Universitatea “Alexandru Ioan Cuza” din Iaşi
Facultatea de Matematică

Elasticitate matematică

De la cinematica deformării la metode variaţionale şi existenţă

Suport de curs pentru 14 săptămâni

Ionel-Dumitrel Ghiba

2026

Cuprins

Prefaţă şi mod de utilizare **vi**

1 Corpul continuu, configuraţii şi deformări **1**
1.1 De la corp material la domeniu de referinţă . . . 1
1.2 Elemente de calcul diferenţial şi algebră liniară . . . 2
1.3 Deplasare, viteză şi cele două descrieri . . . 15
1.4 Derivata materială şi acceleraţia . . . 16
1.5 Deformări elementare şi calculul explicit al gradientului deformării . . . 17
1.6 Transformarea lungimilor, volumelor şi ariilor . . . 20
1.7 Deformări radiale . . . 27
1.8 Probleme pentru seminar . . . 30
1.9 Exerciţii rezolvate . . . 30
1.10 Exerciţii propuse suplimentare . . . 34

2 Măsuri de deformare, descompunerea polară şi distanţa la rotaţii **39**
2.1 Tensorii Cauchy–Green şi întinderile principale . . . 39
2.2 Rădăcina pătrată şi calculul spectral . . . 42
2.3 Descompunerea polară . . . 44
2.4 Invarianţi şi valori singulare . . . 47
2.5 Măsuri finite de deformare . . . 48
2.6 Liniarizarea comună a măsurilor de deformare . . . 49
2.7 Distanţa euclidiană la rotaţii: teorema lui Grioli . . . 50
2.8 Distanţa geodezică şi deformarea Hencky . . . 52
2.9 Rigiditate: când absenţa deformării implică o mişcare rigidă . . . 53
2.10 De la distanţa neliniară la deformaţia infinitezimală . . . 56
2.11 O inegalitate punctuală utilă şi legătura cu rigiditatea geometrică . . . 57
2.12 Măsurile de deformare pentru o deformare radială . . . 58
2.13 Probleme pentru seminar . . . 59
2.14 Exerciţii rezolvate . . . 59
2.15 Exerciţii propuse suplimentare . . . 63

3 Axiome din teoria elasticităţii, principiul lui Cauchy şi ecuaţiile de mişcare în configuraţia actuală **69**
3.1 Conservarea masei . . . 69
3.2 Forţe de volum şi forţe de contact . . . 70
3.3 Rezultate auxiliare pentru localizare . . . 70
3.4 Bilanţul impulsului şi ecuaţia locală de mişcare . . . 75
3.5 Bilanţul momentului cinetic şi simetria tensiunii . . . 76
3.6 Tensiuni normale şi tangenţiale . . . 77
3.7 Tensiuni principale şi formula tracţiunii pe un plan . . . 77

3.8 Exemplu: tracţiunea pe un plan şi tensiunile principale . . . 80
3.9 Puterea tensiunilor şi bilanţul local al energiei mecanice . . . 80
3.10 Schimbarea observatorului şi principiul puterilor virtuale . . . 82
3.11 Probleme pentru seminar . . . 82
3.12 Exerciţii rezolvate . . . 83
3.13 Exerciţii propuse suplimentare . . . 86

4 Tensiuni Piola–Kirchhoff, transformarea Piola şi lucru virtual 91
4.1 Descrierea în configuraţia de referinţă . . . 91
4.2 De la formula lui Nanson la primul tensor Piola–Kirchhoff . . . 91
4.3 Al doilea tensor Piola–Kirchhoff şi tensiunea Kirchhoff . . . 93
4.4 Ecuaţia de mişcare în configuraţia materială şi transformarea divergenţei . . . 93
4.5 Puterea internă şi perechile conjugate . . . 95
4.6 Principiul lucrului virtual . . . 97
4.7 Deducerea principiilor din invarianta lucrului . . . 97
4.8 Exemple pentru tensorii Piola–Kirchhoff . . . 98
4.9 Probleme pentru seminar . . . 99
4.10 Exerciţii rezolvate . . . 100
4.11 Exerciţii propuse suplimentare . . . 104

5 Materiale elastice, obiectivitate, izotropie şi hiperelasticitate 110
5.1 Funcţii de răspuns şi legea constitutivă . . . 110
5.2 Hiperelasticitate şi obiectivitatea energiei . . . 112
5.3 Simetrii materiale şi izotropie . . . 113
5.4 Teorema de reprezentare Rivlin–Ericksen pentru funcţii tensoriale izotrope . . . 116
5.5 Derivatele invarianţilor şi tensiunile pentru energii izotrope . . . 118
5.6 Tensiunile principale pentru energii izotrope . . . 119
5.7 Energii hiperelastice clasice şi calculul tensiunilor . . . 120
5.8 Testul de extensie uniaxială pentru un material neo-Hookean incompresibil . . . 123
5.9 Exemplu: energie dependentă numai de determinant . . . 124
5.10 Comportamentul energiei pentru $J \downarrow 0$ . . . 124
5.11 Probleme pentru seminar . . . 125
5.12 Exerciţii rezolvate . . . 125
5.13 Exerciţii propuse suplimentare . . . 130

6 Elasticitatea liniarizată: de la teoria finită la ecuaţiile Navier–Lamé 136
6.1 Liniarizarea în jurul configuraţiei naturale . . . 136
6.2 Reprezentarea tensorului elastic izotrop . . . 140
6.3 Constante inginereşti şi conversii . . . 144
6.4 Legea inversă a lui Hooke . . . 145
6.5 Forma dinamică, elipticitatea şi problema mixtă . . . 146
6.6 Deformaţie plană şi tensiune plană . . . 146
6.7 Extensia unei bare prismatice . . . 148
6.8 Cilindrul gros sub presiune: soluţia Lamé . . . 149

6.9 Sferă groasă sub presiune . . . 152
6.10 Torsiunea unei bare circulare . . . 155
6.11 Torsiunea Saint–Venant pentru o secţiune generală . . . 156
6.12 Încovoierea pură: de la cinematică la formula lui Navier . . . 158
6.13 Ecuaţia Euler–Bernoulli şi echilibrul unei grinzi . . . 159
6.14 Problemă rezolvată: grindă simplu rezemată sub sarcină uniformă . . . 160
6.15 Flexiune cu forţă transversală şi tensiuni de forfecare . . . 161
6.16 Principiul Saint–Venant: interpretare matematică . . . 162
6.17 Problema plană şi funcţia de tensiune Airy . . . 162
6.18 Problema Saint–Venant de torsiune în formularea funcţiei de tensiune . . . 164
6.19 Probleme pentru seminar . . . 165
6.20 Exerciţii rezolvate . . . 166
6.21 Exerciţii propuse suplimentare . . . 171

7 Formularea variaţională a elasticităţii liniare şi existenţa statică 176
7.1 Integrarea prin părţi şi norma L^2 . . . 176
7.2 Derivate slabe, H^1, H^1_0 şi urma la frontieră . . . 177
7.3 Rigiditatea infinitezimală în H^1 şi două fapte de compactitate . . . 177
7.4 Spaţiul energetic . . . 178
7.5 Inegalitatea lui Korn . . . 179
7.6 Forma slabă: deducerea ecuaţiei variaţionale . . . 180
7.7 Spaţii Hilbert şi funcţionale liniare continue . . . 181
7.8 Teorema Lax–Milgram . . . 182
7.9 Existenţă şi unicitate . . . 183
7.10 Cazurile pur Dirichlet şi pur Neumann; observaţii de regularitate . . . 185
7.11 Teorema lui Clapeyron pentru elasticitatea liniară . . . 187
7.12 Teorema de reciprocitate a lui Betti . . . 188
7.13 Principiul minimului energiei . . . 188
7.14 Probleme pentru seminar . . . 189
7.15 Exerciţii rezolvate . . . 189
7.16 Exerciţii propuse suplimentare . . . 194

8 Elastodinamica liniară, energie şi propagarea undelor 199
8.1 Problema cu valori iniţiale şi la frontieră . . . 199
8.2 Existenţa prin metoda Galerkin . . . 199
8.3 Bilanţul energiei . . . 207
8.4 Unde plane, tensorul acustic şi modurile P/S . . . 208
8.5 Problema unidimensională a barei şi formula lui d'Alembert . . . 211
8.6 Vibraţiile proprii ale unei bare finite . . . 213
8.7 Frecvenţele proprii ale unei bare fixate-liber . . . 214
8.8 Dispersia într-un model cu gradient de deformare . . . 215
8.9 Probleme pentru seminar . . . 216
8.10 Exerciţii rezolvate . . . 216
8.11 Exerciţii propuse suplimentare . . . 221

9 Echilibrul neliniar şi formularea variaţională 226
9.1 Energia totală şi clasa admisibilă . . . 226
9.2 Prima variaţie şi ecuaţiile de echilibru . . . 227
9.3 A doua variaţie şi stabilitatea locală . . . 230
9.4 Liniarizarea operatorului neliniar în jurul stării naturale . . . 232
9.5 Convexitatea obişnuită şi condiţia $\det F > 0$ . . . 233
9.6 Injectivitate şi condiţia Ciarlet–Nečas . . . 233
9.7 Existenţă locală pentru încărcări mici prin teorema funcţiei inverse . . . 234
9.8 Probleme pentru seminar . . . 237
9.9 Exerciţii rezolvate . . . 238
9.10 Exerciţii propuse suplimentare . . . 242

10 Elipticitate Legendre–Hadamard şi rank-one convexitate 246
10.1 Compatibilitatea Hadamard şi direcţiile de rang unu . . . 246
10.2 Tensorul tangent şi condiţia Legendre–Hadamard . . . 247
10.3 Rank-one convexitate . . . 247
10.4 Deducerea condiţiei Legendre–Hadamard din a doua variaţie . . . 249
10.5 Exemplu: energia pătratică în F . . . 253
10.6 Probleme pentru seminar . . . 253
10.7 Exerciţii rezolvate . . . 254
10.8 Exerciţii propuse suplimentare . . . 259

11 Materiale izotrope şi criterii în valori singulare 264
11.1 Energii izotrope şi valorile singulare . . . 264
11.2 Formule de variaţie folosite în criteriile spectrale . . . 264
11.3 Convexitate separată şi Baker–Ericksen . . . 266
11.4 Criterii spectrale în trei dimensiuni . . . 269
11.5 Criteriul pentru medii incompresibile izotrope . . . 272
11.6 Unde incrementale şi tensorul acustic . . . 273
11.7 Interpretarea spectrală a exemplului Saint Venant–Kirchhoff . . . 274
11.8 Exemplu: energia neo-Hooke compresibilă . . . 275
11.9 Energie separabilă de tip Valanis–Landel . . . 275
11.10 Rank-one convexitatea şi existenţa . . . 276
11.11 Probleme pentru seminar . . . 276
11.12 Exerciţii rezolvate . . . 277
11.13 Exerciţii propuse suplimentare . . . 282

12 Quasiconvexitate, policonvexitate şi minorii gradientului 287
12.1 Quasiconvexitatea şi limitele rank-one convexităţii . . . 287
12.2 Lagrangieni nuli şi identităţile de medie ale minorilor . . . 287
12.3 Policonvexitatea şi minorii ca variabile independente . . . 290
12.4 Policonvexitate $\Rightarrow$ quasiconvexitate: Jensen şi Lagrangienii nuli . . . 291
12.5 Criteriul lui Ball pentru policonvexitatea energiilor izotrope . . . 292
12.6 Criteriul Steigmann prin invarianţii lui U . . . 292

12.7 Exponenţierea şi policonvexitatea . . . 293
12.8 Quasiconvexitatea implică rank-one convexitatea . . . 293
12.9 Ierarhia noţiunilor de convexitate . . . 295
12.10 Exemple şi teste de policonvexitate . . . 296
12.11 Probleme pentru seminar . . . 297
12.12 Exerciţii rezolvate . . . 297
12.13 Exerciţii propuse suplimentare . . . 301

13 Metoda directă a calculului variaţional 305
13.1 Schema metodei directe şi noţiunea de coercivitate . . . 305
13.2 Convergenţa slabă . . . 306
13.3 Semicontinuitate inferioară . . . 309
13.4 Teorema abstractă a metodei directe . . . 311
13.5 Distribuţii şi compactitatea Rellich–Kondrachov . . . 312
13.6 Minorii gradientului şi dificultăţile trecerii la limită . . . 313
13.7 Coercivitatea specifică elasticităţii . . . 315
13.8 Păstrarea constrângerilor la limită . . . 316
13.9 Probleme pentru seminar . . . 317
13.10 Exerciţii rezolvate . . . 318
13.11 Exerciţii propuse suplimentare . . . 322

14 Teorema de existenţă a lui John Ball în elasticitatea neliniară 326
14.1 Cadrul problemei . . . 326
14.2 Policonvexitatea şi ipotezele structurale . . . 326
14.3 Teorema de existenţă . . . 327
14.4 Un model unidimensional înaintea demonstraţiei tridimensionale . . . 328
14.5 Demonstraţia teoremei . . . 330
14.6 Verificarea ipotezelor pe un exemplu de energie . . . 333
14.7 Limitele concluziei de existenţă . . . 334
14.8 Probleme pentru seminar . . . 334
14.9 Exerciţii rezolvate . . . 336
14.10 Exerciţii propuse suplimentare . . . 340

Bibliografie 345

Prefaţă şi mod de utilizare

Organizarea cursului. Suportul este organizat în 14 capitole. Fiecare capitol foloseşte rezultatele introduse anterior, iar trimiterile la acestea sunt indicate în text. Exemplele clasice (extensie, torsiune, încovoiere, cilindri, unde etc.) sunt plasate în capitolul în care instrumentele necesare rezolvării lor devin disponibile. La sfârşitul fiecărui capitol se află zece exerciţii cu rezolvări: primele cinci verifică noţiunile de bază, iar ultimele cinci sunt mai complexe. Fiecare set foloseşte exclusiv rezultate introduse în capitolul curent sau în capitolele precedente. După acestea este inclus un set complementar de nouă exerciţii propuse, gradate pe trei niveluri: A (verificare directă), B (aplicare) şi C (sinteză). Şi aceste exerciţii folosesc numai materia deja introdusă până la capitolul respectiv.

Acest suport este conceput pentru un curs de un semestru destinat studenţilor de la matematică. Presupunem cunoştinţe de calcul diferenţial şi integral în mai multe variabile, algebră liniară şi geometria curbelor şi suprafeţelor. Noţiunile de analiză funcţională, spaţii Sobolev şi calcul variaţional sunt introduse înainte de prima lor utilizare. Cursul este astfel conceput încât lectura să fie continuă: rezultatele auxiliare sunt enunţate, explicate şi, atunci când demonstraţia este accesibilă la nivelul cursului, demonstrate înainte de utilizare, fără a trimite studentul la un apendice separat.

Ordinea capitolelor este următoarea: descrierea deformării, măsurile geometrice, forţele şi tensiunile, legile de bilanţ şi ecuaţiile constitutive; urmează liniarizarea, formularea slabă şi existenţa în teoria liniară; ultimele capitole tratează problema neliniară, rank-one convexitatea, quasiconvexitatea, policonvexitatea şi metoda directă.

Exemplele mecanice sunt introduse acolo unde ajută la interpretarea noţiunilor matematice. Extensia unui cilindru ilustrează o deformare omogenă, forfecarea simplă separă efectele de rotaţie şi întindere, iar torsiunea şi încovoierea conduc la câmpuri de deplasări care pot fi calculate explicit. Undele elastice sunt folosite când apare condiţia Legendre–Hadamard, iar problemele de minimizare sunt reluate în capitolele despre policonvexitate şi existenţă.

Convenţii de notaţie

Pentru a evita ambiguităţile, folosim pe tot parcursul cărţii aceeaşi convenţie. Simbolul $\|\cdot\|$ desemnează o normă: norma euclidiană pentru vectori, norma Frobenius pentru matrice şi, atunci când este indicat prin indice, norma unui spaţiu funcţional, de exemplu $\|u\|_{H^1(\Omega)}$. Pentru un scalar folosim $|a|$, iar pentru măsura Lebesgue tridimensională a unei mulţimi folosim $\mathcal{L}^3(A)$. În particular, nu vom folosi alternativ bare simple şi duble pentru aceeaşi normă matricială.

Pentru operatorii matriciali păstrăm notaţiile

$$\operatorname{tr} A, \qquad \operatorname{sym} A = \frac{1}{2}(A + A^T), \qquad \operatorname{skew} A = \frac{1}{2}(A - A^T), \qquad \operatorname{dev} A = A - \frac{1}{3}\operatorname{tr}(A) I,$$

În mod particular, dacă $A = (A_{ij}) \in \mathbb{R}^{3\times 3}$, atunci $\|A\|^2 = \langle A, A\rangle = \sum_{i,j=1}^{3} A_{ij}^2$ este *întotdeauna* norma Frobenius. Nu vom nota această normă prin bare simple. Barele simple sunt rezervate

valorii absolute a unui scalar şi sunt scrise prin $|\cdot|$; pentru vectori folosim aceeaşi comandă de normă $\|\cdot\|$ ca pentru matrice.

Cofactorul este notat întotdeauna prin $\operatorname{Cof} A$. Punctele materiale sunt notate cu X, iar punctele spaţiale cu $x = \varphi(X,t)$; această convenţie nu va fi inversată ulterior. Gradientul unei deformări este $F = \nabla_X \varphi$, jacobianul este $J = \det F$, iar tensorii de întindere din descompunerea polară sunt U şi V. Pentru modulul lui Young folosim sistematic simbolul E_Y, pentru a nu-l confunda cu tensorul Green–Saint Venant $E = \frac{1}{2}(F^T F - I)$. Modulul de forfecare este notat cu μ; pentru valorile proprii ale lui C vom folosi $c_i = \lambda_i^2$, tocmai pentru a evita coliziunea cu μ. În capitolele de bilanţ, B va desemna forţa de volum pe unitatea de masă, iar $f_0 = \rho_0 B$ densitatea de forţă pe unitatea de volum de referinţă. Pentru o tracţiune $t = \sigma n$, tensiunea normală scalară este $\sigma_n = \langle t, n \rangle$, vectorul normal este $\sigma_n n$, iar partea tangenţială este $t_\tau = t - \sigma_n n$.

Pentru operatorii de divergenţă păstrăm de asemenea o singură convenţie:

$$(\operatorname{div} \sigma)_i = \partial_{x_j} \sigma_{ij}, \qquad (\operatorname{Div} P)_i = \partial_{X_J} P_{iJ}.$$

În capitolul 4 vom introduce $L = \nabla_x v$, $D = \operatorname{sym} L$ şi $\tau = J\sigma$; pe unitatea de volum de referinţă perechile energetic conjugate sunt (τ, D), $(P, \dot{F})$ şi $(S, \dot{E})$.

Simbol	**Semnificaţie fixată în întregul curs**
X, x	punct material, respectiv punct spaţial $x = \varphi(X,t)$
F, J	$F = \nabla_X \varphi$, $J = \det F$
div, Div	divergenţă pe al doilea indice, în coordonate spaţiale, respectiv materiale
B, f_0	forţă specifică materială şi densitate de forţă de referinţă, $f_0 = \rho_0 B$
t, t_0	tracţiune Cauchy $t = \sigma n$ şi tracţiune nominală $t_0 = PN$
E_Y, μ, λ	modulul Young, modulul de forfecare şi prima constantă Lamé
$c_i = \lambda_i^2$	valorile proprii ale lui C, pentru a nu coliziona cu μ
$\|\cdot\|$, $\|\cdot\|$	normă pentru vectori/matrice/spaţii funcţionale, respectiv valoare absolută pentru scalari

Structura semestrului

Săpt.	**Tema principală**	**Conţinut şi aplicaţii**
1	Corp continuu şi deformare	configuraţii, descriere lagrangiană/eulerianǎ, F, J, masă, exemple elementare
2	Geometria deformării	lungimi, arii, volume, C, B, descompunere polară, valori singulare, distanţa la $SO(3)$

3	Forţe şi tensiuni	principiul lui Cauchy, tensorul Cauchy, principiul impulsului şi momentului cinetic
4	Configuraţia de referinţă	utilizarea formulei lui Nanson, tensiunile Piola–Kirchhoff, transformarea Piola, lucru virtual şi invarianta
5	Materiale elastice	obiectivitate, simetrii materiale, izotropie, hiperelasticitate, reprezentări prin invarianţi şi întinderi principale
6	Teoria liniarizată	deformarea infinitesimală, legea lui Hooke, ecuaţiile Navier–Lamé, extensie, forfecare, torsiune şi încovoiere
7	Problema statică liniară	spaţii Sobolev, urmă, Korn, Lax–Milgram, formularea slabă şi minimizarea energiei
8	Elastodinamică liniară	formularea slabă în timp, energie, unicitate, existenţă Galerkin, unde P şi S
9	Echilibrul neliniar	energie totală, variaţia întâi, ecuaţia Euler–Lagrange, condiţia $\det F > 0$, injectivitate
10	Rank-one convexitate	Legendre–Hadamard, linii de rang unu, tensorul acustic şi pierderea elipticităţii
11	Criterii spectrale	materiale izotrope, valori singulare, Baker–Ericksen şi criterii de rank-one convexitate
12	Quasiconvexitate şi policonvexitate	minori, Lagrangieni nuli şi ierarhia convexităţilor generalizate
13	Metoda directă	convergenţă slabă, coercivitate, semicontinuitate şi continuitatea slabă a minorilor
14	Teorema lui Ball	existenţa minimizatorilor în elasticitatea neliniară, determinant pozitiv şi exemple de energii

Capitolul 1

Corpul continuu, configuraţii şi deformări

Surse şi orientare. Pentru fundamentele cinematicii, formulele de transport şi organizarea clasică a mecanicii mediilor continue ne bazăm în principal pe Gurtin [7], Ciarlet [3], Morro–Giorgi [11] şi notele lui Neukamm [13]. Expunerea de aici este însă adaptată nivelului cursului şi dezvoltă explicit calculele matriciale înainte de utilizarea lor.

1.1 De la corp material la domeniu de referinţă

În mecanica mediilor continue nu urmărim un număr finit de particule, ci un corp format idealizat dintr-un continuum de puncte materiale. Alegerea unei configuraţii de referinţă identifică aceste puncte cu poziţii $X \in \overline{\Omega}$, unde $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ este un domeniu mărginit. În primele capitole presupunem, pentru a putea face toate calculele clasice fără dificultăţi tehnice, că Ω are frontieră suficient de regulată, de exemplu de clasă C^1. Când vom trece la formularea variaţională vom preciza o ipoteză mai slabă asupra frontierei şi vom introduce atunci instrumentele analitice corespunzătoare.

La momentul t, poziţia particulei care avea eticheta materială X este

$$x = \varphi(X, t).$$

Pentru fiecare t fix, aplicaţia $\varphi_t = \varphi(\cdot, t)$ se numeşte *deformare*, iar $\Omega_t = \varphi_t(\Omega)$ este configuraţia actuală. Vom lucra cu deformări suficient de regulate pentru calculele clasice, apoi vom slăbi regularitatea în partea variaţională.

