1 + (\omega_3 y_1 - \omega_1 y_3) \bar{f}_2 + (-\omega_2 y_1 + \omega_1 y_2) \bar{f}_3 \\ &= \sum_{i=1}^3 \dot{y}_i \bar{f}_i + \bar{\omega} \times \bar{r}' = \bar{v}_r + \bar{\omega} \times \bar{r}',\end{aligned}$$

și împreună cu

$$\dot{\bar{r}}(t) = \dot{\bar{r}}_{O'}(t) + \dot{\bar{r}}'(t),$$

deducem

$$\bar{v}_a = \bar{v}_{O'} + \bar{\omega} \times \bar{r}' + \bar{v}_r.$$

Cantitatea

$$\bar{v}_t := \bar{v}_{O'} + \bar{\omega} \times \bar{r}'$$

este numită *viteză de transport*, în timp ce $\bar{v}_r$ este numită *viteză relativă*.

În continuare, vom folosi o tehnică oarecum similară pentru a stabili relația dintre accelerația absolută și cea relativă

$$\begin{aligned} \bar{a}_a = \ddot{\bar{r}} &= \dot{\bar{v}}_{O'} + \dot{\bar{\omega}} \times \bar{r}' + \bar{\omega} \times \dot{\bar{r}}' + \dot{\bar{v}}_r = \dot{\bar{v}}_{O'} + \dot{\bar{\omega}} \times \bar{r}' + \bar{\omega} \times (\dot{\bar{r}} - \dot{\bar{r}}_{O'}) + \sum_{i=1}^3 \ddot{y}_i \bar{f}_i + \sum_{i=1}^3 \dot{y}_i \dot{\bar{f}}_i \\ &= \dot{\bar{v}}_{O'} + \dot{\bar{\omega}} \times \bar{r}' + \bar{\omega} \times (\bar{v}_a - \bar{v}_{O'}) + \bar{a}_r + \sum_{i,j,k=1}^3 \dot{y}_i \varepsilon_{ijk} \bar{f}_j \omega_k \\ &= \dot{\bar{v}}_{O'} + \dot{\bar{\omega}} \times \bar{r}' + \bar{\omega} \times (\bar{\omega} \times \bar{r}' + \bar{v}_r) + \bar{a}_r + \sum_{i,j,k=1}^3 \bar{f}_j \varepsilon_{ijk} \dot{y}_i \omega_k \\ &= \bar{a}_{O'} + \bar{a}_r + \dot{\bar{\omega}} \times \bar{r}' + \bar{\omega} \times (\bar{\omega} \times \bar{r}') + \bar{\omega} \times \bar{v}_r + \sum_{i,j,k=1}^3 \varepsilon_{ijk} \dot{y}_i \omega_k \bar{f}_j. \end{aligned}$$

Dar

$$\sum_{i,j,k=1}^3 \varepsilon_{ijk} \dot{y}_i \omega_k \bar{f}_j = - \sum_{i,j,k=1}^3 \varepsilon_{jik} \dot{y}_i \omega_k \bar{f}_j = \sum_{i,j,k=1}^3 \varepsilon_{jki} \dot{y}_i \omega_k \bar{f}_j = \sum_{j=1}^3 (\bar{\omega} \times \bar{v}_r)_j \bar{f}_j = \bar{\omega} \times \bar{v}_r,$$

și deducem

$$\bar{a}_a = \bar{a}_{O'} + \dot{\bar{\omega}} \times \bar{r}' + \bar{\omega} \times (\bar{\omega} \times \bar{r}') + 2\bar{\omega} \times \bar{v}_r + \bar{a}_r.$$

Se numește *accelerație de transport* cantitatea

$$\bar{a}_t = \bar{a}_{O'} + \dot{\bar{\omega}} \times \bar{r}' + \bar{\omega} \times (\bar{\omega} \times \bar{r}'),$$

în timp ce

$$\bar{a}_c = 2\bar{\omega} \times \bar{v}_r$$

se numește *accelerație Coriolis*.

Am dedus astfel că

$$\bar{a}_a = \bar{a}_t + \bar{a}_c + \bar{a}_r.$$

Principiul inerției ne spune că există un sistem de referință față de care orice punct asupra căruia nu acționează nicio forță are accelerația nulă. Considerăm cazul în care $\bar{r}_{O'}(t) = \bar{c}_1 + \bar{c}_2 t$, $\bar{c}_1, \bar{c}_2 = \text{constant}$ și $Q(t) = G$ nu depinde de timp. Pentru o astfel de situație, spunem că reperul mobil se mișcă rectiliniu și uniform în raport cu reperul absolut. Aceasta este echivalent cu a spune că aplicăm universului transformările g_1 și g_3 ale lui Galilei. Vom deduce

$$\bar{a}_{O'} = \bar{0}, \quad \bar{\omega} = \bar{0}, \quad \bar{a}_t = \bar{0}, \quad \bar{a}_c = \bar{0},$$

ceea ce implică

$$\bar{a}_a = \bar{a}_r. \quad (2.4.14)$$

Prin urmare, dacă impulsul va fi constant în reperul fix, atunci va fi constant și în reperul ce se mișcă rectiliniu și uniform față de el.

Sigur, în acest caz simplu, puteam lucra și direct pe componente. Astfel, în urma unei astfel de mișcări a reperului mobil avem

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1^1 + c_1^2 t \\ c_2^1 + c_2^2 t \\ c_3^1 + c_3^2 t \end{pmatrix} + G \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix},$$

adică, aceste transformări ale reperului vor produce următoarele transformări ale coordonatelor vectorului viteză și accelerație

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1^2 \\ c_2^2 \\ c_3^2 \end{pmatrix} + G \begin{pmatrix} \dot{y}_1 \\ \dot{y}_2 \\ \dot{y}_3 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \\ \ddot{x}_3 \end{pmatrix} = G \begin{pmatrix} \ddot{y}_1 \\ \ddot{y}_2 \\ \ddot{y}_3 \end{pmatrix}.$$

De unde rezultă aceeași concluzie: *dacă un sistem de referință este inerțial, atunci orice alt sistem de referință aflat într-o mișcare rectilinie și uniformă față de el este, de asemenea, un reper inerțial. În consecință, există o infinitate de sisteme inerțiale.* Mai mult, considerând o translație pe axa timpului ($t = t' + t_0$) calculele sunt oarecum similare cu cele de mai sus și putem spune că principiul impulsului este invariant la toate transformările lui Galilei, așa cum ar trebui să fie orice lege din mecanica clasică.

Observație 2.4.1. *Ca orice altă lege din mecanica clasică, principiul impulsului trebuie să fie invariant la grupul transformărilor lui Galilei.*

Printre transformările lui Galilei se numără și invarianța față de schimbarea originii timpului, vezi transformarea g_2 din grupul lui Galilei. Aceasta spune că dacă $t \mapsto \bar{r} = \bar{r}(t) \forall t \in [t_0, t_1)$ verifică ecuația lui Newton, atunci și $t \mapsto \bar{r} = \bar{r}(s + t) \forall t \in [t_0, t_1)$ trebuie să fie soluție a acestei ecuații pentru orice $s \in \mathbb{R}$. Rezultă că partea dreapta, adică forța $\bar{F}(\bar{r}, \dot{\bar{r}}, t)$, trebuie să nu depindă explicit de timp, adică, într-un sistem inerțial, ecuația lui Newton are de fapt forma

$$m \ddot{\bar{r}} = \bar{F}(\bar{r}(t) - \bar{r}^{\text{sursa}}(t), \bar{v}(t) - \bar{v}^{\text{sursa}}(t)).$$

O altă transformare din grupul lui Galilei făcea referire la rotații în $\mathbb{R}^3$. Invarianța legilor mecanice la aceste rotații exprimă faptul că spațiul este izotrop, adică nu există direcții preferate. Astfel, se impune ca odată cu $\bar{r} = \bar{r}(t)$, funcția $t \mapsto G \bar{r}(t)$, cu $G \in O(3)$ constantă în timp, să fie și ea soluție a ecuației lui Newton.

Se obține astfel că forța trebuie să verifice următoarele proprietăți de invarianță

$$\begin{pmatrix} F_1(\bar{r}(t) - \bar{r}^{\text{sursa}}(t), \bar{v}(t) - \bar{v}^{\text{sursa}}(t)) \\ F_2(\bar{r}(t) - \bar{r}^{\text{sursa}}(t), \bar{v}(t) - \bar{v}^{\text{sursa}}(t)) \\ F_3(\bar{r}(t) - \bar{r}^{\text{sursa}}(t), \bar{v}(t) - \bar{v}^{\text{sursa}}(t)) \end{pmatrix} = G^T \begin{pmatrix} F_1(G(\bar{r}(t) - \bar{r}^{\text{sursa}}(t)), G(\bar{v}(t) - \bar{v}^{\text{sursa}}(t))) \\ F_2(G(\bar{r}(t) - \bar{r}^{\text{sursa}}(t)), G(\bar{v}(t) - \bar{v}^{\text{sursa}}(t))) \\ F_3(G(\bar{r}(t) - \bar{r}^{\text{sursa}}(t)), G(\bar{v}(t) - \bar{v}^{\text{sursa}}(t))) \end{pmatrix}.$$

Problema 2.4.1. *Să se indice modul în care o translație pe axa timpului modifică expresia vitezei și expresia accelerației.*

Problema 2.4.2. Reperul mobil $\{O'; \bar{f}_1, \bar{f}_2, \bar{f}_3\}$ se mișcă față de reperul fix $\{O; \bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3\}$ după legea

$$\begin{aligned}\bar{f}_1 &= \cos t \bar{e}_1 + \sin t \bar{e}_2, \\ \bar{f}_2 &= -\sin t \bar{e}_1 + \cos t \bar{e}_2, \\ \bar{f}_3 &= \bar{e}_3, \\ \bar{r}_o &= 2t \bar{e}_3.\end{aligned}$$

Un punct material P se mișcă față de reperul mobil cu viteza unghiulară constantă ω_0 pe cercul $y_1^2 + y_2^2 = R^2$, $y_3 = 0$, la momentul inițial ocupând poziția $P_0(y_1 = R, y_2 = 0, y_3 = 0)$. Să se determine:

1. vectorul rotație instantanee;
2. vitezele relativă, de transport și absolută;
3. accelerațiile relativă, de transport, Coriolis și absolută.

Problema 2.4.3. Un unghi drept $\widehat{AOB}$ se rotește în planul său în jurul vârfului fix O , cu viteza unghiulară (variația unghiului de rotație) ω_0 . Punctul P se mișcă uniform pe latura OA plecând din punctul O . Să se determine legea mișcării absolute, viteza absolută și accelerația absolută și să se verifice legăturile acestora cu elementele mișcării relative.

Problema 2.4.4. În planul x_1Ox_2 , o dreaptă δ care trece prin origine se rotește în jurul axei Ox_3 cu viteza unghiulară (variația unghiului de rotație) constantă ω_0 . Pe dreapta δ , un punct material P se mișcă uniform cu viteza v_0 (față de dreaptă). Știind că la momentul inițial dreapta δ coincide cu axa Ox_1 , iar punctul se afla în origine, să se determine:

1. poziția punctului la momentul $t = \frac{\pi}{2\omega_0}$;
2. viteza și accelerația față de reperul fix și față de reperul mobil considerat.

2.5 Ecuațiile de mișcare în repere neinertiale

Să considerăm sistemul de referință fix $\{O; \bar{e}_i\}$ și un reper mobil $\{O'(t); \bar{f}_i(t)\}$ dependent de timp și un punct material în mișcare. Ne reamintim, a se vedea notațiile din secțiunea 2.4, faptul că accelerația absolută (relativ la reperul fix) a punctului material are expresia

$$\bar{a}_a = \bar{a}_{O'} + \dot{\bar{\omega}} \times \bar{r}' + \bar{\omega} \times (\bar{\omega} \times \bar{r}') + 2\bar{\omega} \times \bar{v}_r + \bar{a}_r,$$

unde

$$\bar{a}_r = \sum_{i=1}^3 \ddot{y}_i \bar{f}_i, \quad (2.5.15)$$

reprezintă accelerația relativă a punctului material (față de reperul mobil). Prin urmare, ecuația lui Newton va fi echivalentă cu

$$m \bar{a}_r = \bar{F}(\bar{r}' + \bar{r}_{O'}, \bar{v}_{O'} + \bar{\omega} \times \bar{r}' + \bar{v}_r) + \bar{F}_t(\bar{r}', t) + \bar{F}_c(\bar{v}_r, t), \quad (2.5.16)$$

unde

- $\bar{F}(\bar{r}' + \bar{r}_{O'}, \bar{v}_{O'} + \bar{\omega} \times \bar{r}' + \bar{v}_r)$ este *forța absolută*;
- $\bar{F}_t(\bar{r}', t) = -m \bar{a}_t = -m [\bar{a}_{O'} + \dot{\bar{\omega}} \times \bar{r}' + \bar{\omega} \times (\bar{\omega} \times \bar{r}')] este numită *forță de transport*.$
- $\bar{F}_c(\bar{v}_r, t) = -m \bar{a}_c = -m 2\bar{\omega} \times \bar{v}_r$ este numită *forță Coriolis*.

Ecuatia de mai sus se numește *ecuația de mișcare în repere neinertiale*. Forța de transport și forța Coriolis se numesc forțe complementare, sunt datorate mișcării reperului mobil și sunt care duc la descriere corectă a mișcării pentru un observator ce vede mișcarea în funcție de reperul mobil dar nu sunt forțe reale (nu există) pentru observatorul din reperul fix. Aceste forțe nu sunt forțe de interacțiune, nu putem indica corpul care le-ar exercita. Totuși, fără a considera aceste forțe, un observator care studiază mișcarea cu ajutorul unui reper mobil nu va putea obține date corecte asupra mișcării. Uneori, în unele probleme aceste forțe pot fi neglijate, însă observatorul trebuie să fie conștient de existența acestora, care uneori pot influența decisiv rezultatele obținute.

De exemplu, fie doi observatori, un observator absolut (fix) și un observator mobil ce se află într-un tren (neglijăm desigur mișcările Pământului considerând că aceste mișcări influențează infimețial mișcările studiate). Să considerăm că observatorul din tren trece pe lângă o clădire în repaus față de observatorul fix (asupra clădirii nu acționează nicio forță), adică accelerația clădirii va fi nulă. În contrast, dacă trenul se află într-o mișcare ce nu este rectilie și uniformă ($\vec{r}_{O'}(t) = \vec{c}_1 + \vec{c}_2 t$, $\vec{c}_1, \vec{c}_2 = \text{constant}$ și $Q(t) = G \in \text{SO}(3)$ constant), atunci clădirea va avea pentru observatorul mobil o mișcare accelerată. Deși asupra clădirii nu acționează nicio forță, pentru observatorul mobil această mișcare se produce ca și când asupra corpului ar acționa o forță reală egală cu suma forțelor complementare. Pe de altă parte, dacă considerăm un corp așezat fix pe o masa (cu

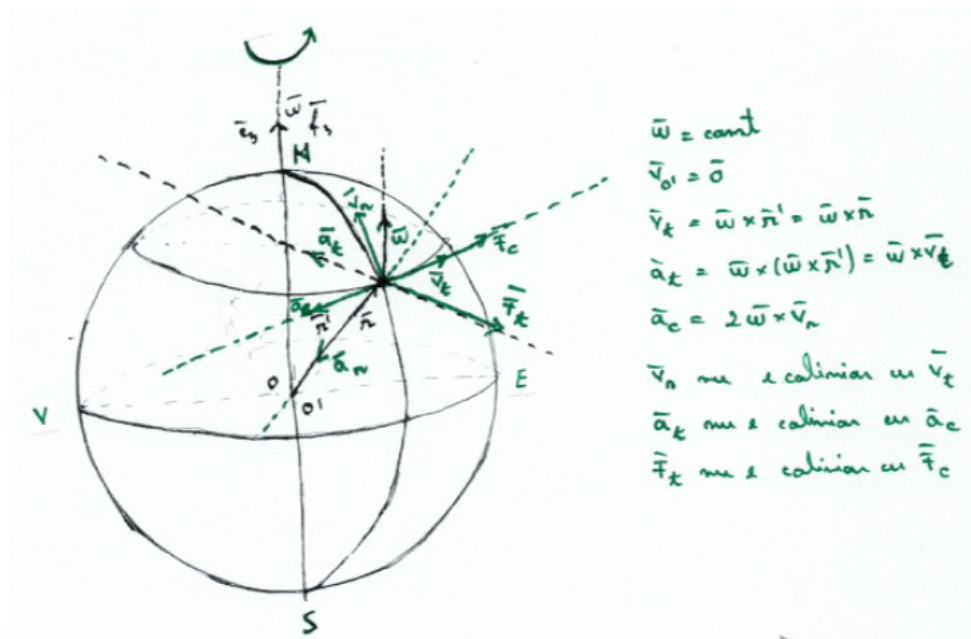


Figura 2.4: Mișcarea unui corp pe un meridian al Pământului înspre nord.

ajutorul unor tijă) într-un tren ce se află într-o mișcare ce nu este rectilie și uniformă, atunci pentru observatorul din tren corpul este în repaus deși asupra obiectului acționează forța ce deplasează trenul, în timp ce pentru observatorul fix corpul se mișcă accelerat

datorită acestei forțe. Dacă acum eliberăm corpul (și considerăm că el se mișcă fără frecare, vom vedea în una din secțiunile ce urmează ce înseamnă acest lucru), corpul se va mișca rectiliniu și uniform față de reperul fix deoarece asupra lui nu mai acționează nicio forță, în timp ce față de reperul mobil el va avea o mișcare accelerată, ca și când ar fi produsă de acțiunea unor forțe egale cu forțelor complementare.

Putem discuta acum și mișcarea unui corp pe suprafața Pământului. Considerăm $\bar{f}_3$ de-a lungul axei de rotație a Pământului de la sud înspre nord, $\bar{f}_1$ să fie pe direcția dreptei determinată de centrul Pământului înspre punctul de intersecție a meridianului pe care se află corpul cu ecuatorul, iar $\bar{f}_2 = \bar{f}_3 \times \bar{f}_1$. Drept reper fix am putea considera un reper în centrul Pământului a.î. $\bar{e}_i = \bar{f}_i(t_0)$. Pământul se rotește în jurul axei sale a.î. unghiul dintre $\bar{f}_1$ și $\bar{e}_1$ variază constant, deci și reperul mobil se rotește. În acest caz, a se vedea și exercițiile de la seminar, $\bar{\omega}(t) = \omega_0 \bar{e}_3 = \omega_0 \bar{f}_3$, $\omega_0 = \text{constant}$. Să considerăm un corp ce se mișcă pe un meridian al Pământului înspre nord, Figura 2.4. În acest caz, forța de transport este cuprinsă în planul meridian și este normală la cercul de secțiune (normală și pe linia polilor), în timp ce forța Coriolis va fi dirijată spre est, tangent la paralela care trece prin corp. Observatorul mobil constată deci o deviere spre est a mișcării. Dacă corpul s-ar fi deplasat spre sud, forța Coriolis ar fi fost dirijată spre vest. În ambele cazuri, avem o deviere spre dreapta. În emisfera sudică lucrurile se petrec prin simetrie în raport cu planul ecuatorial. Acest efect este considerabil în cazul sistemelor mecanice mari, cum ar fi un râu, caz în care ne referim la o curgere de la sud spre nord. Se constată că malul drept este erodat mai mult decât malul stâng. Tot forța Coriolis este responsabilă și pentru următorul fenomen. La liniile de cale ferată care sunt îndreptate după un meridian, fiind străbătute în sens unic de la sus spre nord, șina dreapta (estică) este supusă unei uzuri mai mari. Totuși această erodare presupune o interacțiune între punctul material și varietatea (curba, suprafața) pe care se mișcă, forțele complementare devenind în acest fel forțe reale prin care mișcarea varietății induce o inerție asupra particulei. Aceste forțe vor fi anulate de forțele de contact dintre particulă și varietate, particula fiind constrânsă să nu părăsească varietatea. Observatorul absolut justifică această mișcare înspre dreapta drept efect al schimbului de energie dintre varietate și particulă. Vom putea înțelege mai bine toate acestea un pic mai târziu.

Să considerăm un corp ce se mișcă pe o paralelă a Pământului în emisfera nordică, de la vest la est, Figura 2.5. În acest caz, forța Coriolis și forța de transport sunt cuprinse în planul meridian și sunt normale la cercul de secțiune (normală și pe linia polilor). Aceste forțe pot fi descompuse după direcția verticalei locului și după tangenta la meridian. Prima componentă face ca în reperul mobil acest corp să se miște ca și cum ar avea greutate mai mică iar a doua componentă deviază corpul înspre sud. În cazul în care corpul este lansat spre vest, forțele complementare vor avea sens opus.

Teorema 2.5.1. *Fie un sistemul de referință fix $\{O; \bar{e}_i\}$ și un reper mobil $\{O'(t); \bar{f}_i(t)\}$, ambele baze fiind ortonormate, orientate drept. Atunci ecuațiile de mișcare sunt invariante (ca lege) în cele două sisteme de referință dacă și numai dacă reperul mobil se mișcă rectiliniu și uniform.*

Demonstrație. Pentru început, să punctăm că faptul că ecuațiile de mișcare sunt invariante în cele două sisteme de referință înseamnă că, oricare ar fi o posibilă mișcare $t \mapsto \bar{r}(t)$ a unui punct material și considerând forța ce ar produce această mișcare, avem

$$m \bar{a}_a = \bar{F}(\bar{r}(t), \bar{v}(t)) \quad \forall t \geq t_0,$$

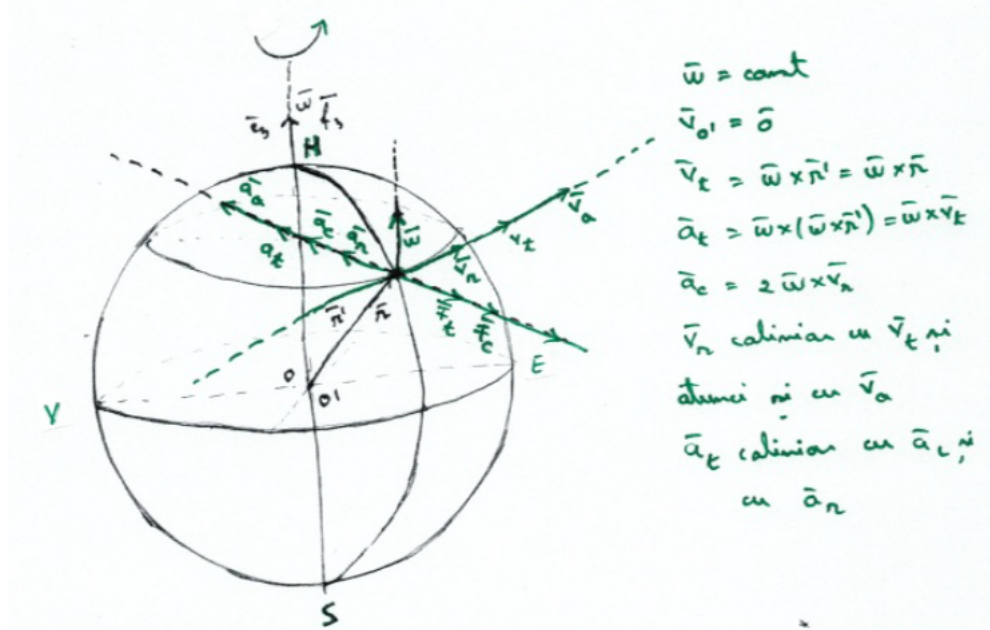


Figura 2.5: Mișcarea unui corp pe o paralelă a Pământului în emisfera nordică, de la est la vest.

$$m \bar{a}_r = \bar{F}'(\bar{r}'(t), \bar{v}_r(t)) \quad \forall t \geq t_0, \quad (2.5.17)$$

cu $\bar{F}(\bar{r}(t), \bar{v}(t)) = \bar{F}'(\bar{r}'(t), \bar{v}_r(t)) \quad \forall t \geq t_0.$

Implicația directă rezultă imediat deoarece știm deja din secțiunea 2.4 că $\bar{r}_{O'}(t) = \bar{c}_1 + \bar{c}_2 t$, $\bar{c}_1, \bar{c}_2 = \text{constant}$ și $Q(t) = G \in \text{SO}(3)$ constantă implică

$$\bar{\omega} = \bar{0}, \quad \bar{a}_a = \bar{a}_r, \quad \bar{F}_t = \bar{0}, \quad \bar{F}_c = \bar{0}. \quad (2.5.18)$$

Împreună cu proprietățile de invarianță ale forțelor, proprietăți rezultate în urma aplicării principiului relativității al lui Galilei, acestea vor conduce la invarianța ecuațiilor de mișcare.

Referitor la implicația inversă, faptul că ecuațiile de mișcare snt invariante în cele două sisteme de referință implică

$$\bar{a}_c + \bar{a}_t = \bar{0} \quad \forall t \geq t_0, \quad (2.5.19)$$

pentru orice aplicație $t \mapsto \bar{r}'(t) = \bar{r}(t) - \bar{r}_{O'}(t)$ de clasă C^2 .

Să considerăm o familie de mișcări particulare ale unor puncte materiale. De exemplu, putem considera că un punct material se află pe tot parcursul mișcării în $O'(t)$, adică $\bar{r}'(t) = \bar{0}$, $\forall t \geq t_0$. Prin urmare, pentru această familie de mișcări vom avea

$$\bar{v}_r = \bar{0} \Rightarrow \bar{a}_c = \bar{0} \quad (2.5.20)$$

și deci, în baza presupusei invarianțe a ecuațiilor de mișcare, va implica

$$\bar{a}_t = \bar{0}. \quad (2.5.21)$$

Să ne reamintim că

$$\bar{a}_t = \bar{a}_{O'} + \dot{\bar{\omega}} \times \bar{r}' + \bar{\omega} \times (\bar{\omega} \times \bar{r}'). \quad (2.5.22)$$

Rezultă, pentru că am ales $\bar{r}'(t) = \bar{0}$, că

$$\bar{a}_{O'}(t) = \bar{0} \quad \forall t \geq t_0. \quad (2.5.23)$$

În continuare, vom presupune mișcări pentru care

$$\bar{r}'(t) = \bar{f}_1(t) \in \mathbb{R}^3 \quad \forall s \in \mathbb{R}. \quad (2.5.24)$$

Deoarece și în acest caz avem

$$\bar{v}_r = \bar{0} \Rightarrow \bar{a}_c = \bar{0} \quad (2.5.25)$$

și pentru căm arătat deja că

$$\bar{a}_{O'}(t) = \bar{0} \quad \forall t \geq t_0, \quad (2.5.26)$$

vom avea că

$$\dot{\bar{\omega}}(t) \times \bar{f}_1(t) + \bar{\omega}(t) \times (\bar{\omega}(t) \times \bar{f}_1(t)) = \bar{0} \quad \forall t \geq t_0. \quad (2.5.27)$$

Aceasta implică

$$\langle \bar{\omega}(t) \times (\bar{\omega}(t) \times \bar{f}_1(t)), \bar{f}_1(t) \rangle = 0 \quad \forall t \geq t_0. \quad (2.5.28)$$

Dar,

$$\begin{aligned} \bar{\omega}(t) \times (\bar{\omega}(t) \times \bar{f}_1(t)) &= \bar{\omega}(t) \times [(\omega_1 \bar{f}_1 + \omega_2 \bar{f}_2 + \omega_3 \bar{f}_3) \times \bar{f}_1(t)] \\ &= (\omega_1 \bar{f}_1 + \omega_2 \bar{f}_2 + \omega_3 \bar{f}_3) \times (-\omega_2 \bar{f}_3 + \omega_3 \bar{f}_2) \\ &= \omega_2 \omega_1 \bar{f}_2 - \omega_2^2 \bar{f}_1 + \omega_1 \omega_3 \bar{f}_3 - \omega_3^2 \bar{f}_1. \end{aligned} \quad (2.5.29)$$

Deci,

$$0 = \langle \bar{\omega}(t) \times (\bar{\omega}(t) \times \bar{f}_1(t)), \bar{f}_1(t) \rangle = \omega_2^2(t) + \omega_3^2(t) \quad \forall t \geq t_0, \quad (2.5.30)$$

ceea ce implică

$$\omega_2(t) = 0 = \omega_3(t) \quad \forall t \geq t_0. \quad (2.5.31)$$

Similar, presupunând acum mișcările pentru care În continuare, vom presupune mișcări pentru care

$$\bar{r}'(t) = \bar{f}_2(t) \in \mathbb{R}^3 \quad \forall s \in \mathbb{R}, \quad (2.5.32)$$

se deduce

$$\omega_1(t) = 0 = \omega_3(t) \quad \forall t \geq t_0. \quad (2.5.33)$$

Prin urmare,

$$\bar{\omega} = \bar{0}. \quad (2.5.34)$$

Ne aducem aminte că viteză unghiulară $\bar{\omega}$ a reperului mobil față de reperul fix este definită ca fiind

$$\bar{\omega} = \omega_i \bar{f}_i.$$

Prin urmare

$$Q^T(t) \dot{Q}(t) = \text{anti}[\bar{\omega}] = O_3 \Rightarrow \dot{Q}(t) = O_3 \Rightarrow Q(t) = G \text{ constant} \quad \forall t \geq t_0, \quad (2.5.35)$$

Am arătat deci faptul că invarianța ecuației de mișcare în cele două repere implică faptul că

$$\bar{v}_{O'}(t) = \bar{v}_{O'}(t_0), \quad Q(t) = G \text{ constant} \quad \forall t \geq t_0. \quad (2.5.36)$$

ceea ce încheie demonstrația. ■

2.6 Existența soluției

Desigur, problema importantă din dinamica punctului material este de a determina mișcarea particulei atunci când se cunoaște starea inițială și forța care acționează asupra lui. Având o formulare matematică a unui fenomen, un model, o primă întrebare ar trebui mereu să fie cu privire la existența soluției. În cazul ecuației lui Newton acest fapt este dat de următoarea teoremă:

Teorema 2.6.1. *Fie un punct material a cărui mișcare este studiată în raport cu un sistem de referință (inercial sau neinercial) față de care componentele vectorului de poziție sunt $x_i(t)$, $i = 1, 2, 3$, $t \in (t_0, t_1)$. Fie problema Cauchy ce constă din ecuația de mișcare și starea inițială față de reperul considerat:*

$$\begin{aligned} m \ddot{x}_i(t) &= F_i(x_j, \dot{x}_j, t), \\ x_i(t_0) &= x_i^0, \\ \dot{x}(t_0) &= v_i^0. \end{aligned} \quad i, j = 1, 2, 3 \quad (2.6.37)$$

Dacă membrul drept (forța absolută pentru un reper inercial și care nu va depinde explicit de t , forța forța absolută plus forțele complementare în cazul reperelor neinertiale) $\bar{F} : \Omega \times (t_0, t_1) \rightarrow \mathbb{R}^3$, $F_i = F_i(x_j, \dot{x}_j, t)$, Ω deschis din $\mathbb{R}^6$ satisface condițiile:

- $\bar{F}$ continuă în raport cu $(x_j, \dot{x}_j, t)$;
- $\bar{F}$ local Lipschitz continuă în raport cu $(x_j, \dot{x}_j)$,

atunci determină în mod unic mișcarea într-un interval de timp $[t_0, t_0 + \delta)$, $\delta > 0$.

Demonstrație: Ecuațiile din (2.6.37) formează un sistem de ecuații diferențiale ordinare de ordinul doi pentru determinarea mișcării. Vom folosi substituțiile

$$\begin{aligned} q_i(t) &= x_i(t), & i &= 1, 2, 3 \\ q_{i+3}(t) &= \dot{x}_i(t), & i &= 1, 2, 3. \end{aligned}$$

Se obține astfel următoarea problema Cauchy, echivalentă cu problema Cauchy de la care am plecat, numai că vom avea un sistem de ecuații de ordinul întâi:

$$\begin{aligned} \dot{q}_i(t) &= Q_i(q_1, q_2, \dots, q_6, t), \\ q_i(t_0) &= q_i^0, \end{aligned} \quad i = 1, 2, \dots, 6 \quad (2.6.38)$$

unde

$$\begin{aligned} q_i^0 &= x_i^0, & q_{i+3}^0 &= v_i^0, \\ Q_i(t) &= \dot{x}_i(t) = q_{i+3}(t), & Q_{i+3}(t) &= \frac{1}{m} F_i(q_1, \dots, q_6, t) \end{aligned} \quad i = 1, 2, 3.$$

iar $\bar{Q} : \Omega \times (t_0, t_1) \rightarrow \mathbb{R}^6$, Ω deschis din $\mathbb{R}^6$, $(q_1, \dots, q_6, t) \in \Omega$.

Din proprietățile funcției $\bar{F}$ va rezulta că funcția $\bar{Q}$ este continuă în $\Omega \times (t_0, t_1)$ și local Lipschitz în raport cu $(q_1, \dots, q_6)$. În consecință, sunt verificate condițiile din teorema de existență și unicitate Picard-Lindelöf și deci concluzionăm existența unui $\delta > 0$ și a unei soluții unice $\bar{q} : (t_0, t_0 + \delta) \rightarrow \Omega$ a problemei Cauchy (2.6.38), ceea ce implică existența și unicitatea soluției problemei (2.6.37) într-un interval de timp $(t_0, t_0 + \delta)$. ■

Să amintim faptul că anumite condiții asupra funcției $\bar{F}$ (cum ar fi mărginirea pe intervalul de definiție) conduc la un rezultate de existență globală ale problemei Cauchy din teorema precedentă. Perechea $(\bar{r}(t), \bar{v}(t))$ se numește *stare la momentul t*. Starea $(\bar{r}(t_0), \bar{v}(t_0))$ se numește *stare inițială*. Prin urmare, teorema de existență exprimă faptul că de îndată ce cunoaștem forța și starea inițială, se cunoaște mișcarea punctului material.

2.7 Mișcări particulare. Teme de seminar

2.7.1 Mișcarea unui punct material greu

Experiența arată că în vecinătatea scoarței terestre toate corpurile cad în vid vertical cu o accelerație $\bar{g}$ orientată spre centrul Pământului, independentă de masa, natura, dimensiunile sau forma corpului. Căderea în vid presupune desigur că asupra corpului nu acționează nici o altă forță perturbatoare. Desigur, într-o astfel de abordare se neglijează efectul rotației Pământului. Mărimea g a acestei accelerații depinde de altitudine și latitudine: la ecuator are valoarea $9,7805 \frac{m}{s^2}$ în timp ce la poli este $9,8322 \frac{m}{s^2}$. Această variație este în concordanță cu legea atracției universale, unde mărimea forței de atracție dintre corp și Pământ este invers proporțională cu distanța dintre pătratul distanței dintre centrul Pământului și corp, adică cu pătratul sumei dintre raza Pământului și înălțimea față de sol. Este clară acum dependența de altitudine, dependența accelerației gravitaționale de latitudine rezultând din faptul că Pământul nu e perfect sferic, raza lui variind cu latitudine. Noi vom considera $g = 9,80665 \frac{m}{s^2}$ pe care o vom numi accelerație gravitațională normală (medie), ceea ce înseamnă (a se vedea secțiunea 2.7.4) că presupunem mișcarea

desfășurându-se într-o vecinătate a unui punct de pe suprafața Pământului, mișcare pentru care Pământul poate fi considerat ca fiind local plat. În cazul în care ne referim la deplasări între puncte situate la distanțe mari sau în intervale lungi de timp, atunci considerarea legii atracției universale și a mișcării Pământului este necesară.

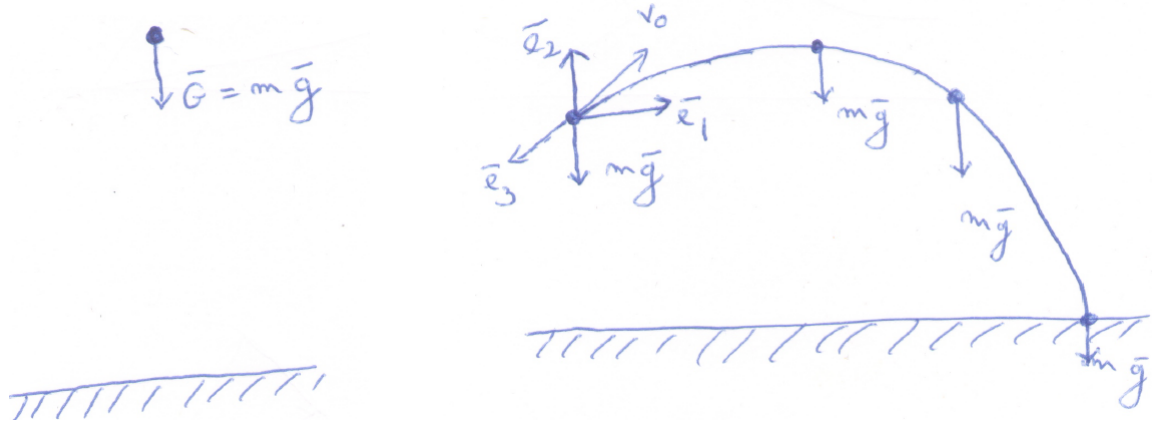


Figura 2.6: Mișcarea sub acțiunea greutății.

În concluzie, ceea ce presupunem este că asupra unui corp aflat în vecinătatea Pământului acționează o forță

$$\bar{G} = m \bar{g},$$

numită *forță de greutate*, unde $\|\bar{g}\| = g$ iar direcția *acceleerației gravitaționale* $\bar{g}$ este spre centrul Pământului. Un punct material asupra căruia acționează forța de greutate se numește *punct material greu*.

Considerăm un punct material greu care se află la înălțimea h față de scoarța terestră și asupra căruia nu acționează o altă forță.

Alegem un reper $\{O; \bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3\}$ astfel încât O coincide cu poziția inițială a particulei, direcția lui $\bar{g}$ să coincidă cu $-\bar{e}_2$.

Putem deci spune că starea inițială la momentul $t_0 = 0$ este dată de $(\bar{0}, \bar{v}_0)$. Versorul $\bar{e}_1$ va fi ortogonal pe $\bar{e}_2$, coplanar cu $\bar{g}$ și $\bar{v}_0$ dacă $\bar{g} \times \bar{v}_0 \neq \bar{0}$ și oarecare altfel, $\bar{e}_3 = \bar{e}_1 \times \bar{e}_2$, astfel ca baza $\{\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3\}$ să fie orientată pozitiv.

Problema care se pune este de a determina traiectoria unui astfel de punct material. Avem de rezolvat următoarea problemă Cauchy

$$m \ddot{\bar{r}}(t) = m \bar{g}, \quad \bar{r}(0) = \bar{0}, \quad \dot{\bar{r}}(0) = \bar{v}_0.$$

Este ușor de observat că prin integrare directă se deduce

$$\bar{r}(t) = \frac{1}{2} t^2 \bar{g} + \bar{v}_0 t.$$

Astfel, observăm că traiectoria punctului material este o submulțime a planului determinat de $\bar{g}$ și $\bar{v}_0$ dacă $\bar{g} \times \bar{v}_0 \neq \bar{0}$ sau că mișcarea lui este rectilinie dacă $\bar{g} \times \bar{v}_0 = \bar{0}$.

Pentru a determina traiectoria, dorim să determinăm explicit curba pe care se află punctul material. În reperul considerat vom avea

$$x_1 \bar{e}_1 + x_2 \bar{e}_2 = -\frac{1}{2} t^2 g \bar{e}_2 + t(v_0 \cos \alpha \bar{e}_1 + v_0 \sin \alpha \bar{e}_2),$$

unde α este unghiul dintre $\bar{v}_0$ și $\bar{e}_1$. Astfel, ecuațiile parametrice ale mișcării vor fi

$$\begin{aligned}x_1(t) &= t v_0 \cos \alpha, \\x_2(t) &= -\frac{1}{2} t^2 g + t v_0 \sin \alpha, \quad t \in [0, \infty).\end{aligned}$$

Dacă $\alpha = \frac{\pi}{2}$, atunci mișcarea este rectilinie, punctul ajungând la suprafața Pământului când $x_2(t_1) = -h$, adică atunci când $\frac{1}{2} t_1^2 g - t_1 v_0 = h$. Dacă $v_0 = 0$, atunci spunem că punctul material greu este în *cădere liberă*. În acest caz particular, particula va ajunge pe Pământ la momentul $t = \sqrt{\frac{2h}{g}}$.

Dacă $\alpha \in [0, \frac{\pi}{2})$, atunci deducem că

$$x_2 = -\frac{g}{2 v_0^2 \cos^2 \alpha} x_1^2 + \tan \alpha x_1,$$

adică traiectoria este o parabolă.

Problema 2.7.1. *Să se determine înălțimea maximă la care ajunge punctul material și momentul când punctul material atinge suprafața Pământului.*

Problema 2.7.2. *Un avion A zburând la înălțimea h trebuie să lovească o țintă B. De la ce distanță d , în stânga țintei, trebuie lansat proiectilul dacă se știe că avionul zboară orizontal cu viteza constantă $\bar{v}_0$ (se neglijează rezistența aerului).*

Problema 2.7.3. *Să se studieze mișcarea verticală descendentă a unui punct material greu de masă m , presupunând viteza inițială nulă și forța de rezistență a aerului este $\bar{R} = -mg\lambda\bar{v}$, $\lambda > 0$.*

Problema 2.7.4. *Un punct este lansat cu viteza v_0 și sub un unghi $\alpha \in (0, \frac{\pi}{2})$ față de orizontală. Presupunem forța de rezistență a aerului $\bar{R} = -mg\lambda\bar{v}$, $\lambda > 0$. Să se determine mișcarea.*

Problema 2.7.5. *Un țințaș trage într-o țintă aflată la distanța de 40 m ținând arma orizontal în direcția țintei. În ce punct va lovi glonte ținta dacă viteza sa inițială este de 40 $\frac{m}{s}$.*

2.7.2 Mișcarea plană

În cazul mișcărilor plane, de multe ori este convenabil să utilizăm coordonatele polare. Mișcarea fiind plană, vom considera un reper $\{O; \bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3\}$ unde $\bar{e}_1, \bar{e}_2$ sunt în planul mișcării. Astfel, a cunoaște mișcarea punctului material revine la a cunoaște dependentă de timp a coordonatelor polare (r, θ) definite de

$$\begin{aligned}x_1(t) &= r(t) \cos \theta(t), \\x_2(t) &= r(t) \sin \theta(t), \quad r(t) \geq 0, \quad \theta(t) \in [0, 2\pi), \quad t \in [t_0, t_1].\end{aligned}$$

Vom considera reperul $\{O; \bar{e}_r, \bar{e}_\theta, \bar{e}_3\}$, unde

$$\begin{aligned}\bar{e}_r &= \cos \theta \bar{e}_1 + \sin \theta \bar{e}_2, \\ \bar{e}_\theta &= -\sin \theta \bar{e}_1 + \cos \theta \bar{e}_2.\end{aligned}\tag{2.7.39}$$

Să remarcăm că $\bar{e}_r = \frac{1}{r} \bar{r}(t)$. Vom dori să rescriem întreaga ecuație a lui Newton în acest nou sistem de coordonate. Pentru aceasta vom determina expresia accelerației în noul reper.

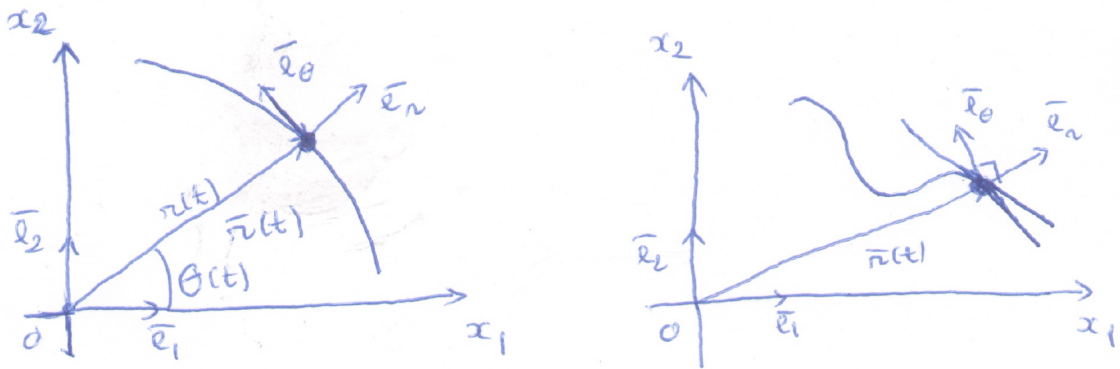


Figura 2.7: Versorii mișcării plane.

Astfel, avem

$$\vec{r}(t) = r(t) \vec{e}_r(t).$$

Vectorul viteză va fi dat de

$$\vec{v}(t) = \dot{r} \vec{e}_r(t) + r \dot{\vec{e}}_r(t).$$

Dar, avem

$$\begin{aligned} \dot{\vec{e}}_r &= \dot{\theta}(-\sin \theta \vec{e}_1 + \cos \theta \vec{e}_2) = \dot{\theta} \vec{e}_\theta, \\ \dot{\vec{e}}_\theta &= \dot{\theta}(-\cos \theta \vec{e}_1 - \sin \theta \vec{e}_2) = -\dot{\theta} \vec{e}_r. \end{aligned}$$

Astfel, vom obține

$$\vec{v}(t) = \dot{r} \vec{e}_r + r \dot{\theta} \vec{e}_\theta.$$

Se descompune astfel viteza în două componente

$$\begin{aligned} \vec{v}_r &= \dot{r} \vec{e}_r && \text{viteza radială,} \\ \vec{v}_\theta &= r \dot{\theta} \vec{e}_\theta && \text{viteza transversală.} \end{aligned}$$

Pentru calculul accelerației vom avea

$$\vec{a} = \dot{\vec{v}} = \ddot{r} \vec{e}_r + \dot{r} \dot{\vec{e}}_r + \dot{r} \dot{\theta} \vec{e}_\theta + r \ddot{\theta} \vec{e}_\theta + r \dot{\theta} \dot{\vec{e}}_\theta = \ddot{r} \vec{e}_r + 2 \dot{r} \dot{\theta} \vec{e}_\theta + r \ddot{\theta} \vec{e}_\theta - r \dot{\theta}^2 \vec{e}_r.$$

Vom avea astfel

$$\vec{a} = \vec{a}_r + \vec{a}_\theta,$$

unde

$$\begin{aligned} \vec{a}_r &= (\ddot{r} - r \dot{\theta}^2) \vec{e}_r && \text{accelerația radială,} \\ \vec{a}_\theta &= (2 \dot{r} \dot{\theta} + r \ddot{\theta}) \vec{e}_\theta && \text{accelerația transversală.} \end{aligned}$$

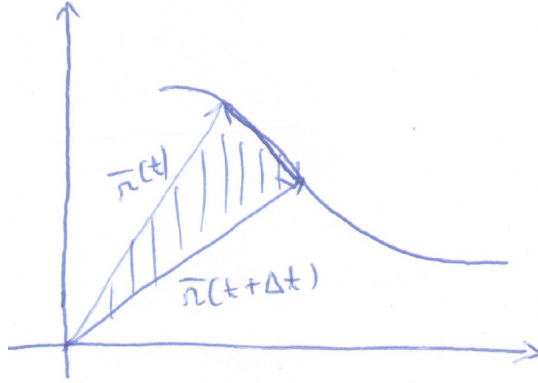


Figura 2.8: Aria măturată de raza vectorie.

Într-o mișcare plană a unui punct material, se definește *viteza areolară* ca fiind vectorul $\overline{\Omega} = \frac{1}{2} \bar{r} \times \dot{\bar{r}}$. Viteza areolară măsoară variația instantanee a vectorului ariei pe care o mătură vectorul de poziție de-a lungul mișcării punctului material. Pentru a vizualiza acest fapt, să definim

$$\overline{\mathcal{A}}(t, \Delta t) = \frac{1}{2} \bar{r}(t) \times \bar{r}(t + \Delta t), \quad (2.7.40)$$

și să ne reamintim că pentru $\bar{r} \in C^1(t_0, t_1)$ avem

$$\bar{r}(t + \Delta t) = \bar{r}(t) + \dot{\bar{r}}(t) \Delta t + O(|\Delta t|^2) \quad \Delta t \rightarrow 0, \quad (2.7.41)$$

unde prin $O((\Delta t)^2)$ înțelegem funcțiile f pentru care există constanta pozitivă M astfel încât $\|f\| \leq M (\Delta t)^2$ pentru $\Delta t \rightarrow 0$. Obținem

$$\begin{aligned} \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\overline{\mathcal{A}}(t, \Delta t)}{\Delta t} &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{2 \Delta t} \bar{r}(t) \times \bar{r}(t + \Delta t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{2 \Delta t} \bar{r}(t) \times (\bar{r}(t) + \dot{\bar{r}}(t) \Delta t + O((\Delta t)^2)) \\ &= \frac{1}{2} \bar{r}(t) \times \dot{\bar{r}}(t) + \bar{r}(t) \times \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{2 \Delta t} f(\Delta t) = \overline{\Omega}(t). \end{aligned} \quad (2.7.42)$$

Mărima vitezei areolare este dată de $\|\overline{\Omega}\| = \frac{1}{2} \|r \bar{e}_r \times \dot{\theta} \bar{e}_\theta\| = \frac{1}{2} r |\dot{\theta}|$, și măsoară variația instantanee a ariei măturate de raza vectorie.

Problema 2.7.6. Mișcarea unui punct material este descrisă prin $x_1 = e^t \cos t$, $x_2 = e^t \sin t$, $t \in [0, \frac{\pi}{2}]$. Determinați accelerația radială și transversală ale punctului și viteza areolară.

Problema 2.7.7. Un punct material P se mișcă uniform pe conul de rotație $x_1^2 + x_2^2 = x_3^2 \tan^2 \alpha$, $\alpha = \text{const.} \in (0, \frac{\pi}{2})$, în așa fel încât proiecția sa P_0 pe planul $x_1 O x_2$ se mișcă cu viteza areolară constantă. Să se determine mișcarea punctului P .

2.7.3 Mișcarea punctului material sub o forță de tip central

O *forță de tip central* acționând asupra unui punct material este o forță coliniară cu vectorul său de poziție față de un punct fix O , adică

$$\overline{F}(\bar{r}, \dot{\bar{r}}) = F(\bar{r}, \dot{\bar{r}}) \bar{e}_r, \quad \bar{e}_r = \frac{1}{r} \bar{r}, \quad r = \|\bar{r}\|.$$

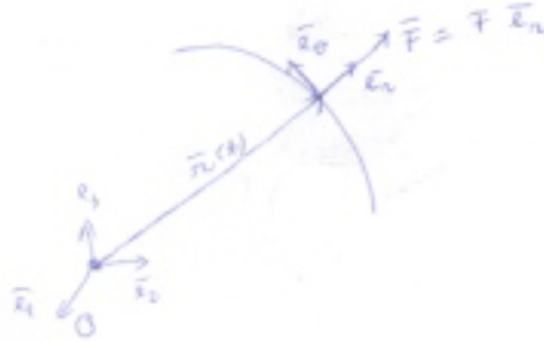


Figura 2.9: Forță centrală.

Considerăm acest punct fix ca fiind originea reperului ales.

Forța de atracție gravitațională este o forță de tip central. *Forța de atracție gravitațională* dintre două corpuri purtătoare de masă este direct proporțională cu produsul maselor corpurilor și invers proporțională cu pătratul distanței dintre ele. Prin urmare, alegând un reper într-unul dintre corpuri pe care îl considerăm fix, avem

$$\overline{F} = -\gamma \frac{m_1 m_2}{r^2} \overline{e}_r, \quad \gamma = 6.674 \times 10^{-11} N(m/kg)^2.$$

Expresia acestei forțe a fost dată de Isaac Newton (1687) plecând de la legile lui Kepler, a se vedea teorema de la sfârșitul secțiunii următoare. Un alt exemplu de forță de tip central este *forța elastică* ce va fi considerată în secțiunea referitoare la mișcarea oscilatorie armonică, adică $\overline{F} = -k\overline{r}, k > 0$.

Pentru o forță de tip central, ecuația lui Newton conduce la

$$\overline{r} \times \ddot{\overline{r}} = \frac{F}{r} \overline{0},$$

adică

$$\frac{d}{dt}(\overline{r} \times \dot{\overline{r}}) = \overline{0} \quad \Leftrightarrow \quad \overline{r} \times \dot{\overline{r}} = \overline{c}, \quad \overline{c} = \text{constant}.$$

Considerând că starea inițială la momentul t_0 este dată de $(\overline{r}_0, \overline{v}_0)$, se obține

$$\overline{r} \times \dot{\overline{r}} = \overline{r}_0 \times \overline{v}_0.$$

Cazul $\overline{r}_0 \times \overline{v}_0 \neq \overline{0}$

Înmulțind la stânga această relație scalar cu $\overline{r}$, se deduce

$$(\overline{r}, \overline{r}_0, \overline{v}_0) = 0,$$

adică mișcarea punctului material se face într-un plan ce trece prin punctul O (originea sistemului de coordonate) și care este determinat de vectorii $\overline{r}_0$ și $\overline{v}_0$. Deci, mișcarea sub acțiunea unei forțe centrale este în acest caz o mișcare plană.

Cum forța a fost considerată a fi centrală, direcția ei trece printr-un punct fix O . Din ecuația lui Newton va rezulta că și accelerația va trece prin acest punct fix. O mișcare pentru care accelerația trece printr-un punct fix se numește *mișcare centrală*.

Având în vedere că forța $\overline{F}$ are doar componentă radială, ecuația lui Newton este echivalentă cu ecuațiile scalare

$$\begin{aligned}\ddot{r} - r\dot{\theta}^2 &= \frac{1}{m} F(r, \theta, \dot{r}, \dot{\theta}), \\ 2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta} &= 0.\end{aligned}\tag{2.7.43}$$

Să observăm faptul că a doua ecuație se poate rescrie sub forma

$$r^2\dot{\theta} = c = \text{constant}.$$

Această relație se numește *integrala primă a ariilor*. Prin urmare, un punct material care se mișcă sub acțiunea unei forțe centrale are viteza areolară constantă. Constanta vitezei areolare în cazul mișcării planetelor sistemului solar a fost descoperită de Kepler și publicată în 1609 în *Astronomia Nova*.

Ne punem problema integrării ecuației lui Newton în cazul acțiunii unei forțe centrale și vom considera unele cazuri particulare.

- $F = F(r, \dot{r}, \dot{\theta})$. În acest caz, din integrala primă a ariilor rezultă

$$\dot{\theta} = \frac{c}{r^2},\tag{2.7.44}$$

iar (2.7.43)₁ devine

$$\ddot{r} = -r \frac{c^2}{r^4} + \frac{1}{m} F(r, \dot{r}, \frac{c}{r^2}).$$

Considerând și condiții inițiale, ecuația de mai sus va furniza o soluție unică $r = r(t)$, care înlocuită în (2.7.44) va duce la determinarea lui $\theta = \theta(t)$.

- $F = F(r, \dot{r}, \theta, \dot{\theta})$. În acest caz vom rescrie expresia accelerației radiale și se determină mai întâi $r = r(\theta)$. Avem

$$\begin{aligned}\dot{r} &= \frac{dr}{d\theta} \dot{\theta} = \frac{dr}{d\theta} \frac{c}{r^2} = -c \frac{d}{d\theta} \left(\frac{1}{r} \right), \\ \ddot{r} &= -c \frac{d}{dt} \left[\frac{d}{d\theta} \left(\frac{1}{r} \right) \right] = -c \frac{d^2}{d\theta^2} \left(\frac{1}{r} \right) \dot{\theta} = -c \frac{d^2}{d\theta^2} \left(\frac{1}{r} \right) \frac{c}{r^2} = -\frac{c^2}{r^2} \frac{d^2}{d\theta^2} \left(\frac{1}{r} \right).\end{aligned}\tag{2.7.45}$$

Astfel, se obține *formula lui Binet*

$$a_r = \ddot{r} - r\dot{\theta}^2 = -\frac{c^2}{r^2} \left[\frac{d^2}{d\theta^2} \left(\frac{1}{r} \right) + \frac{1}{r} \right],\tag{2.7.46}$$

unde $\overline{a}_r = a_r \overline{e}_r$.

Cu ajutorul formulei lui Binet, vom rescrie sistemul (2.7.43) în următoarea formă

$$\begin{aligned}\frac{d^2}{d\theta^2} \left(\frac{1}{r} \right) &= -\frac{1}{r} + \frac{r^2}{c^2} \frac{1}{m} F(r, \theta, -c \frac{d}{d\theta} \left(\frac{1}{r} \right), \frac{c}{r^2}), \\ 2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta} &= 0.\end{aligned}\tag{2.7.47}$$

Din prima ecuație se obține o ecuație diferențială în necunoscuta $\frac{1}{r}$ și variabila independentă θ . Cunoscând funcția $\frac{1}{r}$, din integrala primă a ariilor se determină θ .

Cazul $\bar{r}_0 \times \bar{v}_0 = \bar{0}$
În această situație va rezulta că

$$\bar{r} \times \dot{\bar{r}} = \bar{0},$$

adică

$$\dot{\bar{r}}(t) = k(t) \bar{r}(t) \quad t \in (t_0, t_1).$$

Această ecuație diferențială implică

$$\bar{r}(t) = \bar{r}_0 e^{\int_{t_0}^t k(l) dl},$$

ceea ce arată faptul că mișcarea va fi în acest caz una rectilinie. Considerând un versor $\bar{e}$ pe această dreaptă a mișcării, vom avea

$$\bar{r} = x \bar{e}, \quad \bar{F}(\bar{r}, \dot{\bar{r}}) = F(x, \dot{x}) \bar{e},$$

problema reducându-se în acest caz la a rezolva ecuația diferențială

$$\ddot{x} = \frac{1}{m} F(x, \dot{x}), \quad t \in (t_0, t_1).$$

Problema 2.7.8. *Punctul material P se mișcă pe o traiectorie astfel încât accelerația sa trece tot timpul prin punctul fix O și este invers proporțională cu puterea a treia a razei vectoare. Viteza inițială a punctului material P este perpendiculară pe raza vectoare inițială, iar mărimea sa v_0 este legată de mărimea a_0 a accelerației inițiale prin relația $10 v_0^2 = a_0 r_0$, unde r_0 este mărimea razei vectoare inițiale. Să se determine traiectoria punctului material.*

Indicație: Folosiți Formula lui Binet.

Problema 2.7.9. *Un punct material de masă m se mișcă sub acțiunea unei forțe centrale dată de $F = -m \frac{k}{r^3}$, $k > 0$. Știm că la momentul inițial $r(0) = 0$, $\theta(0) = 0$, $v(0) = \frac{\sqrt{2k}}{a}$, $a \neq 0$, iar măsura unghiului dintre $\bar{r}(0)$ și $\bar{v}(0)$ este $\frac{\pi}{2}$. Să se studieze mișcarea.*

Problema 2.7.10. *Să se găsească traiectoria unui punct material de masă m asupra căruia acționează o forță de atracție $\bar{F} = -\frac{m\mu}{r^3} \bar{r}$, $\mu > 0$, știind că la momentul inițial $r(0) = a(1 - e)$, $\theta(0) = 0$, $v(0) = \sqrt{\frac{\mu(1+e)}{a(1-e)}}$, măsura unghiului dintre $\bar{r}(0)$ și $\bar{v}(0)$ este $\frac{\pi}{2}$, $e \in (0, 1)$.*

Problema 2.7.11. *Un satelit de masă m este lansat cu viteza inițială v_0 față de centrul Pământului și la distanța D față de centrul său, de-a lungul traiectoriei unei stații spațiale. Este cunoscut faptul că satelitul este atras de Pământ cu forța de atracție $\bar{F} = -G \frac{mM}{r^3} \bar{r}$, unde G, m și M sunt constante cunoscute. Să se afle expresia potențialului și distanța maximă dintre satelit și centrul Pământului.*

Problema 2.7.12. *Un punct material de masă m se mișcă sub acțiunea forței $\bar{F} = -\frac{m\mu}{r^3} \bar{r}$, $\mu > 0$. Știind că la momentul inițial $r(0) = 0$, $\theta(0) = 0$, măsura unghiului dintre $\bar{r}(0)$ și $\bar{v}(0)$ este $\frac{\pi}{2}$, să se determine viteza inițială astfel încât traiectoria să fie circulară.*

2.7.4 Legile lui Kepler. Forța de atracție gravitațională

Johannes Kepler formulează legile de mișcare ale planetelor, folosindu-se de observații astronomice (în special pe cele făcute de astronomul danez Tycho Brahe asupra orbitei planetei Marte). Aceste legi nu sunt valabile decât în cadrul mecanicii newtoniene, primele două legi au fost publicate în 1609 în *Astronomia Nova*, iar cea de-a treia în 1619 în lucrarea *Harmonices mundi*. Însemnătatea lor este extraordinară ducând la ruperea definitivă de credința conform căreia planetele s-ar fi mișcat în jurul Soarelui pe traiectorii circulare. Acestea sunt:

- *Planetele, în mișcarea lor în jurul Soarelui, descriu traiectorii eliptice, cu Soarele situat într-unul dintre focare.*

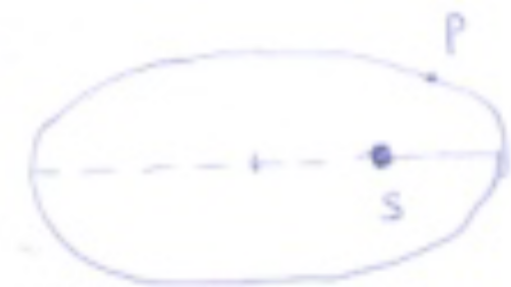


Figura 2.10: Prima lege a lui Kepler.

Johannes Kepler (1571-1630) a infirmat astfel presupunerea lui Ptolemeu (circa 87 d.Hr.– d. circa 165 d.Hr.), geocentrismul, cum că Pământul stă fix în centrul universului, toate celelalte corpuri cerești mișcându-se pe traiectorii perfect circulare în jurul acestui corp central sau pe traiectorii care pot fi obținute din suprapunerea mai multor traiectorii circulare sau a lui Nicolaus Copernic (1473-1543) care a dat o reprezentare heliocentrică, în care planetele se învârtesc în jurul Soarelui, dar consideră totuși că aceste orbite sunt circulare.

- *Raza vectoriale a planetei descrie arii egale în intervale de timp egale.* Din această



Figura 2.11: A doua lege a lui Kepler.

lege, numită “a ariilor egale”, rezultă că o planetă se deplasează cu atât mai repede cu cât este mai aproape de stea.

- *Raportul dintre pătratul perioadei de revoluție a planetei și cubul semiaxei mari a elipsei este același pentru toate planetele.* De aici rezultă relația dintre distanța



Figura 2.12: A treia lege a lui Kepler.

planetei față de Soare și perioada sa orbitală.

Legile lui Kepler au constituit baza pentru formularea legilor gravitației de către Isaac Newton și publicate în 1687, legi care au o deosebită importanță pentru înțelegerea mișcării corpurilor cerești, de exemplu a Pământului și a celorlalte planete în jurul Soarelui, sau a sateliților în jurul corpurilor cerești.

Teorema 2.7.1. *Dacă sunt satisfăcute legile lui Kepler, atunci forța exercitată de Soare asupra celorlalte planete este dată de legea de atracție universală a lui Newton:*

$$\vec{F} = -\gamma \frac{m_1 m_2}{r^2} \vec{e}_r, \quad \gamma = 6.674 \times 10^{-11} N(m/kg)^2,$$

unde m_1 este masa planetei, m_2 este masa Soarelui, r reprezintă distanța Soare-planetă iar $\vec{e}_r$ are semnificația din cazul mișcării plane, reperul fiind ales cu centrul în Soare.

Demonstrație. Deoarece prima lege a lui Kepler afirmă că mișcarea e una plană, demonstrație folosește scrierea ecuațiilor lui Newton în coordonate polare, într-un reper $\vec{e}_r, \vec{e}_\theta$ centrat în Soare.

Atunci, ecuația de mișcare implică

$$m_1 \vec{a}_r + m_1 \vec{a}_\theta = F_r \vec{e}_r + F_\theta \vec{e}_\theta + F_3 \vec{e}_3. \quad (2.7.48)$$

Prin urmare, folosind expresia accelerației transversale, se deduce

$$\begin{aligned} 0 &= F_3, \\ m_1 a_r &= F_r, \\ 2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta} &= F_\theta. \end{aligned} \tag{2.7.49}$$

A doua lege a lui Kepler implică: variația instantanee a vectorului ariei pe care o mătură vectorul de poziție de-a lungul traiectoriei are mărime constantă. Sigur, acest lucru înseamnă că viteza areolară are mărimea constantă, adică

$$r^2\dot{\theta} = c \quad \Rightarrow \quad 2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta} = 0 \quad \Rightarrow \quad F_\theta = 0. \tag{2.7.50}$$

Pentru mărimea vitezei radiale vom folosi formula lui Binet și vom avea

$$-m_1 \frac{c^2}{r^2} \left[\frac{d^2}{d\theta^2} \left(\frac{1}{r} \right) + \frac{1}{r} \right] = F_r. \tag{2.7.51}$$

Revenind la prima lege a lui Kepler, avem că traiectoria este o elipsă. Ecuația implicită a unei elipse în coordonate polare este

$$r = \frac{p}{1 + e \cos \theta}, \tag{2.7.52}$$

unde

- $0 < a$ reprezintă semi-axa mare a elipsei;
- $0 < b$ reprezintă semi-axa mică a elipsei;
- $c = \sqrt{a^2 - b^2}$ reprezintă jumătatea distanței focale a elipsei;
- $e = \frac{c}{a} = \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}} < 1$ este excentricitatea elipsei;
- $p = a(1 - e^2) = \frac{b^2}{a}$ este parametrul elipsei.

Atunci, prin derivare în raport cu θ se deduce

$$\frac{d^2}{d\theta^2} \left(\frac{1}{r(\theta)} \right) + \frac{1}{r(\theta)} = -\frac{e}{p} \cos \theta + \frac{1 + e \cos \theta}{p} = \frac{1}{p}. \tag{2.7.53}$$

Folosind această identitate în relația lui Binet, vom deduce că

$$F_r = -\frac{c^2 m_1}{p r^2}. \tag{2.7.54}$$

Prin integrarea relației

$$r^2\dot{\theta} = c \tag{2.7.55}$$

pe intervalul $[0, T]$ unde T este perioada de rotației pe orbită, și folosind relația $r = \frac{p}{1+e \cos \theta}$ se deduce că

$$\int_0^T \frac{p^2}{(1+e \cos \theta(t))^2} \dot{\theta}(t) dt = c T, \quad (2.7.56)$$

adică

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} \frac{p^2}{(1+e \cos \theta)^2} d\theta = c T &\Leftrightarrow \frac{2\pi p^2}{(1-e^2)^{3/2}} = c T \Leftrightarrow 2 a b \pi = c T \\ &\Leftrightarrow c = \frac{2 a b \pi}{T}. \end{aligned} \quad (2.7.57)$$

Astfel, avem că

$$F_r = -\gamma \frac{m_1 m_2}{r^2}, \quad (2.7.58)$$

unde

$$\gamma = \frac{c^2}{p m_2} = \frac{\pi^2}{m_2} \frac{4 a^2 b^2}{T^2} \frac{a}{b^2} = \frac{4\pi^2}{m_2} \frac{a^3}{T^2} = \text{const.} \quad (2.7.59)$$

conform celei de a treia legi, ceea ce încheie demonstrația. ■

De fapt, această lege se extinde la *forța de atracție gravitațională* dintre două corpuri purtătoare de masă menționată la sfârșitul secțiunii precedente.

2.7.5 Mișcarea oscilatorie armonică

O forță atractivă, centrală a cărei mărime este tot timpul proporțională cu distanța la un punct fix O numit pol se numește *forță elastică*, adică

$$\bar{F} = -k \bar{r}, \quad k > 0.$$

O forță elastică este o forță de tip central. Acest tip de forță este în strânsă legătură cu forța care apare atunci când un resort este comprimat sau extins. Când un resort (mediu elastic) este deformat, întins sau comprimat, resortului reacționează cu forță direct proporțională cu întinderea și în sens opus solicitării care îl deformează. Această forță de reacțiune va fi numită tensiune, iar relație descrisă în propoziția de mai sus fost formulată de Robert Hooke în 1676 și îi poartă numele (legea lui Hooke). Legând un corp de resort, resortul va acționa asupra corpului cu o forță egală cu tensiunea din resort. Sigur, să punctăm iarăși că se va presupune că resortul (mediul elastic) este doar comprimat sau întins. Modelul matematic constituit dintr-un punct material supus acțiunii unei forțe elastice se numește *oscilator elastic*. Pentru simplitatea calculelor, vom presupune $t_0 = 0$.

Cazul $\bar{r}_0 \times \bar{v}_0 = \bar{0}$: Oscilatorul liniar

În această situație rezultă că mișcarea este rectilinie. Alegând un reper având originea O și un versor $\bar{e}$ pe această dreaptă, vom avea

$$\bar{r} = x \bar{e},$$

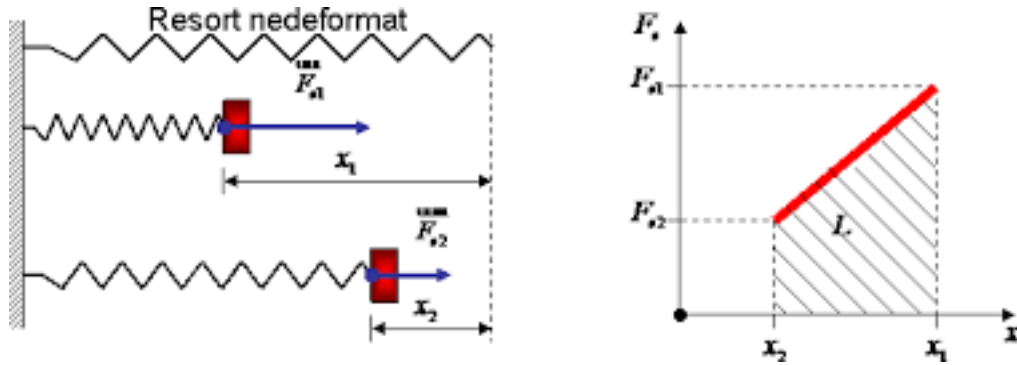


Figura 2.13: Forță elastică.

unde x este soluție a problemei Cauchy

$$\begin{aligned}\ddot{x}(t) &= -\frac{k}{m}x, & t > 0, \\ x(0) &= x_0, \\ \dot{x}(0) &= v_0,\end{aligned}$$

cu $\bar{r}_0 = x_0 \bar{e}$, $\bar{v}_0 = v_0 \bar{e}$.

Soluția acestei probleme Cauchy este

$$x(t) = x_0 \cos \omega t + \frac{v_0}{\omega} \sin \omega t,$$

unde $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$. Există $a > 0$ și $\varphi \in [0, 2\pi)$, astfel încât

$$x_0 = a \sin \varphi, \quad \frac{v_0}{\omega} = a \cos \varphi.$$

Se obține astfel

$$x(t) = a \sin(\omega t + \varphi), \quad t \geq 0, \quad a > 0, \quad \varphi \in [0, 2\pi), \quad \omega = \sqrt{\frac{k}{m}}.$$

O astfel de mișcare se numește *oscilație armonică*, adică o mișcare cu un grad de libertate (o mișcare ce poate fi descrisă doar de o funcție scalară) definită de o funcție periodică având ca argument o funcție afină de timp $\omega t + \varphi$.

Pentru o mișcare oscilatorie se folosesc următoarele notații: mărimea x se numește *elongație* și reprezintă distanța punctului până la centrul mișcării; a este *amplitudinea* mișcării, adică elongația maximă; argumentul $\omega t + \varphi$ se numește *faza* mișcării; φ este *faza inițială*; *perioada oscilației* este cel mai mic interval de timp T dintre momentele în care particula ocupă aceeași poziție și are viteza de același sens (în cazul nostru $T = \frac{2\pi}{\omega}$); numărul de perioade în unitatea de timp se numește *frecvență* $\nu = \frac{1}{T}$ (în cazul nostru $\nu = \frac{1}{2\pi}$); numărul de perioade în 2π unități de timp se numește *pulsatie* (în cazul nostru ω).

O oscilație armonică de frecvență mare și amplitudine mică se numește *vibrație* iar o oscilație armonică de frecvență mică se numește *pendulare*. Se spune că o oscilație este

amortizată (disipativă) dacă amplitudinea sa descrește în timp. În cazul nostru amplitudinea este constantă, determinată de x_0, v_0 și ω , deci oscilația nu e amortizată.

În modelele studiate în această secțiune, nu am considerat alte forțe ce acționează asupra punctului material. Dacă am fi luat în considerare forța de rezistență a aerului $\bar{R} = -\lambda \bar{v}$, $\lambda > 0$, atunci mișcarea punctului material ar fi fost o oscilație amortizată.

Cazul $\bar{r}_0 \times \bar{v}_0 \neq \bar{0}$: Oscilatorul eliptic

În conformitate cu rezultatele referitoare la mișcarea punctului material sub o forță de tip central, rezultă că mișcarea se face într-un plan determinat de $\bar{r}_0$ și $\bar{v}_0$, coordonatele într-un reper $\{O; \bar{e}_1, \bar{e}_2\}$ fiind soluții ale problemelor Cauchy

$$\begin{aligned} \ddot{x}_\alpha(t) + \omega x_\alpha &= 0, & t > 0, \\ x_\alpha(0) &= x_\alpha^0, \\ \dot{x}_\alpha(0) &= v_\alpha^0, & \alpha = 1, 2, \end{aligned}$$

cu $\bar{r}_0 = x_\alpha^0 \bar{e}_\alpha$, $\bar{v}_0 = v_\alpha^0 \bar{e}_\alpha$.

Se deduce

$$\begin{aligned} x_1(t) &= x_1^0 \cos \omega t + \frac{v_1^0}{\omega} \sin \omega t, \\ x_2(t) &= x_2^0 \cos \omega t + \frac{v_2^0}{\omega} \sin \omega t, \end{aligned}$$

și

$$\cos \omega t = \frac{x_1 v_2^0 - x_2 v_1^0}{x_1^0 v_2^0 - x_2^0 v_1^0}, \quad \sin \omega t = \frac{(x_1 x_2^0 - x_2 x_1^0) \omega}{v_1^0 x_2^0 - v_2^0 x_1^0}. \quad (2.7.60)$$

Astfel, obținem ecuația traiectoriei

$$(x_1 v_2^0 - x_2 v_1^0)^2 + \omega^2 (x_1 x_2^0 - x_2 x_1^0)^2 = (x_2^0 v_1^0 - x_1^0 v_2^0)^2 \quad (2.7.61)$$

de unde concluzionăm că traiectoria este o elipsă.

Problema 2.7.13. Un punct material de masă $m = 1 \text{ kg}$ este acționat de o forță elastică $\bar{F} = -4\bar{r}$. Știind că poziția inițială ocupată de punct este $\bar{r}(0) = (-5, 0)$ și $\bar{v}(0) = (10\sqrt{3}, 0)$ să se determine:

1. pulsația, perioada oscilația;
2. ecuația de mișcare;
3. primul moment la care $\bar{r}(0) = (0, 0)$;
4. energia potențială.

Problema 2.7.14. Un punct material de masă $m = 2 \text{ kg}$ se mișcă de-a lungul axei Ox_1 sub acțiunea a două forțe: o forță de atracție orientată spre origine, dată de $\bar{F}_1 = -8x_1 \bar{e}_1$ și o forță de amortizare proporțională cu viteza, dată $\bar{F}_2 = -8\dot{x}_1 \bar{e}_1$. Presupunând că la momentul inițial punctul ocupă poziția $\bar{r}_0 = 20 \bar{e}_1$ și are viteza inițială $\bar{v}_0 = 20 \bar{e}_1$, să se determine mișcarea și viteza oscilației amortizate.

1. pulsația, perioada oscilația;
2. ecuația de mișcare;
3. primul moment la care $\bar{r}(0) = (0, 0)$;
4. energia potențială.

2.8 Teoreme generale ale dinamicii punctului material

Presupunem că asupra unui punct material acționează o forță continuă $\vec{F}$. În această secțiune, baza considerată $\{\vec{e}_i\}$ va fi baza canonică, componentele vectorilor ce vor fi considerați fiind componentele în această bază. Definim *lucrul mecanic* efectuat de forța $\vec{F}$ la deplasarea între punctele A_0 (poziția $\vec{r}(t_0)$ la un moment t_0) și A (poziția $\vec{r}(t)$ la un moment t) de-a lungul traiectoriei prin următoarea integrală curbilinie de speța a II-a

$$P = \int_{A_0}^A \langle \vec{F}, d\vec{r} \rangle = \int_{A_0}^A \sum_{i=1}^3 F_i dx_i.$$

Lucrul mecanic indică efectul util al forței, fiind definit de fapt cu ajutorul produsului dintre deplasare și componenta forței pe direcția deplasării (componenta tangențială), deoarece componenta normală a forței nu poate contribui la deplasarea dată. Întrucât am

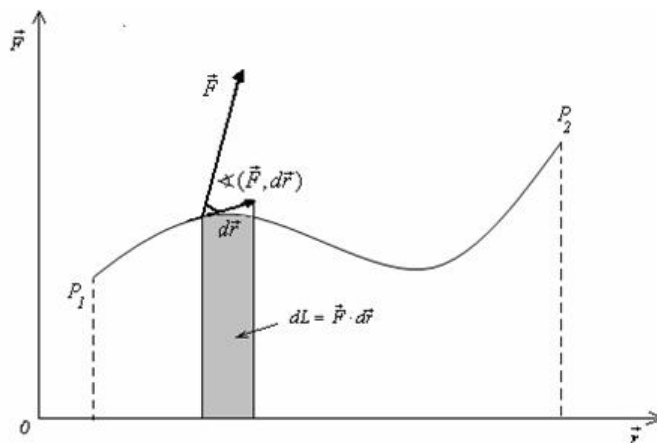


Figura 2.14: Lucrul mecanic.

presupus că traiectoria mișcării este netedă, lucrul mecanic va fi dat de

$$P = \int_{t_0}^t \langle \vec{F}(\ell), \frac{d\vec{r}}{d\ell}(\ell) \rangle d\ell = \int_{t_0}^t \sum_{i=1}^3 F_i(\ell) \frac{dx_i}{d\ell}(\ell) d\ell.$$

Puterea forței care acționează asupra punctului material este definită prin

$$W = \langle \vec{F}, \vec{v} \rangle.$$

Deducem

$$W = \frac{dP}{dt},$$

adică faptul că puterea forței indică variația lucrului mecanic (la deplasarea pe distanța infinitezimală $d\vec{r}$). Energia cinetică a unui punct material este dată de

$$E = \frac{1}{2} m \|\vec{v}\|^2 = \frac{1}{2} m v^2.$$

Teorema 2.8.1. [Teorema energiei cinetice] *Într-un sistem de referință inerțial, derivata în raport cu timpul a energiei cinetice a unei particule în mișcare sub acțiunea forței $\overline{F}$ este egală cu puterea forței $\overline{F}$, adică*

$$\dot{E} = W. \quad (2.8.1)$$

Demonstrație: Din definiția energiei cinetice rezultă

$$\dot{E} = m\langle \overline{v}, \dot{\overline{v}} \rangle = m\langle \overline{v}, \overline{a} \rangle.$$

Folosind ecuația lui Newton va rezulta

$$\dot{E} = \langle \overline{v}, \overline{F} \rangle = W. \quad \blacksquare$$

Definim momentul cinetic în raport cu punctul O , asociat unui punct material în mișcare prin

$$\overline{K}_O = m \overline{r} \times \overline{v}.$$

Momentul forței $\overline{F}$ față de punctul O , este dat de

$$\overline{M}_O = \overline{r} \times \overline{F}.$$

Momentul forței și momentul cinetic sunt mărimi ce se pot defini pentru un punct material, însă momentul forței este o mărime fizică vectorială ce exprimă cantitativ capacitatea forței de a roti un corp în jurul unei drepte ce trece printr-un punct și este perpendiculară pe planul format de dreapta suport a forței și punctul respectiv. Aceste două cantități joacă un rol important și în descrierea deformării mediilor continue și trebuie privite ca fiind reminiscențe ale neglijării formei corpului dar cu păstrarea efectului de rotație asociat ca o mărime vectorială punctului material.

Teorema 2.8.2. [Teorema momentului cinetic] *Într-un sistem de referință inerțial, derivata în raport cu timpul a momentului cinetic în raport cu punctul O a unei particule în mișcare sub acțiunea forței $\overline{F}$ este egală cu momentul forței $\overline{F}$ în raport cu punctul O , adică*

$$\dot{\overline{K}}_O = \overline{M}_O. \quad (2.8.2)$$

Demonstrație: Imediată. \blacksquare

O forță $\overline{F}$ se numește *forță conservativă* dacă există o funcție $V : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ astfel încât

$$\overline{F} = -\nabla_{\overline{r}} V(\overline{r}) := -\frac{\partial V}{\partial x_i} \overline{e}_i.$$

Se înțelege că în acest caz $\overline{F}$ depinde doar de vectorul de poziție $\overline{r}$. Spunem că avem un *câmp de forțe*.

Funcția scalară V se numește *potențialul* din care derivă forța conservativă $\overline{F}$. Semnificația fizică a lui V este de *energie potențială* a unui punct material aflat în poziția A sub acțiunea

unui câmp conservativ și este egală cu lucrul mecanic efectuat de forța respectivă când punctul material se mișcă de la poziția A până la o poziție de referință A_0 , adică

$$V(\vec{r}(t)) - V(\vec{r}(t_0)) = \int_{t_0}^t \frac{dV}{d\ell} d\ell = \int_{t_0}^t \langle \nabla_{\vec{r}} V(\vec{r}(\ell)), \frac{d\vec{r}}{d\ell} \rangle d\ell = - \int_{A_0}^A \langle \vec{F}, d\vec{r} \rangle.$$

Deci, dacă se cunoaște forța conservativă $\vec{F}$, atunci se obține expresia potențialului din care derivă forța conservativă.

Să ne reamintim un rezultat care ne indică dacă un câmp vectorial este un câmp conservativ sau nu :

Teorema 2.8.3. *Fie $\vec{F}$ un câmp vectorial de clasă C^1 pe un domeniu D simplu conex. Atunci următoarele afirmații sunt echivalente:*

1. $\text{curl } \vec{F} = \vec{0}$;
2. $\vec{F}$ admite un potențial de clasă C^2 ;
3. Lucrul mecanic al lui $\vec{F}$ pe un drum oarecare ce unește punctele A_0 și A din D depinde numai de extremități și nu de forma drumului.

Dacă $\vec{F}$ admite un potențial, atunci

$$\langle \vec{F}, d\vec{r} \rangle = -dV. \quad (2.8.3)$$

Cantitatea $dP = \langle \vec{F}, d\vec{r} \rangle$ se numește *lucru mecanic elementar*.

Problema 2.8.1. *Să se verifice dacă forța de greutate și forța de atracție universală sunt forțe conservative. În caz afirmativ, să se determine potențialul din care derivă.*

Pentru o particulă aflată în mișcare sub acțiunea unui câmp conservativ de forțe $\vec{F}$, numim *energia mecanică (totală)* suma dintre energia cinetică și energia potențială asociată câmpului de forțe.

Teorema 2.8.4. [Teorema conservării energiei totale] *În raport cu un sistem de referință inerțial, energia mecanică a unei particule aflată în mișcare sub acțiunea unui câmp conservativ de forțe este constantă în timpul mișcării, adică*

$$E(t) + V(t) = E(t_0) + V(t_0) \quad \forall t \in [t_0, t_1].$$

Demonstrație: Deoarece avem un câmp potențial, vom avea

$$W = \langle \vec{F}, \frac{d\vec{r}}{dt} \rangle = -\langle \nabla_{\vec{r}} V(\vec{r}), \frac{d\vec{r}}{dt} \rangle = -\dot{V}.$$

Din teorema energiei cinetice rezultă că

$$\dot{E} = W,$$

de unde vom obține

$$\dot{E} = -\dot{V},$$

adică

$$\dot{E} + \dot{V} = 0,$$

care prin integrare între t_0 și t conduce la concluzia teoremei. ■

Problema 2.8.2. *Să se determine:*

1. *legea de mișcare a unui punct de masă $m = 1$ dacă asupra sa acționează forța: $\vec{F} = -4(x_1\vec{e}_1 + x_2\vec{e}_2)$ știind că la momentul inițial $\vec{r}(0) = 2\vec{e}_1, \vec{v}(0) = 2\vec{e}_2$;*
2. *aflați traiectoria mișcării de la punctul (a);*
3. *curbura traiectoriei mișcării de la punctul (a);*
4. *energia cinetică a punctului material de la punctul (a);*
5. *energia totală a punctului material de la punctul (a).*

2.9 Tensorul metric. Expresia vitezei unui punct material în coordonate curbilinii

Fie $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ baza canonică din $\mathbb{R}^3$. Notăm cu x_1, x_2 și x_3 coordonatele unui punct generic din $\mathbb{R}^3$ în baza $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$. De multe ori, în studiul mișcării unui punct material, exprimarea cantităților cinematice în raport cu altă bază, adică considerarea unor noi coordonate. Baza considerată poate depinde de timp și chiar de poziția punctului material, a se vedea baza $\vec{e}_r, \vec{e}_\theta$ considerată în cazul mișcării plane. Coordonatele într-o astfel de bază se numesc *coordonațe curbilinii*. De exemplu, atunci când se consideră mișcarea unui punct material pe un cilindru sau pe o sferă, ne interesează să descompunem atât vectorul de poziție dar și vectorul viteză și accelerație într-o bază formată dintr-un sistem de vectori ca în figurile următoare.

Prin urmare, să considerăm un sistem de coordonate curbilinii (q^1, q^2, q^3) ale punctelor din $\mathbb{R}^3$, și aplicațiile

$$x_i = x_i(q^1, q^2, q^3), \quad i = 1, 2, 3 \quad (2.9.4)$$

care descriu transformarea de coordonate. Considerăm că această transformare este cunoscută. Mai mult, presupune că această transformare

$$(q^1, q^2, q^3) \mapsto (x_1(q^1, q^2, q^3), x_2(q^1, q^2, q^3), x_3(q^1, q^2, q^3)) \quad (2.9.5)$$

este de clasă C^2 și astfel încât determinantul funcțional

$$J = \det \left(\frac{\partial x_i}{\partial q^j} \right) \neq 0. \quad (2.9.6)$$

Aceasta implică transformarea este biunivocă și bicontinuă. Atragem atenția că aceste aplicații se referă la coordonatele unui punct oarecare din $\mathbb{R}^3$ și nu numai la coordonatele unui punctului material în mișcare.

Să considerăm în continuare mișcarea unui punct material $t \mapsto \bar{r}(t)$, $\bar{r} \in C^2(t_0, t_1)$.