Definiţia 1.1.1. O deformare clasică este o aplicaţie $\varphi \in C^1(\overline{\Omega}; \mathbb{R}^3)$, injectivă pe Ω, cu

$$J(X) := \det \nabla_X \varphi(X) > 0 \qquad \text{pentru } X \in \Omega.$$

Nu impunem aici injectivitatea pe întreaga frontieră: această alegere permite, la nivel geometric, auto-contactul unor porţiuni ale frontierei. Când o problemă cere excluderea auto-contactului, ipoteza de injectivitate se întăreşte explicit. Matricea $F = \nabla\varphi$ se numeşte *gradientul deformării*, iar $J = \det F$ este *jacobianul deformării*. În Secţiunea dedicată transformării volumelor vom demonstra că J reprezintă factorul local de variaţie a volumului.

Condiţia $J > 0$ exprimă local păstrarea orientării. Ea nu este, singură, o condiţie globală de injectivitate. Desigur, pentru $\varphi \in C^1(\Omega; \mathbb{R}^3)$ şi $X_0 \in \Omega$, dacă

$$J(X_0) = \det \nabla\varphi(X_0) \neq 0,$$

teorema funcţiei inverse furnizează vecinătăţi U ale lui X_0 şi V ale lui $\varphi(X_0)$ astfel încât

$$\varphi : U \longrightarrow V$$

este un difeomorfism C^1. Condiţia $J > 0$ adaugă informaţia că orientarea este păstrată. Nici una dintre aceste afirmaţii nu este globală: din $J > 0$ nu rezultă injectivitatea pe întregul domeniu.

De exemplu, în plan,

$$\varphi(r, \theta) = (r \cos \theta, r \sin \theta)$$

pe $(1, 2) \times (0, 4\pi)$ are jacobian pozitiv, dar punctele cu unghiuri care diferă cu 2π au aceeaşi imagine. Vom păstra pe tot parcursul cursului distincţia dintre inversabilitatea locală, controlată de determinant, şi injectivitatea globală.

1.2 Elemente de calcul diferenţial şi algebră liniară

Fixăm de la început notaţia pentru produsele scalare. Pentru vectori $a, b \in \mathbb{R}^3$ folosim

$$\langle a, b \rangle = a^T b,$$

iar pentru matrice $A, B \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ folosim produsul Frobenius

$$\langle A, B \rangle = \operatorname{tr}(A^T B) = \sum_{i,j=1}^{3} A_{ij} B_{ij}, \qquad \|A\| = \sqrt{\langle A, A \rangle}.$$

Pe parcursul cursului nu vom folosi "$\cdot$" sau ":" pentru aceste produse scalare. Pentru $a, b \in \mathbb{R}^3$, produsul tensorial $a \otimes b$ este aplicaţia liniară

$$(a \otimes b)x = a \langle b, x \rangle,$$

de unde $(a \otimes b)_{ij} = a_i b_j$.

Vom folosi mulţimile

$$GL^+(3) := \{F \in \mathbb{R}^{3\times 3} : \det F \neq 0\}, \qquad GL^+(3) := \{F \in GL^+(3) : \det F > 0\},$$

$$O(3) := \{Q \in \mathbb{R}^{3\times 3} : Q^T Q = I\}, \qquad SO(3) := \{Q \in O(3) : \det Q = 1\},$$

precum şi

$$\operatorname{Sym}(3) := \{S \in \mathbb{R}^{3\times 3} : S^T = S\},$$

$$\operatorname{Sym}^+(3) := \{S \in \operatorname{Sym}(3) : \langle x, Sx \rangle > 0 \text{ pentru orice } x \neq 0\}.$$

Descompunerea

$$A = \operatorname{sym} A + \operatorname{skew} A, \qquad \operatorname{sym} A = \frac{1}{2}(A + A^T), \qquad \operatorname{skew} A = \frac{1}{2}(A - A^T)$$

este ortogonală în produsul Frobenius. Într-adevăr,

$$\langle \operatorname{sym} A, \operatorname{skew} A \rangle = 0,$$

deoarece produsul scalar al unei matrice simetrice cu una antisimetrică este zero. Prin urmare

$$\|A\|^2 = \|\operatorname{sym} A\|^2 + \|\operatorname{skew} A\|^2 .$$

Pentru $S \in \operatorname{Sym}(3)$ folosim şi

$$S = \operatorname{dev} S + \frac{1}{3}\operatorname{tr}(S) I, \qquad \operatorname{dev} S = S - \frac{1}{3}\operatorname{tr}(S) I,$$

iar ortogonalitatea dintre partea deviatorică şi partea sferică dă

$$\|S\|^2 = \|\operatorname{dev} S\|^2 + \frac{1}{3}(\operatorname{tr} S)^2.$$

1.2.1 Derivata Fréchet pentru funcţii matriceale cu valori reale

Lucrăm aici în spaţiul finit-dimensional $\mathbb{R}^{3\times 3}$, echipat cu norma Frobenius. O funcţie

$$\Phi : \mathbb{R}^{3\times 3} \longrightarrow \mathbb{R}$$

este Fréchet-diferenţiabilă în F dacă există o aplicaţie liniară continuă

$$D\Phi(F) : \mathbb{R}^{3\times 3} \longrightarrow \mathbb{R}$$

astfel încât

$$\Phi(F+H) = \Phi(F) + D\Phi(F)[H] + r_F(H), \qquad \frac{r_F(H)}{\|H\|} \longrightarrow 0 \quad \text{când } H \to 0.$$

Termenul $D\Phi(F)[H]$ este partea de ordin întâi a variaţiei lui Φ atunci când F este perturbat cu H.

Pentru a lega această definiţie de derivata direcţională, fixăm H şi considerăm funcţia de o variabilă

$$g_H(t) := \Phi(F + tH).$$

Dacă Φ este Fréchet-diferenţiabilă în F, atunci

$$\Phi(F+tH) = \Phi(F) + tD\Phi(F)[H] + r_F(tH).$$

Pentru $t \neq 0$ împărţim prin t:

$$\frac{\Phi(F+tH) - \Phi(F)}{t} = D\Phi(F)[H] + \frac{r_F(tH)}{t}.$$

Cum

$$\frac{|r_F(tH)|}{|t|} = \|H\| \, \frac{|r_F(tH)|}{\|tH\|} \longrightarrow 0,$$

rezultă

$$\boxed{\left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} \Phi(F+tH) = D\Phi(F)[H].}$$

Aşadar diferenţiabilitatea Fréchet implică existenţa tuturor derivatelor direcţionale, iar derivata în direcţia H se obţine evaluând derivata Fréchet pe H. Reciproca nu este adevărată fără ipoteze suplimentare: simpla existenţă a tuturor derivatelor direcţionale nu garantează existenţa unei aproximaţii liniare uniforme în toate direcţiile.

Orice funcţional liniar pe $\mathbb{R}^{3\times 3}$ are un reprezentant unic în produsul Frobenius. Prin urmare există o unică matrice $D_F\Phi(F)$ astfel încât

$$D\Phi(F)[H] = \langle D_F\Phi(F), H\rangle \qquad \forall H \in \mathbb{R}^{3\times 3}.$$

Această matrice este gradientul lui Φ faţă de variabila matricială F.

Ca exemplu, pentru

$$\Phi(F) = \frac{1}{2}\|F\|^2$$

avem

$$\Phi(F+H) = \frac{1}{2}\|F\|^2 + \langle F, H\rangle + \frac{1}{2}\|H\|^2.$$

Cum $\|H\|^2 = o(\|H\|)$, obţinem

$$D\Phi(F)[H] = \langle F, H\rangle, \qquad D_F\Phi(F) = F.$$

1.2.2 Matricea cofactor şi identităţi algebrice

Pentru $F = (F_{ij}) \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ definim

$$(\operatorname{Cof} F)_{ij} = (-1)^{i+j} \det F^{(ij)},$$

unde $F^{(ij)}$ se obţine eliminând linia i şi coloana j.

Identităţile următoare vor fi folosite la derivarea determinantului, la transformarea ariilor şi, mai târziu, la identitatea lui Piola.

Propoziţia 1.2.1. *Pentru $A, B \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ au loc*

$$A^T \operatorname{Cof} A = (\operatorname{Cof} A)^T A = (\det A) I,$$

$$A(\operatorname{Cof} A)^T = (\operatorname{Cof} A) A^T = (\det A) I,$$

$$\operatorname{Cof}(A^T) = (\operatorname{Cof} A)^T, \qquad \operatorname{Cof}(AB) = \operatorname{Cof} A \operatorname{Cof} B.$$

Dacă $A \in GL^+(3)$, atunci

$$\operatorname{Cof} A = (\det A) A^{-T}.$$

Demonstraţie. Scriem $A = (a_{ij})$ şi reamintim că

$$(\operatorname{Cof} A)_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij},$$

unde M_{ij} este minorul obţinut din A prin eliminarea liniei i şi a coloanei j.

Mai întâi demonstrăm identitatea

$$(\operatorname{Cof} A)^T A = (\det A) I.$$

Elementul (i,k) al produsului $(\operatorname{Cof} A)^T A$ este

$$\Big[(\operatorname{Cof} A)^T A\Big]_{ik} = \sum_{j=1}^{3} (\operatorname{Cof} A)_{ji} a_{jk}.$$

Dacă $i = k$, atunci

$$\Big[(\operatorname{Cof} A)^T A\Big]_{ii} = \sum_{j=1}^{3} (\operatorname{Cof} A)_{ji} a_{ji}.$$

Aceasta este exact dezvoltarea lui $\det A$ după coloana i, deci

$$\Big[(\operatorname{Cof} A)^T A\Big]_{ii} = \det A.$$

Să presupunem acum că $i \neq k$. Considerăm matricea $\widetilde{A}$ obţinută din A prin înlocuirea coloanei i cu coloana k, toate celelalte coloane rămânând neschimbate. Cu alte cuvinte, dacă $\widetilde{A}_\ell$ şi A_ℓ notează coloana ℓ a matricilor $\widetilde{A}$, respectiv A, atunci

$$\widetilde{A}_\ell = \begin{cases} A_k, & \ell = i, \\ A_\ell, & \ell \neq i. \end{cases}$$

Dezvoltăm determinantul lui $\widetilde{A}$ după coloana i. Elementul de pe linia j a acestei coloane este a_{jk}. Mai mult, minorul asociat poziţiei (j,i) este acelaşi ca pentru matricea A. Într-adevăr, la formarea acestui minor se elimină tocmai coloana i, adică exact coloana care a fost înlocuită. Prin urmare,

$$\det \widetilde{A} = \sum_{j=1}^{3} a_{jk} (\operatorname{Cof} A)_{ji}.$$

Pe de altă parte, deoarece $i \neq k$, matricea $\widetilde{A}$ are două coloane egale: coloana i şi coloana k sunt ambele egale cu coloana k a lui A. Aşadar,

$$\det \widetilde{A} = 0.$$

Rezultă

$$\sum_{j=1}^{3} (\operatorname{Cof} A)_{ji} a_{jk} = 0, \qquad i \neq k.$$

Am obţinut astfel

$$\Big[(\operatorname{Cof} A)^T A\Big]_{ik} = \begin{cases} \det A, & i = k, \\ 0, & i \neq k, \end{cases}$$

adică

$$(\operatorname{Cof} A)^T A = (\det A) I.$$

Transpunând această relaţie rezultă

$$A^T \operatorname{Cof} A = (\det A) I.$$

Demonstrăm acum relaţia

$$\operatorname{Cof}(A^T) = (\operatorname{Cof} A)^T.$$

Minorul de pe poziţia (i, j) al lui A^T este determinantul transpusei matricei obţinute din A prin eliminarea liniei j şi a coloanei i. Cum determinantul nu se modifică prin transpunere,

$$M_{ij}(A^T) = M_{ji}(A).$$

Prin urmare,

$$\begin{aligned}(\operatorname{Cof}(A^T))_{ij} &= (-1)^{i+j} M_{ij}(A^T) \\ &= (-1)^{i+j} M_{ji}(A) \\ &= (\operatorname{Cof} A)_{ji},\end{aligned}$$

de unde

$$\operatorname{Cof}(A^T) = (\operatorname{Cof} A)^T.$$

Aplicăm acum identitatea

$$(\operatorname{Cof} C)^T C = (\det C) I$$

matricei $C = A^T$. Obţinem

$$(\operatorname{Cof}(A^T))^T A^T = (\det A) I.$$

Folosind

$$\operatorname{Cof}(A^T) = (\operatorname{Cof} A)^T,$$

rezultă

$$(\operatorname{Cof} A) A^T = (\det A) I.$$

Prin transpunere,

$$A (\operatorname{Cof} A)^T = (\det A) I.$$

Dacă $A \in GL^+(3)$, din

$$A^T \operatorname{Cof} A = (\det A) I$$

înmulţim la stânga cu A^{-T} şi obţinem

$$\operatorname{Cof} A = (\det A) A^{-T}.$$

Rămâne să demonstrăm formula pentru produs. Presupunem mai întâi că $A, B \in GL^+(3)$. Atunci

$$\begin{aligned}\operatorname{Cof}(AB) &= \det(AB)(AB)^{-T} \\ &= (\det A)(\det B) A^{-T} B^{-T} \\ &= \Big((\det A) A^{-T}\Big)\Big((\det B) B^{-T}\Big) \\ &= \operatorname{Cof} A \operatorname{Cof} B.\end{aligned}$$

Am folosit aici relaţia

$$(AB)^{-T} = A^{-T}B^{-T}.$$

Pentru matrici arbitrare $A, B \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ alegem şiruri de matrici inversabile

$$A_m \to A, \qquad B_m \to B.$$

Acest lucru este posibil deoarece mulţimea matricilor inversabile este densă în $\mathbb{R}^{3\times 3}$. Pentru fiecare m avem

$$\operatorname{Cof}(A_m B_m) = \operatorname{Cof} A_m \operatorname{Cof} B_m.$$

Fiecare componentă a lui $\operatorname{Cof} A$ este un polinom în componentele lui A, deci aplicaţia

$$A \longmapsto \operatorname{Cof} A$$

este continuă. Trecând la limită pentru $m \to \infty$, obţinem

$$\operatorname{Cof}(AB) = \operatorname{Cof} A \operatorname{Cof} B.$$

□

Formula cu simbolul Levi–Civita. Introducem

$$\varepsilon_{ijk} = \begin{cases} 1, & (i,j,k) \text{ este o permutare pară a lui } (1,2,3), \\ -1, & (i,j,k) \text{ este o permutare impară a lui } (1,2,3), \\ 0, & \text{cel puţin doi indici coincid.} \end{cases}$$

Cu convenţia de sumare a lui Einstein,

$$(\operatorname{Cof} A)_{ij} = \frac{1}{2}\varepsilon_{mni}\varepsilon_{pqj}a_{mp}a_{nq},$$

iar

$$\det A = \frac{1}{6}\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{pqr}a_{ip}a_{jq}a_{kr}.$$

Nu vom folosi aceste formule pentru calcule elementare cu matrice 3×3; ele devin utile atunci când derivăm identităţi de divergenţă în capitolele următoare.

1.2.3 Derivata determinantului

Propoziţia 1.2.2 (derivata determinantului)**.** *Pentru orice $F, H \in \mathbb{R}^{3\times 3}$,*

$$D(\det)(F)[H] = \langle \operatorname{Cof} F, H\rangle.$$

Dacă $F \in GL^+(3)$, atunci

$$D(\det)(F)[H] = (\det F)\operatorname{tr}(F^{-1}H).$$

Demonstraţie. Scriem coloanele lui F şi H sub forma

$$F = (f_1 \mid f_2 \mid f_3), \qquad H = (h_1 \mid h_2 \mid h_3).$$

Multilinearitatea determinantului dă dezvoltarea exactă

$$\begin{aligned}\det(F+H) = {} & \det F \\ & + \det(h_1, f_2, f_3) + \det(f_1, h_2, f_3) + \det(f_1, f_2, h_3) \\ & + \det(h_1, h_2, f_3) + \det(h_1, f_2, h_3) + \det(f_1, h_2, h_3) \\ & + \det(h_1, h_2, h_3).\end{aligned}$$

Primul rând după $\det F$ este liniar în H. Celelalte două rânduri conţin cel puţin două coloane provenite din H. Deoarece determinantul este o formă trilineară continuă, există o constantă C_F astfel încât suma acestor termeni este mărginită în modul de

$$C_F\Big(\|H\|^2 + \|H\|^3\Big) = o(\|H\|).$$

Prin urmare termenul liniar este chiar derivata Fréchet.

Pentru fiecare coloană j, dezvoltarea Laplace după acea coloană arată că

$$\det(f_1 \mid \ldots \mid h_j \mid \ldots \mid f_3) = \sum_{i=1}^{3} (\operatorname{Cof} F)_{ij} H_{ij}.$$

Sumând după j,

$$D(\det)(F)[H] = \sum_{i,j=1}^{3} (\operatorname{Cof} F)_{ij} H_{ij} = \langle \operatorname{Cof} F, H \rangle.$$

Dacă F este inversabilă, identitatea

$$\operatorname{Cof} F = (\det F) F^{-T}$$

dă

$$\langle \operatorname{Cof} F, H \rangle = (\det F) \langle F^{-T}, H \rangle = (\det F) \operatorname{tr}(F^{-1} H).$$

□

1.2.4 Derivata Fréchet pentru aplicaţii vectoriale

Definiţia 1.2.3 (Derivata Fréchet pentru aplicaţii vectoriale)**.** Fie $U \subset \mathbb{R}^n$ o mulţime deschisă şi

$$f : U \to \mathbb{R}^m.$$

Spunem că f este diferenţiabilă Fréchet în $x \in U$ dacă există o aplicaţie liniară

$$L : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$$

astfel încât

$$\frac{\|f(x+h)-f(x)-Lh\|}{\|h\|} \longrightarrow 0 \qquad \text{pentru} \qquad \|h\| \longrightarrow 0.$$

Aplicaţia liniară L este unică şi se numeşte derivata Fréchet a lui f în x. O notăm prin

$$Df(x) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m.$$

Pentru o direcţie $h \in \mathbb{R}^n$ scriem

$$Df(x)[h].$$

Echivalent,

$$f(x+h) = f(x) + Df(x)[h] + r(h),$$

unde

$$\frac{\|r(h)\|}{\|h\|} \longrightarrow 0 \qquad \text{pentru} \qquad \|h\| \longrightarrow 0.$$

Observaţia 1.2.4. Aceeaşi definiţie se aplică fără nicio modificare aplicaţiilor între spaţii de matrici. Identificând $\mathbb{R}^{3\times3}$ cu $\mathbb{R}^9$ şi folosind norma Frobenius, pentru

$$\Phi : U \subset \mathbb{R}^{3\times3} \to \mathbb{R}^{3\times3}$$

derivata în F este o aplicaţie liniară

$$D\Phi(F) : \mathbb{R}^{3\times3} \to \mathbb{R}^{3\times3}$$

care satisface

$$\frac{\|\Phi(F+H)-\Phi(F)-D\Phi(F)[H]\|}{\|H\|} \longrightarrow 0$$

pentru $\|H\| \to 0$.

Propoziţia 1.2.5 (Derivata inversei)**.** *Dacă $F \in GL^+(3)$, atunci aplicaţia*

$$F \longmapsto F^{-1}$$

este diferenţiabilă în F, iar

$$D(F^{-1})[H] = -F^{-1}HF^{-1}.$$

De asemenea,

$$D(F^{-T})[H] = -F^{-T}H^TF^{-T}.$$

Demonstraţie. Notăm cu $\|\cdot\|$ norma Frobenius. Pentru o matrice $A \in \mathbb{R}^{3\times3}$ introducem şi norma operatorială, definită prin

$$\|A\|_{\text{op}} := \sup_{\|x\|=1} \|Ax\|,$$

unde pentru vectori $\|\cdot\|$ desemnează norma euclidiană. Echivalent,

$$\|Ax\| \le \|A\|_{\text{op}} \|x\| \qquad \text{pentru orice } x \in \mathbb{R}^3.$$

Vom folosi relaţia

$$\|A\|_{\mathrm{op}} \leq \|A\|.$$

Pentru a o demonstra, fie $x \in \mathbb{R}^3$ cu $\|x\| = 1$. Dacă $A = (a_{ij})$, atunci

$$(Ax)_i = \sum_{j=1}^{3} a_{ij} x_j.$$

Prin inegalitatea Cauchy–Schwarz,

$$|(Ax)_i|^2 \leq \left(\sum_{j=1}^{3} a_{ij}^2\right)\left(\sum_{j=1}^{3} x_j^2\right) = \sum_{j=1}^{3} a_{ij}^2.$$

Adunând după i, obţinem

$$\|Ax\|^2 = \sum_{i=1}^{3} |(Ax)_i|^2 \leq \sum_{i,j=1}^{3} a_{ij}^2 = \|A\|^2.$$

Prin urmare,

$$\|Ax\| \leq \|A\| \qquad \text{pentru orice } x \text{ cu } \|x\| = 1,$$

iar luând supremul după astfel de x rezultă

$$\|A\|_{\mathrm{op}} \leq \|A\|.$$

Mai întâi arătăm că, pentru $\|H\|$ suficient de mic, matricea $F + H$ este inversabilă. Scriem

$$F + H = F\Big(I + F^{-1}H\Big).$$

Deoarece

$$\left\|F^{-1}H\right\|_{\mathrm{op}} \leq \left\|F^{-1}\right\|_{\mathrm{op}} \|H\|_{\mathrm{op}} \leq \left\|F^{-1}\right\|_{\mathrm{op}} \|H\|,$$

putem alege $\|H\|$ suficient de mic astfel încât

$$\left\|F^{-1}H\right\|_{\mathrm{op}} < \frac{1}{2}.$$

Punem

$$A = F^{-1}H.$$

Pentru orice $x \in \mathbb{R}^3$ avem

$$\|(I + A)x\| \geq \|x\| - \|Ax\| \geq \Big(1 - \|A\|_{\mathrm{op}}\Big)\|x\| \geq \frac{1}{2}\|x\|.$$

Prin urmare,

$$(I + A)x = 0 \quad \Longrightarrow \quad x = 0.$$

Aşadar $I + A$ este injectivă; fiind o aplicaţie liniară din $\mathbb{R}^3$ în $\mathbb{R}^3$, este şi inversabilă. Rezultă că $F + H$ este inversabilă.

Aceeaşi estimare permite şi controlul inversei. Dacă

$$y = (I + A)x,$$

atunci

$$\|y\| \geq \frac{1}{2} \|x\|,$$

de unde

$$\|x\| \leq 2 \|y\|.$$

Cum $x = (I + A)^{-1}y$, rezultă

$$\left\|(I + A)^{-1}\right\|_{\text{op}} \leq 2.$$

Prin urmare,

$$(F + H)^{-1} = \left(I + F^{-1}H\right)^{-1} F^{-1},$$

iar

$$\left\|(F + H)^{-1}\right\|_{\text{op}} \leq 2 \left\|F^{-1}\right\|_{\text{op}}.$$

Din

$$(F + H)^{-1}(F + H) = I$$

şi

$$F^{-1}F = I$$

rezultă

$$\left[(F + H)^{-1} - F^{-1}\right]F + (F + H)^{-1}H = 0.$$

Înmulţind la dreapta cu F^{-1}, obţinem

$$(F + H)^{-1} - F^{-1} = -(F + H)^{-1}HF^{-1}.$$

Vom folosi în continuare estimarea

$$\|ABC\| \leq \|A\|_{\text{op}} \|B\| \|C\|_{\text{op}},$$

unde $\|\cdot\|$ este norma Frobenius, iar $\|\cdot\|_{\text{op}}$ este norma operatorială.