Dacă se cunoaște modul în care coordonatele q^1, q^2, q^3 depind de timp, adică

$$t \mapsto q^i(t), t \in [t_0, t_1], \quad (2.9.7)$$

și dacă știm cum depind coordonatele x_1, x_2, x_3 ale unui punct generic din $\mathbb{R}^3$ de coordonatele q^1, q^2, q^3 , adică dacă cunoaștem aplicațiile

$$x_i = x_i(q^1, q^2, q^3), \quad i = 1, 2, 3, \quad (2.9.8)$$

atunci vom cunoaște mișcarea punctului material față de baza $\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3$.

Întrucât x_i depind de q^1, q^2, q^3 iar baza canonică este fixă, vom scrie

$$\bar{r} = \bar{r}(q^1, q^2, q^3). \quad (2.9.9)$$

Definim

$$\bar{g}_1 = \frac{\partial \bar{r}}{\partial q^1}, \quad \bar{g}_2 = \frac{\partial \bar{r}}{\partial q^2}, \quad \bar{g}_3 = \frac{\partial \bar{r}}{\partial q^3}. \quad (2.9.10)$$

Remarcăm faptul că $\bar{g}_1$ este vectorul tangent la curba definită de aplicația

$$q^1 \mapsto \bar{r}(q^1, \cdot, \cdot), \quad (2.9.11)$$

adică păstrându-i ficși pe q^2, q^3 .

Tensorul având în baza canonică matricea de componente g_{ij} definite de

$$g_{ij} = \langle \bar{g}_i, \bar{g}_j \rangle, \quad i, j = 1, 2, 3 \quad (2.9.12)$$

se numește *tensorul metric*. Să remarcăm că pentru $i = j$ avem $g_{ii} = \|\bar{g}_i\|^2$, iar pentru $i \neq j$ avem $g_{ij} = \|\bar{g}_i\| \|\bar{g}_j\| \cos \angle(\bar{g}_i, \bar{g}_j)$. Deci, elementele de pe diagonală ne indică cum variază în timp norma vectorilor $\bar{g}_i$ în timp ce restul elementelor indică modul în care variază unghiurile dintre acești vectori.

Problema 2.9.1. *Să se arate că tensorul metric este pozitiv definit.*

Propoziție 2.9.1. *Sistemul de vectori $\bar{g}_1, \bar{g}_2, \bar{g}_3$ formează o bază.*

Demonstrație. Demonstrația este simplă și se bazează pe faptul că jacobianul transformării

$$x_i = x_i(q^1, q^2, q^3) \quad (2.9.13)$$

este nenul, adică

$$(\bar{g}_1, \bar{g}_2, \bar{g}_3) = \begin{vmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial q^1} & \frac{\partial x_2}{\partial q^1} & \frac{\partial x_3}{\partial q^1} \\ \frac{\partial x_1}{\partial q^2} & \frac{\partial x_2}{\partial q^2} & \frac{\partial x_3}{\partial q^2} \\ \frac{\partial x_1}{\partial q^3} & \frac{\partial x_2}{\partial q^3} & \frac{\partial x_3}{\partial q^3} \end{vmatrix} \neq 0. \quad (2.9.14)$$

■

Observație 2.9.1. Sistemul de vectori $\bar{g}_1, \bar{g}_2, \bar{g}_3$ formează o bază care nu este nepărat ortogonală.

Definiție 2.9.1. Baza $\bar{g}_1, \bar{g}_2, \bar{g}_3$ se numește baza naturală (covariantă). Baza duală a bazei naturale, adică baza formată de vectorii

$$\bar{g}^i = \frac{\bar{g}_j \times \bar{g}_k}{(\bar{g}_1, \bar{g}_2, \bar{g}_3)}, \quad i \neq j \neq k \neq i, \quad (2.9.15)$$

se numește baza contravariantă.

Observație 2.9.2. Nici sistemul de vectori $\bar{g}^1, \bar{g}^2, \bar{g}^3$ nu formează neapărat o bază ortogonală.

Componente g^{ij} definite de

$$g^{ij} = \langle \bar{g}^i, \bar{g}^j \rangle, \quad i, j = 1, 2, 3 \quad (2.9.16)$$

se numesc componentele cotravarante ale tensorului metric.

Consideră descompunerea deplasării în baza canonică

$$\bar{r}(t) = \sum_{i=1}^3 x_i \bar{e}_i \quad (2.9.17)$$

și calculăm vectorul viteză, adică

$$\begin{aligned} \bar{v}(t) &= \sum_{i=1}^3 \dot{x}_i \bar{e}_i, \\ \bar{a}(t) &= \sum_{i=1}^3 \dot{v}_i \bar{e}_i = \sum_{i=1}^3 \ddot{x}_i \bar{e}_i. \end{aligned} \quad (2.9.18)$$

Scopul final va fi să rescriem energia cinetică folosind coordonatele curbilinii. Pentru început să exprimăm viteza doar în funcție de coordonatele q^i și vom calcula

$$\bar{v}(t) = \sum_{i=1}^3 \dot{x}_i \bar{e}_i = \sum_{i=1}^3 \left(\sum_{j=1}^3 \frac{x_i}{q^j} \dot{q}_j \right) \bar{e}_i = \sum_{j=1}^3 \frac{\sum_{i=1}^3 x_i \bar{e}_i}{q^j} \dot{q}_j = \sum_{j=1}^3 \frac{\bar{r}}{q^j} \dot{q}_j = \sum_{j=1}^3 \dot{q}_j \bar{g}_j. \quad (2.9.19)$$

Deci, componentele covariante ale vitezei sunt

$$\tilde{v}^i = \dot{q}_i, \quad \bar{v} = \sum_{i=1}^3 \tilde{v}^i \bar{g}_i. \quad (2.9.20)$$

Componentele covariante ale vitezei se mai numesc și *coordoanate generalizate ale vitezei*.

Problema 2.9.2. Să se scrie viteza și accelerația în coordonate cilindrice.

Problema 2.9.3. Să se scrie viteza și accelerația în coordonate sferice.

2.10 Abordarea din mecanica rațională a mișcării unui punct material supus la legături

Se poate întâmpla ca din cauza unor *contrângeri* (*legături*) mecanice sau de altă natură, particula să fie nevoită să se miște pe o anumită curbă sau pe o anumită suprafață. De exemplu, să ne imaginăm mișcarea unui corp pe un plan orizontal sau mișcarea pe un plan înclinat. În aceste situații mișcarea punctului material se face pe o *suprafața cunoscută a priori* (un plan). Un alt exemplu ar fi mișcarea unui tren, caz în care mișcarea se face pe o *curbă specificată a priori* (șina de cale ferată).

Dacă se impune ca mișcarea punctului material să se facă pe o suprafață anume, atunci putem modela acest fapt impunând asupra coordonatelor (x_1, x_2, x_3) ale punctului material condiția

$$f_1(x_1, x_2, x_3) = 0,$$

unde f_1 este o funcție scalară diferențiabilă definită pe un domeniu din $\mathbb{R}^3$. O astfel de restricție (o condiție impusă doar asupra vectorului de poziție al punctului material fără a impune condiții asupra vitezei) se numește *legătură olonomă* (cuvântul olonom însemnând că nu depinde de viteză). În cazul de mai sus, spunem că legătura este și *bilaterală*, această denumire punând în evidență faptul că punctul se mișcă pe o suprafață ci nu deasupra ($f_1(x_1, x_2, x_3) > 0$) sau dedesubtul suprafeței ($f_1(x_1, x_2, x_3) < 0$), cazuri în care legăturile se numesc unilaterale.

Dacă se impune ca mișcarea punctului material să se facă pe o curbă specificată, atunci se impun următoarele condiții asupra coordonatelor punctului material

$$f_1(x_1, x_2, x_3) = 0, \quad f_2(x_1, x_2, x_3) = 0,$$

unde f_1 și f_2 sunt funcții scalare diferențiabile, funcțional independente pe un domeniu din $\mathbb{R}^3$. Cu alte cuvinte, punctul material se află la intersecția a două suprafețe, adică pe o curbă. Curba (sau suprafața) pe care punctul material e constrâns să se miște se numește *spațiul configurațiilor* sau varietatea pe care se mișcă punctul.

Poate apărea următoarea confuzie: se cunoaște curba (suprafața) pe care se produce mișcarea, deci se știe mișcarea. Acest fapt nu este adevărat deoarece o legătură nu ne oferă nicio informație asupra variației poziției punctului material pe curbă (suprafață) în funcție de timp. Prin urmare, legăturile vin ca o cerință suplimentară ce se adaugă ecuațiilor de mișcare.

Deoarece legătura influențează mișcarea particulei, putem privi particula și punctele curbei (sau suprafeței) pe care se mișcă ca pe un sistem mecanic în interacțiune. Acest fapt conduce la presupunerea că acțiunea punctelor curbei (sau suprafeței) asupra particulei poate fi reprezentată printr-o forță $\bar{L}$ necunoscută a priori, numită *forță de legătură*. Prin urmare, ecuația lui Newton pentru o particulă de masă m sub acțiunea unei forțe $\bar{F}$ care se mișcă pe o curbă (sau o suprafață) este

$$m\bar{a} = \bar{F} + \bar{L}.$$

Intuiția ne îndrumă să credem că doar componenta tangențială a forței de legătură contribuie efectiv asupra mișcării, componenta normală a forței de legătură (nu produce lucru

mecanic) fiind o reacțiune a varietății la acțiunea punctului material asupra ei, adică este util să utilizăm descompunerea

$$\bar{L} = \bar{\Phi} + \bar{N}, \quad (2.10.1)$$

unde $\bar{\Phi}$ este vector tangent la curbă (sau suprafață) iar $\bar{N}$ este normal la curbă (sau suprafață). Componenta $\bar{\Phi}$ se numește *forță de frecare* în timp ce $\bar{N}$ se numește *forță de apăsare normală*. *Forțele de frecare* apar la contactul dintre două corpuri. Ele se datorează întrepătrunderii asperităților microscopice și neregularităților microscopice ale celor două suprafețe care intră în contact. Prin urmare forța de frecare depinde de materialele din care sunt construite aceste materiale. Chiar înainte de a începe mișcarea apar forțe de frecare între solide numite *forțe de aderență*. După începerea mișcării forțele de frecare se mai numesc și *forțe de frecare la lunecare*. Modulul forței de aderență este mai mare decât modului forței de lunecare. Pentru a vizualiza acest fapt, să ne imaginăm că dorim să mutăm un dulap prin împingere pe o suprafață plană orizontală. Efortul depus pentru a începe această mișcare este mai mare la început deoarece forța de frecare este mai mare înainte de începerea lunecării. Pe măsură ce viteza crește, efortul depus va fi din ce în ce mai mic.

Toate cele spuse mai sus sunt cuprinse în următoarea lege dată de Charles A. Coulomb (1736-1806): *Dacă o particulă este pe o curbă (sau suprafață) nedeformabilă atunci există scalarul $f \geq 0$ numit coeficient de frecare depinzând numai de natura particulei și a curbei (sau suprafeței) astfel încât dacă*

- *particula se află în mișcare ($\|\bar{v}\| \neq 0$), atunci*

$$\bar{\Phi} = -\|\bar{\Phi}\| \frac{\bar{v}}{\|\bar{v}\|}, \quad \|\bar{\Phi}\| = f \|\bar{N}\|;$$

- *particula se află în repaus ($\|\bar{v}\| = 0$), atunci*

$$\|\bar{\Phi}\| \leq f \|\bar{N}\|.$$

Legea lui Coulomb ne spune că mărimea forței de frecare la lunecare este proporțională cu mărimea forței de apăsare normală, că mărimea forței de frecare la lunecare este mai mică decât mărimea forței de aderență și că mărimea forței de frecare nu depinde de aria suprafeței de contact.

În continuare vom considera doar cazul în care particula este constrânsă să se miște pe o curbă dată. Din teorema funcțiilor implicite rezultă că două dintre coordonatele punctului material, să presupunem că acestea sunt x_1 și x_2 , pot fi scrise în funcție de a treia, x_3 , pe care o notăm cu q . Această funcție necunoscută q depinde de timp și va descrie complet mișcarea punctului material

$$\bar{r} = \bar{r}(q), \quad q = q(t), \quad t \geq t_0. \quad (2.10.2)$$

Vom folosi reperul lui Frénet și expresia accelerației în acest reper, adică

$$\bar{a} = \bar{a}_\tau + \bar{a}_n, \quad \bar{a}_\tau = \dot{v} \bar{\tau}, \quad \bar{a}_n = v^2 \frac{1}{R} \bar{n}. \quad (2.10.3)$$

Forța de frecare va fi complet determinată doar de componenta tangențială

$$\overline{\Phi} = -\Phi \overline{\tau}, \quad \|\overline{\Phi}\| = \Phi,$$

în timp ce forța de apăsare normală se va descompune

$$\overline{N} = N_n \overline{n} + N_\beta \overline{\beta}.$$

Prin urmare, ecuația lui Newton implică

$$m \dot{v} = -\Phi + F_\tau, \quad m v^2 \frac{1}{R} = N_n + F_n, \quad 0 = N_\beta + F_\beta, \quad (2.10.4)$$

unde

$$\overline{F} = F_\tau \overline{\tau} + F_n \overline{n} + F_\beta \overline{\beta}.$$

Dacă $v = 0$, atunci necunoscutele acestui sistem sunt $N_n(t)$, $N_\beta(t)$ și $\Phi(t)$ ce vor fi date de

$$\Phi = F_\tau, \quad N_n = -F_n, \quad N_\beta = -F_\beta.$$

O astfel de soluție este admisibilă doar dacă este verificată legea lui Coulomb, adică

$$F_\tau^2 \leq f^2(F_n^2 + F_\beta^2).$$

Aceasta înseamnă că ecuația lui Newton are o soluție admisibilă (*echilibrului*, repaus)

$$v = 0, \quad N_n = -F_n, \quad N_\beta = -F_\beta,$$

doar dacă forța verifică condiția

$$(1 + f^2) F_\tau^2 \leq f^2 \|\overline{F}\|.$$

Dacă punctul material nu se află în echilibru, necunoscutele ecuației lui Newton sunt $q(t)$, N_n și N_β , Φ fiind determinat din legea lui Coulomb ca fiind $\Phi = f \sqrt{N_n^2 + N_\beta^2}$. Ecuația

$$m \dot{v} = \Phi + F_\tau$$

este în general neliniară, deoarece dependența $x_1 = x_1(q)$, $x_2 = x_2(q)$ poate fi neliniară iar

$$\Phi = f \sqrt{\left(m v^2 \frac{1}{R} - F_n\right)^2 + F_\beta^2}.$$

2.10.1 Pendulul matematic. Temă de seminar

Vom exemplifica cele de mai sus considerând modelul *pendulului matematic (gravitațional) simplu*. Pendulul gravitațional simplu este un punct material suspendat printr-un fir inextensibil de masă neglijabilă și lungime ℓ , care poate oscila într-un plan vertical în jurul unui punct de suspensie sub acțiunea greutății sale și neglijând forțele de frecare.

Vom considera că viteza inițială $\bar{v}_0$ este ortogonală pe verticala locului, adică pe $\bar{g}$ și că la momentul inițial firul se află în poziție verticală. Alegem reperul ca fiind centrat în punctul O de fixare a firului, versorul $\bar{e}_1$ îndreptat vertical în jos iar $\bar{e}_2$ ortogonal pe $\bar{e}_1$ și situat în planul determinat de punctul O și de $\bar{v}_0$ și $\bar{g}$.

Punctul material se mișcă pe un cerc fix de rază ℓ . Vom nota cu θ unghiul pe care firul îl face cu axa Ox_1 . Atunci

$$\begin{aligned} x_1 &= \ell \cos \theta(t), \\ x_2 &= \ell \sin \theta(t), \quad \theta(t) \in (-\pi, \pi], \end{aligned}$$

iar ecuația lui Newton este

$$m \ddot{\bar{r}} = m \bar{g} + \bar{N}.$$

Forța $\bar{N}$ reprezintă forța de legătură (tensiunea din fir). Are loc

$$\bar{G} = m g \bar{e}_1, \quad \bar{r}_0 = \ell \bar{e}_1, \quad \bar{v}(0) = v_0 \bar{e}_2$$

și

$$\begin{aligned} \bar{r}(t) &= \ell (\cos \theta \bar{e}_1 + \sin \theta \bar{e}_2), \\ \dot{\bar{r}}(t) &= \ell \dot{\theta} (-\sin \theta \bar{e}_1 + \cos \theta \bar{e}_2), \\ \ddot{\bar{r}}(t) &= \ell \ddot{\theta} (-\sin \theta \bar{e}_1 + \cos \theta \bar{e}_2) - \ell \dot{\theta}^2 (\cos \theta \bar{e}_1 + \sin \theta \bar{e}_2). \end{aligned}$$

Deoarece $\langle \bar{N}(t), \dot{\bar{r}}(t) \rangle = 0$, vom înmulți ecuația lui Newton scalar cu $\dot{\bar{r}}(t)$ și vom obține

$$\ell^2 \dot{\theta} \ddot{\theta} = -\ell \dot{\theta} g \sin \theta.$$

Dacă $\dot{\theta} = 0$, atunci θ este constant și deci punctul rămâne în aceeași poziție fixă la orice moment t .

Vom presupune că $\dot{\theta} \neq 0$, și vom deduce următoarea ecuație diferențială neliniară

$$\ell \ddot{\theta} = -g \sin \theta,$$

cu datele inițiale

$$\theta(0) = 0, \quad \dot{\theta}(0) = \frac{v_0}{\ell}.$$

Cunoscând θ , vom ști mișcarea punctului material iar din ecuația lui Newton vom determina tensiunea din fir.

Dacă unghiul θ este mic, adică dacă studiem doar oscilații sub unghi mic, putem aproxima $\sin \theta$ cu θ (exprimat în radiani) și vom avea ecuația oscilatorului armonic

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{\ell} \theta = 0,$$

pentru care se determină soluția

$$\theta(t) = \frac{v_0}{\sqrt{\ell g}} \sin \sqrt{\frac{g}{\ell}} t.$$

Dacă unghiul θ nu este mic, atunci prin înmulțirea ecuației neliniare cu $\dot{\theta}$ și prin integrare, se deduce

$$\ell \frac{1}{2} \frac{d}{dt} [\dot{\theta}^2] + \frac{g}{\ell} \frac{d}{dt} [\cos \theta] = 0,$$

care implică

$$\dot{\theta}^2 = \frac{2g}{\ell} (\cos \theta + \frac{v_0^2 - 2g\ell}{2g\ell}).$$

De aici va rezulta că atunci când $\cos \theta = 1 - \frac{v_0^2}{2g\ell}$, punctul are viteza nulă.

Problema 2.10.1. *Un punct material greu coboară fără frecare și fără viteză inițială pe un plan înclinat de unghi $\alpha = 45^\circ$ și înălțime $h = 10$. Să se determine momentul când punctul material ajunge la baza planului.*

Problema 2.10.2. *Un punct material de masă m se mișcă pe dreapta $x_1 = x_2$ fiind respins de axa Ox_2 cu o forță perpendiculară pe ea și proporțională cu distanța la această axă. La momentul inițial $x_1(0) = 1$ iar viteza este nulă. Neglijând forța de greutate, să se găsească legea de mișcare și forța de legătură atunci când mișcarea se face cu frecare, coeficientul de frecare fiind $f \in (0, 1)$.*

Problema 2.10.3. *Să se studieze echilibrul unui punct material greu pe un cerc vertical de rază R , în cazurile:*

1. echilibrul se face fără frecare;
2. echilibrul se face cu frecare, coeficientul de frecare fiind $f = \frac{\sqrt{3}}{3}$.

2.11 Dificultățile mecanicii raționale dacă folosim ecuația lui Newton

- Forma ecuațiilor de mișcare se schimbă radical când se schimbă baza.
- Pentru a afla mișcarea unui punct material trebuie să aflăm și forțele de legătură. Mecanica analitică oferă un set de ecuații identic ca formă cu setului de ecuații pentru cazul punctului material liber și evită apariția forțelor de legătură în formularea ecuațiilor de mișcare. Prin urmare, un studiu generic asupra ecuațiilor de o anumită formă ne va oferi aparatul matematic pentru studiul ambelor situații: puncte materiale libere și puncte materiale legate.

Partea II

Mecanică analitică

Capitolul 3

Dinamica sistemelor de puncte materiale libere

3.1 Ecuațiile de mișcare a sistemelor de puncte materiale libere

Considerăm mișcarea a n puncte materiale P_s , $s = 1, 2, \dots, n$ de mase m_s , $s = 1, 2, \dots, n$. Ansamblul acestor puncte materiale se numește *sistem mecanic* de puncte materiale. Vectorii de poziție față de un același punct fix $O \in \mathbb{R}^3$ vor fi notate cu $\bar{r}_s$, vitezele corespunzătoare cu $\bar{v}_s$ iar accelerațiile cu $\bar{a}_s$.

Definiție 3.1.1. *Scalarul*

$$M = \sum_{s=1}^n m_s = m_1 + m_2 + \dots + m_n \quad (3.1.1)$$

se numește masa sistemului mecanic de puncte materiale.

Mișcarea fiecărui punct material va trebui să verifice ecuația lui Newton. Ce forțe acționează asupra sistemelor de puncte materiale? Din principiul acțiunii și reacțiunii rezultă că asupra unui sistem de puncte acționează două tipuri de forțe:

- forțe exterioare, $\bar{F}_s$, $s = 1, 2, \dots, n$, de tipul celor considerate în cazul mișcării unui singur punct material.
- forțe interioare (interne) de interacțiune între punctele sistemului. Aceste forțe sunt de tipul celor din principiul acțiunii și reacțiunii. În plus, ele depind doar de distanța dintre puncte, în sensul că notând cu $\bar{F}_{sp}$ forța cu care punctul material P_p acționează asupra punctului material P_s , $s, p \in 1, 2, \dots, n$, $s \neq p$, avem

$$\bar{F}_{sp} = F_{sp}(\|\bar{r}_s - \bar{r}_p\|) \frac{1}{\|\bar{r}_p - \bar{r}_s\|} (\bar{r}_p - \bar{r}_s). \quad (3.1.2)$$

Pentru a simplifica calculele și modul de scriere, introducem și

$$\bar{F}_{ss} = 0, \quad s = 1, 2, \dots, n. \quad (3.1.3)$$

Prin urmare ecuațiile de mișcare ale punctelor materiale din sistemul mecanic sunt

$$m_s \ddot{\bar{r}}_s = \bar{F}_s + \sum_{p=1}^n \bar{F}_{sp}, \quad s = 1, 2, \dots, n. \quad (3.1.4)$$

Împreună cu condițiile inițiale

$$\dot{\bar{r}}_s = \bar{v}_s^0, \quad \bar{r}_s = \bar{r}_s^0, \quad s = 1, 2, \dots, n, \quad (3.1.5)$$

aceste ecuații descriu mișcarea punctelor din sistemul mecanic considerat.

Propoziție 3.1.1. *Rezultanta și momentul resultant al forțelor interioare sunt nule, adică*

$$\sum_{s,p=1}^n \bar{F}_{sp} = \bar{0}, \quad \sum_{s,p=1}^n \bar{r}_s \times \bar{F}_{sp} = \bar{0}. \quad (3.1.6)$$

Demonstrație. Demonstrația este ușoară. Calculăm

$$\begin{aligned} \sum_{s,p=1}^n \bar{F}_{sp} &= \frac{1}{2} \left(\sum_{s,p=1}^n \bar{F}_{sp} + \sum_{s,p=1}^n \bar{F}_{sp} \right) = \frac{1}{2} \left(\sum_{s,p=1}^n \bar{F}_{sp} + \sum_{p,s=1}^n \bar{F}_{ps} \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(\sum_{s,p=1}^n \bar{F}_{sp} - \sum_{p,s=1}^n \bar{F}_{sp} \right) = \bar{0}. \end{aligned} \quad (3.1.7)$$

Similar se demonstrează și partea a doua a propoziției. Vom avea

$$\begin{aligned} \sum_{s,p=1}^n \bar{r}_s \times \bar{F}_{sp} &= \frac{1}{2} \left(\sum_{s,p=1}^n \bar{r}_s \times \bar{F}_{sp} + \sum_{s,p=1}^n \bar{r}_s \times \bar{F}_{sp} \right) = \frac{1}{2} \left(\sum_{s,p=1}^n \bar{r}_s \times \bar{F}_{sp} + \sum_{p,s=1}^n \bar{r}_p \times \bar{F}_{ps} \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(\sum_{s,p=1}^n (\bar{r}_s - \bar{r}_p) \times \bar{F}_{sp} \right) = \bar{0}, \end{aligned} \quad (3.1.8)$$

pentru că forța interioară $\bar{F}_{sp}$ este coliniară cu $\bar{r}_s - \bar{r}_p$. ■

Propoziție 3.1.2. *Într-un sistem de referință inerțial, derivata în raport cu timpul a impulsului unui sistem de puncte materiale ($\bar{H} = \sum_{s=1}^n m_s \dot{\bar{r}}_s$) este egală cu rezultanta forțelor exterioare care acționează asupra sistemului.*

Demonstrație. Concluzia rezultă prin calcul direct, ținând cont de ecuațiile lui Newton și de propoziția precedentă. ■

3.1.1 Expresia energiei cinetice a unui sistem de puncte materiale libere în coordonate curbilinii

În continuare vom nota cu $(x_1, x_2, x_3, \dots, x_{3n})$ coordonatele deplasărilor $\bar{r}_i$, scrise unele după alte, în baza canonică iar cu $(q_1, q_2, q_3, \dots, q_{3n})$ coordonatele deplasărilor $\bar{r}_i$, scrise unele după alte într-o baza oarecare. Sigur, va exista o dependență de forma

$$x_{3i-2} = x_{3i-2}(q_{3i-2}, q_{3i-1}, q_{3i}),$$

$$\begin{aligned} x_{3i-1} &= x_{3i-1}(q_{3i-2}, q_{3i-1}, q_{3i}), i = 1, 2, \dots, n, \\ x_{3i} &= x_{3i}(q_{3i-2}, q_{3i-1}, q_{3i}), \end{aligned} \quad (3.1.9)$$

care descriu transformarea de coordonate pentru fiecare punct material. Considerăm că aceste transformări sunt cunoscute. Mai mult, presupune că această transformare

$$\begin{aligned} (q_{3i-2}, q_{3i-1}, q_{3i}) &\mapsto (x_{3i-2}(q_{3i-2}, q_{3i-1}, q_{3i}), x_{3i-1}(q_{3i-2}, q_{3i-1}, q_{3i}), x_{3i}(q_{3i-2}, q_{3i-1}, q_{3i})) \\ i &= 1, 2, \dots, n \end{aligned} \quad (3.1.10)$$

sunt de clasă C^2 și astfel încât determinanții funcționali

$$J = \det \left(\frac{\partial x_l}{\partial q_m} \right)_{l,m \in \{3i-2, 3i-1, 3i\}} \neq 0 \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (3.1.11)$$

Folosind notațiile introduse anterior deducem

$$\begin{aligned} E &= \frac{1}{2} \sum_{s=1}^n m_s \|\bar{v}_s\|^2 = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{3n} M_i \dot{x}_i^2 = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{3n} M_i \sum_{j=1}^{3n} \frac{\partial x_i}{\partial q_j} \dot{q}_j \sum_{k=1}^{3n} \frac{\partial x_i}{\partial q_k} \dot{q}_k \\ &= \frac{1}{2} \sum_{j,k=1}^{3n} \left(\sum_{i=1}^{3n} M_i \frac{\partial x_i}{\partial q_j} \frac{\partial x_i}{\partial q_k} \right) \dot{q}_j \dot{q}_k = \frac{1}{2} \sum_{j,k=1}^{3n} \left(\sum_{s=1}^n m_s \left\langle \frac{\partial \bar{r}_s}{\partial q_j}, \frac{\partial \bar{r}_s}{\partial q_k} \right\rangle \right) \dot{q}_j \dot{q}_k \\ &= \frac{1}{2} \sum_{s=1}^n m_s \left(\sum_{j,k=1}^{3n} \left\langle \frac{\partial \bar{r}_s}{\partial q_j}, \frac{\partial \bar{r}_s}{\partial q_k} \right\rangle \right) \dot{q}_j \dot{q}_k = \frac{1}{2} \sum_{s=1}^n m_s \left(\sum_{j,k=0}^2 \left\langle \frac{\partial \bar{r}_s}{\partial q_{3s-j}}, \frac{\partial \bar{r}_s}{\partial q_{3s-k}} \right\rangle \right) \dot{q}_{3s-j} \dot{q}_{3s-k} \\ &= \frac{1}{2} \sum_{s=1}^n m_s g_{jk}^s \dot{q}_{3s-j} \dot{q}_{3s-k}, \end{aligned} \quad (3.1.12)$$

unde

$$g_{jk}^s := \left(\sum_{j,k=0}^2 \left\langle \frac{\partial \bar{r}_s}{\partial q_{3s-j}}, \frac{\partial \bar{r}_s}{\partial q_{3s-k}} \right\rangle \right) \quad (3.1.13)$$

este tensorul metric asociat vectorului de poziție $\bar{r}_s$ al punctului material P_s .

Prin urmare, deoarece fiecare tensor metric este pozitiv definit, energia cinetică este suma a n forme pătratice pozitiv definite în termenii variabilelor $\dot{q}_i$, $i = 1, 2, \dots, 3n$.

Orice formă pătratică pozitiv definită este strict convexă. Am stabilit, deci, următorul rezultat

Propoziție 3.1.3. *Energia cinetică este strict convexă ca funcție de variabilelor $\dot{q}_i$, $i = 1, 2, \dots, 3n$.*

Folosind expresia energiei cinetice și a lagrangeianului L deducem că ecuațiile Euler-Lagrange conduc la un sistem de ecuații diferențiale de ordin 2. Cum reducem acest sistem la un sistem de ecuații diferențiale de ordin 1?

3.2 Temă de seminar. Problema celor două corpuri

O problemă fundamentală din mecanică este descrierea mișcării unui sistem mecanic format din două puncte materiale P_1 și P_2 de mase m_1 și respectiv m_2 , sub acțiunea forței de atracție gravitațională dată de Newton, adică forțele externe sunt absente iar forțele interne sunt date de

$$\begin{aligned}\bar{F}_{12} &= -\gamma \frac{m_1 m_2}{\|\bar{r}_2 - \bar{r}_1\|^2} \frac{\bar{r}_2 - \bar{r}_1}{\|\bar{r}_2 - \bar{r}_1\|}, \\ \bar{F}_{21} &= \gamma \frac{m_1 m_2}{\|\bar{r}_2 - \bar{r}_1\|^2} \frac{\bar{r}_2 - \bar{r}_1}{\|\bar{r}_2 - \bar{r}_1\|}.\end{aligned}\quad (3.2.1)$$

Ecuatiile de mișcare sunt în acest caz

$$\begin{aligned}m_1 \ddot{\bar{r}}_1 &= -\gamma \frac{m_1 m_2}{\|\bar{r}_2 - \bar{r}_1\|^2} \frac{\bar{r}_2 - \bar{r}_1}{\|\bar{r}_2 - \bar{r}_1\|}, \\ m_2 \ddot{\bar{r}}_2 &= \gamma \frac{m_1 m_2}{\|\bar{r}_2 - \bar{r}_1\|^2} \frac{\bar{r}_2 - \bar{r}_1}{\|\bar{r}_2 - \bar{r}_1\|}.\end{aligned}\quad (3.2.2)$$

Pe de o parte, este evident că adunând cele două ecuații obținem

$$m_1 \ddot{\bar{r}}_1 + m_2 \ddot{\bar{r}}_2 = \bar{0}, \quad (3.2.3)$$

ceea ce exprimă faptul că centrul de masă, adică punctul de vector de poziție $\bar{r}^* = \frac{1}{m_1 + m_2}(m_1 \ddot{\bar{r}}_1 + m_2 \ddot{\bar{r}}_2)$, are o mișcare rectilinie și uniformă, deoarece

$$\ddot{\bar{r}}^* = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \bar{r}^* = \bar{C}_1 + \bar{C}_2 t, \quad (3.2.4)$$

unde $\bar{C}_1$ și $\bar{C}_2$ sunt vectori constanți.

Pe de altă parte, scăzând ecuațiile de mișcare deducem

$$\ddot{\bar{r}}_2 - \ddot{\bar{r}}_1 = -\gamma \frac{m_2 + m_1}{\|\bar{r}_2 - \bar{r}_1\|^3} (\bar{r}_2 - \bar{r}_1), \quad (3.2.5)$$

Din condițiile inițiale putem determina vectorii constanți $\bar{C}_1$ și $\bar{C}_2$ și deci vom ști

$$m_1 \bar{r}_1 + m_2 \bar{r}_2 = \bar{C}_1 + \bar{C}_2 t. \quad (3.2.6)$$

Prin urmare, dacă vom putea afla și

$$\bar{r} := \bar{r}_2 - \bar{r}_1, \quad (3.2.7)$$

atunci vom putea găsi atât pe $\bar{r}_2$ cât și pe $\bar{r}_1$.

Rămâne deci să aflăm $\bar{r}$ soluție a ecuației diferențiale

$$\ddot{\bar{r}} = -\gamma \frac{m_2 + m_1}{\|\bar{r}\|^3} \bar{r}. \quad (3.2.8)$$

Această ecuație vectorială se scrie ca un sistem de ecuații neliniare în coordonatele vectorului $\bar{r}$ într-o bază fixă $\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3$, astfel

$$\ddot{x}_1 = -\gamma \frac{m_2 + m_1}{(\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2})^3} x_1,$$

$$\begin{aligned}\ddot{x}_2 &= -\gamma \frac{m_2 + m_1}{(\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2})^3} x_2, \\ \ddot{x}_3 &= -\gamma \frac{m_2 + m_1}{(\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2})^3} x_3.\end{aligned}\tag{3.2.9}$$

Un mod de rezolvare a acestui sistem este identificarea unor integrale prime ale acestui sistem. O primă observație este faptul că ecuația vectorială implică

$$\bar{r} \times \ddot{\bar{r}} = \bar{0} \quad \Leftrightarrow \quad \bar{r} \times \dot{\bar{r}} = \bar{C} \quad \Rightarrow \quad (\bar{r}, \bar{r}, \dot{\bar{r}}) = \langle \bar{C}, \bar{r} \rangle \quad \Leftrightarrow \quad \langle \bar{C}, \bar{r} \rangle = 0,\tag{3.2.10}$$

ceea ce înseamnă că $\bar{r}$ verifică ecuația unui plan ce trece prin origine. În plus, deoarece

$$\|\bar{r} \times \dot{\bar{r}}\| = C, \quad C = \|\bar{C}\|,\tag{3.2.11}$$

fară a intra în prea multe detalii, funcția $U_1 = \|\bar{r} \times \dot{\bar{r}}\|$ este o integrală primă a ecuației vectoriale considerate.

O altă implicație a ecuației vectoriale este

$$\langle \ddot{\bar{r}}, \dot{\bar{r}} \rangle = -\gamma \frac{m_2 + m_1}{\|\bar{r}\|^3} \langle \bar{r}, \dot{\bar{r}} \rangle.\tag{3.2.12}$$

Deoarece

$$\begin{aligned}\langle \ddot{\bar{r}}, \dot{\bar{r}} \rangle &= \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \langle \dot{\bar{r}}, \dot{\bar{r}} \rangle = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|\dot{\bar{v}}\|^2, \\ \langle \bar{r}, \dot{\bar{r}} \rangle &= \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \langle \bar{r}, \bar{r} \rangle = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|\bar{r}\|^2,\end{aligned}\tag{3.2.13}$$

vom deduce

$$\begin{aligned}\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|\dot{\bar{v}}\|^2 &= -\gamma \frac{m_2 + m_1}{\|\bar{r}\|^3} \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|\bar{r}\|^2 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|\dot{\bar{v}}\|^2 = -\gamma \frac{m_2 + m_1}{\|\bar{r}\|^3} \frac{1}{2} 2 \|\bar{r}\| \frac{d}{dt} \|\bar{r}\| \\ \Leftrightarrow \quad \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|\dot{\bar{v}}\|^2 &= -\gamma \frac{m_2 + m_1}{\|\bar{r}\|^2} \frac{d}{dt} \|\bar{r}\| \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|\dot{\bar{v}}\|^2 = \gamma(m_2 + m_1) \frac{d}{dt} \frac{1}{\|\bar{r}\|} \\ \Leftrightarrow \quad \|\dot{\bar{v}}\|^2 &= 2\gamma(m_2 + m_1) \frac{1}{\|\bar{r}\|} + h,\end{aligned}\tag{3.2.14}$$

Prin urmare, fără a mai intra în prea multe amănunte, funcția

$$U_2 = \|\dot{\bar{v}}\|^2 - 2\gamma(m_2 + m_1) \frac{1}{\|\bar{r}\|}\tag{3.2.15}$$

este o integrală primă a ecuației vectoriale considerate.

Deoarece știm că $\bar{r}$ verifică ecuația unui plan ce trece prin origine, vom rescrie rescrie aceste integrale prime în coordonate polare. Considerând un sistem de coordonate în planul mișcării, vectorii din acest plan fiind $\bar{f}_1, \bar{f}_2$ iar originea lui $(0, 0, 0)$, vom avea coordonatele

$$\begin{aligned}y_1 &= r \cos \theta, \\ y_2 &= r \sin \theta, \quad r(t) = \|\bar{r}(t)\|, \quad \theta(t) = \angle(\bar{f}_1, \bar{r}(t)), \\ y_3 &= 0.\end{aligned}\tag{3.2.16}$$

Să remarcăm că în acest nou reper, și pentru că planul mișcării este deja determinat de constanta C și de faptul că știm că planul trece prin origine, singurele necunoscute sunt în continuare r și θ . Acestea vor putea fi determinate din cele două integrale prime, dacă acestea sunt funcțional independente.

Repetând unele raționamente folosite în cazul mișcării plane, găsim că cele două integrale prime ne indică

$$\begin{aligned}\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 &= \frac{2\mu}{r} + h, \\ r^2\dot{\theta} &= C,\end{aligned}\tag{3.2.17}$$

unde $\mu = \gamma(m_1 + m_2)$. Căutăm soluția în formă implicită ca $r = r(\theta)$. Avem

$$\dot{r} = \frac{dr}{d\theta}\dot{\theta} = \frac{dr}{d\theta}\frac{C}{r^2} = -C\frac{d}{d\theta}\left(\frac{1}{r}\right).\tag{3.2.18}$$

Astfel, sistemul de mai sus ne conduce la următoarea ecuație

$$\frac{C^2}{r^2}\left[\frac{d}{d\theta}\left(\frac{1}{r}\right)\right]^2 + r^2\frac{C^2}{r^4} = \frac{2\mu}{r} + h \Leftrightarrow \frac{d}{d\theta}\left(\frac{1}{r}\right) = \pm\frac{1}{C}\sqrt{h + \frac{2\mu}{r} - \frac{C^2}{r^2}}.\tag{3.2.19}$$

Pentru integrarea acestei ecuații deducem

$$\frac{\frac{d}{d\theta}\left(\frac{C}{r}\right)}{\sqrt{h + \frac{\mu^2}{C^2} - \left(\frac{C}{r} - \frac{\mu}{C}\right)^2}} = \pm 1 \Leftrightarrow \arccos \frac{\frac{C}{r} - \frac{\mu}{C}}{\sqrt{h + \frac{\mu^2}{C^2}}} = \pm(\theta - \theta_0),\tag{3.2.20}$$

unde θ_0 este o constantă de integrare. Vom deduce

$$\frac{\frac{C}{r} - \frac{\mu}{C}}{\sqrt{h + \frac{\mu^2}{C^2}}} = \cos(\theta - \theta_0) \Leftrightarrow \frac{1}{r} = \frac{\frac{\mu}{C}\left(1 + \sqrt{h + \frac{\mu^2}{C^2}}\cos(\theta - \theta_0)\right)}{C}\tag{3.2.21}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{r} = \frac{1 + \sqrt{\frac{hC^2}{\mu} + 1}\cos(\theta - \theta_0)}{\frac{C^2}{\mu}}.\tag{3.2.22}$$

Introducând notațiile

$$e = \sqrt{\frac{hC^2}{\mu} + 1}, \quad p = \frac{C^2}{\mu}, \quad \vartheta = \theta - \theta_0,\tag{3.2.23}$$

ecuația de mișcare este

$$\frac{1}{r} = \frac{1 + e\cos\vartheta}{p}.\tag{3.2.24}$$

Problema 3.2.1. Să se reprezinte în Matlab graficul curbei descrise implicit mai sus pentru valori pozitive ale lui p și pentru valori subunitate, supraunitare ale lui e și pentru $e = 1$. Ce observați?

Curba din planul ce trece prin cele două puncte materiale ale sistemului, este o conică, și anume

- dacă $h > 0 \Leftrightarrow e > 1$ curba este o hiperbolă;
- dacă $h = 0 \Leftrightarrow e = 1$ curba este o parabolă;
- dacă $h < 0 \Leftrightarrow e < 1$ curba este o elipsă.

Deoarece

$$h = \|\vec{v}(t)\|^2 - 2\gamma(m_2 + m_1) \frac{1}{\|\vec{r}(t)\|}, \quad \forall t \geq t_0, \quad (3.2.25)$$

semnul lui h și deci tipul traiectoriei depinde de mărimea vitezei la momentul inițial, de masele celor două corpuri și de distanța inițială dintre cele două puncte ale sistemului mecanic.

3.3 Mișcarea în spațiul configurațiilor

Dacă $(x_1, x_2, x_3, \dots, x_{3n})$ sunt coordonatele în baza canonică ale deplasărilor $\vec{r}_s$, scrise unele după altele, atunci fiecărei evoluții în timp a sistemului de puncte materiale din $\mathbb{R}^3$

$$t \mapsto \vec{r}_s(t) \in \mathbb{R}^3 \quad s = 1, 2, \dots, n \quad (3.3.1)$$

îi corespunde o curbă

$$t \mapsto (x_1(t), x_2(t), x_3(t), \dots, x_{3n}(t)) \in \mathbb{R}^{3n} \quad (3.3.2)$$

în spațiul $\mathbb{R}^{3n}$ (numit *spațiul configurațiilor*) și invers.

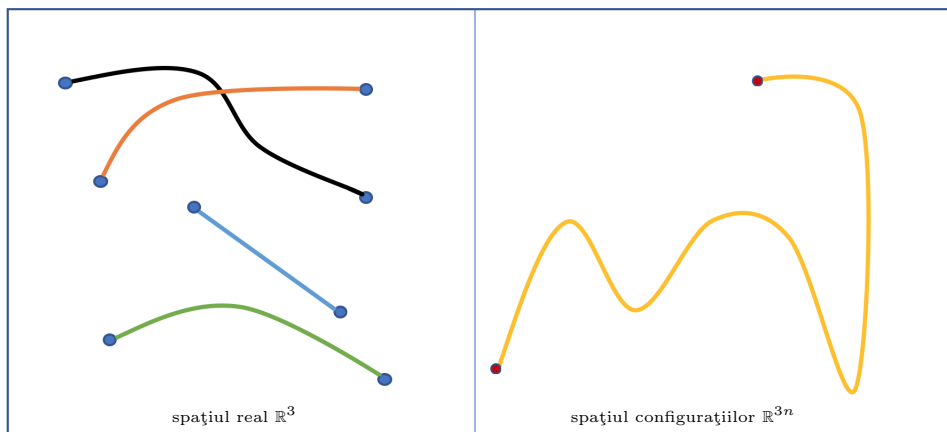


Figura 3.1: Spațiul real vs. spațiul configurațiilor.