Pentru a o justifica, observăm mai întâi că

$$\|AB\| \leq \|A\|_{\text{op}} \|B\|.$$

Dacă b_1, b_2, b_3 sunt coloanele matricei B, atunci coloanele matricei AB sunt Ab_1, Ab_2, Ab_3. Prin urmare,

$$\|AB\|^2 = \sum_{j=1}^{3} \|Ab_j\|^2 \leq \sum_{j=1}^{3} \|A\|_{\text{op}}^2 \|b_j\|^2 = \|A\|_{\text{op}}^2 \|B\|^2.$$

Rezultă

$$\|AB\| \leq \|A\|_{\text{op}} \|B\|.$$

Pentru produsul în ordine inversă, folosim faptul că norma Frobenius nu se modifică prin transpunere:

$$\left\|M^T\right\| = \|M\|\,.$$

Astfel,

$$\|BC\| = \left\|(BC)^T\right\| = \left\|C^T B^T\right\| \leq \left\|C^T\right\|_{\text{op}} \left\|B^T\right\| = \|C\|_{\text{op}}\,\|B\|\,.$$

Am folosit aici şi relaţiile

$$\left\|C^T\right\|_{\text{op}} = \|C\|_{\text{op}}\,, \qquad \left\|B^T\right\| = \|B\|\,.$$

Aplicând succesiv cele două estimări, obţinem

$$\|ABC\| \leq \|A\|_{\text{op}}\,\|BC\| \leq \|A\|_{\text{op}}\,\|B\|\,\|C\|_{\text{op}}\,.$$

Folosind inegalitatea

$$\|ABC\| \leq \|A\|_{\text{op}}\,\|B\|\,\|C\|_{\text{op}}\,,$$

avem

$$\left\|(F+H)^{-1} - F^{-1}\right\| \leq \left\|(F+H)^{-1}\right\|_{\text{op}} \|H\| \left\|F^{-1}\right\|_{\text{op}} \leq 2\left\|F^{-1}\right\|_{\text{op}}^2 \|H\|\,.$$

Aşadar

$$\left\|(F+H)^{-1} - F^{-1}\right\| \leq C\,\|H\|$$

pentru $\|H\|$ suficient de mic.

Revenim acum la identitatea precedentă şi scriem

$$(F+H)^{-1} - F^{-1} = -(F+H)^{-1}HF^{-1} = -F^{-1}HF^{-1} - \left[(F+H)^{-1} - F^{-1}\right]HF^{-1}.$$

Pentru ultimul termen obţinem

$$\left\|\left[(F+H)^{-1} - F^{-1}\right]HF^{-1}\right\| \leq \left\|(F+H)^{-1} - F^{-1}\right\| \|H\|_{\text{op}} \left\|F^{-1}\right\|_{\text{op}} \leq C\,\|H\|^2\,.$$

Prin urmare,

$$(F+H)^{-1} = F^{-1} - F^{-1}HF^{-1} + R(H),$$

unde

$$\|R(H)\| \leq C\,\|H\|^2\,.$$

În particular,

$$\frac{\|R(H)\|}{\|H\|} \longrightarrow 0 \qquad \text{pentru} \qquad \|H\| \longrightarrow 0.$$

Prin definiţia derivatei Fréchet rezultă

$$D(F^{-1})[H] = -F^{-1}HF^{-1}.$$

În final, deoarece

$$F^{-T} = (F^{-1})^T$$

şi transpunerea este liniară, avem

$$D(F^{-T})[H] = \Big(D(F^{-1})[H]\Big)^T = -F^{-T}H^TF^{-T}.$$

□

1.2.5 Regula lanţului

Regula lanţului are aceeaşi formă ca în cazul funcţiilor de o variabilă, dar trebuie ţinut cont de faptul că derivatele Fréchet sunt aplicaţii liniare între spaţiile corespunzătoare.

Propoziţia 1.2.6 (Regula lanţului)**.** *Fie $U \subset \mathbb{R}^{m\times n}$, $V \subset \mathbb{R}^{p\times q}$ mulţimi deschise şi fie $\Phi : U \to V$, $\Psi : V \to \mathbb{R}^{r\times s}$. Dacă Φ este diferenţiabilă Fréchet în $F \in U$, iar Ψ este diferenţiabilă Fréchet în $\Phi(F)$, atunci compunerea $\Psi \circ \Phi : U \to \mathbb{R}^{r\times s}$ este diferenţiabilă Fréchet în F şi*

$$D(\Psi \circ \Phi)(F) = D\Psi(\Phi(F)) \circ D\Phi(F).$$

Mai precis, pentru orice $H \in \mathbb{R}^{m\times n}$,

$$D(\Psi \circ \Phi)(F)[H] = D\Psi(\Phi(F))\Big[D\Phi(F)[H]\Big].$$

Aceeaşi formulă rămâne valabilă dacă Ψ ia valori în $\mathbb{R}$.

Demonstraţie. Din diferenţiabilitatea lui Φ în F avem

$$\Phi(F+H) = \Phi(F) + D\Phi(F)[H] + R_\Phi(H),$$

unde

$$\frac{\|R_\Phi(H)\|}{\|H\|} \longrightarrow 0 \qquad \text{pentru} \qquad \|H\| \longrightarrow 0.$$

Punem

$$K(H) := \Phi(F+H) - \Phi(F).$$

Atunci

$$K(H) = D\Phi(F)[H] + R_\Phi(H),$$

iar, deoarece $D\Phi(F)$ este liniară şi continuă,

$$\|K(H)\| = O(\|H\|).$$

Din diferenţiabilitatea lui Ψ în $\Phi(F)$ avem

$$\Psi(\Phi(F)+K) = \Psi(\Phi(F)) + D\Psi(\Phi(F))[K] + R_\Psi(K),$$

unde

$$\frac{\|R_\Psi(K)\|}{\|K\|} \longrightarrow 0 \qquad \text{pentru} \qquad \|K\| \longrightarrow 0.$$

Aplicând această relaţie pentru $K = K(H)$ rezultă

$$\Psi(\Phi(F+H)) - \Psi(\Phi(F)) = D\Psi(\Phi(F))\Big[D\Phi(F)[H]\Big] + D\Psi(\Phi(F))[R_\Phi(H)] + R_\Psi(K(H)).$$

Primul termen de rest este $o(\|H\|)$, deoarece

$$\|R_\Phi(H)\| = o(\|H\|),$$

iar al doilea este tot $o(\|H\|)$, deoarece

$$\|K(H)\| = O(\|H\|)$$

şi

$$\|R_\Psi(K)\| = o(\|K\|).$$

Prin urmare,

$$\Psi(\Phi(F+H)) = \Psi(\Phi(F)) + D\Psi(\Phi(F))\Big[D\Phi(F)[H]\Big] + o(\|H\|),$$

ceea ce demonstrează formula. □

Exemplul 1.2.7 (Derivata lui F^{-T})**.** Considerăm aplicaţiile

$$\Phi(F) = F^{-1}, \qquad \Psi(A) = A^T.$$

Atunci

$$F^{-T} = (\Psi \circ \Phi)(F).$$

Transpunerea este liniară, deci

$$D\Psi(A)[K] = K^T.$$

Cum

$$D\Phi(F)[H] = -F^{-1}HF^{-1},$$

regula lanţului dă

$$\begin{aligned} D(F^{-T})[H] &= D\Psi(F^{-1})\Big[D\Phi(F)[H]\Big] \\ &= \left(-F^{-1}HF^{-1}\right)^T \\ &= -F^{-T}H^TF^{-T}. \end{aligned}$$

Exemplul 1.2.8 (Compunerea unei funcţii scalare cu determinantul)**.** Fie $\Phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ o funcţie diferenţiabilă şi considerăm

$$W(F) = \Phi(\det F).$$

Scriem

$$W = \Phi \circ \det.$$

Cum

$$D(\det F)[H] = \langle \operatorname{Cof} F, H \rangle,$$

regula lanţului dă

$$DW(F)[H] = \Phi'(\det F)\, \langle \operatorname{Cof} F, H \rangle.$$

Prin urmare, gradientul lui W faţă de F este

$$D_F W(F) = \Phi'(\det F) \operatorname{Cof} F.$$

1.3 Deplasare, viteză şi cele două descrieri

Faţă de configuraţia de referinţă definim deplasarea

$$u(X,t) = \varphi(X,t) - X, \qquad F = I + \nabla_X u.$$

Descrierea lagrangiană foloseşte punctul material X ca variabilă independentă. Descrierea eulerianăă foloseşte poziţia actuală x. Dacă $\varphi_t = \varphi(\cdot, t)$ este inversabilă, câmpul eulerian al vitezei este definit prin

$$v(\varphi(X,t),t) = \partial_t \varphi(X,t),$$

sau, echivalent,

$$v(x,t) = \partial_t \varphi(\varphi_t^{-1}(x), t).$$

Această relaţie trebuie citită cu atenţie: în membrul stâng viteza este o funcţie de poziţia actuală x, iar în membrul drept derivata se calculează la punctul material X fix.

Propoziţia 1.3.1 (evoluţia gradientului şi a jacobianului)**.** *Pentru o mişcare suficient de regulată,*

$$\dot F = (\nabla_x v) F, \qquad \nabla_x v = \dot F F^{-1},$$

iar

$$\boxed{\dot J = J \operatorname{div}_x v.}$$

Demonstraţie. Pornim de la

$$v(\varphi(X,t),t) = \partial_t \varphi(X,t).$$

Derivăm faţă de X_J. Pentru componenta i, regula lanţului dă

$$\partial_{X_J}\Big[v_i(\varphi(X,t),t)\Big] = \sum_{k=1}^{3} \partial_{x_k} v_i(\varphi(X,t),t)\, \partial_{X_J}\varphi_k(X,t).$$

Membrul drept este componenta (i,J) a matricei $(\nabla_x v)F$. Pe de altă parte,

$$\partial_{X_J}\partial_t \varphi_i = \partial_t \partial_{X_J}\varphi_i = \dot F_{iJ}.$$

Rezultă

$$\dot F = (\nabla_x v) F,$$

iar înmulţirea la dreapta cu F^{-1} dă a doua formulă.

Aplicăm formula pentru derivata determinantului din Propoziţia 1.2.2 curbei $t \mapsto F(t)$:

$$\dot{J} = D(\det)(F)[\dot{F}] = J \ \mathrm{tr}(F^{-1}\dot{F}).$$

Ciclicitatea urmei şi relaţia $\dot{F}F^{-1} = \nabla_x v$ dau

$$\mathrm{tr}(F^{-1}\dot{F}) = \mathrm{tr}(\dot{F}F^{-1}) = \mathrm{tr}(\nabla_x v) = \mathrm{div}_x\, v.$$

Prin urmare $\dot{J} = J \ \mathrm{div}_x\, v$. □

1.4 Derivata materială şi acceleraţia

Fie $q = q(x,t)$ un câmp scalar eulerian. Pentru particula etichetată prin X, valoarea observată de-a lungul traiectoriei este

$$Q(X,t) := q(\varphi(X,t),t).$$

Derivând în timp la X fix,

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}Q(X,t) &= \partial_t q(\varphi(X,t),t) + \langle \nabla_x q(\varphi(X,t),t), \partial_t \varphi(X,t)\rangle \\ &= \partial_t q(\varphi(X,t),t) + \langle \nabla_x q(\varphi(X,t),t), v(\varphi(X,t),t)\rangle\,.\end{aligned}$$

Aceasta motivează notaţia

$$\boxed{\frac{Dq}{Dt} = \partial_t q + \langle \nabla_x q, v\rangle.}$$

Formula nu introduce o derivată nouă independentă; ea este derivata obişnuită în timp a lui q atunci când q este evaluat pe traiectoria unei particule.

Pentru un câmp vectorial regula se aplică pe componente. Alegând $q = v_i$ pentru fiecare componentă a vitezei,

$$\frac{Dv_i}{Dt} = \partial_t v_i + \sum_{j=1}^{3} v_j \partial_{x_j} v_i.$$

În formă matricială,

$$\boxed{a = \frac{Dv}{Dt} = \partial_t v + (\nabla_x v)v.}$$

A doua formă evită notaţia cu produs scalar între v şi operatorul ∇. Ea arată de asemenea că termenul convectiv provine din regula lanţului.

De exemplu, pentru rotaţia staţionară

$$v(x) = \omega \times x,$$

avem $\partial_t v = 0$, dar $(\nabla v)v \neq 0$. Calculul conduce la

$$a = \omega \times (\omega \times x),$$

adică la acceleraţia centripetă. Prin urmare un câmp de viteză independent explicit de timp poate produce o acceleraţie nenulă.

1.5 Deformări elementare şi calculul explicit al gradientului deformării

Înainte de a dezvolta aparatul tensorial, este util să calculăm în detaliu câteva deformări care vor reapărea pe tot parcursul cursului. Scopul nu este doar de a obţine matrici, ci de a învăţa să citim geometric informaţia conţinută în gradientul deformării.

1.5.1 Extensie uniaxială omogenă

Considerăm

$$\varphi(X_1, X_2, X_3) = (\lambda X_1, X_2, X_3), \qquad \lambda > 0.$$

Atunci

$$F = \nabla\varphi = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad J = \det F = \lambda.$$

Un segment material paralel cu e_1, de lungime iniţială L, devine un segment de lungime λL. Segmentele paralele cu e_2, e_3 nu îşi schimbă lungimea. Un paralelipiped elementar de volum dV capătă volumul $dv = \lambda\, dV$. Dacă materialul este incompresibil, această deformare nu poate apărea singură, deoarece ar trebui să avem $J = 1$. O extensie uniaxială incompresibilă are, de exemplu, forma

$$F = \operatorname{diag}(\lambda, \lambda^{-1/2}, \lambda^{-1/2}), \qquad \det F = 1.$$

Pentru materiale aproape incompresibile, aceeaşi relaţie produce contracţia transversală observată la întindere.

1.5.2 Dilatare sferică

Pentru

$$\varphi(X) = \alpha X,$$

avem $F = \alpha I$ şi $J = \alpha^3$. Toate lungimile se multiplică prin α, ariile prin α^2, iar volumele prin α^3; cele trei mărimi geometrice au deci factori de scară diferiţi.

1.5.3 Forfecare simplă

Considerăm

$$\varphi(X_1, X_2, X_3) = (X_1 + \gamma X_2, X_2, X_3),$$

unde $\gamma \in \mathbb{R}$ este amplitudinea forfecării. Atunci

$$F = I + \gamma e_1 \otimes e_2 = \begin{pmatrix} 1 & \gamma & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \det F = 1.$$

Aşadar forfecarea simplă este izocoră. Totuşi ea nu este o rotaţie, deoarece

$$F^T F = \begin{pmatrix} 1 & \gamma & 0 \\ \gamma & 1+\gamma^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \neq I$$

pentru $\gamma \neq 0$. Conservarea volumului nu implică rigiditate. Mai târziu vom separa partea de rotaţie de partea de întindere prin descompunerea polară.

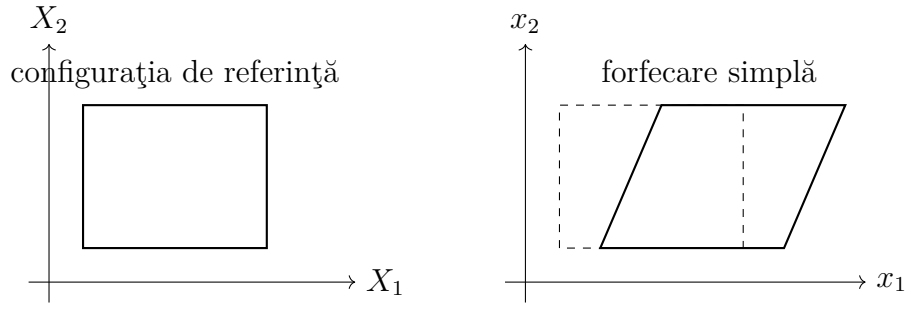


Figura 1.1: Forfecarea simplă păstrează aria în plan, dar modifică lungimi şi unghiuri.

1.5.4 Deformare de tip torsiune a unui cilindru

Considerăm axa cilindrului paralelă cu e_3 şi notăm cu ϑ rata de răsucire, adică unghiul de rotaţie pe unitatea de lungime. Punem

$$\psi(X_3) = \vartheta X_3$$

şi considerăm deformarea exactă

$$\varphi(X) = \big(X_1 \cos\psi - X_2 \sin\psi,\ X_1 \sin\psi + X_2 \cos\psi,\ X_3\big).$$

Pentru a evita orice pas implicit, derivăm cele trei coloane ale lui $F = \nabla_X \varphi$. Avem

$$\partial_1 \varphi = (\cos\psi, \sin\psi, 0)^T, \qquad \partial_2 \varphi = (-\sin\psi, \cos\psi, 0)^T,$$

iar, deoarece $\psi'(X_3) = \vartheta$,

$$\partial_3 \varphi = \begin{pmatrix} -\vartheta(X_1 \sin\psi + X_2 \cos\psi) \\ \vartheta(X_1 \cos\psi - X_2 \sin\psi) \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Prin urmare

$$F = \begin{pmatrix} \cos\psi & -\sin\psi & -\vartheta(X_1\sin\psi + X_2\cos\psi) \\ \sin\psi & \cos\psi & \vartheta(X_1\cos\psi - X_2\sin\psi) \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Matricea este bloc-triunghiulară. Dacă notăm cu

$$Q(\psi) = \begin{pmatrix} \cos\psi & -\sin\psi \\ \sin\psi & \cos\psi \end{pmatrix},$$

atunci blocul din stânga sus este $Q(\psi)$, iar ultima linie a lui F este $(0, 0, 1)$. Determinantul unei matrice bloc-triunghiulare este produsul determinantelor blocurilor diagonale, astfel

$$\det F = \det Q(\psi) \cdot 1 = (\cos^2\psi + \sin^2\psi) \cdot 1 = 1.$$

Prin urmare

$$\boxed{J = \det F = 1.}$$

Aşadar această torsiune cinematică exactă este local izocoră. Primele două coloane reprezintă rotaţia secţiunii transversale, iar termenii proporţionali cu ϑ din coloana a treia măsoară variaţia rotaţiei de-a lungul axei.

Pentru $|\vartheta X_3| \ll 1$, folosim $\sin\psi = \psi + O(\psi^3)$ şi $\cos\psi = 1 + O(\psi^2)$. Deplasarea $u = \varphi - X$ are atunci, la primul ordin,

$$u(X) \simeq \vartheta X_3(-X_2, X_1, 0),$$

forma pe care o vom utiliza în capitolul de elasticitate liniarizată. În coordonate cilindrice aceeaşi deformare se scrie compact

$$r = R, \qquad \theta = \Theta + \vartheta Z, \qquad z = Z.$$

Pentru moment reţinem numai informaţia cinematică; relaţia dintre această deformare şi tensiunile de torsiune va fi dedusă după introducerea legii constitutive.

Exemplul 1.5.1 (citirea coloanelor lui F)**.** Coloana j a lui F este imaginea infinitesimală a direcţiei materiale e_j:

$$Fe_j = \partial_{X_j}\varphi.$$

În forfecarea simplă,

$$Fe_1 = e_1, \qquad Fe_2 = \gamma e_1 + e_2, \qquad Fe_3 = e_3.$$

Prin urmare, familia de segmente iniţial paralelă cu e_2 este înclinată, în timp ce familia paralelă cu e_1 rămâne neschimbată.

1.6 Transformarea lungimilor, volumelor şi ariilor

Fie

$$\varphi : \Omega \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$$

o deformare diferenţiabilă şi fixăm un punct $X_0 \in \Omega$. Notăm

$$x_0 = \varphi(X_0), \qquad F = \nabla\varphi(X_0) \in GL^+(3).$$

Prin definiţia diferenţiabilităţii Fréchet,

$$\varphi(X_0 + H) = \varphi(X_0) + FH + r_{X_0}(H),$$

unde

$$\frac{\|r_{X_0}(H)\|}{\|H\|} \longrightarrow 0 \qquad \text{pentru} \qquad \|H\| \longrightarrow 0.$$

Prin urmare, într-o vecinătate a punctului X_0, deformarea este descrisă la primul ordin de aplicaţia afină

$$X_0 + H \longmapsto x_0 + FH.$$

Acesta este sensul geometric al gradientului deformării: matricea F descrie transformarea locală a direcţiilor, lungimilor, volumelor şi ariilor.

1.6.1 Transformarea vectorilor tangenţi şi a lungimilor

Considerăm o curbă materială regulată

$$\gamma : I \to \Omega, \qquad s \longmapsto X(s),$$

care trece prin X_0, adică

$$X(s_0) = X_0.$$

Imaginea curbei prin deformare este

$$\widetilde{\gamma}(s) = \varphi(X(s)).$$

Vectorul tangent la curba materială în X_0 este

$$T = X'(s_0),$$

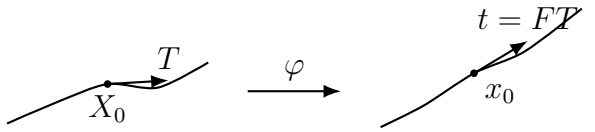
iar vectorul tangent la curba deformată în x_0 este

$$t = \widetilde{\gamma}'(s_0).$$

Prin regula lanţului,

$$t = \nabla\varphi(X_0)T = FT.$$

Prin urmare, F transformă vectorii tangenţi din configuraţia de referinţă în vectorii tangenţi corespunzători din configuraţia actuală.



curba materială curba deformată

Pentru a descrie modificarea lungimii, observăm că

$$\|t\|^2 = \|FT\|^2 = \langle FT, FT\rangle = \langle T, F^T F\, T\rangle.$$

Propoziţia 1.6.1 (Caracterizarea izometriilor liniare păstrătoare a orientării)**.** *Pentru* $F \in GL^+(3)$ *sunt echivalente:*

(i) $\|Fn\| = \|n\|$ *pentru orice* $n \in \mathbb{R}^3$*;*

(ii) $F^T F = I$*;*

(iii) $F \in SO(3)$*.*

Demonstraţie. Demonstrăm implicaţiile

$$(i) \Rightarrow (ii) \Rightarrow (iii) \Rightarrow (i).$$

Presupunem mai întâi (i). Atunci

$$\|Fn\|^2 = \|n\|^2 \qquad \text{pentru orice } n \in \mathbb{R}^3.$$

Dar

$$\|Fn\|^2 = \langle n, F^T Fn\rangle,$$

deci

$$\langle n, (F^T F - I)n\rangle = 0 \qquad \text{pentru orice } n \in \mathbb{R}^3.$$

Notăm

$$A = F^T F - I.$$

Matricea A este simetrică. Alegând $n = e_i$, obţinem

$$A_{ii} = 0.$$

Apoi, pentru $i \neq j$, alegem

$$n = e_i + e_j.$$

Rezultă

$$0 = \langle e_i + e_j, A(e_i + e_j)\rangle = A_{ii} + A_{jj} + 2A_{ij} = 2A_{ij}.$$

Prin urmare toate componentele lui A sunt nule şi

$$F^T F = I.$$

Presupunem acum (ii). Atunci $F \in O(3)$. Luând determinantul,

$$(\det F)^2 = 1.$$

Deoarece $F \in GL^+(3)$,

$$\det F > 0,$$

de unde

$$\det F = 1.$$

Prin urmare

$$F \in SO(3).$$

În sfârşit, dacă $F \in SO(3)$, atunci

$$F^T F = I,$$

iar

$$\|Fn\|^2 = \langle n, F^T F n\rangle = \|n\|^2$$

pentru orice $n \in \mathbb{R}^3$. Rezultă (i). □

1.6.2 Transformarea volumelor

Considerăm trei vectori liniar independenţi

$$a, b, c \in \mathbb{R}^3.$$

Ei generează un paralelipiped orientat, al cărui volum orientat este

$$\langle a, b \times c\rangle.$$

Dacă

$$A = (a \,|\, b \,|\, c),$$

atunci

$$\langle a, b \times c\rangle = \det A.$$

Prin aplicaţia liniară F, vectorii devin

$$Fa, \qquad Fb, \qquad Fc.$$

Volumul orientat al paralelipipedului transformat este

$$\langle Fa, Fb \times Fc\rangle.$$

Matricea ale cărei coloane sunt aceşti vectori este

$$(Fa \,|\, Fb \,|\, Fc) = FA,$$

de unde

$$\begin{aligned}\langle Fa, Fb \times Fc\rangle &= \det(FA)\\ &= (\det F)(\det A)\\ &= (\det F)\langle a, b \times c\rangle.\end{aligned}$$

Această identitate explică rolul determinantului. Pentru a lega formula de deformarea neliniară φ, considerăm pentru $h > 0$ paralelipipedul

$$P_h = \{X_0 + h(\alpha a + \beta b + \gamma c) : 0 \le \alpha, \beta, \gamma \le 1\}.$$

Volumul său este

$$|P_h| = h^3 \left|\langle a, b \times c\rangle\right|.$$

Din diferenţiabilitatea lui φ avem, uniform la primul ordin pe acest paralelipiped,

$$\varphi(X_0 + H) = x_0 + FH + o(\|H\|).$$

Prin urmare, când h este mic, imaginea lui P_h este aproximată la primul ordin de paralelipipedul generat de

$$hFa, \qquad hFb, \qquad hFc.$$

Volumul acestuia este

$$h^3 \left|\langle Fa, Fb \times Fc\rangle\right| = h^3 \left|\det F\right| \left|\langle a, b \times c\rangle\right|.$$

Rezultă că raportul local al volumelor tinde la

$$\left|\det F\right|.$$

Pentru deformările admisibile considerăm

$$F \in GL^+(3),$$

deci

$$J := \det F > 0.$$

Factorul local de variaţie a volumului este astfel

$$\boxed{J = \det F.}$$

Mai precis, pentru orice familie de paralelipipede P_h de forma de mai sus,

$$\frac{|\varphi(P_h)|}{|P_h|} \longrightarrow J \qquad \text{pentru} \qquad h \longrightarrow 0,$$

în sensul local descris de liniarizarea deformării.

Condiţia

$$J > 0$$

arată şi că orientarea locală este păstrată.

1.6.3 Transformarea ariilor şi formula lui Nanson

Transformarea ariilor este mai subtilă, deoarece deformarea modifică simultan aria unei porţiuni de suprafaţă şi direcţia normalei sale.

Fie o suprafaţă materială regulată, parametrizată local prin

$$X = X(\xi_1, \xi_2).$$

Vectorii

$$A_1 = \frac{\partial X}{\partial \xi_1}, \qquad A_2 = \frac{\partial X}{\partial \xi_2}$$

sunt liniar independenţi şi formează o bază a planului tangent la suprafaţă.

Vectorul

$$A_1 \times A_2$$

este perpendicular pe planul tangent. Definim normala unitară orientată prin

$$\boxed{N = \frac{A_1 \times A_2}{\|A_1 \times A_2\|}.}$$

Factorul

$$\|A_1 \times A_2\|$$

reprezintă raportul dintre aria unei porţiuni mici de suprafaţă şi aria porţiunii corespunzătoare din planul parametrilor.

Imaginea suprafeţei prin deformare este

$$x(\xi_1, \xi_2) = \varphi(X(\xi_1, \xi_2)).$$

Vectorii bazei tangente în configuraţia actuală sunt

$$a_\alpha = \frac{\partial x}{\partial \xi_\alpha}, \qquad \alpha = 1, 2.$$

Prin regula lanţului,

$$a_\alpha = FA_\alpha, \qquad \alpha = 1, 2.$$

Prin urmare,

$$a_1 = FA_1, \qquad a_2 = FA_2.$$

Normala unitară la suprafaţa deformată este

$$\boxed{n = \frac{a_1 \times a_2}{\|a_1 \times a_2\|}.}$$

Pentru a compara aria în cele două configuraţii, avem nevoie de identitatea

$$\boxed{(Fa) \times (Fb) = \operatorname{Cof} F\,(a \times b).}$$

Presupunem mai întâi că F este inversabilă. Pentru un vector arbitrar $c \in \mathbb{R}^3$,

$$\begin{aligned}
\langle c, (Fa) \times (Fb)\rangle &= \det(c, Fa, Fb) \\
&= \det\Big(F(F^{-1}c), Fa, Fb\Big) \\
&= (\det F)\det(F^{-1}c, a, b) \\
&= (\det F)\langle F^{-1}c, a \times b\rangle \\
&= \Big\langle c, (\det F)F^{-T}(a \times b)\Big\rangle .
\end{aligned}$$

Cum relaţia este valabilă pentru orice c, rezultă

$$(Fa) \times (Fb) = (\det F)F^{-T}(a \times b).$$

Folosind

$$\operatorname{Cof} F = (\det F)F^{-T},$$

obţinem

$$(Fa) \times (Fb) = \operatorname{Cof} F\,(a \times b).$$

Identitatea rămâne valabilă şi pentru matrici singulare, prin continuitate, deoarece ambii membri depind polinomial de componentele lui F.

Aplicând formula pentru

$$a = A_1, \qquad b = A_2,$$

obţinem

$$a_1 \times a_2 = \operatorname{Cof} F\,(A_1 \times A_2).$$

Cum

$$A_1 \times A_2 = \|A_1 \times A_2\|\ N,$$

rezultă

$$a_1 \times a_2 = \|A_1 \times A_2\|\ \operatorname{Cof} F\,N.$$

Pe de altă parte,

$$a_1 \times a_2 = \|a_1 \times a_2\|\ n.$$

Prin urmare,

$$\boxed{\|a_1 \times a_2\|\ n = \|A_1 \times A_2\|\ \operatorname{Cof} F\,N.}$$

Aceasta este forma geometrică a formulei lui Nanson.

Cum

$$\operatorname{Cof} F = JF^{-T},$$

ea poate fi scrisă

$$\boxed{\|a_1 \times a_2\|\ n = J\,\|A_1 \times A_2\|\ F^{-T}N.}$$

Luând norma în această relaţie şi folosind

$$\|n\| = \|N\| = 1,$$

obţinem

$$\|a_1 \times a_2\| = J \left\|F^{-T} N\right\| \|A_1 \times A_2\| .$$

Prin urmare factorul local de schimbare a ariei este

$$\boxed{\frac{\|a_1 \times a_2\|}{\|A_1 \times A_2\|} = J \left\|F^{-T} N\right\| .}$$

Formula are o interpretare geometrică directă. Pentru un dreptunghi mic

$$[\xi_1, \xi_1 + \Delta\xi_1] \times [\xi_2, \xi_2 + \Delta\xi_2]$$

din planul parametrilor, aria porţiunii corespunzătoare din configuraţia de referinţă este, la primul ordin,

$$\|A_1 \times A_2\| \, \Delta\xi_1 \Delta\xi_2,$$

iar aria porţiunii deformate este

$$\|a_1 \times a_2\| \, \Delta\xi_1 \Delta\xi_2.$$

Raportul dintre aceste două arii tinde astfel la

$$J \left\|F^{-T} N\right\| .$$

Pentru direcţia normalei, folosim

$$a_1 \times a_2 = J \, \|A_1 \times A_2\| \, F^{-T} N.$$

După normalizare rezultă

$$\boxed{n = \frac{F^{-T} N}{\|F^{-T} N\|}.}$$

Prin urmare, $F^{-T}N$ determină direcţia normalei deformate, iar factorul

$$J \left\|F^{-T} N\right\|$$

determină variaţia locală a ariei.

Exemplul 1.6.2 (Extensie diagonală)**.** Fie

$$F = \operatorname{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3), \qquad \lambda_i > 0.$$

Considerăm o suprafaţă al cărei plan tangent este generat de e_2, e_3. Normala materială este atunci

$$N = e_1.$$

Avem

$$F^{-T}e_1 = \lambda_1^{-1}e_1,$$

iar

$$J = \lambda_1\lambda_2\lambda_3.$$

Factorul local de schimbare a ariei este

$$J\left\|F^{-T}e_1\right\| = \lambda_1\lambda_2\lambda_3\frac{1}{\lambda_1} = \lambda_2\lambda_3.$$

Acest rezultat coincide cu interpretarea geometrică directă: cele două direcţii tangente sunt multiplicate cu factorii λ_2 şi λ_3.

Exemplul 1.6.3 (Normală oblică)**.** Exemplul precedent nu modifică direcţia normalei, deoarece e_1 este o direcţie principală a matricei diagonale.

Considerăm acum

$$F = \mathrm{diag}(2, 1, 1/2), \qquad N = \frac{e_1 + e_2}{\sqrt{2}}.$$

Avem

$$J = 1, \qquad F^{-T} = \mathrm{diag}(1/2, 1, 2).$$

Prin urmare,

$$F^{-T}N = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{1}{2}, 1, 0\right).$$

Norma acestui vector este

$$\left\|F^{-T}N\right\| = \sqrt{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{4} + 1\right)} = \frac{\sqrt{5}}{2\sqrt{2}}.$$

Factorul local de schimbare a ariei este deci $\boxed{\dfrac{\sqrt{5}}{2\sqrt{2}}.}$

Pentru normala deformată,

$$n = \frac{F^{-T}N}{\|F^{-T}N\|} = \frac{(1/2, 1, 0)}{\sqrt{(1/2)^2 + 1}} == \frac{(1, 2, 0)}{\sqrt{5}}.$$

Prin urmare, o suprafaţă cu normala materială

$$\frac{e_1 + e_2}{\sqrt{2}}$$

nu are după deformare aceeaşi direcţie normală. Transformarea F^{-T} determină noua direcţie, iar normalizarea produce versorul normal n.

1.7 Deformări radiale

Exemplele afine, dilatarea şi forfecarea simplă au fost deja calculate. Considerăm acum două clase de deformări radiale, pentru care gradientul nu mai este constant.

1.7.1 Deformarea radială a unei sfere

Fie

$$\varphi(X) = \frac{r(R)}{R} X, \qquad R = \|X\| > 0,$$

şi notăm $e_R = X/R$. Atunci $\varphi(X) = r(R)e_R$. Pentru a calcula gradientul fără a apela la o formulă memorată, folosim

$$\nabla R = e_R, \qquad \nabla e_R = \frac{1}{R}(I - e_R \otimes e_R).$$

Regula produsului dă

$$\begin{aligned} F = \nabla\varphi &= r'(R)e_R \otimes e_R + r(R)\nabla e_R \\ &= r'(R)e_R \otimes e_R + \frac{r(R)}{R}(I - e_R \otimes e_R). \end{aligned}$$

Astfel e_R este direcţie proprie cu factor de întindere $r'(R)$, iar orice direcţie tangentă la sfera $R = \text{const.}$ este întinsă cu factorul $r(R)/R$. Întinderile locale sunt deci

$$\lambda_R = r'(R), \qquad \lambda_\theta = \lambda_\phi = \frac{r(R)}{R},$$

iar jacobianul este produsul lor:

$$\boxed{J = r'(R)\left(\frac{r(R)}{R}\right)^2.}$$

Condiţiile locale $r'(R) > 0$ şi $r(R) > 0$ asigură $J > 0$. Aceleaşi formule vor fi folosite mai târziu pentru deformări sferic simetrice.

1.7.2 Deformarea radială a unui cilindru

Considerăm, pentru $R = \sqrt{X_1^2 + X_2^2} > 0$,

$$\varphi(X_1, X_2, X_3) = \frac{r(R)}{R}(X_1, X_2, 0) + \lambda_z X_3 e_3, \qquad \lambda_z > 0.$$

În baza cilindrică ortonormată

$$e_R = (X_1/R, X_2/R, 0), \qquad e_\Theta = (-X_2/R, X_1/R, 0), \qquad e_3,$$

avem $\varphi = r(R)e_R + \lambda_z X_3 e_3$. Pentru a nu ascunde calculul în expresia "perturbăm pe direcţii", calculăm mai întâi derivatele direcţionale ale lui R şi e_R. Pentru un increment arbitrar

$$H = h_R e_R + h_\Theta e_\Theta + h_3 e_3$$

avem

$$DR(X)[H] = \langle \nabla R, H \rangle = \langle e_R, H \rangle = h_R.$$

Deoarece $e_R = X_\perp / R$, unde $X_\perp = (X_1, X_2, 0)$, regula câtului dă

$$\begin{aligned} De_R(X)[H] &= \frac{H_\perp}{R} - \frac{X_\perp}{R^2} DR(X)[H] \\ &= \frac{h_R e_R + h_\Theta e_\Theta}{R} - \frac{e_R}{R} h_R \\ &= \frac{h_\Theta}{R} e_\Theta. \end{aligned}$$

Acum aplicăm regula lanţului şi regula produsului lui $\varphi(X) = r(R)e_R + \lambda_z X_3 e_3$:

$$\begin{aligned} D\varphi(X)[H] &= r'(R)DR(X)[H]e_R + r(R)De_R(X)[H] + \lambda_z h_3 e_3 \\ &= r'(R)h_R e_R + \frac{r(R)}{R} h_\Theta e_\Theta + \lambda_z h_3 e_3. \end{aligned}$$

Cum această formulă este valabilă pentru orice H, citim direct acţiunea gradientului pe baza (e_R, e_Θ, e_3). Prin urmare

$$\boxed{F = r'(R) e_R \otimes e_R + \frac{r(R)}{R} e_\Theta \otimes e_\Theta + \lambda_z e_3 \otimes e_3,}$$

şi, deoarece matricea este diagonală în această bază,

$$\boxed{J = r'(R) \frac{r(R)}{R} \lambda_z.}$$

Pentru păstrarea orientării este suficient să avem $r'(R) > 0$, $r(R) > 0$ şi $\lambda_z > 0$.

Dacă deformarea este incompresibilă, $J = 1$, iar r trebuie să satisfacă

$$r(R)r'(R) = \frac{R}{\lambda_z}.$$

Cum $\frac{d}{dR} r(R)^2 = 2r(R)r'(R)$,

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dR} r(R)^2 = \frac{R}{\lambda_z},$$

şi integrarea conduce la

$$\boxed{r(R)^2 = C + \frac{R^2}{\lambda_z}.}$$

De exemplu, condiţia $r(R_i) = r_i$ determină

$$C = r_i^2 - \frac{R_i^2}{\lambda_z}.$$

Această deducţie ilustrează cum o restricţie geometrică asupra volumului se transformă într-o ecuaţie diferenţială pentru deformare.

1.8 Probleme pentru seminar

1. Pentru $\varphi(X) = (2X_1, X_2/2, X_3)$ calculaţi F, J şi variaţia densităţii.
2. Arătaţi că o mişcare rigidă $\varphi(X) = c + QX$, $Q \in SO(3)$, are $J = 1$.
3. Pentru forfecarea simplă calculaţi imaginea unui pătrat din planul $X_3 = 0$ şi unghiul dintre imaginile vectorilor e_1, e_2.
4. Pentru $\varphi(X,t) = e^{\alpha t}X$ determinaţi $v(x,t)$, $\nabla_x v$ şi verificaţi $\dot{J} = J \operatorname{div} v$.
5. Un cub de aluminiu cu densitatea iniţială $2700\,\mathrm{kg/m^3}$ suferă deformarea diagonală $F = \operatorname{diag}(1.02, 0.99, 0.98)$. Determinaţi densitatea finală.
6. Formulaţi o deformare omogenă care păstrează volumul şi alungeşte direcţia e_1 cu factorul λ.

1.9 Exerciţii rezolvate

Problema 1.9.1 (deformare afină şi gradientul deformării)**.** Fie $\varphi(X) = FX + b$, unde

$$F = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 \end{pmatrix}, \qquad b \in \mathbb{R}^3.$$

Calculaţi gradientul deformării, determinantul său şi interpretaţi geometric deformarea.

Rezolvare. Deoarece $\varphi_i(X) = \sum_J F_{iJ}X_J + b_i$, avem

$$\frac{\partial \varphi_i}{\partial X_J} = F_{iJ},$$

deci $\nabla\varphi = F$ în orice punct. Determinantul este produsul elementelor diagonale,

$$J = \det F = 2 \cdot 1 \cdot \frac{1}{2} = 1.$$

Un segment paralel cu e_1 îşi dublează lungimea, unul paralel cu e_2 îşi păstrează lungimea, iar unul paralel cu e_3 se înjumătăţeşte. În ciuda acestor modificări de formă, volumul local este păstrat deoarece $J = 1$.

Problema 1.9.2 (aproximaţia afină locală)**.** Pentru $\varphi \in C^1(\Omega;\mathbb{R}^3)$ şi $X_0 \in \Omega$, explicaţi de ce

$$\varphi(X_0 + H) = \varphi(X_0) + F(X_0)H + o(\|H\|), \qquad F = \nabla\varphi.$$

Ce semnificaţie mecanică are această formulă?

Rezolvare. Aceasta este chiar definiţia diferenţiabilităţii Fréchet a lui φ în X_0. Există o aplicaţie liniară $D\varphi(X_0)$ astfel încât

$$\frac{\|\varphi(X_0 + H) - \varphi(X_0) - D\varphi(X_0)H\|}{\|H\|} \to 0.$$

În coordonate, matricea lui $D\varphi(X_0)$ este $F(X_0) = \nabla\varphi(X_0)$. Prin urmare, la scară foarte mică, deformarea este aproximată de aplicaţia afină $H \mapsto F(X_0)H$. Astfel coloanele lui F descriu imaginile locale ale direcţiilor coordonate.

Problema 1.9.3 (orientare locală)**.** Consideraţi $\varphi(X_1, X_2, X_3) = (-X_1, X_2, X_3)$. Calculaţi F şi J. De ce această aplicaţie nu este admisibilă ca deformare păstrătoare a orientărrii

Rezolvare. Avem

$$F = \operatorname{diag}(-1, 1, 1), \qquad J = \det F = -1.$$

Aplicaţia este o reflexie faţă de planul $X_1 = 0$. Ea păstrează lungimile şi volumele ca mărime, dar inversează orientarea. Condiţia mecanică $J > 0$ exclude asemenea reflexii.

Problema 1.9.4 (derivata determinantului în identitate)**.** Arătaţi direct că, pentru orice $H \in \mathbb{R}^{3\times 3}$,

$$D(\det)(I)[H] = \operatorname{tr} H.$$

Rezolvare. Din formula demonstrată în capitol,

$$D(\det)(F)[H] = \langle \operatorname{Cof} F, H\rangle.$$

Pentru $F = I$ avem $\operatorname{Cof} I = I$, deci

$$D(\det)(I)[H] = \langle I, H\rangle = \sum_{i,j} \delta_{ij} H_{ij} = \sum_i H_{ii} = \operatorname{tr} H.$$

Echivalent, dezvoltarea $\det(I + \varepsilon H) = 1 + \varepsilon \operatorname{tr} H + o(\varepsilon)$ arată că urma este variaţia de ordin întâi a volumului.

Problema 1.9.5 (viteza şi acceleraţia unei mişcări omogene)**.** Fie $\varphi(X, t) = \alpha(t)X$, cu $\alpha(t) > 0$. Determinaţi F, J, apoi calculaţi direct $\partial_t\varphi$ şi $\partial_{tt}\varphi$ (viteza şi acceleraţia materiale).

Rezolvare. Derivând după X,

$$F(X, t) = \alpha(t)I, \qquad J(t) = \alpha(t)^3.$$

La X fix,

$$\partial_t\varphi(X, t) = \dot\alpha(t)X,$$

iar

$$\partial_{tt}\varphi(X, t) = \ddot\alpha(t)X.$$

Dacă scriem poziţia actuală $x = \alpha(t)X$, atunci $X = x/\alpha(t)$ şi câmpul eulerian al vitezei este

$$v(x, t) = \frac{\dot\alpha(t)}{\alpha(t)}x.$$

Problema 1.9.6 (forfecare simplă)**.** Fie

$$\varphi(X_1, X_2, X_3) = (X_1 + \gamma X_2, X_2, X_3), \qquad \gamma \in \mathbb{R}.$$

Calculaţi F, J, imaginile vectorilor bazei şi imaginea cubului unitate la nivel local.

Rezolvare. Derivăm fiecare componentă:

$$F = \nabla\varphi = \begin{pmatrix} 1 & \gamma & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Prin urmare

$$Fe_1 = e_1, \qquad Fe_2 = \gamma e_1 + e_2, \qquad Fe_3 = e_3.$$

Determinantul unei matrice triunghiulare este produsul diagonalei,

$$J = 1.$$

Un cub infinitesimal este transformat într-un paralelipiped cu acelaşi volum, dar cu feţele iniţial dreptunghiulare înclinate. Aşadar $J = 1$ exprimă numai păstrarea volumului, nu absenţa deformării.

Problema 1.9.7 (dilatare omogenă transversală a unui cilindru)**.** În coordonate carteziene consideraţi

$$\varphi(X_1, X_2, X_3) = (\lambda X_1, \lambda X_2, \mu X_3), \qquad \lambda, \mu > 0.$$

Determinaţi condiţia pentru păstrarea volumului şi interpretaţi-o pentru un cilindru circular.

Rezolvare. Avem

$$F = \operatorname{diag}(\lambda, \lambda, \mu), \qquad J = \lambda^2\mu.$$

Păstrarea volumului cere $J = 1$, adică

$$\mu = \lambda^{-2}.$$

Dacă raza cilindrului se multiplică cu λ, aria secţiunii se multiplică cu λ^2. Pentru ca volumul arie $\times$ lungime să rămână constant, lungimea axială trebuie să se multiplice cu λ^{-2}.

Problema 1.9.8 (relaţia dintre $\dot{F}$ şi gradientul spaţial al vitezei)**.** Pornind de la identitatea

$$v(\varphi(X,t),t) = \partial_t\varphi(X,t),$$

demonstraţi pas cu pas că

$$\dot{F} = (\nabla_x v)F.$$

Rezolvare. Pentru componente,

$$\partial_t\varphi_i(X,t) = v_i(\varphi(X,t),t).$$

Derivăm după X_J. În membrul stâng,

$$\partial_{X_J}\partial_t\varphi_i = \partial_t\partial_{X_J}\varphi_i = \dot{F}_{iJ}.$$

În membrul drept folosim regula lanţului:

$$\partial_{X_J}[v_i(\varphi(X,t),t)] = \sum_{k=1}^{3} \frac{\partial v_i}{\partial x_k}(\varphi(X,t),t)\frac{\partial \varphi_k}{\partial X_J}(X,t).$$

Aceasta este exact relaţia componentă

$$\dot{F}_{iJ} = (\nabla_x v)_{ik} F_{kJ},$$

deci, matricial, $\dot{F} = (\nabla_x v)F$.

Problema 1.9.9 (evoluţia jacobianului)**.** Folosind exerciţiul precedent şi formula pentru derivata determinantului, demonstraţi

$$\dot{J} = J \operatorname{div} v.$$

Apoi verificaţi formula pentru mişcarea $\varphi(X,t) = \alpha(t)X$.