În plus, vom nota cu

$$\vec{F}^{\text{ext}} = (F_1^{\text{ext}}, F_2^{\text{ext}}, F_3^{\text{ext}}, \dots, F_{3n}^{\text{ext}}) \quad (3.3.3)$$

coordonatele în baza canonică ale forțelor externe $\bar{F}_s^{\text{ext}}$ scrise unele după altele, iar cu

$$\bar{F}^{\text{ext}} = (F_1^{\text{int}}, F_2^{\text{int}}, F_3^{\text{int}}, \dots, F_{3n}^{\text{int}}) \quad (3.3.4)$$

coordonatele în baza canonică ale rezultatei $\sum_{p=1, p \neq s}^n \bar{F}_{sp}$ a forțelor interne care acționează asupra punctelor P_s , scrise unele după altele.

Astfel, a spune că asupra punctului tuturor punctelor material P_s ale sistemului în mișcarea $t \mapsto \bar{r}_s(t)$ acționează forțele $\bar{F}_s$ și $\sum_{p=1, p \neq s}^n \bar{F}_{sp}$ este echivalent cu a spune că mișcarea unui punct material virtual P în spațiul afin $\mathbb{R}^{3n}$

$$t \mapsto (x_1(t), x_2(t), x_3(t), \dots, x_{3n}(t)) \in \mathbb{R}^{3n} \quad (3.3.5)$$

din spațiul configurațiilor este ca urmare a acțiunii forței de componente

$$\bar{F} = (F_1, F_2, F_3, \dots, F_{3n}), \quad F_i = F_i^{\text{int}} + F_i^{\text{ext}}, \quad i = 1, 2, \dots, 3n, \quad (3.3.6)$$

legea de mișcare fiind

$$M_i \ddot{x}_i = F_i, \quad (3.3.7)$$

unde

$$M_{3s-2} = m_s, \quad M_{3s-1} = m_s, \quad M_{3s} = m_s \quad s = 1, 2, \dots, n. \quad (3.3.8)$$

Să ne aducem aminte că lucrul mecanic al forțelor care acționează asupra unui punct material în mișcarea sa între două poziții de pe traiectorie măsoară efectul util al forțelor. Având două tipuri de forțe, vom vorbi despre lucrul mecanic total al forțelor exterioare între punctele P_s^0 și P_s

$$\begin{aligned} P_{\text{ext}} &= \sum_{s=1}^n \int_{P_s^0}^{P_s} \langle \bar{F}_s^{\text{ext}}, d\bar{r}_s \rangle = \int_{P_s^0}^{P_s} \sum_{i=1}^{3n} F_i^{\text{ext}} dx_i \\ &= \int_{t_0}^t \sum_{i=1}^{3n} F_i^{\text{ext}}(\xi) \frac{dx_i}{d\xi}(\xi) d\xi = \int_{t_0}^t \sum_{i=1}^{3n} F_i^{\text{ext}}(\xi) v_i(\xi) d\xi, \end{aligned} \quad (3.3.9)$$

unde $v_i = \dot{x}_i$, $i = 1, 2, \dots, 3n$, și despre lucrul mecanic total al forțelor interne între punctele P_s^0 și P_s

$$P_{\text{int}} = \sum_{s,p=1}^n \int_{P_s^0}^{P_s} \langle \bar{F}_{sp}, d\bar{r}_s \rangle = \sum_{s,p=1}^n \int_{t_0}^t \langle \bar{F}_{sp}, \bar{v}_s \rangle d\xi = \int_{t_0}^t \sum_{i=1}^{3n} F_i^{\text{int}}(\xi) v_i(\xi) d\xi \quad (3.3.10)$$

Ne aducem aminte că puterea forțelor care acționează asupra unui punct material este definită ca produsul scalar dintre forță și vectorul viteză. În cazul mișcării unui sistem de puncte materiale, puterea forțelor este formată din puterea forțelor exterioare

$$W_{\text{ext}} = \sum_{s=1}^n \langle \bar{F}_s, \bar{v}_s \rangle = \sum_{i=1}^{3n} F_i^{\text{ext}} v_i \quad (3.3.11)$$

și puterea forțelor interne

$$W_{\text{int}} = \sum_{s,p=1}^n \langle \bar{F}_{sp}, \bar{v}_s \rangle = \sum_{i=1}^{3n} F_i^{\text{int}} v_i. \quad (3.3.12)$$

Să remarcăm faptul că

$$W_{\text{ext}} = \frac{dP_{\text{ext}}}{dt}, \quad W_{\text{in}} = \frac{dP_{\text{int}}}{dt}. \quad (3.3.13)$$

În cazul forțelor externe spunem că sunt conservative dacă provin dintr-un potențial V , puterea fiind dată de $W_{\text{et}} = -\frac{dV}{dt}$. Dacă forțele externe care acționează asupra sistemului de puncte sunt toate conservative, atunci acest fapt este adevărat pentru puterea forțelor externe. Ne întrebăm ce se întâmplă în cazul forțelor interne. Poate fi scrisă puterea forțelor externe drept variația în timp a unui potențial? Sunt forțele interne conservative?

Propoziție 3.3.1. *Există $V : [0, \infty) \mapsto \mathbb{R}$ astfel încât $W_{\text{int}} = -\frac{d}{dt}V(\|\bar{r}_s - \bar{r}_p\|)$.*

Demonstrație. Pentru a găsi această funcție V vom rescrie puterea forțelor exterioare în forma echivalentă

$$\begin{aligned} W_{\text{int}} &= \sum_{s,p=1,s<p}^n \langle \bar{F}_{sp}, \bar{v}_s \rangle + \sum_{s,p=1,s>p}^n \langle \bar{F}_{sp}, \bar{v}_s \rangle = \sum_{s,p=1,s<p}^n \left(\langle \bar{F}_{sp}, \bar{v}_s \rangle + \sum_{s,p=1,s<p}^n \langle \bar{F}_{ps}, \bar{v}_p \rangle \right) \\ &= \sum_{s,p=1,s<p}^n (\langle \bar{F}_{sp}, \bar{v}_s - \bar{v}_p \rangle) = \sum_{s,p=1,s<p}^n \left(\langle \bar{F}_{sp}, \frac{d}{dt}(\bar{r}_s - \bar{r}_p) \rangle \right) \\ &= \sum_{s,p=1,s<p}^n \left(\langle F_{sp}(\|\bar{r}_s - \bar{r}_p\|) \frac{1}{\|\bar{r}_s - \bar{r}_p\|} (\bar{r}_p - \bar{r}_s), \frac{d}{dt}(\bar{r}_s - \bar{r}_p) \rangle \right) \\ &= \sum_{s,p=1,s<p}^n F_{sp}(\|\bar{r}_s - \bar{r}_p\|) \frac{1}{\|\bar{r}_s - \bar{r}_p\|} \left(\langle (\bar{r}_p - \bar{r}_s), \frac{d}{dt}(\bar{r}_s - \bar{r}_p) \rangle \right) \\ &= \sum_{s,p=1,s<p}^n F_{sp}(\|\bar{r}_s - \bar{r}_p\|) \frac{1}{\|\bar{r}_s - \bar{r}_p\|} \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \langle (\bar{r}_p - \bar{r}_s), (\bar{r}_s - \bar{r}_p) \rangle \\ &= - \sum_{s,p=1,s<p}^n F_{sp}(\|\bar{r}_s - \bar{r}_p\|) \frac{1}{\|\bar{r}_s - \bar{r}_p\|} \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|\bar{r}_p - \bar{r}_s\|^2 \\ &= - \sum_{s,p=1,s<p}^n F_{sp}(\|\bar{r}_s - \bar{r}_p\|) \frac{1}{\|\bar{r}_s - \bar{r}_p\|} \frac{1}{2} 2 \|\bar{r}_p - \bar{r}_s\| \frac{d}{dt} \|\bar{r}_p - \bar{r}_s\| \\ &= - \sum_{s,p=1,s<p}^n F_{sp}(\|\bar{r}_s - \bar{r}_p\|) \frac{d}{dt} \|\bar{r}_p - \bar{r}_s\|. \end{aligned} \quad (3.3.14)$$

Definim $V_{sp} : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ prin

$$V_{sp}(x) = \int_0^x F_{sp}(\xi) d\xi \quad (3.3.15)$$

și observăm că

$$\begin{aligned} W_{\text{int}} &= - \sum_{s,p=1,s < p}^n \frac{d}{d\|\bar{r}_s - \bar{r}_p\|} V_{sp}(\|\bar{r}_s - \bar{r}_p\|) \frac{d}{dt} \|\bar{r}_p - \bar{r}_s\| \\ &= - \sum_{s,p=1,s < p}^n \frac{d}{dt} V_{sp}(\|\bar{r}_s - \bar{r}_p\|). \end{aligned} \quad (3.3.16)$$

Prin urmare, potențialul V căutat de noi este $V : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$

$$V(x) = \sum_{s,p=1,s < p}^n V_{sp}(x), \quad (3.3.17)$$

pentru care vom avea

$$W_{\text{int}} = - \frac{d}{dt} V(\|\bar{r}_s - \bar{r}_p\|). \quad (3.3.18)$$

■

Propoziție 3.3.2. *Forțele interne sunt conservative.*

Demonstrație. Din propoziția precedentă rezultă

$$\frac{dP_{\text{int}}}{dt} = W_{\text{int}} = - \frac{d}{dt} V(\|\bar{r}_s - \bar{r}_p\|). \quad (3.3.19)$$

Prin urmare

$$P_{\text{int}}(t) = -V(\|\bar{r}_s - \bar{r}_p\|) \Big|_{t_0}^t + P_{\text{int}}(t_0), \quad (3.3.20)$$

adică lucrul mecanic al forțelor interne nu depinde de traiectoriile din spațiul configurațiilor, ci doar de coordonatele inițiale și finale ale sistemului de puncte materiale. Cu alte cuvinte forma diferențială $\sum_{i=1}^{3n} F_i^{\text{int}} dx_i$ este exactă și are loc

$$dV = - \sum_{i=1}^{3n} F_i^{\text{int}} dx_i, \quad (3.3.21)$$

adică

$$F_i^{\text{int}} = - \frac{\partial V}{\partial x_i}. \quad (3.3.22)$$

■

Propoziție 3.3.3. *Într-un sistem de referință inerțial, derivata în raport cu timpul a sumei dintre energia cinetică a unui sistem de puncte materiale și potențialul forțelor interioare este egală cu puterea forțelor exterioare care acționează asupra sistemului.*

Demonstrație. Înmulțind scalar ecuațiile de mișcare ale punctelor materiale din sistemul mecanic, adică

$$m_s \ddot{\vec{r}}_s = \overline{F}_s + \sum_{p=1}^n \overline{F}_{sp}, \quad s = 1, 2, \dots, n \quad (3.3.23)$$

cu $\dot{\vec{r}}_s$ și apoi adunând rezultatele, deducem

$$\sum_{s=1}^n m_s \langle \ddot{\vec{r}}_s, \dot{\vec{r}}_s \rangle = \sum_{s=1}^n \langle \overline{F}_s, \dot{\vec{r}}_s \rangle + \sum_{p=1}^n \langle \overline{F}_{sp}, \dot{\vec{r}}_s \rangle. \quad (3.3.24)$$

Aceasta înseamnă că

$$\frac{d}{dt} E(t) = W_{\text{int}} + W_{\text{ext}} = W_{\text{int}} - \frac{d}{dt} V(\|\vec{r}_s - \vec{r}_p\|) \quad (3.3.25)$$

și implică

$$\frac{d}{dt} E(t) + \frac{d}{dt} V(\|\vec{r}_s - \vec{r}_p\|) = W_{\text{int}}, \quad (3.3.26)$$

ceea ce încheie demonstrația. ■

Capitolul 4

Elemente de calcul variațional

4.1 Funcționale diferențiabile, puncte staționare

Calculul variațional constă în determinarea punctelor de extrem ale unor funcții având drept domeniu de definiție un spațiu infinit dimensional. De exemplu, spațiul curbelor. Astfel de funcții având drept codomeniu mulțimea numerelor reale poartă denumirea de *funcționale*, iar atunci când au o interpretare mecanică clară ne referim la aceste funcționale ca fiind *funcționale energetice* sau *acțiuni*.

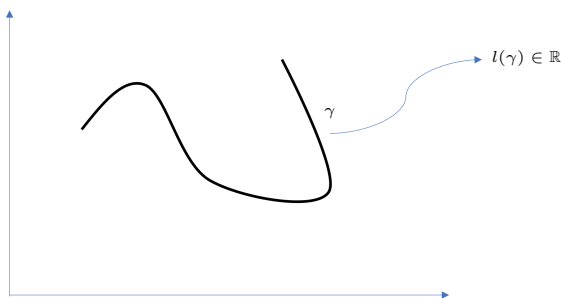


Figura 4.1: Funcțională definită pe spațiul curbelor plane.

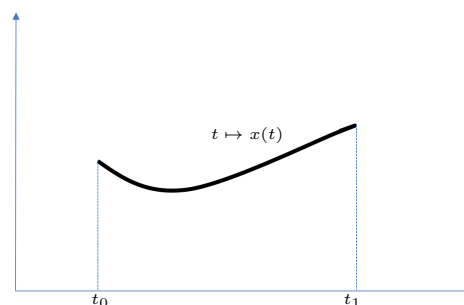


Figura 4.2: Curbă plană definită ca imaginea unei funcții scalare.

Ca un prim exemplu de funcțională, considerăm o funcțională care pentru o curbă plană dată de

$$\gamma = \{(t, x(t)) : t \in [t_0, t_1], x \in C^2([t_0, t_1])\} \subset \mathbb{R}^2, \quad (4.1.1)$$

returnează lungimea ei, adică

$$\gamma \mapsto l(\gamma) := \int_{t_0}^{t_1} \sqrt{1 + \dot{x}^2(t)} dt \in \mathbb{R}. \quad (4.1.2)$$

De fapt, întrucât curba considerată de noi este caracterizată complet de funcția $x \in C^2([t_0, t_1])$, funcționala de mai sus este o funcțională definită pe spațiul funcțiilor de clasă $C^2([t_0, t_1])$, prin

$$\Phi : C^2([t_0, t_1]) \rightarrow \mathbb{R}, \quad \Phi(x) = \int_{t_0}^{t_1} \sqrt{1 + \dot{x}^2(t)} dt \in \mathbb{R}. \quad (4.1.3)$$

Să considerăm în continuare *variații* ale unei curbe plane date γ , adică să considerăm acele curbe

$$\gamma' = \{(t, x(t) + h(t)) : t \in [t_0, t_1], h \in C^2([t_0, t_1])\} \subset \mathbb{R}^2. \quad (4.1.4)$$

Problema care ne interesează constă în studierea variației unei astfel de funcționale, adică $\Phi(x + h) - \Phi(x)$, atunci când argumentul ei are variații mici.

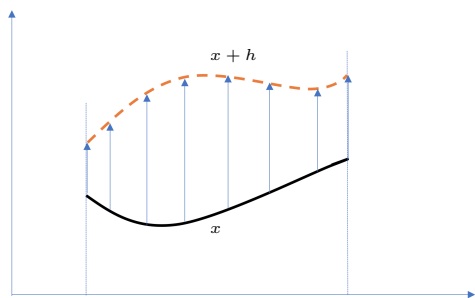


Figura 4.3: Variații ale unei curbe plane.

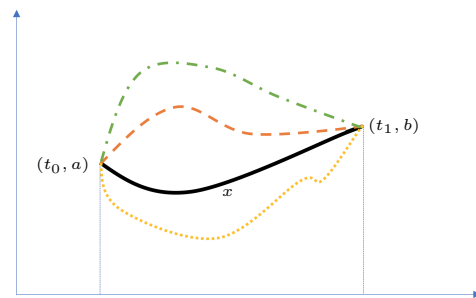


Figura 4.4: Curbe care au aceleași capete.

Pentru că în mecanică suntem interesați de determinarea drumului parcurs de puncte materiale între două poziții, vom considera că funcțiile care definesc curbele plane aparțin spațiului

$$X = \{x \in C^2([t_0, t_1]) : x(t_0) = a, \quad x(t_1) = b\}, \quad \text{unde } a, b \in \mathbb{R} \text{ fixe.} \quad (4.1.5)$$

Prin urmare, prin variație a acestei curbe vom înțelege mulțimea funcțiilor de forma

$$x + h \in X, \quad \text{unde } h \in Y := \{g \in C^2([t_0, t_1]), \quad g(t_0) = 0, \quad g(t_1) = 0\}. \quad (4.1.6)$$

Este important ca perturbarea să fie făcută prin funcții h astfel încât $x + h$ să nu părăsească spațiul X .

Definiție 4.1.1. O funcțională $\Phi : X \rightarrow \mathbb{R}$ se numește *diferențiabilă* în $x \in X$ dacă

$$\Phi(x + h) - \Phi(x) = F(h) + R(h, x),$$

unde F depinde liniar de h și $R(h, x) = O(h^2)$, în sensul că¹ pentru $\|h\|_\infty < \varepsilon$ și $\|\dot{h}\|_\infty < \varepsilon$ are loc $|R(h, x)| < C \varepsilon^2$. Partea liniară $F(h)$ a creșterii $\Phi(x + h) - \Phi(x)$ se numește *diferențiala* lui Φ în x . Dacă funcționala este diferențiabilă în orice punct $x \in X$, spunem că Φ este diferențiabilă pe X sau simplu că este diferențiabilă.

Se poate arăta că dacă Φ este diferențiabilă, atunci diferențiala ei este unică. Diferențiala lui Φ se mai numește și variația funcționalei Φ .

Teorema 4.1.1. Pentru orice funcție $L : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times [t_0, t_1] \rightarrow \mathbb{R}$, $(x, y, t) \mapsto L(x, y, t)$ de clasa C^2 , funcționala $\Phi : X \rightarrow \mathbb{R}$ definită de

$$\Phi(x) = \int_{t_0}^{t_1} L(x, \dot{x}, t) dt,$$

¹Să ne reamintim că pe spațiul funcțiilor de clasă C^2 pe $[t_0, t_1]$ avem norma $\|x\|_\infty = \max_{t \in [t_0, t_1]} |x(t)|$.

este diferențiabilă, diferențiala ei fiind dată de

$$F(h) = \int_{t_0}^{t_1} \left[\frac{\partial L}{\partial x}(x, \dot{x}, t) - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial y}(x, \dot{x}, t) \right) \right] h dt. \quad (4.1.7)$$

Demonstrație. Să folosim dezvoltarea în serie Taylor atunci când calculăm

$$\begin{aligned} \Phi(x+h) - \Phi(x) &= \int_{t_0}^{t_1} [L(x+h, \dot{x}+\dot{h}, t) - L(x, \dot{x}, t)] dt \\ &= \int_{t_0}^{t_1} \left[\frac{\partial L}{\partial x}(x, \dot{x}, t) h + \frac{\partial L}{\partial y}(x, \dot{x}, t) \dot{h} \right] dt + O(h^2). \end{aligned} \quad (4.1.8)$$

Integrând prin părți și folosind faptul că $h \in Y$ deducem

$$\begin{aligned} \Phi(x+h) - \Phi(x) &= \int_{t_0}^{t_1} \left[\frac{\partial L}{\partial x}(x, \dot{x}, t) - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial y}(x, \dot{x}, t) \right) \right] h dt + \frac{\partial L}{\partial y}(x, \dot{x}, t) h \Big|_{t_0}^{t_1} + O(h^2) \\ &= F(h) + O(h^2). \end{aligned} \quad (4.1.9)$$

iar demonstrația este încheiată. ■

Problema 4.1.1. Determinați variația funcționalei definită cu ajutorul funcției $L(a, b, c) = \sqrt{1+b^2}$. Recunoașteți funcționala?

Definiție 4.1.2. Un punct staționar (critic) al unei funcționale diferențiabile $\Phi : X \rightarrow \mathbb{R}$ este o funcție $x \in X$ în care $F \equiv 0$.

4.2 Ecuațiile Euler-Lagrange

Lema 4.2.1. Dacă o funcție $f : [t_0, t_1] \rightarrow \mathbb{R}$ continuă satisface $\int_{t_0}^{t_1} f(t)h(t)dt = 0$ pentru toate funcțiile continue h cu $h(t_0) = h(t_1) = 0$, atunci $f(t) = 0$, $\forall t \in [t_0, t_1]$.

Demonstrație. Presupunem prin reducere la absurd, fără a reduce generalitatea, că există $t^* \in [t_0, t_1]$ astfel încât $f(t^*) > c > 0$. Deoarece f este continuă, rezultă că există o întreagă vecinătate $(t^* - \varepsilon, t^* + \varepsilon) \subset [t_0, t_1]$ a lui t^* în care $f(t) > c > 0$.

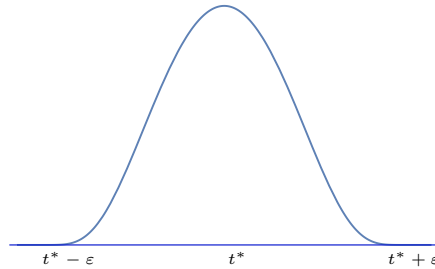


Figura 4.5: Construcția funcției h .

Construim o funcție h de clasă C^2 astfel încât $h(t) = 0$, $\forall t \in [t_0, t_1] \setminus (t^* - \varepsilon, t^* + \varepsilon)$ și $h(t) > 0$, $\forall t \in (t^* - \varepsilon, t^* + \varepsilon)$.

O astfel de funcție este $h : [t_0, t_1] \rightarrow \mathbb{R}$

$$h(t) = \begin{cases} \frac{1}{e^{(t-t^*)^2 - \varepsilon^2}} & \text{dacă } t \in (t^* - \varepsilon, t^* + \varepsilon), \\ 0 & \text{dacă } t \in [t_0, t_1] \setminus (t^* - \varepsilon, t^* + \varepsilon). \end{cases} \quad (4.2.1)$$

Obținem

$$\int_{t_0}^{t_1} f(t) h(t) dt = \int_{t^* - \varepsilon}^{t^* + \varepsilon} f(t) h(t) dt \geq \varepsilon \text{ const.} > 0, \quad (4.2.2)$$

ceea ce contrazice ipoteza. Prin urmare, concluzia este adevărată. ■

Teorema 4.2.1. Fie $L : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times [t_0, t_1] \rightarrow \mathbb{R}$, $(x, y, t) \mapsto L(x, y, t)$ de clasă C^2 . O funcție $x \in X$ este un punct staționar al funcționalei $\Phi : X \rightarrow \mathbb{R}$ definită de

$$\Phi(x) = \int_{t_0}^{t_1} L(x, \dot{x}, t) dt,$$

dacă și numai dacă

$$\frac{\partial L}{\partial x}(x, \dot{x}, t) - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial y}(x, \dot{x}, t) \right) = 0 \quad \forall t \in [t_0, t_1]. \quad (4.2.3)$$

Demonstrație. Știm deja că diferențiala lui Φ este dată de

$$F(h) = \int_{t_0}^{t_1} \left[\frac{\partial L}{\partial x}(x, \dot{x}, t) - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial y}(x, \dot{x}, t) \right) \right] h dt \quad \forall h \in Y. \quad (4.2.4)$$

Folosind lema precedentă², deoarece funcția h este de fapt de clasă C^2 , rezultă că $F(h) = 0$, ceea ce încheie demonstrația. ■

Problema 4.2.1. Să se găsească punctele de extrem ale funcționalei care calculează lungimea curbelor ce trec prin două puncte date.

Definiție 4.2.1. Ecuația

$$\frac{\partial L}{\partial x}(x, \dot{x}, t) - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial y}(x, \dot{x}, t) \right) = 0 \quad \forall t \in [t_0, t_1] \quad (4.2.5)$$

se numește ecuația Euler-Lagrange asociată funcționalei $\Phi : X \rightarrow \mathbb{R}$,

$$\Phi(x) = \int_{t_0}^{t_1} L(x(t), \dot{x}(t), t) dt.$$

²Demonstrația se păstrează dacă considerăm doar funcții de clasă C^2 , adică are loc:

Lema 4.2.2. Dacă o funcție $f : [t_0, t_1] \rightarrow \mathbb{R}$ continuă satisface $\int_{t_0}^{t_1} f(t) h(t) dt = 0$ pentru toate funcțiile continue h de clasă C^2 cu $h(t_0) = h(t_1) = 0$, atunci $f(t) = 0$, $\forall t \in [t_0, t_1]$.

Să remarcăm faptul că simplul fapt că o funcție este punct staționar nu implică că aceasta minimizează funcționala Φ pe spațiul X .

Pe de altă parte, dacă considerăm o funcție (în cazul în care existența ar fi asigurată) care minimizează funcționala Φ pe spațiul pentru care scrierei ei are sens, nu avem certitudinea că aceasta va fi de clasă C^2 .

Clarificarea totală a acestor aspecte este cumva în afara scopului cursului de față. Vom formula totuși o teoremă care să răspundă măcar parțial acestor întrebări.

Teorema 4.2.2. Fie $L \in C^2(\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times [t_0, t_1])$, $L = L(x, y, t)$ și

$$(P) \quad \inf_{x \in W} \left\{ \Phi(x) = \int_{t_0}^{t_1} L(x(t), \dot{x}(t), t) dt \right\} = m, \quad (4.2.6)$$

$$W = \{x \in C^1([t_0, t_1]) : x(t_0) = a, \quad x(t_1) = b\}, \quad \text{unde } a, b \in \mathbb{R} \text{ fixe.}$$

Au loc următoarele:

- i) Dacă problema (P) admite soluția $\hat{x} \in W \cap C^2([t_0, t_1])$, atunci ea verifică ecuația Euler-Lagrange.
- ii) Invers, dacă $\hat{x} \in W \cap C^2([t_0, t_1])$ verifică ecuația Euler-Lagrange și $(x, y) \mapsto L(x, y, t)$ este convexă pentru orice $t \in [t_0, t_1]$, atunci $\hat{x}$ este soluție a problemei (P).
- iii) Dacă în plus, funcția $(x, y) \mapsto L(x, y, t)$ este strict convexă pentru orice $t \in [t_0, t_1]$, atunci o soluție $\hat{x}$ a problemei (P) (dacă există) este unică.

Demonstrație. Punctul i) este deja demonstrat în deducerea ecuațiilor Euler-Lagrange.

Referitor la punctul ii), fie $x \in W \cap C^2([t_0, t_1])$ o soluție a ecuației Euler-Lagrange. Deoarece $(x, y) \mapsto L(x, y, t)$ este convexă pentru orice $t \in [t_0, t_1]$, rezultă că

$$L(x, \dot{x}, t) \geq L(\hat{x}, \dot{\hat{x}}, t) + \frac{\partial L}{\partial x}(\hat{x}, \dot{\hat{x}}, t)(x - \hat{x}) + \frac{\partial L}{\partial y}(\hat{x}, \dot{\hat{x}}, t)(\dot{x} - \dot{\hat{x}}) \quad \forall x \in X. \quad (4.2.7)$$

Integrând ambii termeni ai inegalității de mai sus deducem

$$\Phi(x) \geq \Phi(\hat{x}) + \int_{t_0}^{t_1} \left[\frac{\partial L}{\partial x}(\hat{x}, \dot{\hat{x}}, t)(x - \hat{x}) + \frac{\partial L}{\partial y}(\hat{x}, \dot{\hat{x}}, t)(\dot{x} - \dot{\hat{x}}) \right] dt. \quad (4.2.8)$$

Integrând prin părți al doilea termen din integrala de mai sus și ținând cont de faptul că $x(t_0) - \hat{x}(t_0) = 0 = x(t_1) - \hat{x}(t_1)$, obținem

$$\Phi(x) \geq \Phi(\hat{x}) + \int_{t_0}^{t_1} \left[\frac{\partial L}{\partial x}(\hat{x}, \dot{\hat{x}}, t) - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial y}(\hat{x}, \dot{\hat{x}}, t) \right) \right] (x - \hat{x}) dt. \quad (4.2.9)$$

Folosind ecuațiile Euler-Lagrange vom deduce că $\Phi(x) \geq \Phi(\hat{x})$ ceea ce demonstrează punctul ii).

Pentru demonstrarea ultimei părți a teoremei, să considerăm două soluții x și $\hat{x}$ ale problemei (P) și să arătăm că acestea sunt de fapt egale. Pentru aceasta să considerăm funcția

$$w = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}\hat{x} \quad (4.2.10)$$

și să observăm că ea aparține lui W .

Folosind convexitatea funcției $(x, y) \mapsto L(x, y, t)$ deducem

$$\frac{1}{2}L(x, \dot{x}, t) + \frac{1}{2}L(\hat{x}, \hat{x}, t) \geq L(w, \dot{w}, t). \quad (4.2.11)$$

Deoarece x și $\hat{x}$ sunt soluții ale problemei (P) , deducem că

$$m = \frac{1}{2}L(x, \dot{x}, t) + \frac{1}{2}L(\hat{x}, \hat{x}, t) \geq L(w, \dot{w}, t) \geq m. \quad (4.2.12)$$

Prin urmare, va rezulta că

$$\int_{t_0}^{t_1} \left[\frac{1}{2}L(x, \dot{x}, t) + \frac{1}{2}L(\hat{x}, \hat{x}, t) - L(w, \dot{w}, t) \right] dt = 0. \quad (4.2.13)$$

Folosind stricta convexitate a funcției $(x, y) \mapsto L(x, y, t)$ avem că integrantul este strict pozitiv dacă $x \neq \hat{x}$ și $\dot{x} \neq \dot{\hat{x}}$, de unde rezultă că $x \equiv \hat{x}$. ■

Problema 4.2.2. Considerăm $L(x, y, t) = L(y)$.

- Să se determine soluția $x \in X$ a ecuației Euler-Lagrange.
- Dacă $y \mapsto L(y)$ este convexă, să se arate că soluția de la punctul anterior minimizează în X funcționala Φ corespunzătoare.
- Să se arate că dacă $L(x, y, t) = e^{-y^2}$, iar spațiul $X = \{x \in C^2([t_0, t_1]) : x(t_0) = 0, x(t_1) = 0\}$, atunci soluția determinată la punctul i) nu minimizează funcționala Φ corespunzătoare.

Să considerăm acum cazul vectorial, adică să considerăm funcțiile vectoriale $\bar{x} : [t_0, t_1] \rightarrow \mathbb{R}^n$ și spațiul

$$\bar{X} = \{\bar{x} \in C^2([t_0, t_1]) : \bar{x}(t_0) = \bar{a}, \bar{x}(t_1) = \bar{b}\}, \quad (4.2.14)$$

unde vectorii $\bar{a}, \bar{b} \in \mathbb{R}^n$ sunt fixați. Alegând o bază cunoscută în $\mathbb{R}^n$ și notând cu q_i componentele lui $\bar{x}$ în această bază, spațiul $\bar{X}$ se identifică cu

$$\mathcal{X} = \{t \mapsto (q_1(t), q_2(t), \dots, q_n(t)), q_i(t) \in C^2([t_0, t_1]), i = 1, 2, \dots, n : q_i(t_0) = \alpha_i, q_i(t_1) = \beta_i\}. \quad (4.2.15)$$

Având dată o funcție

$$L : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times [t_0, t_1] \rightarrow \mathbb{R}, \quad L = L(\bar{x}, \bar{y}, t) \quad (4.2.16)$$

vom putea exprima $L(\bar{x}, \bar{y}, t)$ în funcție de coordonatele lui $\bar{x}$ și $\bar{y}$ în baza considerată, adică $(q_1, q_2, \dots, q_n)$ respectiv $(s_1, s_2, \dots, s_n)$, noua funcție fiind notată de noi tot cu L , și vom scrie

$$L(\bar{x}, \bar{y}, t) = L(q_i, s_i, t). \quad (4.2.17)$$

Vom presupune că L este de clasă C^2 .

Întreg procedeul de deducere al ecuațiilor Euler-Lagrange pentru cazul funcțiilor scalare poate fi urmat și pentru cazul funcțiilor vectoriale și găsim *ecuațiile Euler-Lagrange* :

Teorema 4.2.3. *O funcție $\bar{x} \in \bar{X}$ este un punct staționar al funcționalei $\Phi : \bar{X} \rightarrow \mathbb{R}$,*

$$\Phi(\bar{x}) = \int_{t_0}^{t_1} L(\bar{x}(t), \dot{\bar{x}}(t), t) dt = \int_{t_0}^{t_1} L(q_i(t), \dot{q}_i(t), t) dt \quad (4.2.18)$$

*dacă și numai dacă*³

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0, \quad i = 1, \dots, n \quad \forall t \in [t_0, t_1]. \quad (4.2.19)$$

În cazul vectorial, ecuațiile Euler-Lagrange sunt date de n ecuații diferențiale de ordin doi. În urma integrării lor, rezultă $2n$ constante ce vor fi determinate din condițiile impuse asupra capetelor curbelor considerate.

O proprietate esențială a ecuațiilor Euler-Lagrange este că aceste ecuații sunt valabile pentru orice alegere a sistemului de coordonate.

De exemplu, funcționala care indică lungimea unei curbe poate fi exprimată în coordonate carteziene dar și în coordonate polare de formule diferite, adică

$$\Phi(\bar{x}) = \int_{t_0}^{t_1} \underbrace{\sqrt{\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2}}_{:=L_{\text{cart}}} dt, \quad \Phi(\bar{x}) = \int_{t_0}^{t_1} \underbrace{\sqrt{\dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2}}_{:=L_{\text{pol}}} dt. \quad (4.2.20)$$

În mod clar, curba care este punct staționar este aceeași indiferent care din cele două forme este considerată, însă această curbă va fi exprimată în termenii coordonatelor implicate în scrierea funcționalei respective. Cu toate acestea (ca mod de scriere) forma ecuațiilor Euler-Lagrange este invariantă, fiind

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L_{\text{cart}}}{\partial \dot{x}_1} \right) - \frac{\partial L_{\text{cart}}}{\partial x_1} = 0, \quad \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L_{\text{cart}}}{\partial \dot{x}_2} \right) - \frac{\partial L_{\text{cart}}}{\partial x_2} = 0, \quad (4.2.21)$$

respectiv,

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L_{\text{pol}}}{\partial \dot{r}} \right) - \frac{\partial L_{\text{pol}}}{\partial r} = 0, \quad \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L_{\text{pol}}}{\partial \dot{\theta}} \right) - \frac{\partial L_{\text{pol}}}{\partial \theta} = 0. \quad (4.2.22)$$

³Am folosit acest mod de a scrie ecuațiile Euler-Lagrange, înțelegând tacit prin aceasta faptul că derivatele sunt evaluate în $(q_i(t), \dot{q}_i(t), t)$.

Capitolul 5

Sisteme de puncte supuse legăturilor

5.1 Deplasări posibile. Deplasări virtuale

Considerăm un sistem de puncte materiale format din punctele P_s , $s = 1, 2, \dots, n$ de mase m_s și de vectori de poziție $\bar{r}_s$ față de aceeași origine a unui reper. Fie $\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3$ o bază ortonormată. Descompunem $\bar{r}_s$, $s = 1, 2, \dots, n$, astfel

$$\begin{aligned}\bar{r}_1(t) &= x_1\bar{e}_1 + x_2\bar{e}_2 + x_3\bar{e}_3, \\ \bar{r}_2(t) &= x_4\bar{e}_1 + x_5\bar{e}_2 + x_6\bar{e}_3, \\ &\vdots \\ \bar{r}_n(t) &= x_{3n-2}\bar{e}_1 + x_{3n-1}\bar{e}_2 + x_{3n}\bar{e}_3.\end{aligned}\tag{5.1.1}$$

Presupunând cunoscută baza în care a fost descompusă mișcarea sistemului de puncte materiale, mișcarea acestui sistem de puncte materiale este cunoscută dacă cunoaștem aplicația

$$t \mapsto \bar{x}(t) = (x_1(t), x_2(t), \dots, x_{3n}(t)) \in \mathbb{R}^{3n}, \quad t \in [t_0, t_1].\tag{5.1.2}$$

Dacă toate punctele materiale ar avea libertatea să ocupe orice poziție din $\mathbb{R}^3$, atunci $\bar{x}(t)$ poate să ia orice valoare din $\mathbb{R}^{3n}$. Cu alte cuvinte, spațiul configurațiilor (al pozițiilor posibile ale tuturor punctelor materiale) este întreg $\mathbb{R}^{3n}$. Însă, dacă măcar un punct material din sistem este constâns să se miște pe o varietate anume, atunci spunem că sistemul de puncte materiale este supus legăturilor.

Definiție 5.1.1. *Orice restricție de natură geometrică sau cinematică impusă sistemului de puncte materiale, adică*

$$f \in C^1([t_0, t_1] \times \mathbb{R}^{3n}) \quad f(t, x_1, x_2, \dots, x_{3n}) = 0 \tag{5.1.3}$$

legătură geometrică sau

$$f \in C^1([t_0, t_1] \times \mathbb{R}^{3n} \times \mathbb{R}^{3n}), \quad f(t, x_1, x_2, \dots, x_{3n}, \dot{x}_1, \dot{x}_2, \dots, \dot{x}_{3n}) = 0 \tag{5.1.4}$$

legătură cinematică

se numește legătură.

În acest curs vom considera cu precădere legături geometrice. Restricțiile cinematice considerate adesea sunt liniare în x_i adică sunt restricții de forma

$$\sum_{i=1}^{3n} A_i(t, x_1, x_2, \dots, x_{3n}) \dot{x}_i + A_0(t, x_1, x_2, \dots, x_{3n}) = 0. \quad (5.1.5)$$

O legătură geometrică se mai numește și finită iar o legătură cinematică se mai numește și diferențiabilă. Orice legătură geometrică se poate transforma într-o legătură cinematică pentru că dacă considerăm o legătură geometrică de forma $f(t, x_1, x_2, \dots, x_{3n}) = 0$, prin diferențiere în raport cu timpul ne conduce la

$$\sum_{i=1}^{3n} \frac{\partial f}{\partial x_i} \dot{x}_i + \frac{\partial f}{\partial t} = 0. \quad (5.1.6)$$

Dar nu orice legătură cinematică poate fi redusă la o legătură geometrică. Legăturile cinematice care pot fi transformate în legături geometrice (adică integrate) se numesc legături integrabile.

Definiție 5.1.2. *Un sistem mecanic supus doar la legături integrabile se numește sistem mecanic olonom. Dacă sistemul mecanic este supus la cel puțin o legătură cinematică neintegrabilă, atunci acesta se numește sistem mecanic neolonom.*

O legătură mecanică în care nu apare timpul explicit, adică $f(x_1, x_2, \dots, x_{3n}) = 0$, se numește legătură staționară (varietatea pe care se mișcă punctele nu se schimbă în timp). În caz contrar se numește nestaționară.

O legătură geometrică staționară conduce la o legătură cinematică de forma

$$\sum_{i=1}^{3n} \frac{\partial f}{\partial x_i} \dot{x}_i = 0. \quad (5.1.7)$$

O legătură cinematică se numește staționară dacă are forma

$$\sum_{i=1}^{3n} A_i(x_1, x_2, \dots, x_{3n}) \dot{x}_i = 0. \quad (5.1.8)$$

În caz contrar se numește nestaționară.

Un sistem mecanic supus doar la legături staționare se numește scleronom. În caz contrar se numește reonom.

În continuare vom da câteva exemple

- Un singur punct material este forțat să rămână pe o sferă de rază 2. Aceasta înseamnă

$$x_1^2(t) + x_2^2(t) + x_3^2(t) = 4 \quad t \in [t_0, t_1]. \quad (5.1.9)$$

Acest tip de legătură este geometrică, staționară. Sistemul mecanic este deci olonom, scleronom.

- Un singur punct material care este forțat să se miște pe un con a cărui secțiune transversală depinde liniar de timp.

$$x_1^2 + x_2^2 = (a t + b)^2, \quad (5.1.10)$$

$$x_3 \geq 0. \quad (5.1.11)$$

Prima legătură este o legătură geometrică nestaționară. Sistemul mecanic este olo-nom, reonom. După cum vedem, este prezentă o restricție care nu este definită de o egalitate.

Putem avea legături unilaterale de tipul

$$f(t, x_1, x_2, \dots, x_{3n}) \geq 0 \quad \text{sau} \quad f(t, x_1, x_2, \dots, x_{3n}) \leq 0. \quad (5.1.12)$$

Acest tip de legături ne arată că punctul material se află deasupra sau sub o varietate. Legăturile definite cu egalitate se numesc bilaterale.

Să considerăm un sistem mecanic format din n puncte materiale ca mai devreme asupra căruia avem impuse N legături geometrice

$$f_j(t, x_1, x_2, \dots, x_{3n}) = 0 \quad j = 1, 2, \dots, N, \quad N < 3n. \quad (5.1.13)$$

Mai mult, presupunem că aceste legături sunt definite de funcții de clasă C^1 funcțional independente, adică gradientii acestor funcții sunt liniar independenți, ceea ce înseamnă

$$\text{rang} \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_N}{\partial x_1} \\ \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_N}{\partial x_2} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ \frac{\partial f_1}{\partial x_n} & \frac{\partial f_2}{\partial x_n} & \dots & \frac{\partial f_N}{\partial x_n} \end{pmatrix} = N. \quad (5.1.14)$$

Definiție 5.1.3. *Vectorul*

$$\bar{x} = (x_1, x_2, \dots, x_{3n}) \quad (5.1.15)$$

se numește poziția sistemului mecanic în spațiul configurațiilor iar vectorul

$$\dot{\bar{x}} = (\dot{x}_1, \dot{x}_2, \dots, \dot{x}_{3n}) \quad (5.1.16)$$

se numește viteza sistemului mecanic în spațiul configurațiilor.

Legăturile geometrice considerate se pot transforma în legături cinematice. De fapt, legăturile geometrice conduc și la restricții asupra vitezei în spațiul configurațiilor.

Definiție 5.1.4. *O viteză a sistemului mecanic care satisface legătura cinematică*

$$\sum_{i=1}^{3n} \frac{\partial f_j}{\partial x_i} \dot{x}_i + \frac{\partial f_j}{\partial t} = 0 \quad j = 1, 2, \dots, N \quad (5.1.17)$$

se numește viteză posibilă.

Definiție 5.1.5. *Vectorul*

$$d\bar{r}_s = \dot{x}_{3s-2}dt\bar{e}_1 + \dot{x}_{3s-1}dt\bar{e}_2 + \dot{x}_3dt\bar{e}_{3s}, \quad s = 1, 2, \dots, n \quad (5.1.18)$$

se numește deplasare posibilă a punctului material P_i .

Vectorul

$$d\bar{x} = (dx_1, dx_2, \dots, dx_{3n}), \quad dx_i = \dot{x}_i dt, \quad i = 1, 2, \dots, 3n \quad (5.1.19)$$

se numește deplasare posibilă a sistemului mecanic în spațiul configurațiilor.

Se obține

$$\sum_{i=1}^{3n} \frac{\partial f_j}{\partial x_i} \dot{x}_i dt + \frac{\partial f_j}{\partial t} dt = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \sum_{i=1}^{3n} \frac{\partial f_j}{\partial x_i} dx_i + \frac{\partial f_j}{\partial t} dt = 0 \quad j = 1, 2, \dots, N. \quad (5.1.20)$$

Ne întrebăm câte deplasări posibile există. Fiecărei viteze posibile îi corespunde o deplasare posibilă și vice versa.

Analizând sistemul algebric în $\dot{x}_i$, $i = 1, 2, \dots, 3n$

$$\sum_{i=1}^{3n} \frac{\partial f_j}{\partial x_i} \dot{x}_i = -\frac{\partial f_j}{\partial t} \quad j = 1, 2, \dots, N, \quad (5.1.21)$$

al cărui rang este $N < 3n$, deducem că este compatibil nedeterminat cu $3n - N > 0$ necunoscute secundare. Există deci un număr infinit de deplasări posibile.