Rezolvare. Din formula Jacobi,

$$\dot{J} = J \operatorname{tr}(F^{-1}\dot{F}).$$

Cum $\dot{F} = (\nabla_x v)F$,

$$F^{-1}\dot{F} = F^{-1}(\nabla_x v)F.$$

Folosind ciclicitatea urmei,

$$\operatorname{tr}(F^{-1}(\nabla_x v)F) = \operatorname{tr}((\nabla_x v)FF^{-1}) = \operatorname{tr}(\nabla_x v) = \operatorname{div} v.$$

Deci $\dot{J} = J \operatorname{div} v$. Pentru $\varphi = \alpha X$, $J = \alpha^3$, deci $\dot{J} = 3\alpha^2\dot{\alpha}$. Pe de altă parte, $v = (\dot{\alpha}/\alpha)x$, astfel

$$\operatorname{div} v = 3\frac{\dot{\alpha}}{\alpha}, \qquad J \operatorname{div} v = \alpha^3 \, 3\frac{\dot{\alpha}}{\alpha} = 3\alpha^2\dot{\alpha}.$$

Cele două expresii coincid.

Problema 1.9.10 (local versus global: un exemplu de neinjectivitate)**.** Pe domeniul de parametri

$$D = (1,2) \times (0,4\pi) \times (0,1)$$

consideraţi aplicaţia

$$\Phi(r,\theta,z) = (r\cos\theta, r\sin\theta, z).$$

Arătaţi că determinantul jacobianului este pozitiv în orice punct, dar aplicaţia nu este injectivă global. Explicaţi de ce acest exemplu separă inversabilitatea locală de injectivitatea globală.

Rezolvare. Pentru $r > 0$, vectorii tangenţi sunt

$$\partial_r\Phi = (\cos\theta, \sin\theta, 0), \quad \partial_\theta\Phi = (-r\sin\theta, r\cos\theta, 0), \quad \partial_z\Phi = (0,0,1).$$

Produsul mixt are valoarea

$$\langle \partial_r\Phi \times \partial_\theta\Phi, \partial_z\Phi \rangle = r > 0.$$

Aşadar parametrizarea este local păstrătoare a orientărrii şi local inversabilă. Totuşi

$$\Phi(r,\theta,z) = \Phi(r,\theta+2\pi,z),$$

iar intervalul $0<\theta<4\pi$ conţine ambele valori. Prin urmare aplicaţia nu este injectivă global. Exemplul separă clar condiţia locală $J>0$ de condiţia globală de neinterpenetrare.

1.10 Exerciţii propuse suplimentare

Nivelul A

1.A.1 *(deformare afină: gradient, cofactor, densitate)* Fie $b\in\mathbb{R}^3$ fixat şi deformarea afină

$$\varphi(X) = (X_1+2X_2,\,3X_2,\,X_3-X_1)+b, \qquad X\in\Omega\subset\mathbb{R}^3,$$

cu Ω deschis, mărginit şi conex. Calculaţi $F=\nabla\varphi$, $J=\det F$, verificaţi admisibilitatea ($J>0$), calculaţi $\operatorname{Cof}F$ şi determinaţi densitatea în configuraţia deformată, ştiind că densitatea de referinţă este constantă, $\rho_0 = 6000\,\mathrm{kg/m^3}$.
Indicaţie. Pentru o aplicaţie afină $\varphi(X)=FX+b$ avem $\nabla\varphi=F$ în orice punct (ca în Problema 1.15.1). Folosiţi identitatea lui Cramer $\operatorname{Cof}F=(\det F)F^{-T}$ din § 1.3 şi formula conservării masei $\rho J=\rho_0$ din § 1.10.
Răspuns.

$$F=\begin{pmatrix}1&2&0\\0&3&0\\-1&0&1\end{pmatrix},\qquad J=3>0,\qquad \operatorname{Cof}F=\begin{pmatrix}3&0&3\\-2&1&-2\\0&0&3\end{pmatrix},\qquad \rho=\frac{\rho_0}{J}=2000\,\mathrm{kg/m^3}.$$

1.A.2 *(cele două descrieri şi evoluţia jacobianului)* Pentru mişcarea

$$\varphi(X,t) = (X_1+tX_2,\,X_2,\,(1+t)X_3), \qquad t\ge 0,$$

calculaţi $F(t)$, $J(t)$, deplasarea $u(X,t)$, viteza materială $V(X,t)$ şi câmpul eulerian al vitezei $v(x,t)$. Verificaţi apoi direct identitatea $\dot J = J\,\operatorname{div}_x v$.
Indicaţie. Inversaţi $x=\varphi(X,t)$ pentru a exprima X în funcţie de x şi t, apoi aplicaţi Propoziţia 1.4.1.
Răspuns.

$$F=\begin{pmatrix}1&t&0\\0&1&0\\0&0&1+t\end{pmatrix},\qquad J=1+t,$$

$$u=(tX_2,0,tX_3),\qquad V=(X_2,0,X_3),\qquad v(x,t)=\left(x_2,0,\frac{x_3}{1+t}\right),$$

$$\operatorname{div}_x v=\frac{1}{1+t},\qquad \dot J = 1 = J\,\operatorname{div}_x v.$$

1.A.3 *(elemente de volum şi de arie)* Fie deformarea omogenă cu

$$F = \operatorname{diag}\left(2, 3, \frac{1}{2}\right)$$

aplicată cubului unitate $[0,1]^3$. Determinaţi: (i) volumul imaginii cubului; (ii) pentru fiecare dintre feţele cu normale materiale $N = e_1$, $N = e_2$, $N = e_3$, vectorul-arie deformat $\operatorname{Cof} F\, N$ şi aria imaginii feţei.
Indicaţie. Folosiţi $dv = J\, dV$ şi $n\, da = \operatorname{Cof} F\, N\, dA = JF^{-T} N\, dA$ din § 1.9; pentru F diagonal, $\operatorname{Cof} F$ este diagonală cu elementele date de produsele perechilor de factori.
Răspuns. $J = 3$, deci volumul imaginii este 3. Mai mult,

$$\operatorname{Cof} F = \operatorname{diag}\left(\frac{3}{2}, 1, 6\right),$$

$$N = e_1 :\ \frac{3}{2} e_1,\ \text{arie } \frac{3}{2}; \qquad N = e_2 :\ e_2,\ \text{arie } 1; \qquad N = e_3 :\ 6e_3,\ \text{arie } 6.$$

Normalele nu se rotesc (deformare diagonală), dar ariile se modifică diferit de volum.

Nivelul B

1.B.1 *(derivata lui* $\log\det$ *şi interpretarea ei cinematică)* Fie $\Phi : GL^+(3) \to \mathbb{R}$, $\Phi(F) = \log\det F$. (a) Arătaţi că Φ este Fréchet-diferenţiabilă şi că

$$D\Phi(F)[H] = \operatorname{tr}(F^{-1}H) \qquad \forall H \in \mathbb{R}^{3\times 3},$$

deci $D_F\Phi(F) = F^{-T}$. (b) Deduceţi că, pentru o mişcare netedă cu $J > 0$,

$$\frac{d}{dt} \log J = \operatorname{div}_x v,$$

şi interpretaţi mecanic: $\operatorname{div} v$ este viteza relativă de variaţie a volumului.
Indicaţie. (a) Aplicaţi regula lanţului pornind de la Propoziţia 1.2.1, $D(\det)(F)[H] = \det F\, \operatorname{tr}(F^{-1}H)$. (b) Luaţi $H = \dot F$ şi folosiţi $L = \nabla_x v = \dot F F^{-1}$ (Propoziţia 1.4.1).
Răspuns.

$$D\Phi(F)[H] = \operatorname{tr}(F^{-1}H) = \langle F^{-T}, H\rangle,$$

prin urmare

$$\frac{d}{dt} \log J = \operatorname{tr}(F^{-1}\dot F) = \operatorname{tr} L = \operatorname{div}_x v.$$

O mişcare este izocoră ($J \equiv 1$) dacă şi numai dacă $\operatorname{div} v \equiv 0$.

1.B.2 *(torsiunea unui cilindru: factorizarea gradientului)* Fie $\vartheta > 0$ şi deformarea de tip torsiune

$$\varphi(X) = (X_1 \cos\theta - X_2 \sin\theta,\ X_1 \sin\theta + X_2 \cos\theta,\ X_3), \qquad \theta = \vartheta X_3.$$

(a) Calculaţi $F = \nabla\varphi$ şi arătaţi că $J = 1$ în orice punct. (b) Notând $R(\theta)$ rotaţia de unghi θ

în jurul axei e_3, arătaţi că

$$F = R(\theta)\Big[I + \vartheta(X_1 e_2 - X_2 e_1) \otimes e_3\Big].$$

(c) Deduceţi că $\|F - R(\theta)\| = \vartheta R$, unde $R = \sqrt{X_1^2 + X_2^2}$ este distanţa la axă, şi interpretaţi mecanic.
Indicaţie. Derivaţi după X_3 ţinând cont că θ depinde de X_3 (§ 1.6.4); pentru (b) înmulţiţi la stânga cu $R(\theta)^T$ şi simplificaţi folosind $\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$.
Răspuns.

$$F = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & -\vartheta(X_1\sin\theta + X_2\cos\theta) \\ \sin\theta & \cos\theta & \vartheta(X_1\cos\theta - X_2\sin\theta) \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad J = 1.$$

Factorizarea din (b) este validă, iar

$$\|F - R(\theta)\| = \vartheta\sqrt{X_1^2 + X_2^2} = \vartheta R.$$

Abaterea locală de la o rotaţie rigidă creşte liniar cu distanţa la axă; de aici forfecarea proporţională cu raza, care conduce în teoria liniară la $\tau_{\theta z} = \mu\kappa R$.

1.B.3 *(derivata cofactorului în identitate şi variaţia ariilor)* (a) Pornind de la $\operatorname{Cof} F = (\det F)F^{-T}$, demonstraţi că

$$D(\operatorname{Cof})(I)[H] = (\operatorname{tr} H)I - H^T, \qquad H \in \mathbb{R}^{3\times 3}.$$

(b) Deduceţi că, pentru $F_\varepsilon = I + \varepsilon H$ şi o normală materială unitară N, variaţia relativă de arie este

$$\frac{da - dA}{dA} = \varepsilon\Big(\operatorname{tr} H - \langle N, HN\rangle\Big) + O(\varepsilon^2).$$

(c) Verificaţi pe cazul $H = e_1 \otimes e_1$ că ariile feţelor cu $N = e_1$ nu se modifică la ordinul întâi, în timp ce ariile cu $N = e_2$ cresc cu ε.
Indicaţie. Folosiţi Propoziţiile 1.2.1 şi 1.2.2 (sau formula din § 1.9.4 pentru $D(\operatorname{Cof})$) şi $\operatorname{Cof} I = I$. La (b) dezvoltaţi $\|\operatorname{Cof} F_\varepsilon N\|$ şi reţineţi $\langle N, H^T N\rangle = \langle N, HN\rangle$.
Răspuns. (a) $D(\operatorname{Cof})(I)[H] = (\operatorname{tr} H)I - H^T$. (b) Formula indicată. (c) Pentru $H = e_1 \otimes e_1$, $\operatorname{tr} H = 1$; cu $N = e_1$ avem $\langle N, HN\rangle = 1$, deci variaţia este nulă la ordinul întâi; cu $N = e_2$ avem $\langle N, HN\rangle = 0$, deci variaţia relativă este ε.

Nivelul C

1.C.1 *(forfecare simplă dependentă de timp: cele două descrieri, acceleraţie, jacobian)* Se consideră mişcarea

$$\varphi(X, t) = (X_1 + \gamma(t)X_2,\ X_2,\ X_3), \qquad \gamma(t) = t^2, \quad t \geq 0,$$

pe un domeniu Ω deschis, mărginit şi conex, cu densitate de referinţă constantă ρ_0. (a) Calculaţi $F(t)$, $J(t)$, deplasarea $u(X, t)$, viteza materială $V(X, t)$ şi câmpul eulerian $v(x, t)$.

(b) Calculaţi acceleraţia în ambele moduri: $A(X,t) = \partial_{tt}\varphi$ şi $a = \partial_t v + (\nabla_x v)v$, şi verificaţi că $A(X,t) = a(\varphi(X,t),t)$. (c) Verificaţi $\dot J = J\,\mathrm{div}_x\, v$ şi deduceţi densitatea $\rho(x,t)$. Este mişcarea izocoră? Dar rigidă?
Indicaţie. (a) $X_2 = x_2$, deci inversarea este imediată. (b) Observaţi că v depinde numai de x_2, iar $v_2 = 0$, deci termenul convectiv se simplifică (§ 1.5, § 1.9.5). (c) Propoziţia 1.4.1 şi § 1.10; pentru rigiditate, comparaţi F cu $SO(3)$ (Propoziţia 1.8.1).
Răspuns. (a)

$$F = I + t^2 e_1 \otimes e_2, \qquad J = 1, \qquad u = (t^2 X_2, 0, 0), \qquad V = (2tX_2, 0, 0),$$

$$v(x,t) = (2tx_2, 0, 0).$$

(b) $A = (2X_2, 0, 0)$, $\partial_t v = (2x_2, 0, 0)$ şi $(\nabla v)v = 0$, deci $a = (2x_2, 0, 0)$ şi cele două expresii coincid. (c) $\mathrm{div}_x\, v = 0$ şi $\dot J = 0$; mişcarea este izocoră, $\rho \equiv \rho_0$, dar nu este rigidă, deoarece

$$C = F^T F = I + t^2(e_1 \otimes e_2 + e_2 \otimes e_1) + t^4 e_2 \otimes e_2 \neq I$$

pentru $t > 0$.

1.C.2 *(deformare radială cilindrică izocoră şi apariţia unei cavităţi)* Pentru $R = \sqrt{X_1^2 + X_2^2} > 0$ se consideră deformarea

$$\varphi(X) = \frac{r(R)}{R}(X_1, X_2, 0) + \lambda_z X_3 e_3, \qquad r \in C^1, \quad r > 0, \quad r' > 0, \quad \lambda_z > 0.$$

(a) Arătaţi că, în baza ortonormată cilindrică (e_R, e_Θ, e_3),

$$F = r'(R) e_R \otimes e_R + \frac{r(R)}{R} e_\Theta \otimes e_\Theta + \lambda_z e_3 \otimes e_3, \qquad J = r'(R)\frac{r(R)}{R}\lambda_z.$$

(b) Impuneţi izocoria $J \equiv 1$ şi integraţi ecuaţia diferenţială rezultată; arătaţi că soluţia generală este

$$r(R)^2 = \frac{R^2}{\lambda_z} + a^2, \qquad a \geq 0.$$

(c) Luaţi $\lambda_z = 4$ şi $a = 1$. Calculaţi $r(0)$, $r(3)$ şi volumul imaginii cilindrului material $\{R \leq 3,\ 0 \leq X_3 \leq 2\}$; comparaţi-l cu volumul iniţial şi explicaţi rolul constantei a.
Indicaţie. (a) Perturbaţi punctul material separat pe cele trei direcţii cilindrice, ca în § 1.12.5. (b) $J = 1$ se scrie $(r^2)' = 2R/\lambda_z$. (c) Imaginea este un tub: raza interioară este $r(0) = a$, iar volumul se calculează ca $\pi(r(3)^2 - a^2)\lambda_z \cdot 2$; comparaţi cu § 1.10.
Răspuns. (b) $r^2 = R^2/\lambda_z + a^2$. (c)

$$r(0) = a = 1, \qquad r(3) = \sqrt{\frac{9}{4} + 1} = \frac{\sqrt{13}}{2} \approx 1.8028.$$

Volumul imaginii este

$$\pi(r(3)^2 - a^2)\lambda_z \cdot 2 = \pi\frac{9}{4} \cdot 4 \cdot 2 = 18\pi,$$

egal cu volumul iniţial $\pi \cdot 3^2 \cdot 2 = 18\pi$. Deformarea conservă volumul şi $\rho \equiv \rho_0$. Constanta

$a > 0$ descrie o cavitate: axa materială $R = 0$ devine un cilindru de rază a. Volumul total se conservă numai dacă cavitatea este luată în calcul.

1.C.3 *(deformare neafină: admisibilitate, injectivitate, arii, masă)* Fie $\Omega = (0,1)^3$ şi

$$\varphi(X) = (X_1 + X_2^2,\, X_2,\, X_3).$$

(a) Calculaţi F, J şi $\operatorname{Cof} F$; verificaţi că φ este o deformare admisibilă (clasă C^1, $J > 0$) şi arătaţi că φ este global injectivă pe Ω. (b) Calculaţi aria imaginii feţei $\{X_1 = 0\} \cap \Omega$, cu normala materială $N = e_1$. (c) Arătaţi că densitatea nu se modifică şi verificaţi direct, prin schimbare de variabilă, că $\operatorname{vol}\varphi(\Omega) = \operatorname{vol}\Omega$.
Indicaţie. (a) J se citeşte imediat din structura triunghiulară a lui F; pentru injectivitate observaţi că x_2, x_3 determină X_2, X_3, apoi X_1. (b) Aria deformată este $\int \|\operatorname{Cof} F\, N\|\, dA$ (§ 1.9); apare integrala $\int_0^1 \sqrt{1+4t^2}\, dt$. (c) § 1.10.
Răspuns. (a)

$$F = \begin{pmatrix} 1 & 2X_2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad J = 1, \qquad \operatorname{Cof} F = F^{-T} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2X_2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Aplicaţia este injectivă; inversa este $X = (x_1 - x_2^2, x_2, x_3)$. (b) $\operatorname{Cof} F\, e_1 = (1, -2X_2, 0)$, deci

$$\text{aria} = \int_0^1 \int_0^1 \sqrt{1 + 4X_2^2}\, dX_2\, dX_3 = \frac{\sqrt{5}}{2} + \frac{1}{4}\ln(2+\sqrt{5}) \approx 1.4789.$$

(c) $J \equiv 1$ implică $\rho \equiv \rho_0$ şi

$$\operatorname{vol}\varphi(\Omega) = \int_\Omega J\, dX = 1.$$

Volumul se conservă, dar ariile nu: izocoria este o condiţie asupra determinantului, nu asupra cofactorului.

Capitolul 2

Măsuri de deformare, descompunerea polară şi distanţa la rotaţii

Surse şi orientare. Pentru descompunerea polară, întinderile principale şi măsurile finite de deformare folosim [3, 14]. Proprietatea de minim a factorului polar şi interpretarea distanţei la rotaţii sunt prezentate şi în [12].

2.1 Tensorii Cauchy–Green şi întinderile principale

Fie

$$F \in GL^+(3)$$

gradientul local al unei deformări. Dacă $T \in \mathbb{R}^3$ este un vector material, atunci vectorul corespunzător în configuraţia actuală este

$$t = FT.$$

Lungimea sa satisface

$$\|t\|^2 = \|FT\|^2 = \langle FT, FT\rangle = \langle T, F^T F\, T\rangle.$$

Această relaţie motivează introducerea tensorului Cauchy–Green drept

$$\boxed{C := F^T F.}$$

Astfel,

$$\|FT\|^2 = \langle T, CT\rangle.$$

Dacă M este o direcţie materială unitară,

$$\|M\| = 1,$$

definim factorul local de întindere în direcţia M prin

$$\lambda(M) := \|FM\|\,.$$

Prin urmare,

$$\boxed{\lambda(M)^2 = \langle M, CM\rangle.}$$

Tensorul C descrie astfel modificarea locală a lungimilor în funcţie de direcţia materială.

Matricea C este simetrică, deoarece

$$C^T = (F^T F)^T = F^T F = C.$$

Mai mult, pentru orice $x \neq 0$,

$$\langle x, Cx \rangle = \langle x, F^T F x \rangle = \|Fx\|^2 .$$

Cum F este inversabilă, din $x \neq 0$ rezultă $Fx \neq 0$, deci

$$\langle x, Cx \rangle > 0.$$

Prin urmare,

$$\boxed{C \in \mathrm{Sym}^+(3).}$$

Introducem şi tensorul Cauchy–Green stâng

$$\boxed{B := FF^T.}$$

Acesta este de asemenea simetric, deoarece

$$B^T = (FF^T)^T = FF^T = B.$$

Pentru orice $y \neq 0$,

$$\langle y, By \rangle = \langle y, FF^T y \rangle = \left\| F^T y \right\|^2 .$$

Cum F^T este inversabilă,

$$\left\| F^T y \right\|^2 > 0 \qquad \text{pentru } y \neq 0,$$

deci

$$\boxed{B \in \mathrm{Sym}^+(3).}$$

Cei doi tensori apar în configuraţii diferite. Tensorul C acţionează asupra direcţiilor materiale, deoarece

$$\lambda(M)^2 = \langle M, CM \rangle$$

este exprimată în funcţie de direcţia M din configuraţia de referinţă. Tensorul B este asociat configuraţiei actuale. Această diferenţă va deveni mai clară odată cu descompunerea polară a lui F.

Tensorul C permite compararea lungimii unui vector material cu lungimea vectorului corespunzător după deformare. Pentru orice $T \in \mathbb{R}^3$,

$$\begin{aligned} \|FT\|^2 - \|T\|^2 &= \langle T, CT \rangle - \langle T, T \rangle \\ &= \langle T, (C - I)T \rangle. \end{aligned}$$

Această relaţie motivează introducerea tensorului Green–Saint Venant

$$\boxed{E := \frac{1}{2}(C - I).}$$

Rezultă

$$\boxed{\|FT\|^2 - \|T\|^2 = 2\langle T, ET\rangle.}$$

Tensorul E măsoară astfel variaţia pătratului lungimilor.

Dacă

$$E = 0,$$

atunci

$$C = I.$$

Prin urmare,

$$\|FT\|^2 = \langle T, CT\rangle = \|T\|^2$$

pentru orice $T \in \mathbb{R}^3$. Cum $F \in GL^+(3)$, aceasta este echivalent cu

$$F \in SO(3).$$

Aşadar tensorul E se anulează exact pentru transformările liniare orientare-păstrătoare care conservă lungimile.

Interpretarea locală a tensorului C se extinde direct la lungimea curbelor.

Propoziţia 2.1.1 (Lungimea unei curbe şi a imaginii sale)**.** *Fie* $[a, b] \subset \mathbb{R}$ *şi*

$$c : [a, b] \to \overline{\Omega}$$

o curbă de clasă C^1*. Atunci*

$$L(c) = \int_a^b \|c'(t)\| \, dt.$$

Pentru curba deformată $\varphi \circ c$*,*

$$L(\varphi \circ c) = \int_a^b \|F(c(t))c'(t)\| \, dt.$$

Echivalent,

$$L(\varphi \circ c) = \int_a^b \sqrt{\langle c'(t), C(c(t))c'(t)\rangle} \, dt.$$

Demonstraţie. Prima formulă este definiţia lungimii unei curbe de clasă C^1. Pentru curba deformată, regula lanţului dă

$$(\varphi \circ c)'(t) = \nabla\varphi(c(t))c'(t) = F(c(t))c'(t).$$

Prin urmare,

$$L(\varphi \circ c) = \int_a^b \|F(c(t))c'(t)\| \, dt.$$

Cum

$$C(c(t)) = F(c(t))^T F(c(t)),$$

avem

$$\begin{aligned}\|F(c(t))c'(t)\|^2 &= \langle F(c(t))c'(t), F(c(t))c'(t)\rangle \\ &= \langle c'(t), C(c(t))c'(t)\rangle.\end{aligned}$$

Luând rădăcina pătrată şi integrând, obţinem formula dorită. □

Tensorul C este tensorul Cauchy–Green drept şi este asociat configuraţiei de referinţă, în timp ce B este tensorul Cauchy–Green stâng şi este asociat configuraţiei actuale. Ambii sunt tensori de *deformare*. Ei nu trebuie confundaţi cu tensorul de *tensiune* Cauchy σ, care va fi introdus ulterior.

2.2 Rădăcina pătrată şi calculul spectral

Fie $S = S^T \in \mathbb{R}^{3\times 3}$. Teorema spectrală furnizează o matrice ortogonală Q şi valori proprii reale s_1, s_2, s_3 astfel încât

$$S = Q\ \mathrm{diag}(s_1, s_2, s_3)Q^T.$$

Dacă $S \in \mathrm{Sym}^+(3)$, atunci toate valorile proprii sunt strict pozitive. Vom folosi această descompunere pentru a defini funcţii de matrice. Mai întâi tratăm cazul de care avem nevoie pentru descompunerea polară: rădăcina pătrată pozitivă.

2.2.1 Rădăcina pătrată pozitivă

Lema 2.2.1. *Pentru orice $S \in \mathrm{Sym}^+(3)$ există o unică matrice $U \in \mathrm{Sym}^+(3)$ astfel încât*

$$U^2 = S.$$

Demonstraţie. Existenţa. Scriem

$$S = Q\ \mathrm{diag}(s_1, s_2, s_3)Q^T, \qquad s_i > 0,$$

şi definim

$$U := Q\ \mathrm{diag}(\sqrt{s_1}, \sqrt{s_2}, \sqrt{s_3})Q^T.$$

Matricea U este simetrică. Pentru $x \neq 0$, dacă $y = Q^T x$, atunci

$$\langle x, Ux\rangle = \sum_{i=1}^{3} \sqrt{s_i}\, y_i^2 > 0,$$

deci $U \in \mathrm{Sym}^+(3)$. În plus,

$$U^2 = Q\ \mathrm{diag}(\sqrt{s_i})Q^T Q\ \mathrm{diag}(\sqrt{s_i})Q^T$$

$$= Q \operatorname{diag}(s_i) Q^T = S.$$

Unicitatea. Fie $V \in \mathrm{Sym}^+(3)$ o altă matrice cu $V^2 = S$. Primul pas este să vedem că V lasă invariante subspaţiile proprii ale lui S. Din $S = V^2$ avem

$$VS = VV^2 = V^3 = V^2V = SV.$$

Fie $s > 0$ o valoare proprie a lui S şi

$$E_s := \{x \in \mathbb{R}^3 : Sx = sx\}.$$

Dacă $x \in E_s$, atunci

$$S(Vx) = V(Sx) = V(sx) = sVx,$$

deci $Vx \in E_s$. Aşadar restricţia

$$V_s := V|_{E_s} : E_s \to E_s$$

este bine definită.

Deoarece V este simetrică, şi V_s este simetrică pe spaţiul euclidian E_s. Putem alege o bază ortonormată $(y_1, \ldots, y_m)$ a lui E_s formată din vectori proprii ai lui V_s:

$$Vy_j = \mu_j y_j.$$

Pozitivitatea definită a lui V implică, pentru $\|y_j\| = 1$,

$$\mu_j = \langle y_j, Vy_j \rangle > 0.$$

Pe de altă parte, $y_j \in E_s$, deci

$$V^2 y_j = Sy_j = sy_j.$$

Dar din $Vy_j = \mu_j y_j$ rezultă

$$V^2 y_j = \mu_j^2 y_j.$$

Comparând cele două relaţii obţinem

$$\mu_j^2 = s.$$

Există două rădăcini scalare, $\pm\sqrt{s}$, dar condiţia $\mu_j > 0$ elimină rădăcina negativă. Prin urmare

$$\mu_j = \sqrt{s} \qquad \text{pentru fiecare } j.$$

Asta arată că pe întregul subspaţiu propriu E_s avem

$$V_s = \sqrt{s}\, I_{E_s}.$$

Repetâm argumentul pentru fiecare valoare proprie distinctă a lui S. Pe suma ortogonală a subspaţiilor proprii, care este $\mathbb{R}^3$, matricea V coincide astfel cu matricea construită la pasul de existenţă. Deci $V = U$. □

Vom nota această unică rădăcină prin

$$S^{1/2} := Q\ \mathrm{diag}(\sqrt{s_1}, \sqrt{s_2}, \sqrt{s_3})Q^T.$$

Definiţia nu depinde de alegerea bazei ortonormate într-un subspaţiu propriu multiplu: pe un asemenea subspaţiu $S^{1/2}$ este pur şi simplu $\sqrt{s}$ ori identitatea.

Aceeaşi idee permite definirea altor funcţii spectrale. Dacă $f : (0, \infty) \to \mathbb{R}$, punem

$$f(S) := Q\ \mathrm{diag}(f(s_1), f(s_2), f(s_3))Q^T.$$

În particular,

$$\log S = Q\ \mathrm{diag}(\log s_1, \log s_2, \log s_3)Q^T.$$

Pentru $C = F^T F \in \mathrm{Sym}^+(3)$ vom nota

$$U = C^{1/2}.$$

Dacă $Cq_i = c_i q_i$, $c_i > 0$, atunci

$$Uq_i = \sqrt{c_i}\, q_i.$$

Numerele

$$\lambda_i := \sqrt{c_i}$$

se numesc *întinderi principale*; ele sunt valorile singulare ale lui F. Astfel

$$U = \sum_{i=1}^{3} \lambda_i q_i \otimes q_i.$$

2.3 Descompunerea polară

Rădăcina pătrată pozitivă introdusă mai sus permite construirea factorului de întindere din descompunerea polară. Construcţia lui U, verificarea faptului că R este rotaţie şi unicitatea sunt făcute în demonstraţia următoare.

Teorema 2.3.1 (descompunerea polară)**.** *Pentru orice $F \in GL^+(3)$ există în mod unic $R \in SO(3)$ şi $U, V \in \mathrm{Sym}^+(3)$ astfel încât*

$$F = RU = VR, \qquad U = (F^T F)^{1/2}, \qquad V = (FF^T)^{1/2}, \qquad V = RUR^T.$$

Demonstraţie. Demonstraţia se bazează pe teorema spectrală pentru matrice simetrice pozitiv definite şi pe unicitatea rădăcinii pătrate pozitive.

1. Construcţia lui U. Deoarece $F \in GL^+(3)$, pentru orice $x \neq 0$ avem $Fx \neq 0$. Prin urmare

$$\langle x, F^T F x \rangle = \|Fx\|^2 > 0.$$

Aşadar $C := F^T F$ este simetrică pozitiv definită. Teorema spectrală furnizează

$$C = Q \operatorname{diag}(c_1, c_2, c_3) Q^T, \qquad c_i > 0.$$

Definim

$$U := C^{1/2} = Q \operatorname{diag}(\sqrt{c_1}, \sqrt{c_2}, \sqrt{c_3}) Q^T.$$

Atunci $U \in \mathrm{Sym}^+(3)$, $U^2 = C$ şi U este inversabilă.

2. Construcţia rotaţiei. Punem $R := FU^{-1}$. Atunci

$$\begin{aligned} R^T R &= (FU^{-1})^T (FU^{-1}) = U^{-T} F^T F U^{-1} \\ &= U^{-1} U^2 U^{-1} = I, \end{aligned}$$

unde am folosit simetria lui U. Deci $R \in O(3)$. Din $U^2 = F^T F$ rezultă

$$(\det U)^2 = (\det F)^2.$$

Valorile proprii ale lui U sunt $\sqrt{c_i} > 0$, deci

$$\det U = \sqrt{c_1 c_2 c_3} > 0.$$

Cum $\det F > 0$ prin ipoteză şi $(\det U)^2 = (\det F)^2$, rezultă $\det U = \det F$, iar

$$\det R = \frac{\det F}{\det U} = 1.$$

Prin urmare $R \in SO(3)$ şi $F = RU$.

3. Unicitatea. Dacă $F = \widetilde{R}\widetilde{U}$ cu $\widetilde{R} \in SO(3)$ şi $\widetilde{U} \in \mathrm{Sym}^+(3)$, atunci

$$F^T F = \widetilde{U}^T \widetilde{R}^T \widetilde{R} \widetilde{U} = \widetilde{U}^2.$$

Dar $F^T F = U^2$. Unicitatea rădăcinii pătrate pozitive dă $\widetilde{U} = U$, iar apoi $\widetilde{R} = F\widetilde{U}^{-1} = FU^{-1} = R$.

4. Forma polară stângă. Definim $V := RUR^T$. Atunci $V \in \mathrm{Sym}^+(3)$ şi

$$VR = RUR^T R = RU = F.$$

În plus,

$$V^2 = RU^2 R^T = R(F^T F) R^T = FF^T,$$

deci V este o rădăcină pătrată simetrică pozitiv definită a lui FF^T. Dacă $\widetilde{V} \in \mathrm{Sym}^+(3)$ ar satisface şi $\widetilde{V}^2 = FF^T$, atunci $V^2 = \widetilde{V}^2 = FF^T$; unicitatea rădăcinii pătrate pozitive, demonstrată în Subsecţiunea 2.2.1, impune $\widetilde{V} = V$. Aşadar

$$V = (FF^T)^{1/2}$$

este unic. □

Factorul R reprezintă rotaţia locală, iar U întinderea pură în configuraţia de referinţă. Valorile proprii $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 > 0$ ale lui U se numesc *întinderi principale* sau valori singulare ale lui F. Avem

$$J = \det F = \det R \det U = \det U = \lambda_1\lambda_2\lambda_3.$$

Observaţia 2.3.2. Aceeaşi demonstraţie este valabilă în $\mathbb{R}^n$: pentru $F \in GL^+(n)$ există unic $F = RU$, cu $R \in SO(n)$ şi $U \in \mathrm{Sym}^+(n)$. În particular putem folosi fără o nouă demonstraţie versiunea bidimensională în exemplele de forfecare simplă.

2.3.1 Descompunerea în valori singulare

Diagonalizăm U:

$$U = Q \operatorname{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) Q^T, \qquad \lambda_i > 0.$$

Atunci

$$F = (RQ) \operatorname{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) Q^T.$$

Numerele λ_i sunt valorile singulare ale lui F şi reprezintă întinderile principale. Dacă q_i sunt vectorii proprii ai lui U, atunci

$$Fq_i = \lambda_i r_i, \qquad r_i = Rq_i,$$

cu (q_i) şi (r_i) baze ortonormate. Aşadar deformarea afină se descompune într-o rotaţie a sistemului de axe, trei întinderi pure şi o rotaţie finală.

2.3.2 Forfecarea simplă: valori singulare şi rotaţia polară

În plan considerăm

$$F = \begin{pmatrix} 1 & \gamma \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Atunci

$$C = F^T F = \begin{pmatrix} 1 & \gamma \\ \gamma & 1+\gamma^2 \end{pmatrix}, \quad \operatorname{tr} C = 2 + \gamma^2, \quad \det C = 1.$$

Valorile proprii $c_{1,2}$ ale lui C sunt rădăcinile ecuaţiei

$$c^2 - (2+\gamma^2)c + 1 = 0,$$

deci

$$c_{1,2} = 1 + \frac{\gamma^2}{2} \pm \frac{|\gamma|}{2}\sqrt{\gamma^2+4}.$$

Întinderile principale sunt $\lambda_i = \sqrt{c_i}$ şi satisfac $\lambda_1\lambda_2 = 1$, deoarece $\det F = 1$.

Pentru rotaţia polară căutăm $R(\theta)$ astfel încât $U = R(\theta)^T F$ să fie simetric. Scriem

$$R(\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}.$$

Atunci

$$R(\theta)^T F = \begin{pmatrix} \cos\theta & \gamma\cos\theta + \sin\theta \\ -\sin\theta & -\gamma\sin\theta + \cos\theta \end{pmatrix}.$$

Simetria impune

$$\gamma\cos\theta + \sin\theta = -\sin\theta,$$

adică

$$\tan\theta = -\frac{\gamma}{2}.$$

Ecuaţia pentru tangentă determină unghiul numai modulo π. Factorul polar trebuie însă să satisfacă $U = R(\theta)^T F \in \mathrm{Sym}^+(2)$. Alegem astfel ramura continuă cu $\theta(0) = 0$, adică $\theta \in (-\pi/2, \pi/2)$ şi

$$\theta = -\arctan(\gamma/2).$$

Pentru această ramură, elementele diagonale relevante ale lui U sunt pozitive; cealaltă ramură diferă cu π şi ar schimba semnul lui U, încălcând pozitivitatea definită. Prin unicitatea descompunerii polare, aceasta este rotaţia polară. Aşadar rotaţia polară nu este zero, deşi deformarea este numită "forfecare simplă". Ea conţine simultan o rotaţie şi o întindere pură.

2.4 Invarianţi şi valori singulare

Pentru un material izotrop, direcţiile principale nu trebuie să apară explicit în legea constitutivă. Folosim de aceea invarianţii principali ai lui C:

$$I_1(C) = \operatorname{tr} C, \qquad I_2(C) = \frac{1}{2}[(\operatorname{tr} C)^2 - \operatorname{tr}(C^2)], \qquad I_3(C) = \det C = J^2.$$

Să vedem cum se citesc aceste cantităţi din valorile proprii. Dacă

$$Cq_i = \lambda_i^2 q_i, \qquad i = 1, 2, 3,$$

cu (q_1, q_2, q_3) bază ortonormată, atunci, în această bază,

$$C = \operatorname{diag}(\lambda_1^2, \lambda_2^2, \lambda_3^2).$$

Prin urmare

$$I_1 = \operatorname{tr} C = \lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2$$

şi

$$\operatorname{tr}(C^2) = \lambda_1^4 + \lambda_2^4 + \lambda_3^4.$$

Introducând aceste două formule în definiţia lui I_2,

$$\begin{aligned} I_2 &= \frac{1}{2}\Big[(\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2)^2 - (\lambda_1^4 + \lambda_2^4 + \lambda_3^4)\Big] \\ &= \lambda_1^2\lambda_2^2 + \lambda_1^2\lambda_3^2 + \lambda_2^2\lambda_3^2. \end{aligned}$$

De asemenea,

$$I_3 = \det C = \lambda_1^2 \lambda_2^2 \lambda_3^2.$$

Aceleaşi trei expresii apar când dezvoltăm polinomul caracteristic. În baza proprie,

$$\begin{aligned} \det(C - \mu I) &= (\lambda_1^2 - \mu)(\lambda_2^2 - \mu)(\lambda_3^2 - \mu) \\ &= -\mu^3 + I_1 \mu^2 - I_2 \mu + I_3. \end{aligned}$$

Aşadar (I_1, I_2, I_3) determină polinomul caracteristic al lui C şi, prin urmare, mulţimea neordonată a valorilor proprii λ_i^2. Din acest motiv, o funcţie spectrală simetrică poate fi descrisă, local şi sub ipotezele de regularitate necesare, fie prin (I_1, I_2, I_3), fie ca funcţie simetrică de $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$.

2.5 Măsuri finite de deformare

Tensorul U permite definirea mai multor măsuri ale deformării. Ele conţin aceeaşi informaţie spectrală, dar transformă diferit întinderile principale la deformări finite.

Măsură	definiţie	valori proprii
Biot	$E_B = U - I$	$\lambda_i - 1$
Green–Saint Venant	$E_G = \frac{1}{2}(U^2 - I)$	$\frac{1}{2}(\lambda_i^2 - 1)$
Hencky	$E_H = \log U$	$\log \lambda_i$
Almansi	$e_A = \frac{1}{2}(I - B^{-1})$	$\frac{1}{2}(1 - \lambda_i^{-2})$

Toate se anulează pentru $U = I$. Diferenţa dintre ele se vede deja pe o întindere principală scalară: pentru aceeaşi valoare λ, numerele $\lambda - 1$, $(\lambda^2 - 1)/2$ şi $\log \lambda$ nu coincid în general.

O familie care le include pe primele trei este familia Seth–Hill:

$$E^{(m)} = \frac{U^{2m} - I}{2m}, \qquad m \neq 0.$$

În baza principală,

$$E^{(m)} = \sum_{i=1}^{3} \frac{\lambda_i^{2m} - 1}{2m} N_i \otimes N_i.$$

Pentru $m = \frac{1}{2}$ obţinem

$$E^{(1/2)} = U - I,$$

iar pentru $m = 1$,

$$E^{(1)} = \frac{U^2 - I}{2} = \frac{C - I}{2}.$$

Rămâne de explicat cazul $m = 0$. Pentru un scalar $\lambda > 0$,

$$\lambda^{2m} = e^{2m \log \lambda} = 1 + 2m \log \lambda + O(m^2) \qquad (m \to 0).$$

Prin urmare

$$\frac{\lambda^{2m} - 1}{2m} = \log \lambda + O(m),$$

şi

$$\lim_{m\to 0} \frac{\lambda^{2m}-1}{2m} = \log \lambda.$$

Aplicând acest calcul pe fiecare valoare proprie a lui U,

$$\lim_{m\to 0} E^{(m)} = \log U.$$

Putem deci completa familia prin

$$E^{(0)} := \log U.$$

Astfel măsura Hencky apare ca limita familiei Seth–Hill, nu ca o formulă separată fără legătură cu celelalte măsuri.

Mai notăm aici identitatea spectrală pe care o vom folosi ulterior:

$$\operatorname{tr}(\log U) = \sum_{i=1}^{3} \log \lambda_i = \log(\lambda_1\lambda_2\lambda_3) = \log \det U = \log J.$$

Ea rezultă direct din definiţia spectrală a lui $\log U$ şi din $\det U = \det F = J > 0$. Descompunerea deviatorică a lui $\log U$ va fi folosită atunci când introducem energia Hencky, în Capitolul 5.

2.6 Liniarizarea comună a măsurilor de deformare

Considerăm o familie de gradienţi

$$F_\varepsilon = I + \varepsilon H, \qquad \varepsilon \to 0.$$

Calculăm mai întâi tensorul Cauchy–Green:

$$\begin{aligned} C_\varepsilon &= F_\varepsilon^T F_\varepsilon \\ &= (I + \varepsilon H^T)(I + \varepsilon H) \\ &= I + \varepsilon(H + H^T) + \varepsilon^2 H^T H \\ &= I + 2\varepsilon \operatorname{sym} H + \varepsilon^2 H^T H. \end{aligned}$$

Dorim acum dezvoltarea lui

$$U_\varepsilon = C_\varepsilon^{1/2}.$$

Scriem

$$U_\varepsilon = I + \varepsilon K + O(\varepsilon^2)$$

şi folosim identitatea $U_\varepsilon^2 = C_\varepsilon$. Membrul stâng devine

$$U_\varepsilon^2 = I + 2\varepsilon K + O(\varepsilon^2).$$

Comparând termenii de ordin ε cu dezvoltarea lui C_ε,

$$2K = 2\,\mathrm{sym}\,H,$$

deci

$$\boxed{U_\varepsilon = I + \varepsilon\,\mathrm{sym}\,H + O(\varepsilon^2).}$$

Partea antisimetrică a lui H nu apare deci în deformarea de ordin întâi.

Pentru Green–Saint Venant,

$$E_G(F_\varepsilon) = \frac{1}{2}(C_\varepsilon - I) = \varepsilon\,\mathrm{sym}\,H + \frac{\varepsilon^2}{2}H^T H.$$

Pentru Biot,

$$E_B(F_\varepsilon) = U_\varepsilon - I = \varepsilon\,\mathrm{sym}\,H + O(\varepsilon^2).$$

Pentru Hencky folosim dezvoltarea scalară $\log(1+s) = s+O(s^2)$ pe spectrul matricei simetrice $U_\varepsilon - I$:

$$\log U_\varepsilon = (U_\varepsilon - I) + O(\|U_\varepsilon - I\|^2) = \varepsilon\,\mathrm{sym}\,H + O(\varepsilon^2).$$

Mai general, pentru fiecare m fix,

$$E^{(m)}(F_\varepsilon) = \varepsilon\,\mathrm{sym}\,H + O(\varepsilon^2).$$

Prin urmare toate aceste măsuri au aceeaşi parte liniară:

$$\boxed{E_{\mathrm{lin}} = \mathrm{sym}\,H.}$$

Dacă $H = \nabla u$, obţinem tensorul deformaţiei infinitezimale

$$\varepsilon(u) = \mathrm{sym}\,\nabla u.$$

Diferenţele dintre Biot, Green–Saint Venant, Hencky şi celelalte măsuri apar de la ordinul al doilea în sus.

2.7 Distanţa euclidiană la rotaţii: teorema lui Grioli

Proprietatea de minim a factorului polar este clasică; pentru formulări matriciale moderne şi extensii vezi [12].

Teorema 2.7.1. *Pentru $F \in GL^+(3)$ cu descompunerea polară $F = RU$,*

$$\min_{Q\in SO(3)} \|F - Q\|^2 = \|U - I\|^2 = \sum_{i=1}^{3}(\lambda_i - 1)^2,$$

iar minimizatorul este $Q = R$.

Demonstraţie. Demonstraţia foloseşte numai proprietăţi elementare ale normei Frobenius şi ale descompunerii spectrale; proprietatea este forma clasică a teoremei lui Grioli, pentru care

vezi şi [12].

Pasul 1: eliminarea rotaţiei polare. Pentru orice matrice ortogonală P şi orice matrice A,

$$\|PA\|^2 = \langle PA, PA\rangle = \operatorname{tr}(A^T P^T P A) = \operatorname{tr}(A^T A) = \|A\|^2 .$$

Aşadar înmulţirea la stânga cu o rotaţie nu schimbă norma Frobenius. Aplicând aceasta cu $P = R^T$,

$$\begin{aligned}\|F - Q\| &= \left\|R^T(F - Q)\right\| = \left\|R^T R U - R^T Q\right\| \\ &= \left\|U - R^T Q\right\| .\end{aligned}$$

Punem $S = R^T Q$. Deoarece produsul a două rotaţii aparţine din nou lui $SO(3)$, problema iniţială este echivalentă cu

$$\min_{S \in SO(3)} \|U - S\|^2 .$$

Pasul 2: dezvoltarea pătratului normei. Folosind produsul Frobenius,

$$\begin{aligned}\|U - S\|^2 &= \langle U - S, U - S\rangle \\ &= \langle U, U\rangle + \langle S, S\rangle - 2\langle U, S\rangle \\ &= \|U\|^2 + \|S\|^2 - 2\operatorname{tr}(U^T S).\end{aligned}$$

Tensorul U este simetric, deci $U^T = U$. Pentru $S \in SO(3)$,

$$\|S\|^2 = \operatorname{tr}(S^T S) = \operatorname{tr} I = 3.$$

Prin urmare

$$\|U - S\|^2 = \|U\|^2 + 3 - 2\operatorname{tr}(US).$$

Primele două termene nu depind de S; minimizarea normei este deci echivalentă cu maximizarea lui $\operatorname{tr}(US)$.

Pasul 3: trecerea în baza principală. Teorema spectrală furnizează o rotaţie $Q_0 \in SO(3)$ şi valori proprii pozitive $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ astfel încât

$$U = Q_0 \operatorname{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) Q_0^T .$$

Prin invarianta ciclică a urmei,

$$\begin{aligned}\operatorname{tr}(US) &= \operatorname{tr}\Big(Q_0 \operatorname{diag}(\lambda_i) Q_0^T S\Big) \\ &= \operatorname{tr}\Big(\operatorname{diag}(\lambda_i)\, Q_0^T S Q_0\Big) .\end{aligned}$$

Notăm $\widetilde{S} = Q_0^T S Q_0 \in SO(3)$. Atunci

$$\operatorname{tr}(US) = \lambda_1 \widetilde{s}_{11} + \lambda_2 \widetilde{s}_{22} + \lambda_3 \widetilde{s}_{33}.$$

Pasul 4: estimarea diagonalelor unei rotaţii. Fiecare coloană a lui $\widetilde{S}$ este un vector unitate.