Să considerăm două deplasări posibile ale sistemului mecanic

$$\frac{\partial f_j}{\partial x_i} dx_i + \frac{\partial f_j}{\partial t} dt = 0 \quad j = 1, 2, \dots, N, \quad (5.1.22)$$

$$\frac{\partial f_j}{\partial x_i} d\tilde{x}_i + \frac{\partial f_j}{\partial t} dt = 0 \quad j = 1, 2, \dots, N. \quad (5.1.23)$$

Definiție 5.1.6. *Diferența dintre două deplasări posibile se numește deplasare virtuală.*

Observăm că componentele diferenței

$$\delta\bar{x} = d\bar{x} - d\tilde{x}, \quad (5.1.24)$$

adică, notând cu δx_i , $i = 1, 2, \dots, 3n$ vectorului $\delta\bar{x}$, avem că

$$\delta x_i = dx_i - d\tilde{x}_i \quad (5.1.25)$$

verifică sistemul omogen

$$\sum_{i=1}^N \frac{\partial f_j}{\partial x_i} \delta x_i = 0 \quad j = 1, 2, \dots, N. \quad (5.1.26)$$

Întrucât rangul matricei acestui sistem este N , va rezulta că variabilele δx_i se pot scrie în funcție de $3n - N$ variabile pe care le notăm cu

$$\delta q_1, \delta q_2, \dots, \delta q_{3n-N}, \quad (5.1.27)$$

care rămân arbitare, adică pot lua orice valoare reală.

Proprietatea principală a unei deplasări virtuale este aceea că adunată la o deplasare posibilă ne conduce tot la o deplasare posibilă. Este clar că avem un număr infinit de deplasări virtuale.

Pentru a exemplifica cele definite mai sus, să considerăm un punct material supus unei legături geometrice staționare

$$f(x_1, x_2, x_3) = 0, \quad (5.1.28)$$

unde f este o funcție de clasă C^1 . Cu alte cuvinte, punctul este constrâns să rămână pe o suprafață. O deplasare virtuală a acestui punct material verifică

$$\sum_{i=1}^{3n} \frac{\partial f}{\partial x_i} \delta x_i = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \langle \nabla f, \delta \bar{x} \rangle = 0, \quad (5.1.29)$$

ceea ce înseamnă că vectorul $\delta \bar{x}$ este situat în planul tangent la suprafață în punctul considerat.

Aceeași interpretare rămâne valabilă și în cazul legăturilor geometrice nestaționare de forma $f(t, x_1, x_2, x_3) = 0$ pentru că are loc

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(t, x_1, x_2, x_3) \delta x_i = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \langle \nabla f(t, x_1, x_2, x_3), \delta \bar{x} \rangle = 0. \quad (5.1.30)$$

Diferența față de cazul legăturii geometrice fiind faptul că planul tangent la suprafața nu mai este constant în timp, ci depinde de timp.

5.2 Axioma legăturilor ideale. Principiul lui D'Alembert

Dacă punctele sunt constrânse să se miște pe o varietate, ne întrebăm dacă nu cumva punctele interacționează cu aceasta. Prezența legăturilor conduce și la ideea de modelare a interacțiunii dintre sistemul de puncte și varietatea pe care se mișcă. Această interacțiune fiind modelată prin forțe de legătură (de reacțiune) care nu sunt considerate cunoscute ci sunt influențate (depind) de mișcarea punctelor din sistem și în același timp influențează mișcarea punctelor.

Din ecuația lui Newton avem,

$$m_s \underbrace{\ddot{\bar{r}}_s}_{\text{necunoscute}} = \underbrace{\bar{F}_s}_{\text{forțe exterioare (presupuse cunoscute)}} + \underbrace{\bar{R}_s}_{\text{forțe de legătură (necunoscute)}}, \quad s = 1, 2, \dots, n.$$

Necunoscute sunt componentele vectorilor de poziție $\bar{r}_s$ ($3n$ necunoscute scalare) și $\bar{R}_s$ ($3n$ necunoscute scalare). Avem un număr de $6n$ necunoscute și un sistem compus din de doar

$3n$ ecuații diferențiale. Pe lângă ecuațiile acestui sistem de ecuații diferențiale mai avem și $N < 3n$ ecuații (eventual neliniare) date de cele N legături, adică

$$f_j(t, x_1, x_2, \dots, x_{3n}) = 0, \quad j = 1, 2, \dots, N. \quad (5.2.1)$$

Cu toate acestea, avem un număr de $3n + N < 6n$ ecuații din care trebuie să aflăm $6n$ necunoscute. Este de la sine înțeles că nu e de ajuns pentru a putea garanta găsirea unei soluții. Ar mai fi nevoie de $3n - N$ ecuații. Aceste ecuații sunt date cerând ca forțele de legătură să verifice o axiomă (așa cum și în mecanica clasică este nevoie de Legea lui Coulomb).

Axioma legăturilor ideale (Principiul lucrului mecanic virtual): *Lucrul mecanic elementar al forțelor de interacțiune (suma lucrurilor mecanice ale tuturor forțelor de legătură în mișcarea lor) dintre sistemul de puncte și varietatea definită de legături este nul pe orice deplasare virtuală, adică*

$$\sum_{s=1}^n \langle \bar{R}_s, \delta \bar{x}_s \rangle = 0 \quad (5.2.2)$$

pentru orice deplasare virtuală $\delta \bar{x} = (\delta x_1, \delta x_2, \dots, \delta x_3)$.

În cazul exemplului de mai sus, al unui punct material supus la o legătură geometrică staționară $f(x_1, x_2, x_3) = 0$ axioma legăturilor ideale afirmă $\langle \bar{R}, \delta \bar{x} \rangle = 0$, adică faptul că forța de legătură este normală la varietatea definită de legături.

Revenind la cazul general, să notăm cu $R_{3s-2}, R_{3s-1}, R_{3s}$ componentele forței $\bar{R}_s$, $s = 1, 2, \dots, n$. Deoarece N din componentele δx_i se exprimă în funcție de $\delta q_1, \delta q_2, \dots, \delta q_{3n-N}$, substituind peste tot variabilele dependente δx_i cu expresiile lor ca funcții de $\delta q_1, \delta q_2, \dots, \delta q_{3n-N}$, din principiul lucrului mecanic virtual vom obține o relație de forma

$$A_1 \delta q_1 + A_2 \delta q_2 + \dots + A_{3n-N} \delta q_{3n-N} = 0 \quad \forall \delta q_i \in \mathbb{R}, i = 1, 2, \dots, 3n - N. \quad (5.2.3)$$

Prin urmare, va rezulta un sistem de $3n - N$ noi relații

$$A_1 = 0, \quad A_2 = 0, \quad \dots \quad A_{3n-N} = 0. \quad (5.2.4)$$

În expresia acestor coeficienți A_i apar R_j , $j = 1, 2, \dots, 3n$ și $\frac{\partial f_j}{\partial x_i}(x_1, x_2, x_3)$. Deci egalitățile de mai sus reprezintă încă $3n - N$ ecuații, adică ceea ce ne lipsea pentru a avea un număr de ecuații egal cu numărul de necunoscute.

Să remarcăm că din ecuația lui Newton rezultă

$$\bar{R}_s = m_s \ddot{\bar{r}} - \bar{F}_s, \quad s = 1, 2, \dots, n. \quad (5.2.5)$$

Cantitatea $-m_s \ddot{\bar{r}}$ se numește forță de inerție.

Prin urmare, axioma legăturilor ideale este echivalentă cu

$$\sum_{s=1}^n \langle \bar{F}_s - m_s \ddot{\bar{r}}, \delta \bar{x}_s \rangle = 0 \quad (5.2.6)$$

pentru orice deplasare virtuală $\delta \bar{x} = (\delta x_1, \delta x_2, \dots, \delta x_3)$.

În această ecuație nu mai apare explicit $\bar{R}_s$ ci sunt implicate doar componentele forțelor externe și ale deplasărilor.

Principiul lui D'Alembert: În timpul mișcării unui sistem de puncte materiale, lucrul mecanic (total) al forțelor active (externe) împreună cu cel al forțelor de inerție pentru orice deplasare virtuală este nul.

5.3 Spațiul lui Lagrange

După cum am văzut în capitolul precedent, în cazul sistemelor de puncte materiale libere, ecuațiile lui Newton sunt echivalente cu ecuațiile lui Euler-Lagrange a căror formă este invariantă la sistemul de coordonate folosit. Ne întrebăm dacă ceva similar poate fi obținut și în cazul sistemelor de puncte materiale supuse la legături.

Introducând

$$M_{3s-2} = m_s, \quad M_{3s-1} = m_s, \quad M_{3s} = m_s \quad s = 1, 2, \dots, n \quad (5.3.1)$$

forma vectorială a ecuațiilor lui Newton

$$m_s \ddot{\vec{r}}_s = \vec{F}_s + \vec{R}_s, \quad s = 1, 2, \dots, n \quad (5.3.2)$$

se scrie

$$M_i \ddot{x}_i = F_i + R_i, \quad i = 1, 2, \dots, 3n. \quad (5.3.3)$$

Considerăm $N < 3n$ ecuații (eventual neliniare) date de N legături, adică

$$f_j(t, x_1, x_2, \dots, x_{3n}) = 0, \quad j = 1, 2, \dots, N. \quad (5.3.4)$$

Deoarece funcțiile f_j sunt de clasă C^2 , din teorema funcțiilor implicite rezultă că variabilele x_i , $i = 1, 2, \dots, 3n$ se pot exprima ca funcții de $3n - N$ variabile $q_1, q_2, \dots, q_{3n-N}$, adică

$$x_i = x_i(q_1, q_2, \dots, q_{3n-N}) \quad i = 1, 2, \dots, 3n. \quad (5.3.5)$$

Definiție 5.3.1. Variabilele $q_1, q_2, \dots, q_{3n-N}$ se numesc coordonate generalizate sau coordonatele lui Lagrange. Mulțimea tuturor valorilor pe care le pot avea coordonatele generalizate poartă numele de spațiul lui Lagrange sau spațiul configurațiilor.

În paragraful precedent am arătat că axioma legăturilor ideale ne oferă încă $3n - N$ ecuații și atunci numărul de necunoscute va fi egal cu numărul de ecuații.

Dacă vom ști cum variază coordonatele generalizate ca funcție de tip, $q_i = q_i(t)$, $i = 1, \dots, 3n - N$, atunci vom ști și $x_i = x_i(t)$, $i = 1, 2, \dots, 3n$, adică mișcarea sistemului de puncte materiale.

Mișcarea punctelor material este complet determinată de aplicațiile

$$q_i = q_i(t), \quad t \in [t_0, t_1], \quad i = 1, \dots, 3n - N. \quad (5.3.6)$$

Definiție 5.3.2. Aplicația

$$t \mapsto \vec{q}(t) = (q_1(t), q_2(t), \dots, q_{3n-N}(t)), \quad t \in [t_0, t_1] \quad (5.3.7)$$

se numește mișcare în spațiul lui Lagrange.

Dacă știm mișcarea în spațiul lui Lagrange, atunci știm mișcarea în spațiul real al mișcării. Există o corespondență biunivocă între mișcarea sistemului de puncte în spațiul real al mișcării și din spațiul lui Lagrange.

Definiție 5.3.3. *Aplicația*

$$t \mapsto \dot{\vec{q}}(t) = (\dot{q}_1(t), \dot{q}_2(t), \dots, \dot{q}_{3n-N}(t)), \quad t \in [t_0, t_1] \quad (5.3.8)$$

se numește viteză în spațiul lui Lagrange.

Ne întrebăm cum pot fi scrise componentele vitezelor din spațiul real al mișcării, adică

$$t \mapsto \dot{\vec{x}}(t) = (\dot{x}_1(t), \dot{x}_2(t), \dots, \dot{x}_{3n}(t)), \quad t \in [t_0, t_1], \quad (5.3.9)$$

în funcție de componentele vitezei în spațiul configurațiilor.

Folosind formula de derivare a compunerii funcțiilor, deducem

$$\dot{x}_i = \sum_{j=1}^{3n-N} \frac{\partial x_i}{\partial q_j} \dot{q}_j + \frac{\partial x_i}{\partial t} \quad i = 1, 2, \dots, 3n, \quad (5.3.10)$$

și

$$dx_i = \sum_{j=1}^{3n-N} \frac{\partial x_i}{\partial q_j} dq_j + \frac{\partial x_i}{\partial t} dt \quad i = 1, 2, \dots, 3n. \quad (5.3.11)$$

Din relația de mai sus rezultă că deplasările posibile în spațiul configurațiilor se exprimă în funcție de dq_j care poartă numele de *deplasări posibile în spațiul lui Lagrange*.

Fie dq_j și $d\tilde{q}_j$ deplasări posibile în spațiul lui Lagrange care conduc la deplasările posibile dx_i și $d\tilde{x}_i$. Diferențele $\delta q_j = dq_j - d\tilde{q}_j$ se numesc *deplasări virtuale în spațiul lui Lagrange*. Se deduce faptul că deplasările virtuale din spațiul real al mișcării se scriu în funcție de deplasările virtuale din spațiul lui Lagrange

$$\delta x_i = \sum_{j=1}^{3n-N} \frac{\partial x_i}{\partial q_j} d\delta q_j \quad i = 1, 2, \dots, 3n. \quad (5.3.12)$$

Deoarece $\text{rang} \left(\frac{\partial x_i}{\partial q_j} \right) = 3n - N$ (explicați de ce!), deducem că și orice deplasare virtuală din spațiul lui Lagrange se scrie în funcție de deplasările virtuale din spațiul real al mișcării.

5.4 Ecuațiile lui Lagrange

Întrucât funcțiile necunoscute sunt doar $q_j = q_j(t)$, $j = 1, 2, \dots, 3n - N$, ar fi util să deducem un set de $3n - N$ ecuații care să implice doar aceste coordonate. Cu alte cuvinte, să avem un set de ecuații formulate în spațiul lui Lagrange.

Principiul lui D'Alembert ne spune că

$$\sum_{s=1}^n \langle \vec{F}_s - m_s \ddot{\vec{r}}, \delta \vec{x}_s \rangle = 0 \quad (5.4.1)$$

pentru orice deplasare virtuală $\delta \vec{x} = (\delta x_1, \delta x_2, \dots, \delta x_3)$. Folosind faptul relația dintre deplasările virtuale în spațiul fizic și deplasările virtuale în spațiul lui Lagrange

$$\delta x_i = \sum_{j=1}^{3n-N} \frac{\partial x_i}{\partial q_j} d\delta q_j \quad i = 1, 2, \dots, 3n, \quad (5.4.2)$$

deducem

$$\sum_{s=1}^n \langle \bar{F}_s, \delta \bar{x}_s \rangle = \sum_{i=1}^{3n} F_i \delta x_i = \sum_{i=1}^{3n} F_i \sum_{j=1}^{3n-N} \frac{\partial x_i}{\partial q_j} \delta q_j = \sum_{j=1}^{3n-N} \left(\sum_{i=1}^{3n} F_i \frac{\partial x_i}{\partial q_j} \right) \delta q_j. \quad (5.4.3)$$

Introducem notația

$$Q_j = \sum_{i=1}^{3n} F_i \frac{\partial x_i}{\partial q_j}, \quad (5.4.4)$$

cantități ce se numesc *componetele forței generalizate*.

Similar, obținem

$$\begin{aligned} \sum_{s=1}^n \langle m_s \ddot{\bar{r}}, \delta \bar{x}_s \rangle &= \sum_{i=1}^{3n} M_i \ddot{x}_i \delta x_i = \sum_{i=1}^{3n} M_i \ddot{x}_i \sum_{j=1}^{3n-N} \frac{\partial x_i}{\partial q_j} \delta q_j \\ &= \sum_{j=1}^{3n-N} \left(\sum_{i=1}^{3n} M_i \ddot{x}_i \frac{\partial x_i}{\partial q_j} \right) \delta q_j. \end{aligned} \quad (5.4.5)$$

În plus, deducem

$$\ddot{x}_i \frac{\partial x_i}{\partial q_j} = \frac{d}{dt} \left(\dot{x}_i \frac{\partial x_i}{\partial q_j} \right) - \dot{x}_i \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial x_i}{\partial q_j} \right). \quad (5.4.6)$$

Pe de o parte, din

$$\dot{x}_i = \sum_{j=1}^{3n-N} \frac{\partial x_i}{\partial q_j} \dot{q}_j + \frac{\partial x_i}{\partial t} \quad i = 1, 2, \dots, 3n, \quad (5.4.7)$$

obținem

$$\frac{\partial \dot{x}_i}{\partial \dot{q}_j} = \frac{\partial x_i}{\partial q_j} \quad i = 1, 2, \dots, 3n, \quad j = 1, 2, \dots, 3n - N, \quad (5.4.8)$$

în timp ce, pe de altă parte, are loc

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial x_i}{\partial q_j} \right) = \frac{\partial}{\partial q_j} \left(\frac{d}{dt} x_i \right) = \frac{\partial \dot{x}_i}{\partial q_j}. \quad (5.4.9)$$

Folosind relațiile de mai sus, vom avea

$$\sum_{s=1}^n \langle m_s \ddot{\bar{r}}, \delta \bar{x}_s \rangle = \sum_{j=1}^{3n-N} \left[\sum_{i=1}^{3n} M_i \left(\frac{d}{dt} \left(\dot{x}_i \frac{\partial x_i}{\partial q_j} \right) - \dot{x}_i \frac{\partial \dot{x}_i}{\partial q_j} \right) \right] \delta q_j.$$

Să considerăm în continuare expresia energiei cinetice

$$E = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{3n} M_i \dot{x}_i \dot{x}_i \quad (5.4.10)$$

și să observăm că

$$\begin{aligned}\frac{\partial E}{\partial \dot{q}_j} &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{3n} M_i \dot{x}_i \frac{\partial \dot{x}_i}{\partial \dot{q}_j}, \\ \frac{\partial E}{\partial q_j} &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{3n} M_i \dot{x}_i \frac{\partial \dot{x}_i}{\partial q_j}.\end{aligned}\tag{5.4.11}$$

Prin urmare, obținem

$$\sum_{s=1}^n \langle m_s \ddot{\vec{r}}, \delta \vec{x}_s \rangle = \sum_{j=1}^{3n-N} \left(\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial E}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial E}{\partial q_j} \right) \delta q_j,$$

principiul lui D'Alembert fiind echivalent cu

$$\sum_{j=1}^{3n-N} \left(\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial E}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial E}{\partial q_j} - Q_j \right) \delta q_j = 0,$$

pentru orice deplasare virtuală δq_j din spațiul configurațiilor.

Dar asupra deplasărilor virtuale δq_j din spațiul configurațiilor nu avem nicio restricție, putând lua orice valoare reală, Prin urmare, principiul lui D'Alembert este echivalent cu a scrie

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial E}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial E}{\partial q_j} - Q_j = 0 \quad j = 1, 2, \dots, 3n - N.\tag{5.4.12}$$

Ecuatiile obținute poartă numele de ecuațiile lui Lagrange. Să observăm că forma lor răspunde afirmativ dorinței noastre de a avea o ecuație doar în termenii variabilelor libere (coordonatelor lui Lagrange), adică singurile necunoscute rămase după rezolvarea ecuațiilor care descriu legăturile.

Vă întrebați, probabil, unde am folosit ecuația lui Newton. Ecuația lui Newton joacă doar un rol intermediar, fiind folosită pentru a spune că forțele de legătură $\vec{R}_s$ sunt egale cu $m_s \ddot{\vec{r}} - \vec{F}_s$.

Propoziție 5.4.1. *Ecuațiile lui Lagrange sunt invariante la schimbări de coordonate, în sensul că dacă trec de la un sistem de coordonate din spațiul lui Lagrange la un alt sistem de coordonate, atunci forma ecuațiilor nu se modifică.*

Demonstrație. Înainte de a trece să indicăm de ce propoziția este adevărată, să indicăm de ce ar fi posibil să considerăm un alt sistem de coordonate în spațiul lui Lagrange. Explicația este foarte simplă și constă în faptul că sistemul de ecuații care descriu legăturile poate fi rezolvat considerând diverse alte coordonate, între coordonatele vechi și cele noi având loc o relație de forma

$$q_i = q_i(t, \tilde{q}_1, \dots, \tilde{q}_{3n-N}), i = 1, 2, \dots, 3n - N.\tag{5.4.13}$$

Repetând întreg procedeul din această secțiune, dar considerând variabilele $\tilde{q}_j$ peste tot, vom deduce că principiul lui D'Alembert este echivalent cu ecuațiile

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial E}{\partial \dot{\tilde{q}}_j} \right) - \frac{\partial E}{\partial \tilde{q}_j} - \tilde{Q}_j = 0 \quad j = 1, 2, \dots, 3n - N,\tag{5.4.14}$$

unde

$$\tilde{Q}_j = \sum_{i=1}^{3n} F_i \frac{\partial x_i}{\partial \tilde{q}_j}. \quad (5.4.15)$$

Prin urmare, obținem un nou set de ecuații, care au aceeași formă ca cele obținute anterior și care sunt echivalente cu cele scrise în termenii vechilor coordonate, ambele seturi fiind echivalente cu principiul lui D'Alembert. ■

Determinarea formei energiei cinetice în funcție de vitezele generalizate este oarecum similară cu metoda folosită în cazul mișcării sistemelor libere. Punctul de plecare este dat de relațiile

$$\dot{x}_i = \sum_{j=1}^{3n-N} \frac{\partial x_i}{\partial q_j} \dot{q}_j + \frac{\partial x_i}{\partial t} \quad i = 1, 2, \dots, 3n, \quad (5.4.16)$$

care ne indică faptul că energia cinetică are expresia

$$\begin{aligned} E &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{3n} M_i \dot{x}_i \dot{x}_i = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{3n} M_i \left(\sum_{j=1}^{3n-N} \frac{\partial x_i}{\partial q_j} \dot{q}_j + \frac{\partial x_i}{\partial t} \right) \left(\sum_{k=1}^{3n-N} \frac{\partial x_i}{\partial q_k} \dot{q}_k + \frac{\partial x_i}{\partial t} \right) \\ &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{3n} M_i \sum_{j,k=1}^{3n-N} \frac{\partial x_i}{\partial q_j} \frac{\partial x_i}{\partial q_k} \dot{q}_j \dot{q}_k + \sum_{i=1}^{3n} M_i \sum_{j=1}^{3n-N} \frac{\partial x_i}{\partial q_j} \frac{\partial x_i}{\partial t} \dot{q}_j + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{3n} M_i \frac{\partial x_i}{\partial t} \frac{\partial x_i}{\partial t} \\ &= \underbrace{\frac{1}{2} \sum_{j,k=1}^{3n-N} \left(\sum_{i=1}^{3n} M_i \frac{\partial x_i}{\partial q_j} \frac{\partial x_i}{\partial q_k} \right) \dot{q}_j \dot{q}_k}_{\text{formă pătratică pozitiv definită}} + \underbrace{\sum_{j=1}^{3n-N} \left(\sum_{i=1}^{3n} M_i \frac{\partial x_i}{\partial q_j} \frac{\partial x_i}{\partial t} \right) \dot{q}_j + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{3n} M_i \frac{\partial x_i}{\partial t} \frac{\partial x_i}{\partial t}}_{\text{funcție pătratică strict convexă în } \dot{q}_j} \end{aligned} \quad (5.4.17)$$

Prin urmare, ecuațiile lui Lagrange sunt ecuații de ordin doi. Repetând procedeul din cazul sistemelor de puncte materiale libere ecuații lui Lagrange se reduc la ecuațiile lui Hamilton, ecuații de ordinul întâi.

5.5 Sisteme naturale

Definiție 5.5.1. Se numește sistem natural un sistem de puncte materiale supus unor forțe astfel încât are lor una din următoarele situații:

- admit un potențial simplu, adică există $V : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$, $V = V(t, q_1, \dots, q_m)$, de clasă C^2 astfel încât $Q_j = -\frac{\partial V}{\partial q_j}$, $j = 1, \dots, m$.
- admit un potențial simplu, adică există $\Pi : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$, $V = V(t, q_1, \dots, q_m, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_m)$, de clasă C^2 astfel încât $Q_j = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial V}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial V}{\partial q_j}$, $j = 1, \dots, m$.

Un exemplu de sistem natural este un sistem de puncte materiale asupra cărora acționează doar forțe conservative, adică $F_i = -\frac{\partial V}{\partial x_i}$, situație în care

$$Q_j = \sum_{i=1}^{3n} \left(-\frac{\partial V}{\partial x_i} \right) \frac{\partial x_i}{\partial q_j} = -\frac{\partial V}{\partial q_j}, \quad (5.5.1)$$

unde

$$V = V(x_1, \dots, x_{3n}) = V(q_1, \dots, q_m). \quad (5.5.2)$$

În cazul cursului nostru vom folosi doar sisteme naturale caracterizate de un potențial simplu. Pentru o astfel de situație definim

$$L = E - V, \quad (5.5.3)$$

funcție pe care o vom numi lagrangian.

Revenind la ecuația lui Lagrange vom obține că mișcarea sistemului de puncte este descrisă de ecuația

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_j} = 0, \quad j = 1, \dots, m. \quad (5.5.4)$$

Să observăm că ecuațiile lui Lagrange au aceeași formă cu ecuațiile Euler-Lagrange care descriu mișcarea sistemelor de puncte materiale libere. Vorbim deci de faptul că e posibil un studiu unitar al acestui tip de ecuații. Într-adevăr, întreaga analiza făcută pentru ecuațiile Euler-Lagrange care descriu mișcarea sistemelor de puncte materiale libere rămâne valabilă și pentru ecuațiile lui Lagrange care descriu mișcarea sistemelor de puncte materiale supuse la legături.

Un alt avantaj este că spre deosebire de ecuațiile lui Newton pentru sisteme de puncte materiale supuse la legături, ecuații ce erau formulate pe o varietate din $\mathbb{R}^{3n}$, ecuațiilor Euler-Lagrange sunt ecuații în $\mathbb{R}^m$ exact ca pentru sisteme de puncte materiale libere.

Să ne reamintim că o funcție pătratică $f : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \langle Ax, x \rangle + \langle b, x \rangle + c$ este strict convexă dacă și numai dacă A este pozitiv definită și că f este coercivă dacă și numai dacă A este pozitiv definită.

Deoarece, din secțiunea precedentă am văzut că energia cinetică se rescrie ca o funcție pătratică de $\dot{q}_i$, $i = 1, \dots, m = 3n - N$, același fapt este valabil și pentru Lagrangian în cazul sistemelor natural, adică

$$L = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^m a_{ij}(q, t) \dot{q}_i \dot{q}_j + \sum c_i(q, t) \dot{q}_i + c_0(q, t) \quad (5.5.5)$$

cu a_{ij} identici cu coeficienții din expresia energiei cinetice. Însă matricea (a_{ij}) este pozitiv definită și atunci Lagrangianul L este convex în variabilele $\dot{q}_i$.

Calculând $p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}$ avem

$$p_i = \sum_{j=1}^m a_{ij} \dot{q}_j + c_i, \quad i = 1, \dots, m. \quad (5.5.6)$$

Pastrăm aceeași terminologie ca în cazul sistemelor libere de puncte materiale

- q_i se numesc *coordonate generalizate*,
- $\dot{q}_i$ se numesc *viteze generalizate*,
- $p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}$ se numesc *impulsuri generalizate*,

Definiție 5.5.2.

- Mulțimea Λ_m a tuturor valorilor $(q_1, \dots, q_m, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_m)$ pe care le pot lua coordonatele generalizate și vitezele generalizate se numește spațiul stărilor.
- Mulțimea Λ'_m a tuturor valorilor $(q_1, \dots, q_m, p_1, \dots, p_m)$ pe care le pot lua coordonatele generalizate și impulsurile generalizate se numește spațiul fazelor.

Deoarece aplicația

$$(\dot{q}_1, \dots, \dot{q}_m) \mapsto L(\cdot, \cdot, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_m), \quad (5.5.7)$$

este strict convexă aplicația

$$(\dot{q}_1, \dots, \dot{q}_m) \mapsto \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}(\cdot, \cdot, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_m) \quad (5.5.8)$$

este inversabilă și atunci putem spune că există o corespondență biunivocă între spațiul stărilor și spațiul fazelor. Putem observa acest lucru și direct deoarece (a_{ij}) pozitiv definit implică faptul că din $p_i = \sum_{j=1}^m a_{ij} \dot{q}_j + c_i$ rezultă

$$\dot{q}_i = \sum_{j=1}^m A_{ij}(p_j - c_j), \quad (5.5.9)$$

unde (A_{ij}) este inversa lui (a_{ij}) .

De aici se observă că ecuațiile lui Lagrange pot fi scrise în forma

$$\sum_{j=1}^m a_{ij} \ddot{q}_j = D_i(t, q_k, \dot{q}_k), \quad i = 1, \dots, m, \quad (5.5.10)$$

unde $D_i(t, q_k, \dot{q}_k)$ reprezintă toți termenii care nu depind de $\ddot{q}_k$ trecuți în membrul drept, sau în forma

$$\ddot{q}_i = \sum_{j=1}^m A_{ij} D_j(t, q_k, \dot{q}_k), \quad i = 1, \dots, m. \quad (5.5.11)$$

Ultima formă a ecuațiilor poartă numele de formă normală a ecuațiilor lui Lagrange. Atașând și condiții inițiale acestui sistem de ordin 2 obținem o problemă Cauchy.

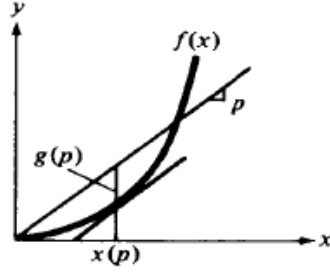


Figura 5.1: Interpretarea geometrică a transformării Legendre.

5.6 Transformări Legendre

Transformările Legendre sunt des întâlnite în calculul variațional, în general, însă noi ne vom concentra doar asupra rezultatelor ce ne vor fi utile în contextul acestui curs. De aceea, noi vom considera doar transformări Legendre pentru funcții strict convexe care sunt de clasă C^2 pe domeniul lor de definiție. Prin urmare, în această secțiune vom înțelege tacit că funcția $f : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, unde I este un interval deschis, este strict convexă, adică $f''(x) > 0, \forall x \in I$.

Definiție 5.6.1. Transformata Legendre a funcției f este $f^* : I^* \rightarrow \mathbb{R}$ definită de

$$f^*(x^*) = \sup_{x \in I} (x^* x - f(x)) \quad \forall x^* \in I^* \quad (5.6.1)$$

unde domeniul I^* este

$$I^* = \left\{ x^* \in \mathbb{R} : \sup_{x \in I} (x^* x - f(x)) < \infty \right\}. \quad (5.6.2)$$

Pentru a înțelege mai bine această definiție, în continuare vom da o interpretare geometrică a sa. Să reprezentăm grafic funcția f în planul Oxy . Fie p un număr dat. Considerăm dreapta de ecuație $y = p x$, adică dreapta de pantă p ce trece prin origine. Considerăm punctul $x^* = x(p)$ pentru care curba este cel mai departe de dreapta considerată. Pentru orice p funcția

$$x \mapsto p x - f(x) \quad (5.6.3)$$

își atinge valoarea maximă în x^* , valoarea maximă fiind

$$f^*(x^*) = \sup_{x \in I} (x^* x - f(x)). \quad (5.6.4)$$

Să observăm faptul că funcția f^* este bine-definită deoarece f este strict convexă. Într-adevăr $\sup_{x \in I} (x^* x - f(x))$ este atins într-un punct staționar al funcției $x \mapsto x^* x - f(x)$, adică într-o rădăcină a ecuației $f'(x) = x^*$. Deoarece funcția f este convexă, acest punct staționar este unic. Prin urmare, putem scrie

$$f^*(p) = \sup_{x \in I} (p x - f(x)) = [p x - f(x)] \Big|_{x=(f')^{-1}(p)}. \quad (5.6.5)$$

În continuare vom deduce unele proprietăți ale transformatei Legendre a unei funcții de clasă C^2 și strict convexe.

Fie g inversa lui f' . Deoarece f este de clasă C^2 și strict convexă, g este funcție diferențiabilă și

$$\frac{dg(p)}{dp} = \frac{1}{\frac{d^2 f(g(p))}{dp}}. \quad (5.6.6)$$

Atunci, pentru un $p \in I^*$ ales arbitrar, $g(p)$ este unicul punct critic al aplicației $x \mapsto px - f(x)$. Deci

$$f^*(p) = pg(p) - f(g(p)) \quad \forall p \in I^*. \quad (5.6.7)$$

Derivând această relație în raport cu p deducem

$$\frac{df^*(p)}{dp} = g(p) + p \frac{dg(p)}{dp} - \frac{df(g(p))}{dp} \frac{dg(p)}{dp}. \quad (5.6.8)$$

Întrucât $\frac{df(g(p))}{dp} = p$, relația de mai sus implică faptul că

$$\frac{df^*(p)}{dp} = g(p) \quad \forall p \in I^*, \quad (5.6.9)$$

adică faptul că $(f^*)'$ și f' sunt inverse una alteia. Derivând încă o dată găsim

$$\frac{d^2 f^*(p)}{d^2 p} = \frac{dg(p)}{dp} = \frac{1}{\frac{d^2 f(g(p))}{dp}} \quad \forall p \in I^* > 0, \quad (5.6.10)$$

ce arată că transformata Legendre este strict convexă.

O altă proprietate a transformării Legendre este că pentru funcții strict convexe este o involuție, adică $f^{**} = f$. Pentru a argumenta această afirmație să remarcăm faptul că

$$f^{**}(x) = \sup_{p \in I^*} (xp - f^*(p)) = [xp - f^*(p)] \Big|_{p=((f^*)')^{-1}(x)}. \quad (5.6.11)$$

Dar, conform unei observații anterioare $((f^*)')^{-1}(x) = f'(x)$. Deci

$$\begin{aligned} f^{**}(x) &= \sup_{p \in I^*} (xp - f^*(p)) = [xp - f^*(p)] \Big|_{p=f'(x)} = xf'(x) - f^*(f'(x)) \\ &= xf'(x) - f'(x)x + f(x) = f(x). \end{aligned} \quad (5.6.12)$$

- Transformata Legendre a funcției exponențial $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = e^x$ este $f^* : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f^*(p) = p(\ln p - 1)$. Să observăm că domeniul de definiție a transformatei Legendre nu rămâne întreg $\mathbb{R}$.
- Transformata Legendre a funcției exponențial $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = cx^2$ este $f^* : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f^*(p) = \frac{1}{4c}p^2$. Remarcăm faptul că transformata Legendre rămâne o funcție pătratică.

Definiție 5.6.2. Două funcții, f și g , care sunt transformările Legendre una alteia se numesc duale în sens Young.

Din definiția transformării Legendre

$$p x - f(x) \leq f^*(p), \forall x \in I, \quad \forall p \in I^*, \quad (5.6.13)$$

ceea ce ne conduce la inegalitatea lui Young

$$p x \leq f(x) + f^*(p), \forall x \in I, \quad \forall p \in I^*, \quad (5.6.14)$$

De exemplu, dacă $f(x) = \frac{1}{2}x^2$, atunci $f^*(p) = \frac{1}{2}p^2$ și obținem inegalitatea cunoscută $p x \leq \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}p^2$ pentru orice x, p numere reale.

Problema 5.6.1. Fie $f : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{x^\alpha}{\alpha}$. Arătați că transformata sa Legendre este $f^* : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f^*(p) = \frac{p^\beta}{\beta}$ și scrieți inegalitatea lui Young corespunzătoare.

În continuare, să considerăm cazul funcțiilor strict convexe de mai multe variabile, adică $f : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, U este o submulțime deschisă și convexă a lui $\mathbb{R}^n$, a.î. $H_f(x) := \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x) \right)_{i,j}$ este pozitiv definită, adică

$$\langle H_f(x) \xi, \xi \rangle > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}^n \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^n, \quad \xi \neq 0. \quad (5.6.15)$$

În acest caz, transformata Legendre a funcției f este

$$f^* : U^* \rightarrow \mathbb{R}, \quad f^*(p) = \sup_{x \in U} (\langle p, x \rangle - f(x)), \quad (5.6.16)$$

unde $\langle \cdot, \cdot \rangle$ reprezintă produsul scalar din $\mathbb{R}^n$.

Toate proprietățile demonstrate în cazul funcțiilor scalare rămân valabile și în cazul funcțiilor vectoriale, ideile de demonstrații fiind similare. Deci

$$\begin{aligned} f^* : U^* \rightarrow \mathbb{R}, \quad f^*(p) &= \left[\sup_{x \in U} \langle p, x \rangle - f(x) \right] \Big|_{x \text{ a. i. } p = \nabla_x f} \\ &= \langle p, (\nabla_x f)^{-1}(p) \rangle - f((\nabla_x f)^{-1}(p)), \end{aligned} \quad (5.6.17)$$

și are loc inegalitatea Fenchel-Young

$$\langle p, x \rangle \leq f(x) + f^*(p), \forall x \in X, \quad \forall p \in X^*. \quad (5.6.18)$$

În plus, avem

$$\nabla_p f^*(p) = (\nabla_x f)^{-1}(p) \quad \forall p \in U^*. \quad (5.6.19)$$

Drept exemplu, să considerăm funcțiile pătratice pe care le vom considera ulterior în cadrul acestui curs. Fie $f : U = \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \langle A x, x \rangle$, unde A este o matrice reală pozitiv definită. Prin urmare funcția f este strict convexă iar funcția

$$x \mapsto \langle p, x \rangle - f(x) = \langle p, x \rangle - \langle A x, x \rangle \quad (5.6.20)$$

are drept gradient pe $p - 2Ax$ iar drept matrice hessiană pe $-2A$ care este negativ definită. Prin urmare, unicul punct staționar $x_p = \frac{1}{2}A^{-1}p$ este punct de maxim. Deducem de aici că $U^* = \mathbb{R}^m$ și

$$f^*(p) = \frac{1}{4}\langle p, A^{-1}p \rangle. \quad (5.6.21)$$

Prin urmare, avem următorul rezultat

Lema 5.6.1. *Transformata Legendre a unei forme pătratice pozitiv definite $f : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \langle Ax, x \rangle$ este o formă pătratică pozitiv definită $f : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$, $f^*(p) = \frac{1}{4}\langle p, A^{-1}p \rangle$, și mai mult*

$$f(x_p) = g(p), \quad (5.6.22)$$

unde $x_p = \frac{1}{2}A^{-1}p$ este unicul punct staționar al lui $x \mapsto \langle p, x \rangle - f(x)$.

5.7 Ecuatiile lui Hamilton. Parantezele Poisson

Ar fi util, ca și în cazul sistemelor libere, să reducem gradul acestei ecuații, adică să construim un sistem de ecuații echivalent dar de grad 1. În acest sens are loc următorul rezultat.

Teorema 5.7.1. *Ecuatiile lui Lagrange pentru un sistem natural sunt echivalente cu sistemul de ecuații de ordinul întâi (numite ecuațiile lui Hamilton)*

$$\begin{aligned} \dot{p}_i &= -\frac{\partial H}{\partial q_i}, \\ \dot{q}_i &= \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad i = 1, \dots, m, \end{aligned} \quad (5.7.1)$$

unde $H : \mathbb{R} \times \Lambda'_m \rightarrow \mathbb{R}$,

$$H(t, q, p) = [\langle (p_1, \dots, p_m), (\dot{q}_1, \dots, \dot{q}_m) \rangle - L(t, q_1, \dots, q_m, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_m)] \Big|_{\dot{q}_i = \frac{\partial L}{\partial p_i}}. \quad (5.7.2)$$

Demonstrație. Demonstrația este similară cu demonstrația teoremei analoage pentru sisteme libere de puncte materiale. Să remarcăm faptul că de fapt funcția H din enunțul teoremei este bine definită deoarece reprezintă transformata Legendre a aplicației

$$(\dot{q}_1, \dots, \dot{q}_m) \mapsto L(\cdot, \cdot, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_m), \quad (5.7.3)$$

aplicație care este de clasă C^2 și strict convexă. ■

Să remarcăm că în cazul nostru $\dot{q}_i$ a.î $p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}$ din definiția hamiltonianului este deja calculat explicit ca fiind

$$\dot{q}_i = \sum_{j=1}^m A_{ij}(p_j - c_j), \quad (5.7.4)$$

unde (A_{ij}) este inversa lui (a_{ij}) .

O funcție $U : \mathbb{R} \times \Lambda'_m \rightarrow \mathbb{R}$ este integrală primă a ecuațiilor lui Hamilton dacă

- U nu este identic constantă;
- U este constantă pe curbele din spațiul Λ'_m , soluții ale ecuațiilor lui Hamilton.

O caracterizare a integralelor prime ne spune că dacă U este diferențiabilă, atunci U este integrală primă dacă și numai dacă $\dot{U}(t, q(t), p(t)) = 0$.

Cu o argumentații complet similare celor din cazul sistemelor de puncte materiale liber, au loc următoarele rezultate.

Propoziție 5.7.1. *În mișcarea unui sistem de puncte materiale $\frac{dH}{dt} = \frac{\partial H}{\partial t}$. În particular, pentru un sistem mecanic pentru care hamiltonianul nu depinde de timp (sistemul este autonom), are loc $H(\bar{p}, \bar{q}) = \text{const.}$, adică hamiltonianul definește o integrală primă a ecuațiilor lui Hamilton.*

Definiție 5.7.1. *O coordonată q_i care nu este prezentă în expresia hamiltonianului, adică $\frac{\partial H}{\partial q_i} = 0$, se numește variabilă ciclică.*

Având în vedere definiția hamiltonianului, q_i este variabilă ciclică dacă și numai dacă nu apare în expresia lagrangianului, adică $\frac{\partial H}{\partial q_i} = 0$.

Propoziție 5.7.2. *Fie q_i o coordonată ciclică. Atunci p_i este o integrală primă. În acest caz variația coordonatelor prezente este aceeași cu a unui sistem ce depinde de $n - 1$ coordonate, hamiltonianul depinzând de constanta $c = p_i$, adică*

$$H(p_1, \dots, p_{i-1}, p_{i+1}, \dots, p_n, q_1, \dots, q_{i-1}, q_{i+1}, \dots, q_n, t, c). \quad (5.7.5)$$

Importanța rezultatului de mai sus este următoarea: cu cât avem mai multe variabile ciclice, “cu atât mai bine”, în sensul că fiecare variabilă ciclică conduce la reducerea numărului de necunoscute. În mod practic, variabilele ciclice se obțin de multe ori alegând convenabil sistemul de coordonate și coordonatele generalizate q_i în raport cu care se vor exprima toate celelalte coordonate x_j .

Definiție 5.7.2. *O funcție definită pe spațiul fazelor Λ'_m și cu valori reale $f : \Lambda'_m \rightarrow \mathbb{R}$ se numește variabilă dinamică.*

În cazul sistemelor autonome, $H = H(q_i, p_i)$, hamiltonianul H este un exemplu de variabilă dinamică.

Considerăm mișcarea unui sistem de puncte materiale în spațiul fazelor, adică aplicațiile

$$t \mapsto q_i(t), \quad t \mapsto p_i(t). \quad (5.7.6)$$

Fie aplicația

$$t \mapsto f(q_i(t), p_i(t)) \quad (5.7.7)$$

notată în continuare tot cu f , avem

$$\dot{f} = \sum_{i=1}^m \left(\frac{\partial f}{\partial q_i} \dot{q}_i + \frac{\partial f}{\partial p_i} \dot{p}_i \right). \quad (5.7.8)$$

Dacă q_i, p_i sunt soluții ale ecuațiilor lui Hamilton, atunci

$$\dot{f} = \sum_{i=1}^m \left(\frac{\partial f}{\partial q_i} \frac{\partial H}{\partial p_i} - \frac{\partial f}{\partial p_i} \frac{\partial H}{\partial q_i} \right). \quad (5.7.9)$$

Definiție 5.7.3. Dacă f și g sunt variabile dinamice de clasă C^1 , definim

$$\{f, g\} = \sum_{i=1}^m \left(\frac{\partial f}{\partial q_i} \frac{\partial g}{\partial p_i} - \frac{\partial f}{\partial p_i} \frac{\partial g}{\partial q_i} \right) \quad (5.7.10)$$

numită paranteza Poisson a variabilelor dinamice f și g .