În particular, pentru fiecare i,

$$|\widetilde{s}_{ii}| \le 1, \qquad \text{deci} \qquad \widetilde{s}_{ii} \le 1.$$

Cum toate λ_i sunt strict pozitive,

$$\operatorname{tr}(US) \le \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = \operatorname{tr} U.$$

Valoarea din dreapta este atinsă pentru $\widetilde{S} = I$, adică pentru $S = I$. Mai mult, dacă avem egalitate, atunci fiecare termen pozitiv $\lambda_i(1 - \widetilde{s}_{ii})$ trebuie să fie zero; rezultă $\widetilde{s}_{ii} = 1$ pentru toţi i. O matrice ortogonală ale cărei trei elemente diagonale sunt toate egale cu 1 este identitatea. Minimizatorul este deci unic.

Pasul 5: valoarea minimă. Pentru $S = I$,

$$\min_{S \in SO(3)} \|U - S\|^2 = \|U - I\|^2 .$$

În baza principală,

$$\|U - I\|^2 = \sum_{i=1}^{3} (\lambda_i - 1)^2.$$

În variabilele iniţiale, condiţia $S = R^T Q = I$ înseamnă $Q = R$. Prin urmare

$$\boxed{\min_{Q \in SO(3)} \|F - Q\|^2 = \|U - I\|^2 = \sum_{i=1}^{3} (\lambda_i - 1)^2,}$$

iar rotaţia polară R este unica rotaţie cea mai apropiată de F în norma Frobenius. □

Legătura cu regimul de deformaţii mici va fi reluată după teorema de rigiditate. Acolo dezvoltăm U_ε la ordinul necesar şi folosim formula de mai sus pentru a obţine comportarea lui $\operatorname{dist}(I + \varepsilon H, SO(3))$.

2.8 Distanţa geodezică şi deformarea Hencky

Distanţa euclidiană depinde de geometria liniară a spaţiului matricelor. Pe grupul $GL^+(3)$ se poate introduce o metrică riemanniană stâng-invariantă şi dreapta-$O(3)$-invariantă, pentru care distanţa la $SO(3)$ se exprimă prin $\log U$; vezi [12] şi referinţele de acolo. Nu dezvoltăm aici teoria geodezicelor pe grupuri Lie; folosim numai formula de distanţă şi identităţile spectrale. Pentru acestea este suficientă diagonalizarea ortogonală a lui U: dacă $U = Q \operatorname{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) Q^T$, atunci $\log U = Q \operatorname{diag}(\log \lambda_1, \log \lambda_2, \log \lambda_3) Q^T$, iar urma şi partea deviatorică se calculează pe valorile proprii. În forma izotropă utilizată aici,

$$\operatorname{dist}^2_{\text{geod}}(F, SO(3)) = \alpha \, \|\operatorname{dev} \log U\|^2 + \frac{\beta}{2} [\operatorname{tr}(\log U)]^2, \qquad \alpha, \beta > 0.$$

Cele două contribuţii au interpretări separate. Deoarece

$$\operatorname{tr}(\log U) = \log \det U = \log J,$$

termenul sferic măsoară modificarea de volum. În schimb

$$\operatorname{dev} \log U = \log U - \frac{1}{3} \operatorname{tr}(\log U) I = \log U - \frac{1}{3} (\log J) I.$$

Deoarece matricea scalară $J^{-1/3} I$ comută cu U, calculul spectral permite adunarea logaritmilor:

$$\log \left(J^{-1/3} U \right) = \log U + \log(J^{-1/3} I) = \log U - \frac{1}{3} (\log J) I.$$

Prin urmare

$$\operatorname{dev} \log U = \log \left(J^{-1/3} U \right).$$

măsoară numai distorsiunea izocoră.

2.8.1 Simetria întindere–compresiune

Dacă întinderea principală λ este înlocuită cu $1/\lambda$, atunci

$$\log(1/\lambda) = -\log \lambda.$$

Prin urmare energia pătratică în $\log U$ tratează simetric extensia şi compresia multiplicativ inversă, proprietate pe care măsura Biot $\lambda - 1$ nu o are.

Forfecarea simplă şi distanţa la rotaţii. Pentru forfecarea simplă, valorile singulare şi rotaţia polară au fost calculate în Subsecţiunea 2.3.2. Teorema lui Grioli se aplică direct valorilor singulare calculate acolo şi dă

$$\operatorname{dist}^2(F, SO(2)) = (\lambda_1 - 1)^2 + (\lambda_2 - 1)^2.$$

Exemplul arată că partea de rotaţie dintr-o forfecare simplă este eliminată de minimizarea faţă de $SO(2)$, iar distanţa măsoară numai partea de întindere.

2.9 Rigiditate: când absenţa deformării implică o mişcare rigidă

Deoarece $SO(3)$ este închis, condiţia $\operatorname{dist}(\nabla \varphi, SO(3)) = 0$ este echivalentă cu $\nabla \varphi \in SO(3)$. Prin formula lui Grioli aceasta este, la rândul ei, echivalentă cu $U = I$. Dacă această proprietate este valabilă în toate punctele unui domeniu conex, compatibilitatea gradientului nu permite ca rotaţia să varieze arbitrar de la punct la punct.

Teorema 2.9.1 (Liouville pentru deformări fără întindere)**.** *Fie $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ deschis şi conex şi*

fie $\varphi \in C^2(\Omega;\mathbb{R}^3)$. *Dacă*

$$(\nabla\varphi(x))^T\nabla\varphi(x) = I \qquad \textit{pentru orice } x \in \Omega,$$

şi $\det\nabla\varphi > 0$, *atunci există o rotaţie constantă* $Q \in SO(3)$ *şi un vector constant* $b \in \mathbb{R}^3$ *astfel încât*

$$\varphi(x) = Qx + b \qquad \textit{în } \Omega.$$

Demonstraţie. Notăm $R(x) = \nabla\varphi(x)$. Ipoteza spune că $R(x) \in SO(3)$. Derivând identitatea $R^TR = I$ în direcţia x_k, obţinem

$$(\partial_k R)^T R + R^T\partial_k R = 0.$$

Prin urmare

$$A_k := R^T\partial_k R \in \mathfrak{so}(3), \qquad \partial_k R = RA_k,$$

unde $\mathfrak{so}(3)$ este spaţiul matricelor antisimetrice.

Coloana j a lui R este $\partial_j\varphi$. Egalitatea derivatelor mixte dă

$$\partial_k(Re_j) = \partial_k\partial_j\varphi = \partial_j\partial_k\varphi = \partial_j(Re_k),$$

deci, după înmulţire la stânga cu R^T,

$$A_ke_j = A_je_k \qquad (j,k = 1,2,3). \tag{2.R1}$$

Reamintim aici corespondenţa dintre matricile antisimetrice şi vectorii axiali. Pentru

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -a_3 & a_2 \\ a_3 & 0 & -a_1 \\ -a_2 & a_1 & 0 \end{pmatrix}$$

avem, pentru orice $v \in \mathbb{R}^3$,

$$Av = a \times v, \qquad a = (a_1,a_2,a_3)^T.$$

Reciproc, orice $A^T = -A$ are în mod unic această formă, cu $a = (A_{32},A_{13},A_{21})^T$. Prin urmare, pentru fiecare k, există un unic $a_k \in \mathbb{R}^3$ astfel încât $A_kv = a_k \times v$.

Relaţia (2.R1) devine

$$a_k \times e_j = a_j \times e_k. \tag{2.R2}$$

Scriem $a_k = (a_{1k},a_{2k},a_{3k})$. Alegând succesiv perechile $(j,k) = (1,2),(1,3),(2,3)$ şi comparând componentele în (2.R2), se obţine

$$a_{12} = a_{21} = a_{13} = a_{31} = a_{23} = a_{32} = 0,$$

iar componentele diagonale satisfac simultan

$$a_{11} = -a_{22}, \qquad a_{11} = -a_{33}, \qquad a_{22} = -a_{33}.$$

Rezultă $a_{11} = a_{22} = a_{33} = 0$, deci $a_k = 0$ şi astfel $A_k = 0$ pentru fiecare k. Prin urmare $\partial_k R = 0$, adică R este constant pe domeniul conex Ω. Notăm această constantă cu $Q \in SO(3)$. Atunci $\nabla(\varphi - Qx) = 0$, iar conexitatea lui Ω implică $\varphi(x) - Qx = b$, cu b constant. □

Observaţia 2.9.2. Rezultatul explică de ce tensorii $C - I$, $U - I$, $\log U$ şi distanţa la $SO(3)$ sunt măsuri de deformare: anularea lor peste tot nu descrie o stare nouă de deformare, ci numai o translaţie şi o rotaţie globală a corpului.

Teorema 2.9.3 (rigiditatea infinitezimală, versiunea clasică)**.** *Fie $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ un domeniu deschis şi conex şi fie $u \in C^2(\Omega; \mathbb{R}^3)$. Dacă*

$$e(u) = \operatorname{sym} \nabla u = 0 \qquad \hat{\imath}n\ \Omega,$$

atunci există $a \in \mathbb{R}^3$ şi o matrice constantă $W \in \mathbb{R}^{3\times 3}$, $W^T = -W$, astfel încât

$$u(x) = a + Wx \qquad \forall x \in \Omega.$$

Demonstraţie. Pentru $i, j, k \in \{1, 2, 3\}$ verificăm identitatea

$$\partial_{ij} u_k = \partial_i e_{jk}(u) + \partial_j e_{ik}(u) - \partial_k e_{ij}(u).$$

Într-adevăr,

$$\begin{aligned} &\partial_i e_{jk} + \partial_j e_{ik} - \partial_k e_{ij} \\ &\quad = \frac{1}{2}\Big(\partial_{ik} u_j + \partial_{ij} u_k + \partial_{jk} u_i + \partial_{ji} u_k - \partial_{ki} u_j - \partial_{kj} u_i\Big) \\ &\quad = \partial_{ij} u_k, \end{aligned}$$

unde am folosit egalitatea derivatelor mixte, permisă de regularitatea C^2. Dacă $e(u) = 0$, membrul drept este zero, deci toate derivatele de ordin doi ale lui u se anulează. Prin urmare fiecare componentă a lui ∇u este constantă pe domeniul conex Ω; notăm această matrice constantă cu W. Condiţia $\operatorname{sym} \nabla u = 0$ dă $W^T = -W$. În sfârşit,

$$\nabla(u - Wx) = 0,$$

iar pe un domeniu conex o funcţie C^1 cu gradient nul este constantă. Rezultă $u(x) = a + Wx$. □

Observaţia 2.9.4. Rezultatul identifică nucleul deformaţiei infinitezimale: $e(u) = \operatorname{sym} \nabla u$ nu detectează translaţiile şi rotaţiile infinitezimale. În Capitolul 7, inegalitatea lui Korn va transforma această observaţie geometrică într-o estimare cantitativă.

2.10 De la distanţa neliniară la deformaţia infinitezimală

În Secţiunea 2.6 am obţinut dezvoltarea la primul ordin $U_\varepsilon = I + \varepsilon \operatorname{sym} H + O(\varepsilon^2)$. Pentru distanţa la $SO(3)$ avem nevoie de un pas suplimentar: calculăm aici şi termenul de ordinul al doilea. Considerăm o familie de deformări mici

$$\varphi_\varepsilon(x) = x + \varepsilon u(x), \qquad F_\varepsilon = I + \varepsilon H, \quad H = \nabla u.$$

Punem $S = \operatorname{sym} H$ şi $A = \operatorname{skew} H$. Atunci

$$C_\varepsilon = F_\varepsilon^T F_\varepsilon = I + 2\varepsilon S + \varepsilon^2 H^T H.$$

Aplicaţia $U \mapsto U^2$ este netedă pe $\operatorname{Sym}(3)$, iar diferenţiala sa în I este $X \mapsto 2X$, izomorfism pe $\operatorname{Sym}(3)$. Teorema funcţiei inverse arată că rădăcina pătrată pozitivă depinde neted de matrice în vecinătatea lui I. Prin urmare $\varepsilon \mapsto U_\varepsilon = \sqrt{C_\varepsilon}$ admite o dezvoltare Taylor şi putem scrie

$$U_\varepsilon = I + \varepsilon S + \varepsilon^2 K + O(\varepsilon^3).$$

Ridicând la pătrat,

$$U_\varepsilon^2 = I + 2\varepsilon S + \varepsilon^2 (S^2 + 2K) + O(\varepsilon^3).$$

Comparând cu C_ε, rezultă

$$K = \frac{1}{2}\big(H^T H - S^2\big).$$

Această dezvoltare rafinează formula de ordinul întâi din Secţiunea 2.6. Prin teorema lui Grioli,

$$\operatorname{dist}^2(I + \varepsilon H, SO(3)) = \|U_\varepsilon - I\|^2 = \varepsilon^2 \|\operatorname{sym} H\|^2 + O(\varepsilon^3). \tag{2.R3}$$

Formula (2.R3) leagă direct teoria neliniară de elasticitatea liniară. Partea antisimetrică $\operatorname{skew} H$ reprezintă, la ordinul întâi, o rotaţie infinitesimală şi nu contribuie la deformaţia elastică. Partea simetrică $\operatorname{sym} H$ este tensorul de deformaţie liniarizată.

Exemplu: rotaţie infinitesimală. Dacă $H = A$ este antisimetrică, atunci $\operatorname{sym} H = 0$. Mai precis,

$$C_\varepsilon = I - \varepsilon^2 A^2, \qquad U_\varepsilon = I - \frac{\varepsilon^2}{2} A^2 + O(\varepsilon^4),$$

şi astfel

$$\operatorname{dist}(I + \varepsilon A, SO(3)) = \frac{\varepsilon^2}{2} \left\| A^2 \right\| + O(\varepsilon^4).$$

În particular distanţa este $O(\varepsilon^2)$, deşi $\|I + \varepsilon A - I\| = O(\varepsilon)$. Norma deplasării faţă de identitate confundă rotaţia cu deformarea; distanţa la grupul rotaţiilor nu face această confuzie.

Exemplu: întindere infinitesimală. Pentru $H = \operatorname{diag}(h_1, h_2, h_3)$, avem $H = S$, iar

$$\operatorname{dist}^2(I + \varepsilon H, SO(3)) = \varepsilon^2(h_1^2 + h_2^2 + h_3^2) + O(\varepsilon^3).$$

În acest caz nu există rotaţie la ordinul întâi; întreaga perturbaţie este deformantă.

2.11 O inegalitate punctuală utilă şi legătura cu rigiditatea geometrică

Pentru orice $F \in GL^+(3)$, dacă $F = RU$ este descompunerea polară, atunci

$$\operatorname{dist}(F, SO(3)) = \|U - I\|.$$

Cum valorile singulare ale lui F sunt $\lambda_i > 0$, rezultă

$$\operatorname{dist}^2(F, SO(3)) = \sum_{i=1}^{3} (\lambda_i - 1)^2.$$

În particular, dacă F rămâne într-o vecinătate fixă a lui $SO(3)$, atunci $\left\|F^T F - I\right\|$ şi $\operatorname{dist}(F, SO(3))$ controlează reciproc aceeaşi mărime, cu constante locale. Într-adevăr,

$$\left\|F^T F - I\right\|^2 = \sum_{i=1}^{3} (\lambda_i^2 - 1)^2 = \sum_{i=1}^{3} (\lambda_i - 1)^2 (\lambda_i + 1)^2.$$

Dacă $\lambda_{\min} \le \lambda_i \le \lambda_{\max}$, atunci

$$(1 + \lambda_{\min})^2 \operatorname{dist}^2(F, SO(3)) \le \left\|F^T F - I\right\|^2 \le (1 + \lambda_{\max})^2 \operatorname{dist}^2(F, SO(3)). \tag{2.R4}$$

Dacă F rămâne într-o vecinătate suficient de mică a lui $SO(3)$, valorile singulare rămân într-un interval compact din jurul lui 1, deci constantele de mai sus pot fi alese uniform.

Teorema 2.11.1 (rigiditatea geometrică Friesecke–James–Müller, consecinţă clasică a rezultatului admis)**.** *Fie $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ mărginit, conex şi cu frontieră Lipschitz. Există $C(\Omega) > 0$ astfel încât pentru orice $v \in C^1(\overline{\Omega}; \mathbb{R}^3)$ există o rotaţie constantă $Q \in SO(3)$ pentru care*

$$\left(\int_\Omega \|\nabla v - Q\|^2 \, dX \right)^{1/2} \le C(\Omega) \left(\int_\Omega \operatorname{dist}^2(\nabla v, SO(3)) \, dX \right)^{1/2}.$$

Constanta poate fi aleasă invariantă la dilatări uniforme ale domeniului.

Nu afirmăm unicitatea rotaţiei Q; teorema garantează existenţa unei rotaţii constante cu estimarea de mai sus. Rezultatul general este formulat în spaţiul Sobolev $W^{1,2}$; am scris aici numai consecinţa pentru funcţii C^1, astfel încât să nu folosim spaţii funcţionale înainte de introducerea lor în Capitolul 7. Demonstraţia generală este profundă şi depăşeşte obiectivele cursului; vezi [18].

2.12 Măsurile de deformare pentru o deformare radială

Gradientul unei deformări sferic simetrice a fost calculat în Subsecţiunea 1.7.1. Pentru

$$\varphi(X) = \frac{r(R)}{R} X, \qquad R = \|X\|,$$

ştim că, în baza sferică $(e_R, e_\vartheta, e_\psi)$,

$$F = \operatorname{diag}\left(r'(R), \frac{r(R)}{R}, \frac{r(R)}{R}\right).$$

Dacă

$$r'(R) > 0, \qquad r(R) > 0,$$

atunci F este deja simetrică pozitiv definită. Prin unicitatea descompunerii polare,

$$R_{\text{pol}} = I, \qquad U = F.$$

Prin urmare întinderile principale sunt

$$\lambda_R = r'(R), \qquad \lambda_\vartheta = \lambda_\psi = \frac{r(R)}{R}.$$

Acum putem calcula fără a reface cinematica din Capitolul 1. Măsura Biot este

$$E_B = \operatorname{diag}\left(r'(R) - 1, \frac{r(R)}{R} - 1, \frac{r(R)}{R} - 1\right),$$

măsura Green–Saint Venant este

$$E_G = \frac{1}{2} \operatorname{diag}\left(r'(R)^2 - 1, \frac{r(R)^2}{R^2} - 1, \frac{r(R)^2}{R^2} - 1\right),$$

iar deformaţia Hencky este

$$\log U = \operatorname{diag}\left(\log r'(R), \log \frac{r(R)}{R}, \log \frac{r(R)}{R}\right).$$

Urma ultimei matrice este

$$\operatorname{tr}(\log U) = \log\left[r'(R)\left(\frac{r(R)}{R}\right)^2\right] = \log J.$$

Astfel exemplul radial verifică direct relaţia generală $\operatorname{tr}(\log U) = \log J$.

2.13 Probleme pentru seminar

1. Pentru $U = \operatorname{diag}(2, 1, 1/2)$ calculaţi $E^{(m)}$ pentru $m = 1/2, 1$ şi limita $m \to 0$.
2. Calculaţi U, R pentru o matrice diagonală $F = \operatorname{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$, $\lambda_i > 0$, şi pentru o rotaţie pură.
3. Verificaţi formula distanţei la $SO(3)$ pentru $F = \operatorname{diag}(2, 1, 1/2)$.
4. Dezvoltaţi $\log U$ până la ordinul întâi în $H = F - I$, folosind dezvoltarea spectrală din secţiunea de liniarizare a măsurilor de deformare.
5. Pentru forfecarea simplă calculaţi exact I_1, I_2, I_3 şi verificaţi că $I_1 = I_2 = 3 + \gamma^2$, $I_3 = 1$.
6. Arătaţi că două matrice $F, \widehat{F} \in GL^+(3)$ verifică $F^T F = \widehat{F}^T \widehat{F}$ dacă şi numai dacă $F = Q\widehat{F}$ pentru un $Q \in SO(3)$.
7. Arătaţi că $\det U = \det V = \det F$.
8. Pentru $F = \operatorname{diag}(\lambda, \lambda^{-\nu}, \lambda^{-\nu})$, calculaţi variaţia de volum şi discutaţi limita $\lambda \to 1$.

2.14 Exerciţii rezolvate

Problema 2.14.1 (tensorul Cauchy–Green pentru o întindere diagonală)**.** Pentru $F = \operatorname{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$, $\lambda_i > 0$, calculaţi $C = F^T F$ şi $B = F F^T$.

Rezolvare. Deoarece $F^T = F$,

$$C = F^T F = \operatorname{diag}(\lambda_1^2, \lambda_2^2, \lambda_3^2),$$

şi identic $B = F F^T = C$. Valorile proprii ale lui C sunt λ_i^2, deci întinderile principale sunt λ_i.

Problema 2.14.2 (lungimea unui segment material)**.** Fie dX un vector material infinitesimal. Arătaţi că lungimea sa după deformare satisface

$$\|dx\|^2 = \langle dX, C\, dX \rangle.$$

Rezolvare. La ordinul întâi, $dx = F\, dX$. Atunci

$$\|dx\|^2 = \langle F dX, F dX \rangle = \langle dX, F^T F\, dX \rangle = \langle dX, C\, dX \rangle.$$

De aceea C conţine exact informaţia privind modificarea lungimilor în descriere materială.

Problema 2.14.3 (deformare rigidă)**.** Dacă $F = Q \in SO(3)$, calculaţi C, U şi tensorul Green–Saint Venant $E = (C - I)/2$.

Rezolvare. Din $Q^T Q = I$ rezultă $C = I$. Rădăcina pătrată pozitivă a lui I este $U = I$, iar

$$E = \frac{1}{2}(I - I) = 0.$$

Prin urmare o rotaţie pură nu produce deformaţie, deşi F poate fi foarte diferit de I.

Problema 2.14.4 (matrice diagonală)**.** Pentru $F = \operatorname{diag}(2, 1, 1/2)$ determinaţi R şi U în $F = RU$.

Rezolvare. Avem

$$F^T F = \operatorname{diag}(4, 1, 1/4),$$

deci

$$U = (F^T F)^{1/2} = \operatorname{diag}(2, 1, 1/2) = F.$$

Prin urmare $R = FU^{-1} = I$. Deformarea este o întindere pură, fără rotaţie polară.

Problema 2.14.5 (măsuri clasice de deformare)**.** Pentru întinderea uniaxială $F = \operatorname{diag}(\lambda, 1, 1)$ calculaţi măsurile Biot $U - I$, Green $\frac{1}{2}(C - I)$ şi Hencky $\log U$.

Rezolvare. Aici $U = F$ şi $C = F^2$. Prin urmare

$$U - I = \operatorname{diag}(\lambda - 1, 0, 0),$$

$$E = \frac{1}{2} \operatorname{diag}(\lambda^2 - 1, 0, 0),$$

şi, prin calcul funcţional spectral,

$$\log U = \operatorname{diag}(\log \lambda, 0, 0).$$

Cele trei măsuri coincid numai la ordinul întâi în jurul lui $\lambda = 1$.