Definiție 5.7.4. Fie g o variabilă dinamică diferențiabilă. Operatorul Lie asociat variabilei dinamice g este

$$\mathcal{L}_g = \sum_{i=1}^m \left(\frac{\partial g}{\partial p_i} \frac{\partial}{\partial q_i} - \frac{\partial g}{\partial q_i} \frac{\partial}{\partial p_i} \right). \quad (5.7.11)$$

În termenii definițiilor de mai sus avem

$$\dot{f} = \{f, H\} = \mathcal{L}_H f. \quad (5.7.12)$$

În tot ce urmează noi considerăm doar cazul sistemelor autonome.

O variabilă dinamică f este integrală primă a ecuațiilor lui Hamilton dacă nu este constantă și

$$\dot{f} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \{f, H\} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \mathcal{L}_H f = 0. \quad (5.7.13)$$

Regăsim astfel faptul că H este integrală primă pentru că $\{H, H\} = 0$ pentru sistemele autonome și faptul că pentru orice coordonată ciclică q_i variabila dinamică $f = p_i$ este integrală primă deoarece

$$\{p_i, H\} = \sum_{j=1}^m \left(\frac{\partial p_i}{\partial q_j} \frac{\partial H}{\partial p_j} - \frac{\partial p_i}{\partial p_j} \frac{\partial H}{\partial q_j} \right) = -\frac{\partial H}{\partial q_i} = 0. \quad (5.7.14)$$

Folosind definițiile de mai sus rescriem ecuațiile lui Hamilton în forma

$$\begin{aligned} \dot{q}_i &= \{q_i, H\}, \\ \dot{p}_i &= \{p_i, H\}, \quad i = 1, \dots, m. \end{aligned} \quad (5.7.15)$$

Propoziție 5.7.3. [Proprietățile parantezelor Poisson] Fie f, g, h variabile dinamice de clasă C^2 și $\alpha \in \mathbb{R}$. Au loc

- $\{f + g, h\} = \{f, h\} + \{g, h\}$, $\{\alpha f, g\} = \alpha \{f, g\}$,
- $\{f, g\} = -\{g, f\}$,
- $\{f, \{g, h\}\} + \{h, \{f, g\}\} + \{g, \{h, f\}\} = 0$ (identitatea lui Jacobi),
- $\frac{\partial}{\partial q_i} \{f, g\} = \left\{ \frac{\partial f}{\partial q_i}, g \right\} + \left\{ f, \frac{\partial g}{\partial q_i} \right\}$, $\frac{\partial}{\partial p_i} \{f, g\} = \left\{ \frac{\partial f}{\partial p_i}, g \right\} + \left\{ f, \frac{\partial g}{\partial p_i} \right\}$ (regula lui Leibniz)

Teorema 5.7.2. [Jacobi-Poisson] Fie U_1 și U_2 două integrale prime ale ecuațiilor lui Hamilton (pe care le privim ca variabile dinamice). Atunci $\{U_1, U_2\}$ este integrală primă a ecuațiilor lui Hamilton.

Demonstrație. Deoarece U_1 și U_2 sunt integrale prime rezultă

$$\{U_1, H\} = 0, \quad \{U_2, H\} = 0. \quad (5.7.16)$$

Pentru a arăta că $\{U_1, U_2\}$ este integrală primă a ecuațiilor lui Hamilton va trebui să demonstrăm că

$$\{\{U_1, U_2\}, H\} = 0. \quad (5.7.17)$$

Într-adevăr, are loc

$$\{\{U_1, U_2\}, H\} = -\{H, \{U_1, U_2\}\} = \{U_2, \{H, U_1\}\} + \{U_1, \{U_2, H\}\} = 0. \quad (5.7.18)$$

■

Pornind de la 2 integrale prime, în baza teoremei Jacobi-Poisson rezultă o nouă integrală primă, însă nu e clar dacă această nouă integrală primă este func(t)ional independentă de integralele prime cu care am plecat.

5.8 Transformări canonice

Considerăm un ecuațiile lui Hamilton caracterizate de o funcție $H = H(q, p)$ și o schimbare de coordonate

$$\begin{aligned} q_i &= q_i(\tilde{q}, \tilde{p}), \\ p_i &= p_i(\tilde{q}, \tilde{p}), \quad i = 1, \dots, m, \end{aligned} \quad (5.8.1)$$

unde funcțiile q_i, p_i sunt de clasă C^2 și

$$\det \frac{\partial(q, p)}{\partial(\tilde{q}, \tilde{p})} \neq 0. \quad (5.8.2)$$

Definiție 5.8.1. *Spunem că transformările (5.8.1) păstrează forma ecuațiilor canonice*

$$\begin{aligned} \dot{q}_i &= \frac{\partial H}{\partial p_i}, \\ \dot{p}_i &= -\frac{\partial H}{\partial q_i}, \quad i = 1, \dots, m, \end{aligned} \quad (5.8.3)$$

dacă noile funcții verifică

$$\begin{aligned} \dot{\tilde{q}}_i &= \frac{\partial K}{\partial \tilde{p}_i}, \\ \dot{\tilde{p}}_i &= -\frac{\partial K}{\partial \tilde{q}_i}, \quad i = 1, \dots, m, \end{aligned} \quad (5.8.4)$$

unde $K = K(\tilde{q}, \tilde{p})$ este o funcție asociată funcției H .

Definiție 5.8.2. Spunem că transformările (5.8.1) sunt canonice dacă ecuațiilor canonice

$$\begin{aligned}\dot{q}_i &= \frac{\partial H}{\partial p_i}, \\ \dot{p}_i &= -\frac{\partial H}{\partial q_i}, \quad i = 1, \dots, m,\end{aligned}\tag{5.8.5}$$

se rescriu în noile funcții este

$$\begin{aligned}\dot{\tilde{q}}_i &= \frac{\partial \tilde{H}}{\partial \tilde{p}_i}, \\ \dot{\tilde{p}}_i &= -\frac{\partial \tilde{H}}{\partial \tilde{q}_i}, \quad i = 1, \dots, m,\end{aligned}\tag{5.8.6}$$

cu $\tilde{H}(\tilde{q}, \tilde{p}) = H(q, p)$.

Importanța transformărilor canonice este aceea că printr-o alegere potrivită a transformărilor de coordonate un sistem hamiltonian complex poate fi adus la o formă mult mai simplă.

De exemplu, pentru sistem integrabile, dacă găsim transformări canonice astfel încât noul hamiltonian să depindă doar de impulsurile generalizate atunci obținem soluția sistemului canonic pentru $\tilde{H} = \tilde{H}(\tilde{p})$ în felul următor. Din $\dot{\tilde{p}}_i = -\frac{\partial \tilde{H}}{\partial \tilde{q}_i}$ rezultă că $\tilde{p}_i = b_i = \text{constant}$. În plus $\frac{\partial \tilde{H}}{\partial \tilde{p}_i}$ va fi o constantă ω_i și atunci $\tilde{q}_i = \omega_i t + \tilde{q}_i^0$, $\tilde{q}_i^0$ constante.

Exemple de transformări canonice sunt

- $q = \tilde{q} + a, p = \tilde{p} + b$ unde a și b sunt vectori constanți.
- $q = \alpha \tilde{q}, p = \beta \tilde{p} + b$ unde α și β sunt constante.
- $q = \tilde{p}, p = -\tilde{q}$.

Considerăm matricea $J \in \mathbb{R}^{2m \times 2m}$ $J = \begin{pmatrix} O_m & I_m \\ -I_m & O_m \end{pmatrix}$. Se verifică faptul că $J^2 = -I_{2m}$, $J^{-1} = -J$.

Definiție 5.8.3. O matrice $A \in \mathbb{R}^{2m}$ spunem că este symplectică dacă $A^T J A = J$.

Dacă introducem notațiile

$$x = \begin{pmatrix} q_1 \\ \vdots \\ q_m \\ p_1 \\ \vdots \\ p_m \end{pmatrix}, \quad \partial_x = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial q_1} \\ \vdots \\ \frac{\partial}{\partial q_m} \\ \frac{\partial}{\partial p_1} \\ \vdots \\ \frac{\partial}{\partial p_m} \end{pmatrix},\tag{5.8.7}$$

atunci ecuațiile lui Hamilton pot fi scrise în forma

$$\dot{x} = J \partial_x H(x).\tag{5.8.8}$$

Introducem și notațiile Dacă introducem notațiile

$$\tilde{x} = \begin{pmatrix} \tilde{q}_1 \\ \vdots \\ \tilde{q}_m \\ \tilde{p}_1 \\ \vdots \\ \tilde{p}_m \end{pmatrix}, \quad \partial_{\tilde{x}} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial \tilde{q}_1} \\ \vdots \\ \frac{\partial}{\partial \tilde{q}_m} \\ \frac{\partial}{\partial \tilde{p}_1} \\ \vdots \\ \frac{\partial}{\partial \tilde{p}_m} \end{pmatrix}, \quad (5.8.9)$$

și avem

$$x = \tilde{x}. \quad (5.8.10)$$

Notăm cu $U_{\tilde{x}}$ matricea Jacobiană a transformării. Sigur, în termeneii noilor variabile, transformarea $x = \tilde{x}$ este canonică dacă $\tilde{x}$ verifică

$$\dot{\tilde{x}} = J \partial_{\tilde{x}} \tilde{H}(\tilde{x}), \quad (5.8.11)$$

cu $\tilde{H}(\tilde{x}) = H(x)$.

Teorema 5.8.1. Transformarea de coordonate 5.8.1 este canonică dacă și numai dacă matricea $U_{\tilde{x}}$ este symplectică.

Demonstrație. Introducem funcția $\tilde{H}(\tilde{x}) = H(x(\tilde{x}))$. Printr-un simplu calcul, deducem

$$\frac{\partial \tilde{H}}{\partial \tilde{x}_i} = \sum_{j=1}^m \frac{\partial H}{\partial x_j} H(x(\tilde{x})) \frac{\partial x_j}{\partial \tilde{x}_i} \quad (5.8.12)$$

care poate fi scrisă în forma echivalent în forma

$$\partial_{\tilde{x}} \tilde{H} = U_{\tilde{x}}^T \partial_x H(x(\tilde{x})) \quad (5.8.13)$$

Utilizând proprietățile matricei J deducem

$$-J \dot{x} = \partial_x H. \quad (5.8.14)$$

Ținând cont de faptul $\dot{x} = U_{\tilde{x}} \dot{\tilde{x}}$, atunci avem

$$-J U_{\tilde{x}} \dot{\tilde{x}} = \partial_x H \quad (5.8.15)$$

și

$$-U_{\tilde{x}}^T J U_{\tilde{x}} \dot{\tilde{x}} = \partial_{\tilde{x}} \tilde{H}. \quad (5.8.16)$$

Această relație arată că transformarea este canonică dacă și numai dacă matricea $U_{\tilde{x}}$ este symplectică. ■

Fie f, g două variabile dinamice diferențiabile. Amintim că paranteza Poisson este

$$\{f, g\}_{q,p} = \sum_{i=1}^m \left(\frac{\partial f}{\partial q_i} \frac{\partial g}{\partial p_i} - \frac{\partial f}{\partial p_i} \frac{\partial g}{\partial q_i} \right). \quad (5.8.17)$$

Dacă privim q_i, p_i drept funcții (sau variabile dinamice) definite pe spațiul fazelor Λ'_m , atunci, printr-un simplu calcul, deducem

$$\{q_i, q_j\}_{q,p} = 0, \quad \{p_i, p_j\}_{q,p} = 0, \quad \{q_i, p_j\}_{q,p} = \delta_{ij}. \quad (5.8.18)$$

Aceste parantezele Poisson, de mai sus, se numesc paranteze Poisson fundamentale.

Reamintim că ecuațiile lui Hamilton se scriu

$$\begin{aligned} \dot{q}_i &= \{q_i, H\}_{q,p}, \\ \dot{p}_i &= \{p_i, H\}_{q,p}. \end{aligned} \quad (5.8.19)$$

Dacă sunt satisfăcute ecuațiile canonice, atunci

$$\dot{f} = \{f, H\}_{q,p}, \quad (5.8.20)$$

unde f este o variabilă dinamică diferențiabilă.

Fie f și g două variabile dinamice $f = f(q, p)$, $g = g(q, p)$.

După o schimbare de coordonate vom putea rescrie f și g ca funcții de noile variabile $\tilde{q}$, $\tilde{p}$, adică

$$f = f(q(\tilde{q}, \tilde{p}), p(\tilde{q}, \tilde{p})), \quad g = g(q(\tilde{q}, \tilde{p}), p(\tilde{q}, \tilde{p})). \quad (5.8.21)$$

Prin urmare, putem calcula parantezele Poisson a funcțiilor f și g fie în raport cu variabilele q și p , fie în raport cu variabilele $\tilde{q}$ și $\tilde{p}$.

Se pune problem în ce condiții se păstrează parantezele Poisson.

Lema 5.8.1. Transformarea 5.8.1 păstrează parantezele Poisson a oricăror două variabile dinamice dacă și numai dacă sunt păstrate parantezele Poisson fundamentale

Demonstrație. Avem de demonstrat că oricare ar fi f, g două variabile dinamice

$$\{f, g\}_{q,p} \Leftrightarrow \begin{cases} \{q_i, q_j\}_{q,p} &= \{q_i, q_j\}_{\tilde{q}, \tilde{p}}, \\ \{p_i, p_j\}_{q,p} &= \{p_i, p_j\}_{\tilde{q}, \tilde{p}}, \\ \{q_i, p_j\}_{q,p} &= \{q_i, p_j\}_{\tilde{q}, \tilde{p}}. \end{cases} \quad (5.8.22)$$

Necesitatea este evidentă. Demonstrarea suficienței se face prin calcul direct. Astfel

$$\begin{aligned} \{f, g\}_{\tilde{q}, \tilde{p}} &= \sum_{i=1}^m \left(\frac{\partial f}{\partial \tilde{q}_i} \frac{\partial g}{\partial \tilde{p}_i} - \frac{\partial f}{\partial \tilde{p}_i} \frac{\partial g}{\partial \tilde{q}_i} \right) \\ &= \sum_{i,j,k=1}^m \left[\left(\frac{\partial f}{\partial q_j} \frac{\partial q_j}{\partial \tilde{q}_i} + \frac{\partial f}{\partial p_j} \frac{\partial p_j}{\partial \tilde{q}_i} \right) \left(\frac{\partial g}{\partial q_j} \frac{\partial q_j}{\partial \tilde{p}_i} + \frac{\partial g}{\partial p_j} \frac{\partial p_j}{\partial \tilde{p}_i} \right) \right. \\ &\quad \left. - \left(\frac{\partial f}{\partial q_j} \frac{\partial q_j}{\partial \tilde{p}_i} + \frac{\partial f}{\partial p_j} \frac{\partial p_j}{\partial \tilde{p}_i} \right) \left(\frac{\partial g}{\partial q_j} \frac{\partial q_j}{\partial \tilde{q}_i} + \frac{\partial g}{\partial p_j} \frac{\partial p_j}{\partial \tilde{q}_i} \right) \right] \end{aligned} \quad (5.8.23)$$

$$= \sum_{i,j=1}^m \left[\frac{\partial f}{\partial q_i} \frac{\partial g}{\partial q_j} \{q_i, q_j\}_{\tilde{q}, \tilde{p}} + \frac{\partial f}{\partial q_i} \frac{\partial g}{\partial p_j} \{q_i, p_j\}_{\tilde{q}, \tilde{p}} \right. \\ \left. + \frac{\partial f}{\partial p_i} \frac{\partial g}{\partial q_j} \{p_i, q_j\}_{\tilde{q}, \tilde{p}} + \frac{\partial f}{\partial p_i} \frac{\partial g}{\partial p_j} \{p_i, p_j\}_{\tilde{q}, \tilde{p}} \right] = \{f, g\}_{q,p}.$$

■

Teorema 5.8.2. *Transformarea 5.8.1 este canonică dacă și numai dacă aceasta păstrează paranteza Poisson a oricăror variabile dinamice.*

Demonstrație. Să demonstrăm pentru început faptul că dacă paranteza Poisson a oricăror variabile dinamice este păstrată atunci transformarea este canonică.

Din 5.8.1 rezultă că putem exprima

$$\tilde{q} = \tilde{q}(q, p), \quad \tilde{p} = \tilde{p}(q, p). \quad (5.8.24)$$

Deoarece în sistemul de coordonate (q, p) sunt satisfăcute ecuațiile lui Hamilton, avem

$$\begin{aligned} \dot{\tilde{q}}_i &= \{\tilde{q}_i, H\}_{q,p}, \\ \dot{\tilde{p}}_i &= \{\tilde{p}_i, H\}_{q,p}. \end{aligned} \quad (5.8.25)$$

Conform ipoteei, rezultă că toate parantezele Poisson sunt păstrate, prin urmare și

$$\{\tilde{q}_i, H\}_{q,p} = \{\tilde{q}_i, \tilde{H}\}_{\tilde{q}, \tilde{p}}, \quad \{\tilde{p}_i, H\}_{q,p} = \{\tilde{p}_i, \tilde{H}\}_{\tilde{q}, \tilde{p}}. \quad (5.8.26)$$

Am obținut deci că

$$\begin{aligned} \dot{\tilde{q}}_i &= \{\tilde{q}_i, H\}_{q,p} = \{\tilde{q}_i, \tilde{H}\}_{\tilde{q}, \tilde{p}}, \\ \dot{\tilde{p}}_i &= \{\tilde{p}_i, H\}_{q,p} = \{\tilde{p}_i, \tilde{H}\}_{\tilde{q}, \tilde{p}} \end{aligned} \quad (5.8.27)$$

adică faptul că variabilele $\tilde{q}$, $\tilde{p}$ verifică ecuațiile lui Hamilton corespunătoare hamiltonianului $\tilde{H}$.

Pentru a demonstra implicația inversă, folosind lema precedentă este suficient să că sunt păstrate parantezele Poisson fundamentale.

Deoarece sunt satisfăcute ecuațiile canonice în ambele sisteme de coordonate, putem scrie

$$\dot{f} = \{f, H\}_{q,p}, \quad \dot{f} = \{f, H\}_{\tilde{q}, \tilde{p}} \quad (5.8.28)$$

de unde

$$\{f, H\}_{q,p} = \{f, H\}_{\tilde{q}, \tilde{p}}, \quad (5.8.29)$$

pentru orice variabilă dinamică și orice sistem hamiltonian. În particular, dacă considerăm $f = q_i$ și $H = q_j$, apoi $f = q_i$ și $H = p_j$ și în final $f = p_i$ și $H = p_j$ demonstrația este încheiată. ■

5.9 Teorema Hamilton-Jacobi

Considerăm ecuațiile lui Hamilton (ecuațiile canonice) asociate hamiltonianului $H : \mathbb{R} \times \Lambda'_m \rightarrow \mathbb{R}$, $H = H(t, q_1, \dots, q_m, p_1, \dots, p_m)$ de clasă C^∞

$$\begin{aligned} \dot{q}_i &= \frac{\partial H}{\partial p_i}, \\ \dot{p}_i &= -\frac{\partial H}{\partial q_i}, \quad i = 1, \dots, m. \end{aligned} \quad (5.9.1)$$

Fie $S = S(t, q_1, \dots, q_m, a_1, \dots, a_m)$ o funcție de clasă C^1 care depinde de m constante $(a_1, \dots, a_m)$ și are matricea hessiană nesingulară, adică

$$\det \left(\frac{\partial^2 S}{\partial q_i \partial a_j} \right) \neq 0, \quad (5.9.2)$$

și satisface ecuația

$$\frac{\partial S}{\partial t} + H(t, q_1, \dots, q_m, \frac{\partial S}{\partial q_1}, \dots, \frac{\partial S}{\partial q_m}) = 0. \quad (5.9.3)$$

Ecuația de mai sus se numește ecuația Hamilton-Jacobi. O funcție S care verifică condițiile de mai sus se numește integrală completă a ecuațiilor lui Hamilton-Jacobi.

Teorema 5.9.1. [Hamilton-Jacobi] Fie S integrală completă a ecuațiilor Hamilton-Jacobi. Atunci funcțiile $t \mapsto q_i(t)$, $t \mapsto p_i(t)$ care se obțin prin rezolvarea sistemului algebric

$$\begin{aligned} \frac{\partial S}{\partial a_i}(t, q_1, \dots, q_m, a_1, \dots, a_m) &= b_i, \\ \frac{\partial S}{\partial q_i}(t, q_1, \dots, q_m, a_1, \dots, a_m) &= p_i, \quad \text{unde } b_i \text{ constante, } i = 1, \dots, m, \end{aligned} \quad (5.9.4)$$

reprezintă o soluție a ecuațiilor lui Hamilton.

Demonstrație. Din $\det \left(\frac{\partial^2 S}{\partial q_i \partial a_j} \right) \neq 0$, rezultă că rangul Jacobianului aplicației

$$q_i \mapsto \begin{pmatrix} \frac{\partial S}{\partial a_1} \\ \frac{\partial S}{\partial a_2} \\ \vdots \\ \frac{\partial S}{\partial a_m} \end{pmatrix} \quad (5.9.5)$$

este m și din teorema funcțiilor implicite rezultă că putem rezolva ecuațiile $\frac{\partial S}{\partial a_i}(t, q_1, \dots, q_m, a_1, \dots, a_m) = b_i$ și să obținem

$$q_i = q_i(t, q_1, \dots, q_m, b_1, \dots, b_m). \quad (5.9.6)$$

Înlocuind aceste funcții în $\frac{\partial S}{\partial q_i}(t, q_1, \dots, q_m, a_1, \dots, a_m) = p_i$ găsim

$$p_i = p_i(t, q_1, \dots, q_m, b_1, \dots, b_m). \quad (5.9.7)$$

Să arătăm că aceste funcții q_i, p_i verifică ecuațiile lui Hamilton.

Știu că S verifică ecuația Hamilton-Jacobi. Derivăm ecuația lui Hamilton-Jacobi în raport cu a_i și obținem

$$\frac{\partial^2 S}{\partial t \partial a_i} + \sum_{j=1}^m \frac{\partial H}{\partial p_j}(t, q_1, \dots, q_m, \frac{\partial S}{\partial q_1}, \dots, \frac{\partial S}{\partial q_m}) \frac{\partial}{\partial a_i} \left(\frac{\partial S}{\partial q_j} \right) = 0, \quad i = 1, \dots, m. \quad (5.9.8)$$

Derivăm $\frac{\partial S}{\partial a_i}(t, q_1, \dots, q_m, a_1, \dots, a_m) = b_i$ în raport cu t

$$\frac{\partial^2 S}{\partial a_i \partial t} + \sum_{j=1}^m \frac{\partial^2 S}{\partial a_i \partial q_j}(t, q_1, \dots, q_m, \frac{\partial S}{\partial q_1}, \dots, \frac{\partial S}{\partial q_m}) \dot{q}_j = 0, \quad i = 1, \dots, m. \quad (5.9.9)$$

Din ultimele două ecuații de mai sus rezultă

$$\sum_{j=1}^m \frac{\partial^2 S}{\partial a_i \partial q_j}(t, q_1, \dots, q_m, \frac{\partial S}{\partial q_1}, \dots, \frac{\partial S}{\partial q_m}) \left(\frac{\partial H}{\partial p_j} - \dot{q}_j \right) = 0, \quad i = 1, \dots, m. \quad (5.9.10)$$

Deoarece $\det \left(\frac{\partial^2 S}{\partial q_i \partial a_j} \right) \neq 0$, va rezulta că

$$\dot{q}_j = -\frac{\partial H}{\partial p_j}, \quad i = 1, \dots, m. \quad (5.9.11)$$

Derivăm $\frac{\partial S}{\partial q_i}(t, q_1, \dots, q_m, a_1, \dots, a_m) = p_i$ în raport cu t și ecuația Hamilton-Jacobi în raport cu q_i și deducem

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 S}{\partial q_i \partial t} + \sum_{j=1}^m \frac{\partial^2 S}{\partial q_i \partial q_j}(t, q_1, \dots, q_m, \frac{\partial S}{\partial q_1}, \dots, \frac{\partial S}{\partial q_m}) \dot{q}_j &= \dot{p}_i, \quad i = 1, \dots, m, \\ \frac{\partial^2 S}{\partial t \partial q_i} + \sum_{j=1}^m \left[\frac{\partial H}{\partial q_j} \frac{\partial q_i}{\partial q_j} + \frac{\partial H}{\partial p_j} \frac{\partial}{\partial q_i} \left(\frac{\partial S}{\partial q_j} \right) \right] &= 0, \quad i = 1, \dots, m. \end{aligned} \quad (5.9.12)$$

Prin urmare

$$\sum_{j=1}^m \frac{\partial^2 S}{\partial q_i \partial q_j} \underbrace{\left(\dot{q}_j - \frac{\partial H}{\partial p_j} \right)}_{=0} = \dot{p}_i + \frac{\partial H}{\partial q_i}, \quad i = 1, \dots, m. \quad (5.9.13)$$

și deci

$$\dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i}, \quad i = 1, \dots, m, \quad (5.9.14)$$

ceea ce încheie demonstrația. ■

În cazul sistemelor autonome

$$H = H(q_1, \dots, q_m, p_1, \dots, p_m) \quad (5.9.15)$$

hamiltonianul este o integrală primă a sistemului canonic

$$H(q_1, \dots, q_m, p_1, \dots, p_m) = h = \text{const.} \quad (5.9.16)$$

Atunci, în cazul sistemelor autonome ecuația Hamilton-Jacobi are forma

$$\frac{\partial S}{\partial t} = -h \quad (5.9.17)$$

care prin integrare ne conduce la

$$S = -h t + W(q_1, \dots, q_m, a_1, \dots, a_m) \quad (5.9.18)$$

iar funcția W trebuie să verifie

$$H(q_1, \dots, q_m, \frac{\partial W}{\partial q_1}, \dots, \frac{\partial W}{\partial q_m}) = h. \quad (5.9.19)$$

Pașii de rezolvare a ecuațiilor lui Hamilton folosind ecuația Hamilton-Jacobi sunt următorii

- scriem expresia energiei cinetice și energiei potențiale;
- scriu funcția lui Lagrange;
- determinăm funcția lui Hamilton;
- din $H(q_1, \dots, q_m, \frac{\partial W}{\partial q_1}, \dots, \frac{\partial W}{\partial q_m}) = h$ determin W .
- cu W găsit determin $S = -h t + W(q_1, \dots, q_m, a_1, \dots, a_m)$.
- scriu prima ecuație Hamilton-Jacobi și determin q_i ,
- scriu a doua ecuație Hamilton-Jacobi și determin p_i .

Pentru anumite probleme se poate folosi metoda separării variabilelor, adică se caută

$$W(q_1, \dots, q_m, a_1, \dots, a_m) = \sum_{i=1}^m W_i(q_i) \quad (5.9.20)$$

și se scriu ecuațiile încât în membrul stâng să am dependență de o singură variabilă iar în membrul să avem o dependență de o altă singură variabilă.

Partea III

Medii continue deformabile

Capitolul 6

Cinemática mediilor continue deformabile

6.1 Corp deformabil vs. corp rigid

În capitolele precedente am neglijat forma corpurilor și, deci, am presupus implicit că acesta poate avea doar mișcări de translație. Considerând doar modelul punctului material nu putem avea informații despre mișcarea de rotație a aceluși corp.

Dacă se dorește caracterizarea și descrierea influenței acestei rotații asupra mișcării corpului, atunci trebuie să considerăm un alt model pentru descriere mișcării lui, și anume modelul corpului rigid.

Corpurile continue se împart în două categorii: corpuri nedeformabile, pe care le vom numi rigide, și corpuri deformabile. Ce înseamnă însă matematic că un corp continuu este deformabil? Plecând de la imaginea pe care intuiția o oferă despre medii deformabile, am putea spune că toate corpurile sunt deformabile. Totuși, în anumite situații deformarea corpului poate juca un rol secundar, importantă fiind comportarea corpului continuu fără a lua în considerare eventualele mici deformări nesemnificative.

Spuneam în capitolul introductiv că un corp continuu $\mathcal{B}$ este o mulțime de puncte $A, B, \dots \in \mathcal{A}^3$ (spațiu afin de dimensiune 3) numite puncte materiale (particule), care are o structură dată de

- familia de aplicații $\mathcal{C} = \{\varphi : \mathcal{B} \rightarrow \mathbb{R}^3 \mid \varphi \text{ injectivă}\}$, numite configurații ale corpului $\mathcal{B}$ (în spațiul $\mathbb{R}^3$);
- o funcție $m : \mathcal{P}(\mathcal{B}) \rightarrow \mathbb{R}_+$ numită masă, unde $\mathcal{P}(\mathcal{B})$ sunt părți ale corpului $\mathcal{B}$;

unde configurațiile și masa au următoarele proprietăți:

1. $\forall \varphi \in \mathcal{C}$ configurație, $\varphi(\mathcal{B}) = \mathcal{B}_\varphi$ este o regiune din $\mathbb{R}^3$, adică o mulțime compactă și conexă, având frontiera netedă pe porțiuni, adică $\partial \mathcal{B}_\varphi = \bigcup_{i=1}^n \overline{\Sigma_i}$ unde $n \in \mathbb{N}$ este finit și $\Sigma_i, i = 1, 2, \dots, n$ sunt suprafețe netede.
2. $\forall \varphi, \tilde{\varphi} \in \mathcal{C}$, aplicația $\phi = \tilde{\varphi} \circ \varphi^{-1} : \varphi(\mathcal{B}) \rightarrow \tilde{\varphi}(\mathcal{B})$ poate fi extinsă la o funcție de clasă $C^2(\mathbb{R}^3)$. Funcția ϕ se va numi deformare.

3. $\forall \varphi \in \mathcal{C}$, există $\varrho_\varphi : \mathcal{B}_\varphi \rightarrow \mathbb{R}_+$ continuă și mărginită astfel încât funcția $m_\varphi = m \circ \varphi^{-1} : \mathcal{P}(\mathcal{B}_\varphi) \rightarrow \mathbb{R}_+$ este dată de $m_\varphi(\varphi(\mathcal{P})) = \int_{\varphi(\mathcal{P})} \varrho_\varphi dV$, $\forall \mathcal{P} \in \mathcal{P}(\mathcal{B})$ având proprietatea că $\varphi(\mathcal{P})$ este măsurabilă Jordan.

Funcția $\varrho_\varphi : \mathcal{B}_\varphi \rightarrow \mathbb{R}_+$ definește repartitia masei lui $\mathcal{B}$ în configurația φ și se numește densitate de masă sau simplu densitate. Valoarea acesteia în $x = \varphi(A)$, unde $A \in \mathcal{B}$, adică $\varrho(x)$, este densitatea de masă în particula $A \in \mathcal{B}$, în configurația φ a corpului continuu.

Pentru orice $\varphi \in \mathcal{C}$, definim $\varphi^{-1} : \mathcal{B}_\varphi := \varphi(\mathcal{B}) \rightarrow \mathcal{B}$. Dacă $\forall \varphi, \tilde{\varphi} \in \mathcal{C}$, atunci aplicația

$$\phi = \tilde{\varphi} \circ \varphi^{-1} : \varphi(\mathcal{B}) \rightarrow \tilde{\varphi}(\mathcal{B})$$

se numește deformare de la configurația φ la configurația $\tilde{\varphi}$. Configurația φ se numește configurație de referință iar $\tilde{\varphi}$ se numește configurația obținută din configurația φ prin deformarea ϕ .

Propoziție 6.1.1. [Principiul conservării masei] Dacă $\varphi, \tilde{\varphi} \in \mathcal{C}$ sunt două configurații și $\mathcal{P} \in \mathcal{P}(\mathcal{B})$ astfel încât $\varphi(\mathcal{P})$ și $\tilde{\varphi}(\mathcal{P})$ sunt măsurabile în $\varphi(\mathcal{B})$ și, respectiv, în $\tilde{\varphi}(\mathcal{B})$, atunci

$$m_\varphi(\varphi(\mathcal{P})) = m_{\tilde{\varphi}}(\tilde{\varphi}(\mathcal{P})).$$

Demonstrație: Demonstrația este imediată și rezultă din modul de definire a masei, și anume

$$m_\varphi(\varphi(\mathcal{P})) = m(\mathcal{P}) = m_{\tilde{\varphi}}(\tilde{\varphi}(\mathcal{P})). \quad \blacksquare$$

Propoziție 6.1.2. [Conservarea densității de masă] Dacă $\varphi, \tilde{\varphi} \in \mathcal{C}$ sunt două configurații și $\phi : \mathcal{B}_\varphi \rightarrow \mathcal{B}_{\tilde{\varphi}}$ este o deformare de la φ la $\tilde{\varphi}$, atunci

$$\varrho_\varphi(x_\varphi) = \varrho_{\tilde{\varphi}}(x_{\tilde{\varphi}}) J, \quad (6.1.1)$$

unde $x_{\tilde{\varphi}} = \phi(x_\varphi)$ și $J = |\det \nabla_{x_\varphi} \phi|$.

Demonstrație: Din principiul conservării masei rezultă că

$$\int_{\varphi(\mathcal{P})} \varrho_\varphi(x_\varphi) dV_\varphi = \int_{\tilde{\varphi}(\mathcal{P})} \varrho_{\tilde{\varphi}}(x_{\tilde{\varphi}}) dV_{\tilde{\varphi}} \quad \forall \mathcal{P} \in \mathcal{P}(\mathcal{B}).$$

Facem schimbarea de variabilă $x_{\tilde{\varphi}} = \phi(x_\varphi)$, $x_\varphi \in \varphi(\mathcal{P})$ și obținem

$$\int_{\varphi(\mathcal{P})} \varrho_\varphi(x_\varphi) dV_\varphi = \int_{\varphi(\mathcal{P})} \varrho_{\tilde{\varphi}}(\phi(x_\varphi)) |\det \nabla_{x_\varphi} \phi(x_\varphi)| dV_\varphi \quad \forall \mathcal{P} \in \mathcal{P}(\mathcal{B}),$$

adică

$$\int_{\varphi(\mathcal{P})} [\varrho_\varphi(x_\varphi) - \varrho_{\tilde{\varphi}}(\phi(x_\varphi)) |\det \nabla_{x_\varphi} \phi(x_\varphi)|] dV_\varphi = 0 \quad \forall \mathcal{P} \in \mathcal{P}(\mathcal{B}). \quad (6.1.2)$$

Din continuitatea funcțiilor ϱ_φ , $\varrho_{\tilde{\varphi}}$ și din faptul că deformarea ϕ este de clasă C^2 , va rezulta că funcția de sub integrală este continuă. De aici va rezulta că funcția de sub integrală se anulează în orice punct $x_\varphi \in \varphi(\mathcal{P})$. În caz contrar, presupunând prin reducere la absurd că există un punct $x_\varphi \in \varphi(\mathcal{P})$ astfel încât cantitatea de sub integrală este strict pozitivă sau strict negativă, atunci, în baza continuității va rezulta că funcția este strict pozitivă sau strict negativă pe o întreagă vecinătate a acestui punct. Însă, această vecinătate este la rândul ei din $\mathcal{P}(\mathcal{B})$. Se deduce că pentru această vecinătate integrala din membrul drept a relației (6.1.2) este strict pozitivă, ceea ce contrazice principiul conservării masei. Rămâne deci că (6.1.2) implică

$$\varrho_\varphi(x_\varphi) - \varrho_{\tilde{\varphi}}(\phi(x_\varphi)) |\det \nabla_{x_\varphi} \phi(x_\varphi)| = 0,$$

ceea ce încheie demonstrația. ■

Ecuția (6.1.1) se numește ecuația de continuitate sau forma locală a principiului conservării masei.

Corpul continuu $\mathcal{B}$ se numește corp rigid dacă $\forall \varphi, \tilde{\varphi} \in \mathcal{C}$, $\forall x_\varphi^0 \in \varphi(\mathcal{B})$, $\exists x_{\tilde{\varphi}}^0 \in \tilde{\varphi}(\mathcal{B})$, $\exists Q \in \text{SO}(3)$ astfel încât

$$\phi = \tilde{\varphi} \circ \varphi^{-1} : \varphi(\mathcal{B}) \rightarrow \tilde{\varphi}(\mathcal{B})$$

este dată de

$$\phi(x_\varphi) = x_{\tilde{\varphi}} = x_{\tilde{\varphi}}^0 + Q(x_\varphi - x_\varphi^0),$$

adică

$$x_{\tilde{\varphi}} - x_{\tilde{\varphi}}^0 = Q(x_\varphi - x_\varphi^0).$$

Propoziție 6.1.3. [De caracterizare a unui corp rigid] Dacă $\mathcal{B}$ este un corp rigid, $\varphi, \tilde{\varphi} \in \mathcal{C}$ sunt două configurații și $\phi : \mathcal{B}_\varphi \rightarrow \mathcal{B}_{\tilde{\varphi}}$ este o deformare de la φ la $\tilde{\varphi}$ atunci

$$\|x_{\tilde{\varphi}} - x'_{\tilde{\varphi}}\| = \|x_\varphi - x'_\varphi\|,$$

$\forall x_{\tilde{\varphi}}, x'_{\tilde{\varphi}} \in \tilde{\varphi}(\mathcal{B})$ și $\forall x_\varphi, x'_\varphi \in \varphi(\mathcal{B})$ astfel încât $\phi(x_\varphi) = x_{\tilde{\varphi}}$, $\phi(x'_\varphi) = x'_{\tilde{\varphi}}$.

Demonstrație: Din definiția unui corp rigid rezultă existența lui $Q \in \text{SO}(3)$, astfel încât

$$x_{\tilde{\varphi}} - x'_{\tilde{\varphi}} = Q(x_\varphi - x'_\varphi).$$

Atunci, vom avea

$$\|x_{\tilde{\varphi}} - x'_{\tilde{\varphi}}\|^2 = \langle x_{\tilde{\varphi}} - x'_{\tilde{\varphi}}, x_{\tilde{\varphi}} - x'_{\tilde{\varphi}} \rangle = \langle Q(x_{\varphi} - x'_{\varphi}), Q(x_{\varphi} - x'_{\varphi}) \rangle.$$

Are loc următoarea proprietate a produsului scalar

$$\langle Ax, By \rangle = \langle B^T A x, y \rangle \quad \forall A, B \in \mathbb{R}^{3 \times 3}, \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^3.$$

Folosind această proprietate, deducem

$$\|x_{\tilde{\varphi}} - x'_{\tilde{\varphi}}\|^2 = \langle Q^T Q(x_{\varphi} - x'_{\varphi}), x_{\varphi} - x'_{\varphi} \rangle = \langle x_{\varphi} - x'_{\varphi}, x_{\varphi} - x'_{\varphi} \rangle = \|x_{\varphi} - x'_{\varphi}\|^2$$

și demonstrația este completă. ■

Propoziția de mai sus spune că pentru un corp rigid, distanța dintre punctele corpului nu se schimbă în configurații diferite.

Propoziție 6.1.4. [Conservarea densității de masă pentru rigid] Dacă $\mathcal{B}$ este un corp rigid, $\varphi, \tilde{\varphi} \in \mathcal{C}$ sunt două configurații și $\phi : \mathcal{B}_{\varphi} \rightarrow \mathcal{B}_{\tilde{\varphi}}$ este o deformare de la φ la $\tilde{\varphi}$, atunci

$$\varrho_{\varphi}(x_{\varphi}) = \varrho_{\tilde{\varphi}}(x_{\tilde{\varphi}}) \quad \forall x_{\varphi} \in \mathcal{B}_{\varphi}, \quad x_{\tilde{\varphi}} = \phi(x_{\varphi}).$$

Demonstrație: Întrucât distanța dintre punctele rigidului nu se modifică în configurații diferite, va rezulta că elementul de volum este constant. De fapt, altfel spus, pentru un rigid vom avea

$$\phi(x_{\varphi}) = x_{\tilde{\varphi}}^0 + Q(x_{\varphi} - x_{\varphi}^0)$$

ceea ce implică $\nabla_{x_{\varphi}} \phi(x_{\varphi}) = Q$ și deci că $|\det \nabla_{x_{\varphi}} \phi(x_{\varphi})| = |\det Q| = 1$ deoarece $O \in \text{SO}(3)$. Din ecuația de continuitate rezultă concluzia propoziției. ■

Propoziția de mai sus spune că pentru un corp rigid, densitatea nu își modifică distribuția în configurații diferite.

6.2 Descrierea deformării unui mediu continuu

Un mediu continuu se numește deformabil dacă nu este rigid, adică dacă funcția deformare dintre oricare două configurații diferite ale mediului continuu nu este compunerea dintre o translație și o rotație, omogene în tot mediul continuu.

În cele ce urmează vom considera că mulțimea $\mathcal{B}$ este închisă și simplu conexă, având frontiera suficient de netedă. Vom considera două configurații $\varphi_{t_0}, \varphi_t \in \mathcal{C}$ și $\overline{\Omega_0} = \varphi_{t_0}(\mathcal{B})$, $\overline{\Omega_t} = \varphi_t(\mathcal{B})$, cu Ω_0, Ω_t mulțimi deschise din $\mathbb{R}^3$. Aplicația bijectivă

$$\phi^t = \varphi_t \circ \varphi_{t_0}^{-1} : \Omega_0 \rightarrow \Omega_t$$

se numește deformare de la configurația φ_{t_0} la configurația φ_t sau simplu deformarea domeniului Ω_0 în domeniul Ω_t . Mulțimea Ω_0 reprezintă volumul ocupat de un corp înainte de deformare, la momentul inițial t_0 , în timp ce mulțimea Ω_t reprezintă volumul ocupat de un corp după deformare, adică la momentul actual t . Mulțimea Ω_0 se mai numește configurație de referință iar mulțimea Ω_t se numește configurație actuală.

În cele ce urmează, vom presupune că deformarea ϕ^t poate fi extinsă la o funcție de este de clasă $C^2(\mathbb{R}^3)$. Prin urmare, când vom vorbi de derivata unei funcții pe frontieră, se va înțelege că vorbim de derivata extinderii respective.

În raport cu un reper $\{O; \bar{e}_i\}$, notăm cu X_i ($i = 1, 2, 3$) coordonatele unui punct material generic M_0 , din domeniul $\bar{\Omega}_0$. Presupunem că mediul este deformat astfel că la momentul t el ocupă domeniul $\bar{\Omega}_t$ de frontieră $\partial\Omega_t$, punctul M_0 ajungând în poziția M . Fie x_i , ($i = 1, 2, 3$) coordonatele punctului M . Deseori X va înlocui ansamblul cordonatelor (X_1, X_2, X_3) sau vectorul de poziție $X_i \bar{e}_i$, iar x pe (x_1, x_2, x_3) , respectiv pe $x_i \bar{e}_i$.

Fie $I = [t_0, t_1)$ un interval de timp fixat, unde $t_0 > 0$ iar $t_1 > 0$ poate fi infinit. Vom considera familia de configurații $\varphi_t \in \mathcal{C}$, $\forall t \in I$ cu toate celelalte cantități ce au fost definite mai sus, unde t era considerat fixat. A ști mișcarea mediului continuu înseamnă a cunoaște traiectoria tuturor punctelor. Mișcarea mediului continuu este definită ca fiind

$$\Phi : \bar{\Omega}_0 \times I \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad (X, t) \mapsto \phi^t(X) = (\phi_1^t(X), \phi_2^t(X), \phi_3^t(X)) := x \in \bar{\Omega}_t \subset \mathbb{R}^3.$$

Vom presupune că mișcarea este de clasă $C^2(\bar{\Omega} \times I)$. Mișcarea mediului este definită deci prin relațiile

$$x = x(X, t), \quad \forall (X, t) \in \bar{\Omega}_0 \times I,$$

sau pe componente

$$\begin{aligned} x_1 &= x_1(X_1, X_2, X_3, t), \\ x_2 &= x_2(X_1, X_2, X_3, t), \\ x_3 &= x_3(X_1, X_2, X_3, t). \end{aligned} \quad \forall (X, t) \in \bar{\Omega}_0 \times I$$

Dacă coordonatele X_K sunt fixate, funcțiile de mai sus determină mișcarea punctului material care la momentul inițial t_0 avea coordonatele X_K ; dacă t este fixat, aceste funcții descriu transformarea care duce domeniul Ω_0 în domeniul Ω_t . Deformarea stabilește o corespondență biunivocă și bicontinuu între Ω_0 și Ω_t , în care se corespund punctele M_0 din B și punctele M din Ω_t . Coordonatele X_K se numesc coordonate materiale (sau lagrange-iene), iar coordonatele x_i se numesc coordonate spațiale (sau euleriene).

În fiecare punct (X, t) definim gradientul deformării

$$\nabla_X \phi^t := \begin{pmatrix} \frac{\partial \phi_1^t}{\partial X_1} & \frac{\partial \phi_1^t}{\partial X_2} & \frac{\partial \phi_1^t}{\partial X_3} \\ \frac{\partial \phi_2^t}{\partial X_1} & \frac{\partial \phi_2^t}{\partial X_2} & \frac{\partial \phi_2^t}{\partial X_3} \\ \frac{\partial \phi_3^t}{\partial X_1} & \frac{\partial \phi_3^t}{\partial X_2} & \frac{\partial \phi_3^t}{\partial X_3} \end{pmatrix}.$$

Deformarea fiind o funcție bijectivă avem

$$J := \det \left(\frac{\partial \phi_i^t(X)}{\partial X_j} \right) = \det \left(\frac{\partial x_i(X, t)}{\partial X_j} \right) \neq 0, \quad (X, t) \in \bar{\Omega}_0 \times I.$$

Evident determinatul funcțional (jacobianul deformării) J este pozitiv. Pentru a justifica această afirmație, să remarcăm că J este o funcție continuă pe $\bar{\Omega}_0 \times I$ și că $J(X, t_0) = 1$,

deoarece $\phi^{t_0}(X) = \text{id}(X) = X$, $\forall X \in \overline{\Omega}_0$. Din continuitate și din faptul că $J(X, t) \neq 0$ $\forall (X, t) \in \overline{\Omega}_0 \times I$ va rezulta că J are semn constant. Pentru că la momentul t_0 determinantul funcțional este pozitiv, va rezulta că este pozitiv

$$J = \det \left(\frac{\partial \phi_i^t(X)}{\partial X_j} \right) = \det \left(\frac{\partial x_i(X, t)}{\partial X_j} \right) > 0, \quad (X, t) \in \overline{\Omega}_0 \times I.$$

În cazul elastostaticii (nu avem mișcare ci doar deformare) această condiție se presupune încă de la început pentru a asigura păstarea orientării. Desigur, și în cazul elastodinamicii orientarea va fi conservată.

Uneori, în cadrul acestui capitol, vom utiliza convențiile uzuale de sumare și diferențiere: indicii latini (cu excepția cazurilor când este specificat contrariul) iau valorile $(1, 2, 3)$, se folosește sumarea după un indice care se repetă, un indice inferior precedat de virgulă semnifică derivata parțială în raport cu coordonata spațială considerată iar punctul plasat în partea superioară semnifică derivata materială în raport cu timpul.

În continuare vom descrie modul în care putem măsura (descrie) matematic deformarea unui mediu continuu. Adică, vom defini unele cantități ce indică cât de mare e deformarea, în ce direcții s-a produs deformarea, cât diferă deformarea de o mișcare rigidă a corpului etc.

Fie o curbă din configurația nedeformată

$$\gamma = f(I) \subset \Omega_0, \quad I = [a, b], \quad a, b \in \mathbb{R}.$$

Lungimea acestei curbe este

$$\ell(\gamma) = \int_a^b \left\| \frac{df}{ds}(s) \right\| ds = \int_a^b \left\langle \frac{df}{ds}(s), \frac{df}{ds}(s) \right\rangle^{1/2} ds,$$

în timp ce lungimea imaginii acestei curbe

$$\phi^t(\gamma) = \phi^t \circ f(I) \subset \Omega_t, \quad I = [a, b], \quad a, b \in \mathbb{R},$$

obținută în urma procesului de deformare este

$$\begin{aligned} \ell(\phi^t(\gamma)) &= \int_a^b \left\| \frac{d(\phi^t \circ f)}{ds}(s) \right\| ds = \int_a^b \left\| \nabla_X \phi^t(f(s)) \frac{df}{ds}(s) \right\| ds \\ &= \int_a^b \left\langle \nabla_X \phi^t(f(s)) \frac{df}{ds}(s), \nabla_X \phi^t(f(s)) \frac{df}{ds}(s) \right\rangle^{1/2} ds \\ &= \int_a^b \left\langle [\nabla_X \phi^t(f(s))]^T [\nabla_X \phi^t(f(s))] \frac{df}{ds}(s), \frac{df}{ds}(s) \right\rangle^{1/2} ds \\ &= \int_a^b \left\langle C(f(s), t) \frac{df}{ds}(s), \frac{df}{ds}(s) \right\rangle^{1/2} ds. \end{aligned}$$

Prin urmare, tensorul

$$C(X, t) = [\nabla_X \phi^t(X)]^T [\nabla_X \phi^t(X)]$$

numit tensorul de deformare drept Cauchy-Green ne permite să măsurăm lungimi de arce de curbă din starea deformată. Un alt tensor de deformare folosit uneori este tensorul de deformare stâng Cauchy-Green

$$B(X, t) = [\nabla_X \phi^t(X)][\nabla_X \phi^t(X)]^T$$

tensorul de deformare Cauchy-Green. Întrebarea care apare este dacă nu cumva acest tensor este un indicator suficient pentru a măsura deformarea mediului continuu și ce anume măsoară efectiv componentele sale?

Să observăm că tensorul de deformare Cauchy-Green are de fapt următoarele componente

$$\begin{aligned} C(X, t) &= \begin{pmatrix} \frac{\partial \phi_1^t}{\partial X_1} & \frac{\partial \phi_1^t}{\partial X_2} & \frac{\partial \phi_1^t}{\partial X_3} \\ \frac{\partial \phi_2^t}{\partial X_1} & \frac{\partial \phi_2^t}{\partial X_2} & \frac{\partial \phi_2^t}{\partial X_3} \\ \frac{\partial \phi_3^t}{\partial X_1} & \frac{\partial \phi_3^t}{\partial X_2} & \frac{\partial \phi_3^t}{\partial X_3} \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} \frac{\partial \phi_1^t}{\partial X_1} & \frac{\partial \phi_1^t}{\partial X_2} & \frac{\partial \phi_1^t}{\partial X_3} \\ \frac{\partial \phi_2^t}{\partial X_1} & \frac{\partial \phi_2^t}{\partial X_2} & \frac{\partial \phi_2^t}{\partial X_3} \\ \frac{\partial \phi_3^t}{\partial X_1} & \frac{\partial \phi_3^t}{\partial X_2} & \frac{\partial \phi_3^t}{\partial X_3} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \|\frac{\partial \phi^t}{\partial X_1}(X)\|^2 & \langle \frac{\partial \phi^t}{\partial X_1}(X), \frac{\partial \phi^t}{\partial X_2}(X) \rangle & \langle \frac{\partial \phi^t}{\partial X_1}(X), \frac{\partial \phi^t}{\partial X_3}(X) \rangle \\ \langle \frac{\partial \phi^t}{\partial X_1}(X), \frac{\partial \phi^t}{\partial X_2}(X) \rangle & \|\frac{\partial \phi^t}{\partial X_2}(X)\|^2 & \langle \frac{\partial \phi^t}{\partial X_2}(X), \frac{\partial \phi^t}{\partial X_3}(X) \rangle \\ \langle \frac{\partial \phi^t}{\partial X_1}(X), \frac{\partial \phi^t}{\partial X_3}(X) \rangle & \langle \frac{\partial \phi^t}{\partial X_2}(X), \frac{\partial \phi^t}{\partial X_3}(X) \rangle & \|\frac{\partial \phi^t}{\partial X_3}(X)\|^2 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

adică elementele de pe diagonală indică magnitudinile deformărilor locale în direcțiile axelor de coordonate, în timp ce celelalte elemente ale tensorului indică variațiile locale ale unghiurilor. Mai scriem

$$C_{ij}(X, t) = \langle \frac{\partial \phi^t}{\partial X_i}(X), \frac{\partial \phi^t}{\partial X_j}(X) \rangle = \frac{\partial x_k}{\partial X_i}(X, t) \frac{\partial x_k}{\partial X_j}(X, t).$$

Să fixăm un punct $X \in \Omega_0$ și să considerăm un segment inclus în Ω_0 , ce conține în interior punctul X și a cărui dreaptă suport este paralelă cu axa Ox_i , $i = 1, 2, 3$ fixat. În urma procesului de deformare, acest segment este transformat într-o curbă conținută în Ω_t , iar coloana i a gradientului deformării, adică

$$\frac{\partial \phi^t}{\partial X_i}(X) := \begin{pmatrix} \frac{\partial \phi_1^t}{\partial X_i}(X) \\ \frac{\partial \phi_2^t}{\partial X_i}(X) \\ \frac{\partial \phi_3^t}{\partial X_i}(X) \end{pmatrix},$$

ne indică vectorul tangent la această curbă în punctul $\phi^t(X)$. Dacă lungimea acestui segment este mică, atunci $\|\frac{\partial \phi^t}{\partial X_i}(X)\|$ măsoară lungimea imaginii acestui segment și deci alungirea lui, adică alungirea locală în direcția $\bar{e}_i$ a mediului continuu. Considerând acum două segmente ca mai sus, unul având direcția $\bar{e}_i$ iar altul direcția $\bar{e}_j$, $i \neq j$, produsul scalar al vectorilor tangenți din configurația deformată

$$\langle \frac{\partial \phi^t}{\partial X_i}(X), \frac{\partial \phi^t}{\partial X_j}(X) \rangle = \|\frac{\partial \phi^t}{\partial X_i}(X)\| \|\frac{\partial \phi^t}{\partial X_j}(X)\| \cos[\angle(\frac{\partial \phi^t}{\partial X_i}(X), \frac{\partial \phi^t}{\partial X_j}(X))]$$

ne indică cum s-a transformat local unghiul drept dintre $\bar{e}_i$ și $\bar{e}_j$ în urma procesului de deformare.

Problema 6.2.1. Să se arate că matricele $C(X, t)$ și $B(X, t)$ au valorile proprii reale și pozitive.

Problema 6.2.2. Să se arate că matricele $C(X, t)$ și $B(X, t)$ au același polinom caracteristic.

Prin urmare, variația lungimilor curbelor poate fi măsurată comparând

$$dS := \langle dX, dX \rangle^{\frac{1}{2}}$$

cu

$$ds := \langle CdX, dX \rangle^{\frac{1}{2}}.$$

Cantitatea dS se numește lungimea elementului de arc din starea nedeformată iar ds este lungimea elementului de arc în starea deformată. Prin urmare, variația lungimii elementului de arc este indicată de diferența

$$ds^2 - dS^2 = \langle (C - I_3)dX, dX \rangle = \langle 2E dX, dX \rangle,$$

unde

$$2E = C - I_3$$

se numește tensorul de deformare Green-St. Venant. Pe componente, acest tensor este dat de

$$2E_{ij} = \left\langle \frac{\partial \phi^t}{\partial X_i}(X), \frac{\partial \phi^t}{\partial X_j}(X) \right\rangle - \delta_{ij} = \frac{\partial x_k}{\partial X_i}(X, t) \frac{\partial x_k}{\partial X_j}(X, t) - \delta_{ij}.$$

Problema 6.2.3. Descrierea lagrangiană a unei deformări este dată de

$$\begin{aligned} x_1 &= t + X_1 - tX_2 - X_3, \\ x_2 &= -1 + tX_1 + X_2 + X_3, \\ x_3 &= -t + X_1 - X_2 + X_3, \end{aligned}$$

unde $\bar{X} = (X_1, X_2, X_3) \in B$, $t \in [0, \infty)$. Să se determine:

1. poziția la momentul $t = 1$ a particulei P care inițial se afla în poziția $P_0(1, 2, 1)$;
2. poziția la momentul $t = 1$ a particulei P' care inițial se afla în poziția $P'_0(0, 0, 1)$;
3. distanța dintre punctele pozițiile inițiale P_0 și P'_0 și distanța dintre pozițiile celor două puncte la momentul $t = 1$ (după deformarea mediului);
4. traiectoria punctului P ;
5. gradientul material al deformării;
6. descrierea euleriană a deformării și gradientul spațial al deformării;
7. vectorul deplasare în descriere materială precum și în descriere spațială;
8. tensorii $\mathbf{C}$, $\mathbf{c}$, $\mathbf{E}$, $\mathbf{e}$.

Să ne reamintim că o deformare este rigidă dacă $\forall X_0 \in \Omega_0, \exists x^t \in \Omega_t, \exists Q(t) \in O(3)$ astfel încât

$$\phi^t(X) - x^t = Q(t)(X - X_0).$$

Cu alte cuvinte, notând $a(t) = x^t - Q(t)X_0$, o deformare rigidă generică este de forma

$$\phi^t(X) = a(t) + Q(t)X, \quad a(t) \in \mathbb{R}^3, \quad Q(t) \in O(3), \quad \forall X \in \Omega_0, \quad \forall t \in I,$$

adică configurația nedeformată suferă o translație și o rotație, ambele omogene. Deoarece $\det \nabla_X \phi^t(X) > 0$, matricea $Q(t)$ este de fapt din $SO(3)$.

Dacă ϕ^t este o deformare rigidă, atunci $\nabla_X \phi^t(X) = Q$, $\forall X \in \Omega_0$, și în consecință $C = I_3$, $E = O_3$. În general, putem remarca că $\|E\|^2 = \frac{1}{4}\|C - I_3\|^2$ poate indica cât de mult se abate o deformare dată ϕ^t cu $F = \nabla_X \phi^t \in GL^+(3)$ de spațiul rotațiilor proprii $SO(3)$. Totuși, atunci când se calculează distanțe pe $GL^+(3)$, problema trebuie abordată cu o atenție sporită deoarece $GL^+(3)$ nu este spațiu euclidian.

Problema 6.2.4. Să se verifice dacă $GL(3) = \{X \in \mathbb{R}^{3 \times 3} \mid \det X \neq 0\}$, $GL^+(3) = \{X \in \mathbb{R}^{3 \times 3} \mid \det X > 0\}$, $SL(3) = \{X \in \mathbb{R}^{3 \times 3} \mid \det X = 1\}$ și $SO(3) = \{X \in \mathbb{R}^{3 \times 3} \mid X^T X = I_3, \det X = \pm 1\}$ sunt spații euclidiene sau nu.

Următoarea teoremă indică faptul că tensorul Cauchy-Green C este matricea identică dacă și numai dacă deformarea este o deformare rigidă.

Teorema 6.2.1. [de caracterizare a unei deformări rigide] Fie Ω_0 un deschis, simplu conex din $\mathbb{R}^3$, și fie aplicația $\phi \in C^1(\overline{\Omega}_0)$ astfel încât $[\nabla_X \phi(X)]^T [\nabla_X \phi(X)] = I_3$, $\forall X \in \overline{\Omega}_0$. Atunci, există un vector $a \in \mathbb{R}^3$ și matricea ortogonală $Q \in SO(3)$ astfel încât

$$\phi(X) = a + QX, \quad \forall X \in \overline{\Omega}_0. \quad \blacksquare$$

Teorema de mai sus nu indică dacă E (echivalent C) determină în mod unic deformarea. Acest lucru este clarificat de teorema următoare.

Teorema 6.2.2. Fie Ω_0 un deschis, simplu conex din $\mathbb{R}^3$, și două aplicații $\phi, \psi \in C^1(\Omega_0)$ astfel încât $[\nabla_X \phi(X)]^T [\nabla_X \phi(X)] = [\nabla_X \psi(X)]^T [\nabla_X \psi(X)]$, $\forall X \in \Omega_0$, ψ este injectivă și $\det \nabla_X \psi \neq 0$, $\forall X \in \Omega_0$. Atunci, există un vector $a \in \mathbb{R}^3$ și matricea ortogonală $Q \in O(3)$ astfel încât

$$\phi(X) = a + Q\psi(X), \quad \forall X \in \Omega_0. \quad \blacksquare$$

Deci, dacă se cunoaște tensorul C , atunci acesta determină în mod unic deformarea, modulo o deformare rigidă.

Pentru $M_0 \in \Omega_0$ și $M = \phi^t(M_0)$, considerăm în continuare vectorul deplasare $\bar{u} = \overrightarrow{M_0 M}$, care poate fi scris în forma

$$\bar{u} = u_i \bar{e}_i.$$

Avem

$$\bar{u}(X, t) = x(X, t) - X.$$

Deci, cunoașterea vectorului deplasare este echivalentă cu cunoașterea funcțiilor care descriu deformarea. Așadar vectorul u descrie mișcarea mediului continuu.

Tensorii de deformare introduși pot fi exprimați cu ajutorul componentelor vectorului deplasare. Astfel, din

$$\nabla_X \phi^t(X) = I_3 + \nabla_X \bar{u},$$

deducem

$$\begin{aligned} C &= [I_3 + \nabla_X \bar{u}]^T [I_3 + \nabla_X \bar{u}] = I_3 + [\nabla_X \bar{u}]^T + [\nabla_X \bar{u}] + [\nabla_X \bar{u}]^T [\nabla_X \bar{u}] \\ &= I_3 + 2E, \end{aligned}$$

cu

$$E = \frac{1}{2} ([\nabla_X \bar{u}]^T + [\nabla_X \bar{u}] + [\nabla_X \bar{u}]^T [\nabla_X \bar{u}])$$

Relațiile de mai sus sunt numite relații deformări-deplasări sau ecuații geometrice.

Problema 6.2.5. Se consideră deplasarea $\mathbf{u}$ definită pe $D \times [0, \infty)$ prin

$$\begin{aligned} u_1 &= 3t^2(1 + 2X_1X_2X_3), \\ u_2 &= tX_1^2 + 5X_2^2X_3t^3, \\ u_3 &= (2^t - 1)(X_1 + 5X_2X_3), \end{aligned}$$

unde $\bar{X} = (X_1, X_2, X_3) \in D$, $t \in [0, \infty)$. Să se determine:

1. poziția la momentul $t = 1$ a particulei P care în configurația de referință are coordonatele $(0, 1, 2)$;
2. gradientul material al deformării.

Problema 6.2.6. Să se studieze deformările definite prin

1. $x_1 = \lambda X_1$, $x_2 = \lambda X_2$, $x_3 = \lambda X_3$, $\lambda > 0$,
2. $x_1 = \lambda X_1$, $x_2 = X_2$, $x_3 = X_3$, $\lambda > 0$,
3. $x_1 = X_1 + kX_2$, $x_2 = X_2$, $x_3 = X_3$, $k \neq 0$,

unde λ și k sunt constante, iar $(X_1, X_2, X_3) \in D = [0, 1] \times [0, 1] \times [0, 1]$.

Problema 6.2.7. Se consideră că deplasarea $\bar{u}$ definită pe $D \times [0, \infty)$ a punctelor unui domeniu deschis D din $\mathbb{R}^3$ este dată prin

$$\begin{aligned} u_1 &= 3t^2(1 + 2X_1X_2X_3), \\ u_2 &= tX_1^2 + 5X_2^2X_3t^3, \\ u_3 &= (2^t - 1)(X_1 + 5X_2X_3), \end{aligned}$$

unde $(X_1, X_2, X_3) \in D$, $t \in [0, \infty)$. Să se determine:

1. poziția la momentul $t = 1$ a particulei P care în configurația de referință are coordonatele $(0, 1, 2)$;
2. gradientul deformării;
3. în ce direcții se deformează domeniul D ;
4. există variații de unghiuri în procesul de deformare?

Problema 6.2.8. Să se determine componentele vectorului deplasare corespunzătoare tensorului de deformare dat de

$$\begin{aligned}\varepsilon_{11} &= -\nu x_1, & \varepsilon_{22} &= -\nu x_1, & \varepsilon_{33} &= x_1, \\ \varepsilon_{12} &= \varepsilon_{23} = \varepsilon_{31} = 0,\end{aligned}$$

unde ν este o constantă numită rația lui Poisson.

Să se determine componentele vectorului deplasare corespunzătoare tensorului de deformare dat de

$$\begin{aligned}\varepsilon_{11} &= -\nu x_2 x_3, & \varepsilon_{22} &= -\nu x_2 x_3, & \varepsilon_{33} &= x_2 x_3, \\ \varepsilon_{12} &= \varepsilon_{31} = 0, & \varepsilon_{23} &= \frac{1}{2} \nu x_1^2,\end{aligned}$$

unde ν este o constantă numită rația lui Poisson.

Să considerăm cele două configurații ale mediului: în starea Ω_0 și în starea Ω_t . Putem afirma că orice funcție F de variabile x_i, t este de asemenea o funcție F_0 de variabilele X_K, t și invers, adică

$$F(x, t) = F(x(X, t), t) = F_0(X, t).$$

Fie funcția F_0 de clasă C^1 pe $\Omega_0 \times I$.

Derivata funcției F_0 în raport cu timpul, menținând coordonatele X_K constante, se numește derivata materială a funcției F_0 și va fi notată prin $\frac{dF_0}{dt}$ sau $\dot{F}_0$. Considerând funcția $F(x, t) = F(x(X, t), t) = F_0(X, t)$, obținem

$$\dot{F}_0 = \frac{\partial F}{\partial t} + \frac{\partial F}{\partial x_i} \frac{\partial x_i}{\partial t}.$$

Evident, noțiunea de derivată materială poate fi considerată în legătură cu cantitățile vectoriale sau tensoriale.

Vectorul viteză în punctul (x, t) este definit prin

$$\bar{v}(x, t) = \dot{x}(X, t).$$

Dacă scriem

$$\bar{v}(x, t) = v_i(x, t) \bar{e}_i,$$

atunci

$$v_i(x, t) = \frac{\partial x_i}{\partial t}(X, t).$$

Vectorul viteză poate fi exprimat cu ajutorul vectorului deplasare ca fiind

$$\bar{v}(x, t) = \dot{\bar{u}}(X, t).$$

Vectorul accelerație este definit prin

$$\bar{a}(x, t) = \dot{\bar{v}}(x, t).$$

Evident, dacă $\bar{a}(x, t) = a_i(x, t) \bar{e}_i$ și $v_i = v_i(x, t)$, atunci avem

$$a_i(x, t) = \frac{\partial v_i}{\partial t} + v_{i,j} v_j \quad \text{echivalent} \quad \bar{a} = \frac{\partial \bar{v}}{\partial t} + (\nabla_x \bar{v}) \bar{v}.$$

Problema 6.2.9. *Descrierea lagrangiană a unei deformări este:*

$$\begin{aligned}x_1 &= X_1 e^{t^2}, \\x_2 &= X_2 e^t, \\x_3 &= X_3.\end{aligned}$$

Calculați componentele vitezei în descriere materială, precum și în descriere spațială. Calculați matricea gradientului vitezei.

Problema 6.2.10.

O deformare omogenă de forma

$$\begin{aligned}x_1 &= X_1 + \gamma X_2, \\x_2 &= X_2, \\x_3 &= X_3, \quad \gamma \in \mathbb{R},\end{aligned}$$

este o forfecare simplă (a se vedea seminarul 13). Pentru această deformare, calculați:

- 1. gradientul material și gradientul spațial al deformării;*
- 2. tensorii de deformare;*
- 3. lista invariantilor principali ai tensorilor de deformare;*
- 4. extensiile principale, adică valorile proprii ale lui $\mathbf{U}$, $\mathbf{U}^2 = \mathbf{C}$.*

Capitolul 7

Principiile mecanicii mediilor deformabile

Ne reamintim că la începutul capitolului precedent am arătat¹

Propoziție 7.0.1. [Principiul conservării masei] Dacă $P_0 \subset \Omega_0$ este măsurabilă și $P_t = \phi^t(P_0) \subset \Omega_t$, atunci

$$m(P_0) = m(P_t).$$

Principiul conservării masei afirmă că masa se conservă, cu alte cuvinte, masa oricărei porțiuni din Ω_0 este aceeași ca și masa aceleiași porțiuni după deformare.

Am mai demonstrat forma locală a principiului conservării masei, numită și ecuația de continuitate:

Propoziție 7.0.2. [Conservarea densității de masă] Dacă $\phi^t : \Omega_0 \rightarrow \Omega_t$ este o deformare de la Ω_0 la Ω_t , ϱ_0 reprezintă densitatea de masă în punctele din Ω_0 iar ϱ atunci indică densitatea de masă în punctele din Ω_t , atunci are loc

$$\varrho_0(X) = \varrho_t(x, t) J(X, t), \quad \forall (X, t) \in \Omega_0 \times I,$$

unde $x = \phi^t(X)$ și $J = \det \nabla_X \phi^t(X)$.

Principiile fundamentale ale dinamicii mediilor continue sunt: principiul conservării masei, principiul impulsului, principiul momentului cinetic.

Dacă mișcarea este cunoscută și densitatea în punctele configurației nedeformate este de asemenea dată a priori, ecuația de continuitate determină densitatea ϱ în configurația de după deformare.

Problema 7.0.1. Un mediu continuu omogen ocupă la momentul inițial $t = 0$ domeniul $D = \{X = (X_1, X_2, X_3) \mid 0 \leq X_i \leq 1, i = 1, 2, 3\}$, unde (X_1, X_2, X_3) reprezintă coordonatele vectorului de poziție a unui punct din corp în baza canonică. Descrierea deformării acestui mediu continuu este dată de

$$\begin{aligned} x_1 &= t + X_1 - t X_2 - X_3, \\ x_2 &= -1 + t X_1 + X_2 + X_3, \\ x_3 &= -t + X_1 - X_2 + X_3, \end{aligned}$$

unde $t \in [0, \infty)$. Să se determine:

¹Folosim denumirea de “principiu” deși, din modul de a defini axiomatic noțiunea de masă, acest “principiu” admite o demonstrație.

1. poziția la momentul $t = 1$ a particulelor P și P' care inițial se aflau în pozițiile $P_0(1, 2, 1)$ și respectiv $P'_0(0, 0, 1)$;
2. distanța dintre punctele $P_0(1, 2, 1)$ și $P'_0(0, 0, 1)$ și distanța dintre pozițiile celor două puncte la momentul $t = 1$ (după deformarea mediului);
3. gradientul deformării;
4. tensorul Cauchy-Green;
5. știind că la momentul inițial mediul continuu era omogen având densitatea $\rho_0 = 2700 \text{ kg/m}^3$ (aluminiiu) să se determine densitatea în punctele mediului continuu la momentul $t > 0$.
6. masa la momentul inițial și la un moment arbitrar $t > 0$;
7. volumul la momentul inițial și la un moment arbitrar $t > 0$.

Fie P_t un domeniu regulat oarecare din mediul continuu considerat la timpul t , urmărit în mișcarea sa. Presupunem că acest domeniu provine din domeniul P_0 , adică $P_t = \phi^t(P_0)$.

Lema 7.0.1. Să considerăm integrala

$$\tilde{F}(P_t; t) = \int_{P_t} \varrho_t(x, t) F(x, t) dv,$$

în care domeniul P_t și funcția F , presupusă de clasă C^1 , depind de timp. Atunci, are loc relația

$$\dot{\tilde{F}}(P_t; t) = \int_{P_t} \varrho_t(x, t) \dot{F}(x, t) dv.$$

Demonstrație: Pentru aceasta să transformăm mai întâi integrala considerată, într-o integrală pe P

$$\begin{aligned} \tilde{F}(P_t; t) &= \int_{P_t} \varrho_t(x, t) F(x, t) dv = \int_{P_0} \varrho_t(x(X, t), t) F(x(X, t), t) J(X, t) dV \\ &= \int_{P_0} \varrho_0(X) F(x(X, t), t) dV. \end{aligned}$$

Evident, revenind la variabilele spațiale, vom avea

$$\begin{aligned} \dot{\tilde{F}}(P_t; t) &= \int_{P_0} \varrho_0(X) \dot{F}(x(X, t), t) dV = \int_{P_0} \varrho_t(x(X, t), t) J(X, t) \dot{F}(x(X, t), t) dV \\ &= \int_{P_t} \varrho_t(x, t) \dot{F}(x, t) dv \end{aligned}$$

ceea ce era de demonstrat. ■

În cele ce urmează prin mișcare admisibilă vom înțelege o mișcare a mediului considerat definită de un vector deplasare $\bar{u}$ de clasă C^2 pe $\bar{\Omega}_0 \times I$.

Dată o mișcare admisibilă și o porțiune P_t din corpul considerat la momentul t , atunci vectorul

$$\bar{H}(P_t) = \int_{P_t} \varrho \dot{\bar{u}} dv,$$

este prin definiție impulsul porțiunii P_t la momentul t . Momentul cinetic (față de punctul O) al porțiunii P_t la momentul t este, prin definiție, vectorul

$$\overline{K}_0(P_t) = \int_{P_t} \varrho x \times \dot{u} dv.$$

Un sistem de forțe asociat corpului în mișcare este definit prin următoarele:

1. Pentru orice timp t este dat un vector $\overline{f} : \Omega_t \rightarrow \mathbb{R}^3$. Acest vector se numește forță specifică de masă; el reprezintă forța pe unitate de masă exercitată asupra punctului x la momentul t de către mediul exterior lui Ω_t . Presupunem că această funcție este continuă pe $\Omega_t \times I$. Vectorul

$$\overline{R}_m(P_t) = \int_{P_t} \varrho \overline{f} dv,$$

reprezintă rezultanta forței masice exercitate asupra porțiunii P_t la momentul t .

2. Pentru orice moment t și pentru orice vector unitar $\overline{n}$ este dat un vector $\overline{t}_{(\overline{n})} : \Omega_t \rightarrow \mathbb{R}^3$ numit vector tensiune sau forță de suprafață, astfel ca pentru orice porțiune $P_t \subset \Omega_t$, rezultanta forței de suprafață exercitate asupra porțiunii P_t pe direcția $\overline{n}$ versorul normalei exterioare la ∂P_t , de către $\Omega_t \setminus P_t$ este definită prin

$$\overline{R}_s(P_t) = \int_{\partial P_t} \overline{t}_{(\overline{n}(x))}(x, t) da.$$

Pentru a defini ce înseamnă $\overline{t}_{(\overline{n}(x))}(x, t)$ pentru un punct $x \in \Omega_t$ și un vector unitar $\overline{n}(x, t)$, să considerăm un plan ce trece prin x având normala $\overline{n}$. În acest punct vom considera o bilă deschisă $B(x; \delta)$ de rază δ . Vom considera intersecția $\overline{S}(x, \delta)$ a acestei bile cu o planul având normala $\overline{n}(x, t)$ în punctul x prin care trece. Atunci $\overline{t}_{(\overline{n}(x))}(x, t)$ este forța pe unitatea de arie, în x și la momentul t , exercitată de către porțiunea din bilă situată de acea parte a lui $\overline{S}(x, \delta)$ spre care este îndreptat $\overline{n}$, asupra porțiunii din $\overline{B}(x; \delta) \cap \overline{\Omega}_t$ situată de cealaltă parte atunci când $\delta \rightarrow 0$. Funcția de poziție și timp $\overline{t}_{(\overline{n})}$ se presupune că este se poate extinde la o funcție de clasă C^1 pe $\mathbb{R}^3 \times I$. De asemenea, se presupune că $\overline{t}_{(\overline{n})}$ depinde continuu de $\overline{n}$.

Rezultanta forței de suprafață exercitate asupra porțiunii P_t din Ω_t este definită prin

$$\overline{R}_s(P_t) = \int_{\partial P_t} \overline{t}_{(\overline{n}(x))}(x, t) da,$$

unde ∂P_t este frontiera domeniului P_t , iar $\overline{n}$ este versorul normalei exterioare la ∂P_t .

3. Dacă $x \in \partial \Omega_t$ iar $\overline{n}$ este versorul normalei exterioare la $\partial \Omega_t$ în x , atunci $\overline{t}_{(\overline{n}(x))}(x, t) := \lim_{y \rightarrow x} \overline{t}_{(\overline{n}(y))}(y, t)$ este forța specifică de suprafață în $x \in \partial \Omega_t$ și reprezintă acțiunea mediului exterior pe frontiera corpului. Să remarcăm că am definit tensiunea într-un punct al frontierei doar în direcția versorul normalei la ∂P_t .

4. Rezultanta forțelor exercitate asupra porțiunii P_t din Ω_t este definită prin

$$\overline{R}(P_t) = \int_{P_t} \varrho \overline{f} dv + \int_{\partial P_t} \overline{t}_{(\overline{n})} da.$$

Prin definiție, momentul rezultat (față de punctul O) al forțelor ce acționează asupra porțiunii P_t din Ω_t este

$$\overline{M}_0(P_t) = \int_{P_t} \varrho x \times \overline{f} dv + \int_{\partial P_t} x \times \overline{t}_{(\overline{n})} da.$$

Principiul impulsului afirmă că pentru orice porțiune P_t din Ω_t și orice t are loc relația

$$\dot{\overline{H}}(P_t) = \overline{R}(P_t).$$

Principiul momentului cinetic afirmă că pentru orice porțiune P_t din Ω_t și orice t are loc relația

$$\dot{\overline{K}}_0(P_t) = \overline{M}_0(P_t).$$

Ansamblul ordonat $[u, \overline{t}_{(\overline{n})}, \overline{f}]$, unde $\overline{u}$ definește o mișcare admisibilă, iar $\overline{f}, \overline{t}_{(\overline{n})}$ este un sistem de forțe, este numit proces dinamic dacă pentru orice porțiune P_t din Ω_t și orice t principiul impulsului și principiul momentului cinetic sunt verificate. Având în vedere lema 7.0.1, principiile de mai sus se scriu în forma

$$\begin{aligned} \int_{P_t} \varrho \ddot{\overline{u}} dv &= \int_{P_t} \varrho \overline{f} dv + \int_{\partial P_t} \overline{t}_{(n)} da, \\ \int_{P_t} \varrho x \times \ddot{\overline{u}} dv &= \int_{P_t} \varrho x \times \overline{f} dv + \int_{\partial P_t} x \times \overline{t}_{(\overline{n})} da. \end{aligned}$$

În cele ce urmează vom prezenta formele locale ale principiului impulsului și principiul momentului cinetic.

Teorema 7.0.1. [Lema lui Cauchy] Dacă $[\overline{u}, \overline{t}_{(\overline{n})}, \overline{f}]$ este un proces dinamic atunci pentru orice vector unitar dat n avem

$$\overline{t}_{(\overline{n})} = -\overline{t}_{(-\overline{n})}.$$

Demonstrație: Deoarece domeniul ocupat de corp este mărginit, având în vedere proprietățile lui $\varrho, \overline{u}$ și $\overline{f}$, rezultă că funcția

$$k(t) = \sup_{x \in \overline{P}_t} |\varrho(\overline{f} - \ddot{\overline{u}})|,$$

este finită pe I pentru orice $P_t \subset \Omega_t$. Deducem

$$\left| \int_{\partial P_t} \overline{t}_{(\overline{n})} da \right| \leq k \operatorname{vol}(P_t),$$

pe I , unde $\operatorname{vol}(P_t)$ este volumul lui P_t .

Să considerăm un punct $x_0 \in \Omega_t$ și un vector unitar $\overline{m}$. Vom aplica principiul impulsului în cazul când P_t este un paralelipiped, P^δ , cu centrul în x_0 , având fețele $A_1 A_2 A_3 A_4$ și $A'_1 A'_2 A'_3 A'_4$ normale la $\overline{m}$. Vom presupune că aceste fețe sunt pătrate cu latura δ și le vom nota prin $\mathcal{A}_\delta^+$ și $\mathcal{A}_\delta^-$, respectiv. De asemenea presupunem că muchia $A_1 A'_1$ este egală cu δ^2 . Să notăm cu $\mathcal{A}_\delta$ reuniunea fețelor paralele cu $\overline{m}$.

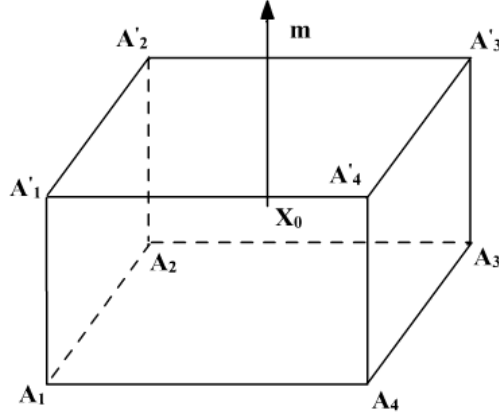


Fig. 1

Avem

$$\partial P^\delta = \mathcal{A}_\delta^+ \cup \mathcal{A}_\delta^- \cup \mathcal{A}_\delta$$

și

$$\text{vol}(P^\delta) = \delta^4, \quad \text{aria}(\mathcal{A}_\delta^\pm) = \delta^2, \quad \text{aria}(\mathcal{A}_\delta) = 4\delta^3.$$

Deducem

$$\frac{1}{\delta^2} \int_{\partial P^\delta} \bar{t}_{(\bar{n})} da \rightarrow 0 \quad \text{pentru} \quad \delta \rightarrow 0.$$

Deoarece $\bar{t}_{(\bar{p})}$ este continuu pe Ω_t pentru orice vector unitar fixat $\bar{p}$, rezultă

$$\frac{1}{\delta^2} \int_{\mathcal{A}_\delta^\pm} \bar{t}_{(\pm \bar{m})} da \rightarrow \bar{t}_{(\pm \bar{m})}(x_0, t), \quad \frac{1}{\delta^2} \int_{\mathcal{A}_\delta} \bar{t}_{(\bar{n})} da \rightarrow 0 \quad \text{atunci când} \quad \delta \rightarrow 0.$$

Vom obține

$$\bar{t}_{(\bar{m})}(x_0, t) + \bar{t}_{(-\bar{m})}(x_0, t) = 0,$$

relație ce demonstrează teorema, întrucât $\bar{m}$ și x_0 sunt arbitrare. ■

Vom nota cu $t_i(x, t; \bar{n})$ componentele vectorului $\bar{t}_{(\bar{n})}$ în baza $\bar{e}_i$.

Teorema 7.0.2. [Teorema fundamentală a lui Cauchy] Dacă $[\bar{u}, \bar{t}_{(\bar{n})}, \bar{f}]$ este un proces dinamic, atunci există un tensor $\sigma = (\sigma_{ij})$ de clasă C^1 pe $\bar{\Omega}_t \times I$ astfel că pentru fiecare vector unitar $\bar{n}$, avem

$$\bar{t}_{(\bar{n})}(x, t) = \sigma(x, t) \bar{n}, \quad t_i(x, t; \bar{n}) = \sigma_{ji}(x, t) n_j,$$

unde n_i sunt componentele vectorului $\bar{n}$.

Demonstrație. Să considerăm o porțiune P_t , astfel încât ea și frontiera sa este interioară domeniului și este de forma unui tetraedru $AA_1A_2A_3$ în care vectorii $\overrightarrow{AA_i}$ au drept versori pe $\bar{e}_i$, respectiv, iar A coincide cu punctul în care se calculează tensiunea după direcția $\bar{n}$. Fie $\bar{n}$ versorul normalei exterioare la fața $A_1A_2A_3$. Fie $\mathcal{A}$ fața tetraedrului cu normala unitară exterioară $\bar{n}$, iar $\mathcal{A}_i$ fața tetraedrului care are drept normală pe $\bar{e}_i$.

Principiul impulsului aplicat tetraedrului considerat, devine

$$\int_{P_t} \rho(a - \bar{f}) dv = \int_{\sigma} \bar{t}_{(\bar{n})} da + \int_{\mathcal{A}_1} \bar{t}_{(-\bar{e}_1)} da + \int_{\mathcal{A}_2} \bar{t}_{(-\bar{e}_2)} da + \int_{\mathcal{A}_3} \bar{t}_{(-\bar{e}_3)} da.$$

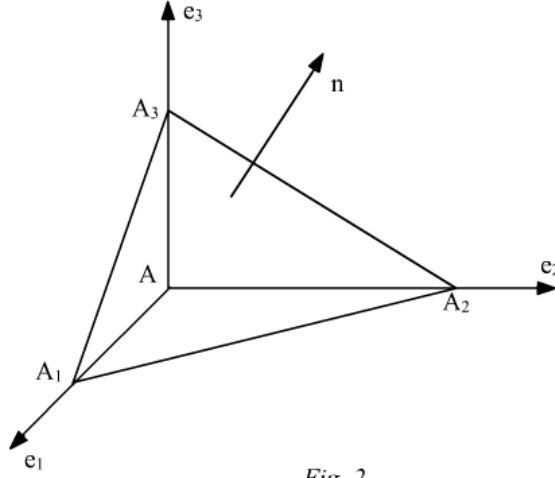


Fig. 2

Aplicând lema lui Cauchy, deducem

$$\int_{P_t} \rho(a - \bar{f}) dv = \int_{\sigma} \bar{t}_{(\bar{n})} da - \int_{\mathcal{A}_1} \bar{t}_{(\bar{e}_1)} da - \int_{\mathcal{A}_2} \bar{t}_{(\bar{e}_2)} da - \int_{\mathcal{A}_3} \bar{t}_{(\bar{e}_3)} da.$$

Dacă notăm

$$\bar{t}_{(\bar{n})} = t_i \bar{e}_i, \quad \bar{t}_{(\bar{e}_i)} = \sigma_{ij} \bar{e}_j,$$

atunci vom deduce

$$\int_{P_t} \rho(a_i - f_i) dv = \int_{\mathcal{A}} t_i da - \int_{\mathcal{A}_1} \sigma_{1i} da - \int_{\mathcal{A}_2} \sigma_{2i} da - \int_{\mathcal{A}_3} \sigma_{3i} da.$$

Deoarece $\bar{t}_{(p)}$ este continuu pentru orice vector unitar p fixat, deducem

$$[\rho(a_i - f_i)]^* \text{vol}(P_t) = t_i^* \text{aria}(\mathcal{A}) - \sigma_{1i}^* \text{aria}(\mathcal{A}_1) - \sigma_{2i}^* \text{aria}(\mathcal{A}_2) - \sigma_{3i}^* \text{aria}(\mathcal{A}_3)$$

unde prin $*$ am notat valoarea unei funcții într-un anumit punct dat de teorema de medie pentru funcția respectivă.

Fie h înălțimea tetraedrului dusă din x . Avem

$$\text{vol}(P_t) = \frac{1}{3} h \text{aria}(\mathcal{A}), \quad \text{aria}(\mathcal{A}_i) = n_i \text{aria}(\mathcal{A}),$$

unde $\bar{n} = n_i \bar{e}_i$. Obținem

$$[\varrho(a_i - f_i)]^* \frac{1}{3} h = t_i^* - \sigma_{ji}^* n_j.$$

Dacă facem ca h să tindă la zero, deducem

$$t_i(x, t; \bar{n}) = \sigma_{ji} n_j(x),$$

ceea ce demonstrează teorema. Să observăm că formula este adevărată și pentru $\bar{n} = \pm \bar{e}_i$. Faptul că funcțiile σ_{ij} sunt de clasă C^1 rezultă din ipoteza că t_i are această proprietate oricare ar fi $\bar{n}$. ■

Această relație exprimă dependența vectorului tensiune $\bar{t}_{(\bar{n})}$ de vector $\bar{n}$; ea este cunoscută sub numele de formula lui Cauchy. Tensorul σ_{ij} este numit tensorul tensiune a lui Cauchy. Rezultă că vectorii tensiune care acționează pe trei plane liniar independente, într-un punct dat, determină vectorul tensiune pe orice suprafață, în acest punct.

Teorema 7.0.3. [Ecuatiile de mișcare-Teorema lui Cauchy-Poisson] Fie o mișcare admisibilă definită de vectorul $\bar{u}$ și sistemul de forțe $\bar{f}$, $\bar{t}_{(\bar{n})}$. Atunci $[\bar{u}, \bar{t}_{(\bar{n})}, \bar{f}]$ este un proces dinamic dacă și numai dacă sunt satisfăcute condițiile:

1. există tensorul tensiune σ astfel încât $\bar{t}_{(\bar{n})} = \sigma \bar{n}$ și $\sigma = \sigma^T$.
2. $\bar{u}$, σ , $\bar{f}$ satisfac ecuațiile

$$\text{Div}_x \sigma + \varrho \bar{f} = \varrho \ddot{\bar{u}} \quad \text{sau echivalent (scris pe componente)} \quad \frac{\partial \sigma_{ji}}{\partial x_j} + \varrho f_i = \varrho \ddot{u}_i,$$

unde pentru $P = (P_1, P_2, P_3) \in C^1(\Omega_t, \mathbb{R}^{3 \times 3})$, $P_i \in C^1(\Omega_t, \mathbb{R}^3)$, $i = 1, 2, 3$, am definit $\text{Div}_x P = \begin{pmatrix} \text{div}_x P_1 \\ \text{div}_x P_2 \\ \text{div}_x P_3 \end{pmatrix}$

Demonstrație: Dacă avem un proces dinamic, atunci conform teoremei fundamentale a lui Cauchy există tensorul tensiune σ astfel încât $\bar{t}_{(\bar{n})} = \sigma \bar{n}$. Să arătăm că $\sigma \in \text{Sym}(3)$. Fie $P_t \subset \Omega_t$. Vom scrie principiul impulsului și principiul momentului cinetic în forma

$$\begin{aligned} \int_{P_t} \varrho \ddot{u}_i dv &= \int_{P_t} \varrho f_i dv + \int_{\partial P_t} t_i da, \\ \int_{P_t} \varrho e_{ijk} x_j \ddot{u}_k dv &= \int_{P_t} \varrho e_{ijk} x_j f_k dv + \int_{\partial P_t} e_{ijk} x_j t_k da, \end{aligned}$$

unde e_{ijk} este simbolul de permutare. Deoarece au loc relațiile $t_i = \sigma_{ji} n_j$ aplicând teorema divergenței, avem

$$\begin{aligned} \int_{\partial P_t} t_i da &= \int_{\partial P_t} \sigma_{ji} n_j da = \int_{\partial P_t} \left\langle \begin{pmatrix} \sigma_{1i} \\ \sigma_{2i} \\ \sigma_{3i} \end{pmatrix}, \bar{n} \right\rangle da = \int_{P_t} \text{div}_x \begin{pmatrix} \sigma_{1i} \\ \sigma_{2i} \\ \sigma_{3i} \end{pmatrix} dv = \int_{P_t} \frac{\partial \sigma_{ji}}{\partial x_j} dv, \\ \int_{\partial P_t} e_{ijk} x_j t_k da &= \int_{\partial P_t} e_{ijk} x_j \sigma_{rk} n_r da = \int_{P_t} \frac{\partial}{\partial x_r} (e_{ijk} x_j \sigma_{rk}) da = \int_{P_t} (e_{ijk} x_j \frac{\partial \sigma_{rk}}{\partial x_r} + e_{ijk} \sigma_{jk}) dv. \end{aligned}$$

Relațiile ce descriu principiul inerției și principiul momentului cinetic pot fi scrise deci astfel

$$\begin{aligned} \int_{P_t} (\varrho \ddot{u}_i - \varrho f_i - \sigma_{ji,j}) dv &= 0, \\ \int_{P_t} [e_{ijk} x_j (\varrho \ddot{u}_k - \varrho f_k - \frac{\partial \sigma_{rk}}{\partial x_r}) - e_{ijk} \sigma_{jk}] dv &= 0. \end{aligned}$$

Deoarece funcțiile de sub semnul integralei sunt continue, iar domeniul P_t este arbitrar, rezultă ecuațiile

$$\begin{aligned}\varrho \ddot{u}_i &= \varrho f_i + \frac{\partial \sigma_{ji}}{\partial x_j}, \\ [e_{ijk} x_j (\varrho \ddot{u}_k - \varrho f_k - \frac{\partial \sigma_{rk}}{\partial x_r})] &= e_{ijk} \sigma_{jk}.\end{aligned}$$

Ecuațiilor de mai sus implică $e_{ijk} \sigma_{jk} = 0$, adică $\sigma \in \text{Sym}(3)$. Implicația inversă se demonstrează parcurgând invers pașii de mai sus. ■

Ecuații din teorema lui Cauchy-Poisson reprezintă ecuațiile de mișcare ale mediului continuu considerat. Principiile prezentate și ecuațiile obținute sunt valabile indiferent de constituția internă a mediului continuu considerat. De remarcat că în descrierea deformării nu am folosit încă nicăieri caracteristici ce deosebesc un solid de un fluid. Prin urmare, alte noi ecuații sunt necesare, ecuații care să indice în procesul de modelare unele proprietăți specifice ale mediului continuu.

Problema 7.0.2. Se consideră că deplasarea $\bar{u}$ definită pe $D \times [0, \infty)$ a punctelor unui mediu deformabil ocupând domeniul deschis D din $\mathbb{R}^3$ este dată prin

$$\begin{aligned}u_1 &= 3t^2(1 + 2X_1 X_2 X_3), \\ u_2 &= t X_1^2 + 5X_2^2 X_3 t^3, \\ u_3 &= (2^t - 1)(X_1 + 5X_2 X_3),\end{aligned}$$

unde $(X_1, X_2, X_3) \in D$, $t \in [0, \infty)$. Să se determine:

1. poziția la momentul $t = 1$ a particulei P care în configurația de referință are coordonatele $(1, 2, 0)$;
2. gradientul deformării;
3. considerând că asupra mediului deformabil nu acționează nicio forță exterioară, să se determine $\text{Div } \sigma$, unde σ este tensorul tensiune al lui Cauchy.
4. dacă D este un cub de latura 1 centrat în originea sistemului de coordonate, să se determine $\int_{\partial D} \sigma n da$, unde n este normala exterioară la frontiera laterală.

Capitolul 8

Ecuatii constitutive

8.1 Ecuatiile solidelor elastice în teoria liniară

Principiile prezentate în capitolul precedent sunt valabile pentru orice mediu continuu, indiferent de constituția sa internă. Două corpuri de aceeași formă și aceeași masă pot avea comportări diferite atunci când sunt supuse la aceleași solicitări. Sunt necesare, deci, anumite relații care să definească diverse clase de medii continue, corespunzător diverselor comportări ale acestora. Aceste relații se numesc relații constitutive sau ecuații constitutive. Este ușor de observat faptul că ecuațiile stabilite până acum sunt insuficiente pentru caracterizarea necunoscutelor.

Pentru a scoate în evidență o anumită comportare, caracteristică unei clase de medii continue, s-a imaginat un model matematic. Astfel se introduc diverse tipuri de medii continue ideale: elastice, fluide, vâscoelastice etc.

În cazul modelării deformării solidelor, se folosește descrierea materială a deformării. Prin urmare, ecuațiile ce descriu matematic comportarea solidului se vor scrie doar cu ajutorul cantităților definite pe configurația inițială (nedeformată) și cu ajutorul coordonatelor materiale. Problematika generală în cazul neliniar necesită o prezentare mai laborioasă, și prin urmare noi ne vom limita doar la cazul teoriei liniare, adică la cazul deformărilor mici (infinitesimale).

În unele cazuri, vectorul deplasare poate fi presupus de forma $\bar{u} = \delta \tilde{\bar{u}}$ unde δ este un parametru ale cărui puteri mai mari sau egale cu doi sunt neglijabile, iar $\tilde{\bar{u}}$ este un vector care nu depinde de δ . Se obține atunci teoria liniară a deformărilor sau teoria deformărilor mici. Să remarcăm faptul că, în limitele acestei teorii, derivatele parțiale ale componentelor vectorului deplasare în raport cu coordonatele spațiale coincid cu derivatele parțiale în raport cu coordonatele materiale corespunzătoare. Această afirmație se verifică ușor astfel

$$\frac{\partial u_i}{\partial X_1} = \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \frac{\partial x_j}{\partial X_1} = \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \left(\delta_{1j} + \frac{\partial u_j}{\partial X_1} \right) = \frac{\partial u_i}{\partial x_1} + O(\delta^2) \text{ ș.a.m.d.}$$

În acest caz vom nota tensorul Green-St. Venant E prin ε . Avem

$$2\varepsilon_{ij} = \frac{\partial u_i}{\partial X_j} + \frac{\partial u_j}{\partial X_i},$$
$$\varepsilon = \frac{1}{2}([\nabla_X \bar{u}] + [\nabla_X \bar{u}]^T) \in \text{Sym}(3) := \{X \in \mathbb{R}^{3 \times 3} \mid X^T = X\}.$$

Relațiile de mai sus reprezintă relațiile deformări-deplasări sau ecuațiile geometrice în teoria liniară a deformării.

Pentru orice $X \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ definim $\text{sym} X = \frac{1}{2}(X^T + X) \in \text{Sym}(3)$, $\text{skew} X = \frac{1}{2}(X - X^T) \in \mathfrak{so}(3)$ și partea deviatorică $\text{dev} X = X - \frac{1}{3} \text{tr}(X) \cdot I_3 \in \mathfrak{sl}(3) := \{X \in \mathbb{R}^{3 \times 3} \mid \text{tr}(X) = 0\}$. Are loc descompunerea ortogonală a lui Cartan

$$\mathbb{R}^{3 \times 3} = \{\mathfrak{sl}(3) \cap \text{Sym}(3)\} \oplus \mathfrak{so}(3) \oplus \mathbb{R} \cdot I_3, \quad X = \text{dev sym } X + \text{skew } X + \frac{1}{3} \text{tr}(X) \cdot I_3.$$

Cu aceste notații, putem remarca că

$$\varepsilon = \text{sym}[\nabla_X \bar{u}],$$

acest fapt explicând și prezența factorului 2 în definirea tensorului Green-St. Venant din teoria neliniară.

În teoria liniară, prin solid elastic vom înțelege un mediu continuu pentru care tensorul lui Cauchy este o funcțională liniară de răspuns depinzând de tensorul de deformare ε și X , adică

$$\sigma = \sigma(\varepsilon, X) \in \text{Sym}(3),$$

dată de

$$\sigma = \mathcal{C} \cdot \varepsilon, \quad \sigma_{ij} = \mathcal{C}_{ijkl} \varepsilon_{kl},$$

unde

$$\mathcal{C} : \text{Sym}(3) \rightarrow \text{Sym}(3), \quad \text{adică} \quad \mathcal{C}_{ijrs} = \mathcal{C}_{rsij} = \mathcal{C}_{jirs}. \quad (8.1.1)$$

Aceste relații deformări-tensiuni poartă denumirea de ecuații constitutive. Să nu uită faptul că ε depinde de gradientul deformării, adică $\varepsilon = \varepsilon(F)$. Un caz particular de materiale elastice este cel al solidelor elastice izotrope. Un solid elastic se numește izotrop dacă proprietățile lui elastice sunt aceleași în orice direcție. În termeni matematici, putem descrie acest fapt cerând ca funcționalele de răspuns să fie invariante la atunci când $F \mapsto FQ$, pentru orice $Q \in \text{SO}(3)$. Se deduce faptul că ecuațiile constitutive sunt date de

$$\sigma = \lambda \text{tr}[\varepsilon] I_3 + 2\mu \varepsilon = \lambda \text{tr}[\nabla_X \bar{u}] I_3 + \mu \text{sym}[\nabla_X \bar{u}] = \frac{3\lambda + 2\mu}{3} \text{tr}[\nabla_X \bar{u}] I_3 + \mu \text{dev}_3 \text{sym}[\nabla_X \bar{u}],$$

$$\sigma_{ji} = \lambda \varepsilon_{rr} \delta_{ij} + 2\mu \varepsilon_{ij},$$

unde λ, μ sunt coeficienți constitutivi ce caracterizează materialul elastic, numiți coeficienții lui Lamé. Dacă λ, μ și ϱ_0 sunt constante, spunem că solidul elastic este omogen.

Mai mult, în cazul deformărilor infinitezimale ecuația de continuitate se exprimă sub forma (s-a demonstrat la seminar)

$$\varrho = \varrho_0(1 - \text{div} \bar{u}),$$

iar forța specifică de volum $\bar{f}$ poate fi considerată de asemenea infinitezimală. Astfel, în teoria liniară se pot folosi aproximările

$$\varrho f_i \simeq \varrho_0 f_i, \quad \varrho \ddot{u}_i \simeq \varrho_0 \ddot{u}_i,$$

Cum ecuațiile de mișcare sunt în general

$$\frac{\partial \sigma_{ji}}{\partial x_j} + \varrho f_i = \varrho \ddot{u}_i \quad \text{în} \quad \Omega_t \times (t_0, t_1)$$

fără produce mari erori, putem considera ca necunoscuta $\bar{u}$ să fie soluție a ecuației

$$\frac{\partial \sigma_{ji}}{\partial X_j} + \varrho_0 f_i = \varrho_0 \ddot{u}_i \quad \text{în} \quad \Omega_0 \times (t_0, t_1).$$

În cazul materialelor elastice omogene și izotrope ecuațiile de mișcare și ecuațiile constitutive și ecuațiile geometrice ne conduc la următoarele ecuații în termenii vectorului deplasare

$$\mu \Delta \bar{u} + (\lambda + \mu) [\nabla_X (\operatorname{div}_X \bar{u})]^T + \varrho_0 \bar{f} = \varrho_0 \ddot{\bar{u}} \quad \text{în} \quad \Omega_0 \times (t_0, t_1)$$

unde Δ este operatorul lui Laplace. Pentru a avea o formulare completă a problemei, vom considera condițiile la frontieră

$$\begin{aligned} \bar{u} &= \bar{\hat{u}} \quad \text{pe} \quad \bar{S}_1 \times (t_0, t_1) & (\text{condiții Dirichlet}), \\ \sigma \bar{n} &= \bar{\hat{t}} \quad \text{pe} \quad S_2 \times (t_0, t_1) & (\text{condiții Neumann}), \end{aligned}$$

unde $\bar{S}_1 \cup S_2 = \partial B$, $S_1 \cap S_2 = \emptyset$, $\bar{\hat{u}}$, $\bar{\hat{t}}$ sunt funcții prescrise, și următoarele condiții inițiale

$$\bar{u}(X, 0) = \bar{u}^0(X), \quad \dot{\bar{u}}(X, 0) = \bar{v}^0(X), \quad X \in \Omega_0,$$

unde $\bar{u}^0$, $\bar{v}^0$ sunt funcții prescrise.

8.2 Ecuațiile fluidelor omogene și izotrope

În cazul modelării curgerii fluidelor, se folosește descrierea spațială a deformării. Prin urmare, ecuațiile ce descriu matematic comportarea fluidului se vor scrie doar cu ajutorul cantităților definite pe configurația actuală și cu ajutorul coordonatelor spațiale. Să remarcăm că ecuația de continuitate $\varrho_0 = \varrho J$ implică atât pe ϱ_0 , J ce sunt definite în mod natural pe Ω_0 cât și pe ϱ ce este definit în mod firesc pe Ω_t . Ne-am dori să exprimăm ecuația de continuitate doar cu ajutorul variabilelor spațiale și doar în termenii lui ϱ . Observăm că prin derivare, ecuația de continuitate este echivalentă cu

$$0 = \frac{d}{dt}(\varrho J) = \dot{\varrho} J + \varrho \dot{J}.$$

Să determinăm expresia derivatei materiale ale jacobianului transformării

$$\frac{dJ}{dt} = \frac{\partial J}{\partial \left(\frac{\partial x_i}{\partial X_K} \right)} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial x_i}{\partial X_K} \right) = J \frac{\partial X_K}{\partial x_i} \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \frac{\partial x_j}{\partial X_K} = J \frac{\partial v_i}{\partial x_i} = J \operatorname{div}_x \bar{v}.$$

Am folosit aici faptul că

$$\frac{\partial J}{\partial \left(\frac{\partial x_i}{\partial X_K} \right)} = J \frac{\partial X_K}{\partial x_i},$$

egalitate ce rezultă din calculul lui J folosind dezvoltarea după linia i . Reținem faptul că

$$\dot{J} = J \operatorname{div}_x \bar{v}.$$

Pe de altă parte, pentru $\varrho = \varrho(x, t)$, avem

$$0 = \dot{\varrho} = \frac{\partial \varrho}{\partial t} + \frac{\partial \varrho}{\partial x_i} v_i = \frac{\partial \varrho}{\partial t} + \nabla_x \varrho \cdot \bar{v}.$$

Ecuatia de continuitate are deci următoarea formă

$$\dot{\varrho} J + \varrho \dot{J} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\partial \varrho}{\partial t} + \nabla_x \varrho \cdot \bar{v} + \varrho \operatorname{div}_x \bar{v} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\partial \varrho}{\partial t} + \operatorname{div}_x (\varrho \bar{v}) = 0.$$

Numim fluid Stokes un mediu continuu pentru care ecuațiile constitutive sunt

$$\sigma = \sigma(d, \varrho),$$

unde tensorul viteză de deformare d_{ij} și este definit de

$$d = \operatorname{sym} \nabla_x \bar{v},$$

Acest tensor reprezintă partea simetrică a gradientului spațial a vectorului viteză $(\nabla_x \bar{v})_{ij} = (\frac{\partial v_i}{\partial x_j})$.

Problema 8.2.1. Fie tensorul de deformare Green-St. Venant E_{ij} . Să se arate că

$$\dot{E}_{ij} = d_{ij} \frac{\partial x_i}{\partial X_k} \frac{\partial x_j}{\partial X_l}.$$

Deseori, în mecanica fluidelor compresibile, omogene și izotrope se presupune că

$$\sigma_{ij} = (-p + \lambda d_{rr}) \delta_{ij} + 2\mu d_{ij} = (-p + \lambda \frac{\partial v_r}{\partial x_r}) \delta_{ij} + \mu \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right),$$

unde λ și μ sunt coeficienți constitutivi constanți, iar p se numește presiune și depinde de ϱ . Această dependență este o cerință constitutivă și se consideră cunoscută, descriind tipul de fluid considerat.

Din cele spuse mai sus rezultă că ecuațiile de bază ale unui fluid compresibil, omogen și izotrop sunt

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varrho}{\partial t} + \varrho \operatorname{div}_x \bar{v} &= 0, \\ \mu \Delta \bar{v} + (\lambda + \mu) [\nabla_x (\operatorname{div}_x \bar{v})]^T + \varrho \bar{f} &= \rho \left(\frac{\partial \bar{v}}{\partial t} + (\nabla_x \bar{v}) \bar{v} \right), \end{aligned}$$

pe $\Omega_t \times (t_0, t_1)$.

Ecuatiile de mișcare scrise în această formă poartă numele de ecuațiile lui Navier-Stokes. Se observă că sunt neliniare. Avem astfel patru ecuații pentru cele patru necunoscute v_i și ρ . La aceste ecuații se adaugă condițiile inițiale și condițiile pe frontieră.

O deformare $x = x(X, t) = \phi^t(X, t)$ a unui mediu continuu este izocoră (adică conservă volumul), dacă, pentru orice parte $P \subset \Omega_0$, are loc $\operatorname{vol}(P) = \operatorname{vol}(\phi^t(P))$ pentru orice $t \in I$.

Un mediu continuu este incompresibil, dacă orice deformare a sa este izocoră. Ținând cont de faptul că

$$\frac{d}{dt} \text{vol}(\phi^t(P)) = \frac{d}{dt} \int_{\phi^t(P)} dv = \frac{d}{dt} \int_P J dV = \int_P \dot{J} dV,$$

putem spune că o deformare este izocoră dacă și numai dacă $\dot{J} = 0$. Prin urmare, un mediu este incompresibil, dacă pentru orice deformare

$$\dot{J} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \text{div } \bar{v} = 0.$$

Dacă fluidul considerat este incompresibil, din ecuația de continuitate rezultă

$$\dot{\varrho} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \varrho(x, t) = \varrho_0(X(x, 0)),$$

ceea ce înseamnă că densitatea este determinată. Pentru fluide incompresibile, presiunea p va fi o funcție necunoscută, alături de viteza $\bar{v}$, iar tensiunile pentru fluide incompresibile, omogene și izotrope au forma

$$\sigma_{ij} = -p \delta_{ij} + 2\mu d_{ij} = -p \delta_{ij} + \mu \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right),$$

μ fiind constantă iar condiția de incompresibilitate fiind exprimată prin condiția

$$d_{ii} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\partial v_i}{\partial x_i} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \text{div}_x \bar{v} = 0.$$

Capitolul 9

Unele probleme matematice privind mediile elastice izotrope

9.1 Unicitatea soluției pentru cazul dinamic

În această secțiune se stabilesc teoreme de unicitate în teoria liniară dinamică a materialelor elastice.

Considerăm problema la limită cu valori inițiale pentru materiale elastice omogene dată de ecuațiile de mișcare

$$\frac{\partial \sigma_{ji}}{\partial X_j} + \varrho_0 f_i = \varrho_0 \ddot{u}_i \quad \text{în} \quad \Omega_0 \times (t_0, t_1) \quad (9.1.1)$$

ecuațiile constitutive

$$\sigma_{ij} = \mathcal{C}_{ijrs} \varepsilon_{rs}, \quad (9.1.2)$$

ecuațiile geometrice

$$\varepsilon_{rs} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_r}{\partial X_s} + \frac{\partial u_s}{\partial X_r} \right) \quad (9.1.3)$$

condițiile la frontieră

$$\begin{aligned} \bar{u} &= \widehat{\bar{u}} \quad \text{pe} \quad \bar{S}_1 \times (t_0, t_1) && \text{(condiții Dirichlet),} \\ \sigma \bar{n} &= \widehat{\bar{t}} \quad \text{pe} \quad S_2 \times (t_0, t_1) && \text{(condiții Neumann),} \end{aligned}$$

unde $\bar{S}_1 \cup S_2 = \partial\Omega_0$, $S_1 \cap S_2 = \emptyset$, $\widehat{\bar{u}}$, $\widehat{\bar{t}}$ sunt funcții prescrise, și următoarele condiții inițiale

$$\bar{u}(X, 0) = \bar{u}^0(X), \quad \dot{\bar{u}}(X, 0) = \bar{v}^0(X), \quad X \in \Omega_0,$$

unde $\bar{u}^0$, $\bar{v}^0$ sunt funcții prescrise.

Definim energia internă ca fiind

$$\mathcal{W} = \frac{1}{2} \mathcal{C}_{ijrs} e_{ij} e_{rs} = \frac{1}{2} \langle \mathcal{C} . \varepsilon, \varepsilon \rangle \quad (9.1.4)$$

Să observăm că folosind relațiile de simetrie (8.1.1), între tensorul de deformare și energia internă au loc relațiile

$$\mathcal{W} = \frac{1}{2} \sigma_{rs} e_{rs} = \frac{1}{2} \langle \sigma, \varepsilon \rangle \quad (9.1.5)$$

și

$$\sigma = \frac{\partial \mathcal{W}}{\partial \varepsilon} \quad \Leftrightarrow \quad \sigma_{ij} = \frac{\partial \mathcal{W}}{\partial \varepsilon_{ij}}. \quad (9.1.6)$$

Un model în care tensorul tensiune este derivata energiei interne în raportul cu deformarea se numește hiperelastic.

Teorema 9.1.1. *Presupunem că*

(i) $\mathcal{W}$ este formă pătratică semipozitiv definită în raport cu ε ;

(ii) ϱ_0 este strict pozitiv;

(iv) coeficienții constitutivi satisfac relația de simetrie (8.1.1).

În aceste condiții problema mixtă a elasticității liniare are cel mult o soluție.

Demonstrație. Prin înmulțirea ecuațiilor de mișcare cu $\dot{u}_i$ deducem

$$\sigma_{ij} \dot{e}_{ij} = (\sigma_{ij} \dot{u}_i)_{,j} + \rho_0 f_i \dot{u}_i - \rho_0 \dot{u}_i \ddot{u}_i. \quad (9.1.7)$$

Din teorema divergenței și (9.1.7), rezultă că

$$\int_{\Omega_0} \sigma_{ij} \dot{e}_{ij} dV = \int_{\partial\Omega_0} \sigma_i \dot{u}_i dA + \int_{\Omega_0} \rho_0 f_i \dot{u}_i dV - \int_{\Omega_0} \rho_0 \dot{u}_i \ddot{u}_i dV. \quad (9.1.8)$$

Dacă introducem energia totală $\mathcal{E}$ prin

$$\mathcal{E} = \frac{1}{2} \int_{\Omega_0} (\rho_0 \dot{u}_i \ddot{u}_i + 2\mathcal{W}) dV, \quad (9.1.9)$$

atunci, din (9.1.8) deducem că

$$\dot{\mathcal{E}} - \int_{\Omega_0} \rho_0 f_i \dot{u}_i dV - \int_{\partial\Omega_0} t_i \dot{u}_i dA = 0. \quad (9.1.10)$$

Să considerăm că există două soluții $u_i^{(\alpha)}$ ($\alpha = 1, 2$). Atunci diferența lor $\bar{u}_i$ va fi soluția unui sistem omogen cu condiții la frontiera și inițiale nule. Dacă $\bar{\mathcal{E}}$ este energia totală corespunzătoare lui $\bar{u}$ atunci din (9.1.10) obținem

$$\dot{\bar{\mathcal{E}}}(t) = \bar{\mathcal{E}}(0), \quad 0 \leq t < t_1.$$

Din condițiile inițiale deducem că $\bar{\mathcal{E}}(0) = 0$. Se deduce astfel din ipoteză că $\bar{\mathcal{E}}(t) = 0$, $0 \leq t < t_1$. Deci $\dot{\bar{u}}_i = 0$, $\bar{\theta} = 0$ pe $\bar{\Omega}_0 \times [0, t_1)$. Dar $\bar{u}_i$ sunt nule la momentul inițial și deci teorema este complet demonstrată. ■

În cazul ecuațiilor de mișcare și ecuațiilor constitutive și ecuațiilor geometrice ne conduc la următoarele ecuații în termenii vectorului deplasare

$$\mu \Delta \bar{u} + (\lambda + \mu) [\nabla_X (\operatorname{div}_X \bar{u})]^T + \varrho_0 \bar{f} = \varrho_0 \ddot{\bar{u}} \quad \text{în} \quad \Omega_0 \times (t_0, t_1)$$

unde Δ este operatorul lui Laplace.

Pentru medii elastice izotrope, deoarece

$$\sigma = \lambda \operatorname{tr}[\varepsilon] I_3 + 2\mu \varepsilon, \quad (9.1.11)$$

energia internă este dată de

$$\begin{aligned} \mathcal{W} &= \frac{1}{2} \langle \lambda \operatorname{tr}[\varepsilon] I_3 + 2\mu \varepsilon, \varepsilon \rangle = \frac{1}{2} \left(\lambda \operatorname{tr}[\varepsilon] \langle I_3, \varepsilon \rangle + 2\mu \langle \varepsilon, \varepsilon \rangle \right) = \frac{1}{2} \left(\lambda [\operatorname{tr} \varepsilon]^2 + 2\mu \|\varepsilon\|^2 \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{3\lambda + 2\mu}{3} [\operatorname{tr} \varepsilon]^2 + 2\mu \|\operatorname{dev}_3 \varepsilon\|^2 \right). \end{aligned} \quad (9.1.12)$$

Energia internă este pozitiv definită în raport cu ε dacă coeficienții constitutivi ai unui material elastic izotrop verifică următoarele inegalități

$$\mu > 0, \quad 2\mu + 3\lambda > 0. \quad (9.1.13)$$

9.2 Unicitatea soluției problemelor de echilibru

9.2.1 Ecuațiile de echilibru

În această secțiune considerăm teoria echilibrului materialelor elastice. În teoria echilibrului elastic funcțiile care apar în ecuațiile de bază nu depind de timp. Ecuațiile prezentate în secțiunea precedentă se reduc la ecuațiile de echilibru

$$\sigma_{ji,j} + \varrho_0 f_i = 0, \quad (9.2.1)$$

ecuațiile constitutive

$$\sigma_{ij} = \mathcal{C}_{ijrs} e_{rs} \quad (9.2.2)$$

ecuațiile geometrice

$$\varepsilon_{rs} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_r}{\partial X_s} + \frac{\partial u_s}{\partial X_r} \right) \quad (9.2.3)$$

și condițiile la frontieră

$$\begin{aligned} \bar{u} &= \bar{\hat{u}} \quad \text{pe} \quad \bar{S}_1 && (\text{condiții Dirichlet}), \\ \sigma \bar{n} &= \bar{\hat{t}} \quad \text{pe} \quad S_2 && (\text{condiții Neumann}), \end{aligned} \quad (9.2.4)$$

unde $\bar{S}_1 \cup S_2 = \partial\Omega_0$, $S_1 \cap S_2 = \emptyset$, $\bar{\hat{u}}$, $\bar{\hat{t}}$ sunt funcții prescrise.

Printr-un proces admisibil înțelegem un sistem de funcții (u_i, e_{ij}, t_{ij}) cu proprietățile:

- (i) $u_i \in C^2(\Omega_0) \cap C^1(\bar{\Omega}_0)$;
- (ii) e_{ij} este un tensor simetric, continuu în $\bar{\Omega}_0$;

(iii) $\sigma_{ij} \in C^1(B)$, σ_{ij} , $\sigma_{ji,j} \in C^0(\overline{\Omega_0})$, $\sigma_{ij} = \sigma_{ji}$.

Dacă definim adunarea proceselor admisibile și înmulțirea cu scalari similar se obține un spațiu vectorial.

Presupunem că: (i) forțele masice sunt continue în $\overline{B}$; (ii) coeficienții constitutivi sunt continuu diferențiabili în $\overline{\Omega_0}$ și satisfac relațiile de simetrie (8.1.1); (iii) $\tilde{u}_i$ sunt continue pe $\overline{S_1}$, $\tilde{t}_i$, sunt continue respectiv pe S_2 .

Printr-un proces termoelastic corespunzător forțelor masice f_i înțelegem un proces admisibil care satisface ecuațiile (9.2.1)–(9.2.3) în Ω_0 .

Vectorul $(f_i, \tilde{u}_i, \tilde{t}_i)$ se numește sistem extern de încărcări pentru problema mixtă a elastostaticii.

9.2.2 Reciprocitate și unicitate în elastostatică

În această secțiune se prezintă unele teoreme în teoria liniară a echilibrului materialelor elastice.

Să considerăm cazul în care corpul este supus la două sisteme de date externe $I^{(\alpha)} = (f_i^{(\alpha)}, \tilde{u}_i^{(\alpha)}, \tilde{t}_i^{(\alpha)})$, $(\alpha = 1, 2)$. Fie $s^{(\alpha)} = (u_i^{(\alpha)}, e_{ij}^{(\alpha)}, t_{ij}^{(\alpha)})$ un proces admisibil corespunzător sistemului de date externe $I^{(\alpha)}$.

Teorema 9.2.1. (Teoremă de reciprocitate). *Dacă un material elastic este supus la doua sisteme diferite de încărcări externe $I^{(\alpha)}$, $(\alpha = 1, 2)$, atunci între stările elastice corespunzătoare $s^{(\alpha)}$ avem relația*

$$\int_{\Omega_0} \varrho_0 f_i^{(1)} u_i^{(2)} dV + \int_{\partial\Omega_0} \sigma_i^{(1)} u_i^{(2)} dA = \int_{\Omega_0} \varrho_0 f_i^{(2)} u_i^{(1)} dV + \int_{\partial\Omega_0} \sigma_i^{(2)} u_i^{(1)} dA, \quad (3.2.4)$$

unde

$$\sigma_i^{(\alpha)} = \sigma_{ji}^{(\alpha)} n_j, \quad (\alpha = 1, 2).$$

Demonstrație. Fie

$$2\mathcal{W}_{\alpha\beta} = \sigma_{ij}^{(\alpha)} e_{ij}^{(\beta)}.$$

Din ecuațiile constitutive deducem

$$2\mathcal{W}_{\alpha\beta} = C_{ijrs} e_{ij}^{(\beta)} e_{rs}^{(\beta)}. \quad (9.2.5)$$

În mod evident, din relațiile de simetrie ale coeficienților constitutivi, vom obține

$$\mathcal{W}_{12} = \mathcal{W}_{21}.$$

Având în vedere ecuațiile geometrice se deduce

$$2\mathcal{W}_{\alpha\beta} = (\sigma_{ij}^{(\alpha)} u_i^{(\beta)})_{,j} - \sigma_{ji,j}^{(\alpha)} u_i^{(\beta)}. \quad (9.2.6)$$

Prin integrarea acestei relații și ținând cont de condițiile la limită vom deduce relația din enunț. ■

Fie $I^{(1)} = (f_i, \tilde{u}_i, \tilde{t}_i)$ și $s^{(1)} = (u_i, e_{ij}, t_{ij})$. Atunci, din (9.2.5) și (9.2.6) obținem

$$2 \int_B \mathcal{W}_{11} dv = \int_{\Omega_0} \sigma_{ij} e_{ij} dV = 2 \int_{\Omega_0} \mathcal{W} dV,$$

unde $\mathcal{W}$ este dat de (9.1.4). Cu ajutorul relației precedente deducem că

$$2 \int_{\Omega_0} \mathcal{W} dV = \int_{\partial\Omega_0} \sigma_i u_i dA + \int_B \rho_0 f_i u_i dV. \quad (9.2.7)$$

Aceste relații ne conduc la următoarea teoremă.

Teorema 9.2.2. (Teoremă de unicitate). *Dacă $\mathcal{W}$ este formă pătratică pozitiv definită în termenii variabilelor e_{ij} pentru orice $X \in \Omega_0$, atunci două soluții ale problemei mixte sunt egale până la o deplasare rigidă. Mai mult, dacă S_1 este nevidă, atunci problema mixtă are cel mult o soluție.*

Demonstrație. Fie u'_i și u''_i două soluții ale problemei mixte și $u = (u_i)$ diferența lor. Conform liniarității problemei (u_i) este soluție corespunzătoare ecuațiilor omogene. Mai mult, avem $u_i \sigma_i = 0$ pe $\partial\Omega_0$. Din (9.2.7) deducem

$$\int_{\Omega_0} \mathcal{W} dV = 0,$$

unde $\mathcal{W}$ este energia internă corespunzătoare pentru u_i . Deoarece $\mathcal{W}$ este pozitiv definită deducem $e_{ij} = 0$ și prin urmare

$$u_i = a_i + \varepsilon_{ijr} b_j x_r,$$

unde a_i și b_i sunt constante arbitrare. Dacă S_1 este nevidă atunci $a_i = b_i = 0$. ■

9.3 Inegalitatea lui Korn

Fie $\Omega_0 \subset \mathbb{R}^3$ un domeniu mărginit având frontiera Lipschitz. Considerăm spațiul $H_0^1(\Omega_0)$ echipat cu norma

$$\|u\|_{H_0^1(\Omega_0)} = \left(\int_{\Omega_0} \|\nabla u\|^2 dV \right)^{1/2} \quad \forall u \in H_0^1(\Omega_0). \quad (9.3.1)$$

Reamintim faptul că aceasta este o normă pe $H_0^1(\Omega_0)$ în baza inegalității lui Poincaré care spune că pentru orice $u \in H_0^1(\Omega_0)$ există o constantă $C > 0$ astfel încât

$$\|u\|_{L^2(\Omega_0)}^2 = \int_{\Omega_0} \|u\|^2 dV \leq C \int_{\Omega_0} \|\nabla u\|^2 dV = C \|u\|_{H_0^1(\Omega_0)}^2. \quad (9.3.2)$$

După cum vom vedea, în elastostatica liniară inegalitatea lui Poincaré nu este suficientă pentru a putea aplica teorema Lax-Milgram în demonstrarea existenței soluției.

Teorema 9.3.1. [Inegalitatea lui Korn] *Fie $\Omega_0 \subset \mathbb{R}^3$ un domeniu mărginit. Are loc inegalitatea*

$$\|\nabla u\|_{L^2(\Omega_0; \mathbb{R}^{3 \times 3})}^2 \leq 2 \|\text{sym} \nabla u\|_{L^2(\Omega_0; \mathbb{R}^{3 \times 3})}^2 \quad \forall u \in H_0^1(\Omega_0). \quad (9.3.3)$$

Demonstrație. Vom demonstra inegalitatea pentru $u \in C_0^\infty(\Omega_0)$.

Fie $u \in C_0^\infty(\Omega_0)$. Calculăm

$$\begin{aligned} \|\text{sym} \nabla u\|_{L^2(\Omega_0; \mathbb{R}^{3 \times 3})}^2 &= \int_{\Omega_0} \|\text{sym} \nabla u\|^2 dV = \int_{\Omega_0} \langle \text{sym} \nabla u, \text{sym} \nabla u \rangle dV \\ &= \frac{1}{2} \int_{\Omega_0} \|\nabla u\|^2 dV + \frac{1}{2} \int_{\Omega_0} \langle \nabla u, [\nabla u]^T \rangle dV \\ &= \frac{1}{2} \|\nabla u\|_{L^2(\Omega_0; \mathbb{R}^{3 \times 3})}^2 + \frac{1}{2} \int_{\Omega_0} \langle \nabla u, [\nabla u]^T \rangle dV. \end{aligned} \quad (9.3.4)$$

Pentru $u \in C_0^\infty(\Omega_0)$ are loc

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_0} \langle \nabla u, [\nabla u]^T \rangle dV &= \int_{\Omega_0} \frac{\partial u_i}{\partial X_j} \frac{\partial u_j}{\partial X_i} dV = - \int_{\Omega_0} u_i \frac{\partial^2 u_j}{\partial X_i \partial X_j} dV \\ &= \int_{\Omega_0} \frac{\partial u_i}{\partial X_j} \frac{\partial u_i}{\partial X_j} dV \geq 0. \end{aligned} \quad (9.3.5)$$

Prin urmare

$$\|\text{sym} \nabla u\|_{L^2(\Omega_0; \mathbb{R}^{3 \times 3})}^2 \geq \frac{1}{2} \|\nabla u\|_{L^2(\Omega_0; \mathbb{R}^{3 \times 3})}^2$$

ceea ce demonstrează inegalitatea pentru $u \in C_0^\infty(\Omega_0)$. Inegalitate pe $H_0^1(\Omega_0)$ rezultând în baza densității lui $C_0^\infty(\Omega_0)$ în $H_0^1(\Omega_0)$. ■

9.4 Existența soluției problemei Dirichlet de echilibru

În această secțiune se demonstrează existența soluției problemei $(\mathcal{P})$ definită de (9.2.1) – (9.2.4). Pentru început rescriem problema $(\mathcal{P})$ în formă slabă în spațiu Hilbert is $H_0^1(\Omega_0)$. Pe $H_0^1(\Omega_0)$ considerăm norma uzuală. Definim pe $H_0^1(\Omega)$ forma biliniară

$$(u_1, u_2) = \int_{\Omega_0} \left(\langle \mathcal{C} \cdot \text{sym}(\nabla u_1), \text{sym}(\nabla u_2) \rangle dV \right) \quad \forall u_1, u_2 \in H_0^1(\Omega_0) \quad (9.4.1)$$

și operatorul liniar $l : H_0^1(\Omega_0) \rightarrow \mathbb{R}$

$$l(\tilde{u}) = \int_{\Omega_0} \langle f, \tilde{u} \rangle dV \quad \forall \tilde{u} \in \mathcal{H}(). \quad (9.4.2)$$

Spunem că u este o soluție slabă a problemei $(\mathcal{P})$ dacă și numai dacă

$$(u, \tilde{u}) = l(\tilde{u}) \quad \forall \tilde{u} \in H_0^1(\Omega_0). \quad (9.4.3)$$

Teorema 9.4.1. *Presupunem că:*

- i) coeficienții constitutivi verifică relațiile de simetrie (8.1.1);
- ii) $\mathcal{W}$ este formă pătratică pozitiv definită în termenii variabilelor e_{ij} ;

ii) forța $f \in L^2(\Omega_0)$

Atunci există și este unică soluția slabă a problemei $(\mathcal{P})$.

Demonstrație. Din inegalitatea Cauchy-Schwarz avem

$$(w, \tilde{w}) \leq \left[\int_{\Omega_0} \langle \mathcal{E} \operatorname{sym}(\nabla u), \operatorname{sym}(\nabla u) \rangle dV \right]^{\frac{1}{2}} \left[\int_{\Omega_0} \langle \mathcal{E} \operatorname{sym}(\nabla \tilde{u}), \operatorname{sym}(\nabla \tilde{u}) \rangle dV \right]^{\frac{1}{2}}. \quad (9.4.4)$$

Deoarece $\mathcal{W}$ este formă pătratică pozitiv definită în termenii variabilelor e_{ij} , există constantele strict pozitive c_M, c_m astfel încât

$$c_m \|X\|^2 \leq \langle \mathcal{E} \cdot X, X \rangle \leq c_M \|X\|^2 \quad \forall X \in \operatorname{Sym}(3), \quad (9.4.5)$$

Din (9.4.5) rezultă

$$(w, \tilde{w}) \leq C \left[\int_{\Omega_0} \|\operatorname{sym}(\nabla u)\|^2 dV \right]^{\frac{1}{2}} \left[\int_{\Omega_0} \|\operatorname{sym}(\nabla \tilde{u})\|^2 dV \right]^{\frac{1}{2}}, \quad (9.4.6)$$

unde C este o constantă pozitivă. Prin urmare, există o constantă pozitivă C astfel încât

$$(w, \tilde{w}) \leq C \left[\int_{\Omega_0} \|\nabla u\|^2 dV \right]^{\frac{1}{2}} \left[\int_{\Omega_0} \|\nabla \tilde{u}\|^2 dV \right]^{\frac{1}{2}} \leq C \|w\|_{\mathcal{X}} \|\tilde{w}\|_{\mathcal{X}}, \quad (9.4.7)$$

ceea ce înseamnă că $(\cdot, \cdot)$ este mărginit. Pe de altă parte, avem

$$(w, w) = \int_{\Omega_0} \langle \mathcal{E} \operatorname{sym}(\nabla u), \operatorname{sym}(\nabla u) \rangle dV \geq c_m \int_{\Omega_0} \|\operatorname{sym} \nabla u\|^2 dV$$

pentru orice $w = (u, P) \in \mathcal{X}$.

Folosind inegalitatea lui Korn deduce că există $C > 0$ astfel încât

$$(w, w) \geq C \int_{\Omega_0} \|\nabla u\|^2 dV \geq C \|w\|_{\mathcal{X}}^2. \quad (9.4.8)$$

Deci, forma biliniară $(\cdot, \cdot)$ este coercivă. În final, tot din inegalitatea Cauchy-Schwarz și inegalitatea lui Poincaré rezultă că operatorul $l(\cdot)$ este mărginit.

Din teorem Lax-Milgram rezultă că problema $(\mathcal{P})$ are o unică soluție slabă. ■

Observație 9.4.1. *Theorema Lax-Milgram folosită în demonstrația teoremei precedente ne spune și faptul că soluția slabă unică w minimizează funcționala energetică $\frac{1}{2}(w, w) - l(w)$ pe $\mathcal{X}$.*