Problema 2.14.6 (descompunerea polară a forfecării simple)**.** Pentru

$$F = \begin{pmatrix} 1 & \gamma \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

în plan, calculaţi C şi valorile sale proprii. Deduceţi întinderile principale.

Rezolvare. Avem

$$C = F^T F = \begin{pmatrix} 1 & \gamma \\ \gamma & 1 + \gamma^2 \end{pmatrix}.$$

Polinomul caracteristic este

$$\mu^2 - (2 + \gamma^2)\mu + 1 = 0,$$

deoarece $\operatorname{tr} C = 2 + \gamma^2$ şi $\det C = (\det F)^2 = 1$. Astfel

$$c_{1,2} = \frac{2 + \gamma^2 \pm |\gamma| \sqrt{\gamma^2 + 4}}{2}.$$

Întinderile principale sunt

$$\lambda_{1,2} = \sqrt{c_{1,2}},$$

iar produsul lor este 1, în acord cu $\det F = 1$.

Problema 2.14.7 (teorema lui Grioli pentru o matrice diagonală)**.** Pentru $F = \operatorname{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ cu $\lambda_i > 0$, calculaţi explicit

$$\operatorname{dist}^2(F, SO(3)).$$

Rezolvare. Factorul polar este $R = I$, iar $U = F$. Teorema lui Grioli demonstrată în capitol dă

$$\operatorname{dist}^2(F, SO(3)) = \|U - I\|^2 .$$

Cum pătratul normei Frobenius a unei matrice diagonale este suma pătratelor elementelor diagonale,

$$\boxed{\operatorname{dist}^2(F, SO(3)) = (\lambda_1 - 1)^2 + (\lambda_2 - 1)^2 + (\lambda_3 - 1)^2.}$$

Problema 2.14.8 (liniarizarea măsurilor de deformare)**.** Fie $F_\varepsilon = I + \varepsilon H$. Arătaţi până la ordinul întâi că

$$C_\varepsilon = I + 2\varepsilon \operatorname{sym} H + O(\varepsilon^2), \qquad E_\varepsilon = \varepsilon \operatorname{sym} H + O(\varepsilon^2).$$

Rezolvare. Calculăm

$$C_\varepsilon = (I + \varepsilon H)^T (I + \varepsilon H) = I + \varepsilon(H^T + H) + \varepsilon^2 H^T H.$$

Dar $H^T + H = 2 \operatorname{sym} H$, deci

$$C_\varepsilon = I + 2\varepsilon \operatorname{sym} H + \varepsilon^2 H^T H.$$

Prin definiţie,

$$E_\varepsilon = \frac{1}{2}(C_\varepsilon - I) = \varepsilon \operatorname{sym} H + \frac{\varepsilon^2}{2} H^T H.$$

Aceasta explică apariţia lui $\operatorname{sym} \nabla u$ în teoria liniarizată.

Problema 2.14.9 (distanţa la rotaţii în regim de deformaţii mici)**.** Folosind dezvoltarea lui U_ε, arătaţi că

$$\operatorname{dist}^2(I + \varepsilon H, SO(3)) = \varepsilon^2 \|\operatorname{sym} H\|^2 + O(\varepsilon^3).$$

Rezolvare. Din rezultatul demonstrat în capitol,

$$U_\varepsilon = (F_\varepsilon^T F_\varepsilon)^{1/2} = I + \varepsilon \operatorname{sym} H + O(\varepsilon^2).$$

Teorema lui Grioli dă

$$\operatorname{dist}^2(F_\varepsilon, SO(3)) = \|U_\varepsilon - I\|^2 .$$

Înlocuind dezvoltarea,

$$\left\|\varepsilon \operatorname{sym} H + O(\varepsilon^2)\right\|^2 = \varepsilon^2 \|\operatorname{sym} H\|^2 + O(\varepsilon^3).$$

Partea antisimetrică nu apare la ordinul principal deoarece ea reprezintă rotaţia infinitezimală.

Problema 2.14.10 (separarea volumetrică–izocoră)**.** Pentru $F \in GL^+(3)$ definiţi

$$F_{\text{iso}} = J^{-1/3} F, \qquad J = \det F.$$

Arătaţi că $\det F_{\text{iso}} = 1$ şi explicaţi cum se descompune $\log U$ în parte sferică şi deviatorică.

Rezolvare. Folosind omogenitatea determinantului în dimensiunea trei,

$$\det(J^{-1/3}F) = J^{-1}\det F = 1.$$

Pentru U pozitiv definit, $\operatorname{tr}(\log U) = \log\det U = \log J$. Orice matrice simetrică se descompune în

$$\log U = \operatorname{dev}\log U + \frac{1}{3}\operatorname{tr}(\log U)I = \operatorname{dev}\log U + \frac{1}{3}(\log J)I.$$

Prima parte descrie schimbarea de formă la volum constant, iar a doua schimbarea pur volumetrică.

2.15 Exerciţii propuse suplimentare

Nivelul A

2.A.1 *(tensorii de deformare pentru o întindere diagonală)* Fie

$$F = \operatorname{diag}\left(4, 1, \frac{1}{2}\right).$$

Calculaţi J, C, B, U, V, tensorul Green–Saint Venant E, deformarea Hencky $\log U$, invarianţii I_1, I_2, I_3 ai lui C şi distanţa euclidiană $\operatorname{dist}^2(F, SO(3))$.
Indicaţie. Pentru F diagonal cu elemente pozitive, descompunerea polară este $R = I$, $U = V = F$ (Teorema 2.3.1); folosiţi teorema lui Grioli pentru distanţă şi definiţia spectrală a lui $\log U$.
Răspuns.

$$J = 2, \qquad C = B = \operatorname{diag}\left(16, 1, \frac{1}{4}\right),$$

$$U = V = \operatorname{diag}\left(4, 1, \frac{1}{2}\right), \qquad R = I,$$

$$E = \operatorname{diag}\left(\frac{15}{2}, 0, -\frac{3}{8}\right), \qquad \log U = \operatorname{diag}(2\ln 2, 0, -\ln 2), \qquad \operatorname{tr}\log U = \ln 2 = \ln J,$$

$$I_1 = \frac{69}{4}, \qquad I_2 = \frac{81}{4}, \qquad I_3 = 4 = J^2,$$

$$\operatorname{dist}^2(F, SO(3)) = \sum_i (\lambda_i - 1)^2 = \frac{37}{4} = 9.25.$$

2.A.2 *(descompunere polară cu rotaţie nebanală)* Fie

$$F = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Verificaţi că $F \in GL^+(3)$, calculaţi C, B, U, V, R şi verificaţi relaţiile $F = RU = VR$ şi $V = RUR^T$. Care sunt întinderile principale şi direcţiile principale materiale şi spaţiale?

Indicaţie. Calculaţi mai întâi $C = F^T F$ (care este diagonal), extrageţi $U = \sqrt{C}$ (Lema 2.2.1) şi apoi $R = FU^{-1}$; verificaţi $R^T R = I$, $\det R = 1$.
Răspuns.

$$\det F = 6 > 0, \qquad C = \operatorname{diag}(9,4,1), \qquad B = \operatorname{diag}(4,9,1),$$

$$U = \operatorname{diag}(3,2,1), \qquad V = \operatorname{diag}(2,3,1), \qquad R = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in SO(3).$$

Întinderile principale sunt $\lambda = (3,2,1)$; direcţiile principale materiale sunt e_1, e_2, e_3, iar cele spaţiale sunt $Re_1 = e_2$, $Re_2 = -e_1$, $Re_3 = e_3$. Matricea R este rotaţia de 90° în jurul lui e_3.

2.A.3 *(descompunerea volumetric–izocoră a deformării logaritmice)* Fie $F = \operatorname{diag}(4,2,1/2)$. Calculaţi J, $\log U$, $\log J$, partea deviatorică $\operatorname{dev} \log U$ şi verificaţi identitatea de ortogonalitate

$$\|\log U\|^2 = \|\operatorname{dev} \log U\|^2 + \frac{1}{3}(\log J)^2.$$

Indicaţie. Folosiţi $\operatorname{tr} \log U = \log J$ şi $\operatorname{dev} A = A - \frac{1}{3}(\operatorname{tr} A)I$; calculele se fac pe valorile proprii ale lui U.
Răspuns.

$$J = 4, \qquad \log U = \ln 2 \, \operatorname{diag}(2,1,-1), \qquad \log J = 2 \ln 2,$$

$$\operatorname{dev} \log U = \frac{\ln 2}{3} \operatorname{diag}(4,1,-5),$$

$$\|\log U\|^2 = 6(\ln 2)^2, \qquad \|\operatorname{dev} \log U\|^2 = \frac{14}{3}(\ln 2)^2.$$

Astfel $\frac{14}{3}(\ln 2)^2 + \frac{1}{3}\, 4(\ln 2)^2 = 6(\ln 2)^2$.

Nivelul B

2.B.1 *(descompunere polară, Grioli şi Hencky pentru o matrice nediagonală)* Fie

$$F = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

(a) Verificaţi $\det F > 0$, calculaţi C şi arătaţi că

$$U = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad R = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

(b) Determinaţi întinderile principale şi calculaţi $\operatorname{dist}^2(F, SO(3))$ folosind teorema lui Grioli; verificaţi rezultatul calculând direct $\|F - R\|^2$. (c) Calculaţi $\log U$.
Indicaţie. (a) $C = U^2$; căutaţi U în forma $\alpha I + \beta(e_1 \otimes e_2 + e_2 \otimes e_1)$ şi folosiţi unicitatea rădăcinii pătrate pozitive (Lema 2.2.1). (b) Teorema 2.11.1. (c) Diagonalizaţi U în baza $2^{-1/2}(1,1,0)$, $2^{-1/2}(1,-1,0)$, e_3.

Răspuns.

$$\det F = 3, \qquad C = \begin{pmatrix} 5 & 4 & 0 \\ 4 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = U^2.$$

Valorile proprii ale lui U sunt $(3, 1, 1)$, deci

$$\operatorname{dist}^2(F, SO(3)) = (3-1)^2 = 4, \qquad \|F - R\|^2 = 4.$$

Mai mult,

$$\log U = \frac{\ln 3}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

2.B.2 *(trei identităţi spectrale utile)* Fie $F \in GL^+(3)$ cu descompunerea polară $F = RU$ şi întinderile principale $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 > 0$. Demonstraţi:

$$\text{(a)} \quad \|F\|^2 = \|U\|^2 = \lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2 = I_1(C),$$

$$\text{(b)} \quad \|\operatorname{Cof} F\|^2 = \lambda_1^2\lambda_2^2 + \lambda_2^2\lambda_3^2 + \lambda_3^2\lambda_1^2 = I_2(C),$$

$$\text{(c)} \quad \operatorname{dist}^2(F, SO(3)) = \|F\|^2 + 3 - 2\operatorname{tr} U.$$

Deduceţi din (c) că minimizarea lui $\|F - Q\|^2$ pe $SO(3)$ este echivalentă cu maximizarea termenului corespunzător de urmă şi regăsiţi enunţul teoremei lui Grioli.
Indicaţie. Folosiţi invarianţa normei Frobenius la înmulţirea cu matrice ortogonale, $\|QA\| = \|A\|$, relaţia $\operatorname{Cof}(RU) = R \operatorname{Cof} U$ şi diagonalizarea lui U (§ 2.4, Teorema 2.11.1).
Răspuns. Toate cele trei identităţi sunt adevărate. Pentru $Q \in SO(3)$,

$$\|F - Q\|^2 = \|F\|^2 + 3 - 2\operatorname{tr}(UR^TQ),$$

iar $\operatorname{tr}(UR^TQ) \le \operatorname{tr} U$, cu egalitate pentru $Q = R$. Rezultă

$$\min_{Q \in SO(3)} \|F - Q\|^2 = \|U - I\|^2.$$

2.B.3 *(contraexemplu: deformarea Hencky nu este additivă)* Fie

$$F_1 = \operatorname{diag}\left(2, \frac{1}{2}, 1\right), \qquad F_2 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in SO(3).$$

(a) Calculaţi $\log U(F_1)$ şi $\log U(F_2)$. (b) Calculaţi $\log U(F_1F_2)$ şi $\log U(F_2F_1)$. (c) Concluzionaţi că, în general,

$$\log U(F_1F_2) \neq \log U(F_1) + \log U(F_2),$$

$$\log U(F_1F_2) \neq \log U(F_2F_1),$$

deşi $\|\log U\|$ este invariantă la compunerea cu rotaţii la stânga. Explicaţi diferenţa dintre

rotaţia configuraţiei deformate şi rotaţia configuraţiei de referinţă.
Indicaţie. $C(F_1F_2) = F_2^T C(F_1)F_2$ dacă $F_2 \in SO(3)$; o rotaţie la dreapta roteşte direcţiile principale materiale, iar una la stânga nu schimbă U.
Răspuns.

$$\log U(F_1) = \operatorname{diag}(\ln 2, -\ln 2, 0), \qquad \log U(F_2) = 0,$$
$$\log U(F_1F_2) = \operatorname{diag}(-\ln 2, \ln 2, 0),$$
$$\log U(F_2F_1) = \operatorname{diag}(\ln 2, -\ln 2, 0).$$

Prin urmare aditivitatea este falsă. Rotaţia la stânga lasă U neschimbat, pe când rotaţia la dreapta schimbă direcţiile materiale principale. Normele rămân egale: $\|\log U\| = \sqrt{2}\,\ln 2$ în cazurile nebanale de mai sus.

Nivelul C

2.C.1 *(întindere uniaxială izocoră: toate măsurile de deformare şi linearizarea lor)* Fie $\lambda > 0$ şi

$$F = \operatorname{diag}(\lambda, \lambda^{-1/2}, \lambda^{-1/2}).$$

(a) Calculaţi J, C, U, R şi invarianţii I_1, I_2, I_3 ai lui C. Ce interpretare mecanică are J? (b) Calculaţi măsurile din familia Seth–Hill $E^{(1)} = U - I$ (Biot), $E^{(2)} = \frac{1}{2}(C - I)$ (Green–Saint Venant) şi $E^{(0)} = \log U$ (Hencky). Care dintre ele are urma nulă pentru orice $\lambda > 0$ şi de ce? (c) Puneţi $\lambda = 1 + \epsilon$ şi dezvoltaţi cele trei măsuri până la ordinul întâi în ϵ; arătaţi că toate coincid cu $\varepsilon = \operatorname{sym} \nabla u$ şi identificaţi coeficientul lui Poisson al acestei familii de deformări în regim infinitezimal.
Indicaţie. (a) F este diagonal pozitiv, deci $R = I$, $U = F$ (Teorema 2.3.1). (b) Folosiţi liniarizarea comună a măsurilor de deformare şi identitatea $\operatorname{tr} \log U = \log J$. (c) Folosiţi aceeaşi dezvoltare pentru U_ε.
Răspuns.

$$J = 1, \quad C = \operatorname{diag}(\lambda^2, \lambda^{-1}, \lambda^{-1}), \quad U = F, \quad R = I,$$
$$I_1 = \lambda^2 + 2\lambda^{-1}, \qquad I_2 = \lambda^{-2} + 2\lambda, \qquad I_3 = 1.$$
$$E^{(1)} = \operatorname{diag}(\lambda - 1, \lambda^{-1/2} - 1, \lambda^{-1/2} - 1),$$
$$E^{(2)} = \frac{1}{2} \operatorname{diag}(\lambda^2 - 1, \lambda^{-1} - 1, \lambda^{-1} - 1),$$
$$E^{(0)} = \ln \lambda \operatorname{diag}\left(1, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right).$$

Numai $\log U$ are urma nulă pentru orice λ, deoarece $\operatorname{tr} \log U = \log J = 0$. Pentru $\lambda = 1 + \epsilon$, toate trei devin

$$\epsilon \operatorname{diag}\left(1, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right) + O(\epsilon^2),$$

deci $\nu = 1/2$.

2.C.2 *(rigiditate: rolul conexităţii şi echivalenţa măsurilor lângă $SO(3)$)* (a) Fie $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ deschis şi conex şi $\varphi \in C^2(\Omega; \mathbb{R}^3)$ cu $\nabla\varphi^T \nabla\varphi = I$ şi $\det \nabla\varphi > 0$ în Ω. Enunţaţi concluzia

şi explicaţi unde intervine, în demonstraţie, egalitatea derivatelor mixte. (b) Construiţi un contraexemplu care arată că ipoteza de conexitate este necesară: găsiţi Ω deschis, neconex, şi $\varphi \in C^\infty(\Omega;\mathbb{R}^3)$ cu $\nabla\varphi \in SO(3)$ peste tot, dar care nu este restricţia unei singure mişcări rigide. (c) Pentru $F = \operatorname{diag}(4,1,1/2)$ verificaţi numeric inegalitatea din § 2.17,

$$(1+m)^2 \operatorname{dist}^2(F,SO(3)) \le \left\|F^TF - I\right\|^2 \le (1+M)^2 \operatorname{dist}^2(F,SO(3)),$$

cu $m = \min_i \lambda_i$, $M = \max_i \lambda_i$, şi comentaţi ce se întâmplă cu constantele când F se apropie de $SO(3)$.

Indicaţie. (a) Teorema 2.15.1 (Liouville). (b) Luaţi reuniunea a două bile disjuncte. (c) $\|C-I\|^2 = \sum_i (\lambda_i-1)^2(\lambda_i+1)^2$.

Răspuns. (a) $\varphi(x) = Qx+b$, cu $Q \in SO(3)$, $b \in \mathbb{R}^3$ constante. Egalitatea $\partial_k\partial_j\varphi = \partial_j\partial_k\varphi$ conduce la relaţiile $A_k e_j = A_j e_k$, care forţează $A_k = R^T\partial_k R = 0$, deci R este constant. (b) De exemplu,

$$\Omega = B(0,1)\cup B(5e_1,1), \qquad \varphi(x) = \begin{cases} x, & x \in B(0,1), \\ Q_0x + b_0, & x \in B(5e_1,1), \end{cases}$$

cu $Q_0 \in SO(3)$, $Q_0 \neq I$. (c)

$$\operatorname{dist}^2(F,SO(3)) = \frac{37}{4} = 9.25, \qquad \|C-I\|^2 = 225.5625,$$

$$m = \frac{1}{2}, \qquad M = 4,$$
$$20.8125 \le 225.5625 \le 231.25.$$

Când $\lambda_i \to 1$, ambele constante tind la 4, deci $\|C-I\| \approx 2\operatorname{dist}(F,SO(3))$.

2.C.3 *(distanţă euclidiană vs. distanţă geodezică: simetria tensiune–compresiune)* Fie $Q_0 \in SO(3)$ oarecare, $U_0 = \operatorname{diag}(4,1,1)$ şi $F = Q_0U_0$. (a) Calculaţi descompunerea polară a lui F, întinderile principale, J şi $\log U$. (b) Calculaţi

$$\operatorname{dist}^2_{\text{eucl}}(F,SO(3)) = \sum_i (\lambda_i - 1)^2$$

şi

$$\operatorname{dist}^2_{\text{geod}}(F,SO(3)) = \mu\,\|\operatorname{dev}\log U\|^2 + \frac{\kappa}{2}(\log J)^2.$$

(c) Repetaţi calculul pentru F^{-1} şi comparaţi. Ce proprietate de simetrie tensiune–compresiune are măsura geodezică şi pe care o pierde cea euclidiană?

Indicaţie. § 2.11 pentru distanţa euclidiană, § 2.12 pentru cea geodezică; folosiţi faptul că valorile singulare ale lui F^{-1} sunt $1/\lambda_i(F)$.

Răspuns. (a) $R = Q_0$, $U = U_0$, $\lambda = (4,1,1)$, $J = 4$, $\log U = \operatorname{diag}(2\ln 2, 0, 0)$. (b)

$$\operatorname{dist}^2_{\text{eucl}} = 9,$$

$$\operatorname{dev}\log U = \frac{2\ln 2}{3}\operatorname{diag}(2,-1,-1), \qquad \|\operatorname{dev}\log U\|^2 = \frac{8}{3}(\ln 2)^2,$$
$$(\log J)^2 = 4(\ln 2)^2,$$

prin urmare

$$\operatorname{dist}^2_{\text{geod}} = \frac{8}{3}\mu(\ln 2)^2 + 2\kappa(\ln 2)^2.$$

(c) Pentru F^{-1}, valorile singulare sunt $(1/4, 1, 1)$, deci

$$\operatorname{dist}^2_{\text{eucl}} = \left(\frac{1}{4} - 1\right)^2 = \frac{9}{16} \neq 9,$$

în timp ce $\|\operatorname{dev}\log U\|^2$ şi $(\log J)^2$ rămân neschimbate. Măsura logaritmică tratează simetric o întindere λ şi compresia inversă $1/\lambda$; măsura euclidiană nu are această proprietate.

Capitolul 3

Axiome din teoria elasticităţii, principiul lui Cauchy şi ecuaţiile de mişcare în configuraţia actuală

Surse şi orientare. Principiul lui Cauchy, bilanţurile şi localizarea lor sunt prezentate în spiritul tratărilor clasice [7, 3] şi al expunerii sistematice din [11].

3.1 Conservarea masei

Fie $P \subset \Omega$ o parte materială fixată în configuraţia de referinţă. La timpul t, aceeaşi colecţie de puncte materiale ocupă regiunea $P_t = \varphi_t(P)$. Conservarea masei înseamnă

$$\int_P \rho_0(X)\, dX = \int_{P_t} \rho(x,t)\, dx,$$

unde ρ_0 este densitatea în punctul X din confirguraţia iniţială iar $\rho(x,t)$ este densitatea în configuraţia actuală în punctul $x = \varphi(X,t)$.

Aplicăm teorema schimbării de variabilă $x = \varphi_t(X)$. Deoarece $dx = J(X,t)\, dX$, membrul drept devine

$$\int_P \rho(\varphi(X,t),t) J(X,t)\, dX.$$

Cum egalitatea este adevărată pentru orice subdomeniu material P şi integranzii sunt continui, rezultă relaţia punctuală

$$\boxed{\rho(\varphi(X,t),t) J(X,t) = \rho_0(X).} \tag{3.1}$$

Deducem acum ecuaţia locală de continuitate fără a omite paşii. Membrul drept din (3.1) nu depinde de timp, deci

$$0 = \frac{d}{dt}\Big[\rho(\varphi(X,t),t) J(X,t)\Big].$$

Prin regula produsului,

$$0 = \frac{d}{dt}\rho(\varphi(X,t),t)\, J + \rho(\varphi(X,t),t)\, \dot{J}.$$

Regula lanţului furnizează

$$\frac{d}{dt}\rho(\varphi(X,t),t) = \partial_t \rho(\varphi,t) + \langle \nabla_x \rho(\varphi,t), \partial_t \varphi \rangle = \frac{D\rho}{Dt}(\varphi,t),$$

iar Propoziţia despre evoluţia jacobianului dă $\dot{J} = J \operatorname{div}_x v$. Înlocuind,

$$0 = J \left(\frac{D\rho}{Dt} + \rho \operatorname{div} v \right) \circ \varphi.$$

Cum $J > 0$ şi φ este local inversabilă,

$$\boxed{\frac{D\rho}{Dt} + \rho \operatorname{div} v = 0.}$$

În sfârşit,

$$\frac{D\rho}{Dt} = \partial_t \rho + \langle v, \nabla \rho \rangle, \qquad \operatorname{div}(\rho v) = \langle v, \nabla \rho \rangle + \rho \operatorname{div} v,$$

aşadar forma euleriană conservativă este

$$\boxed{\partial_t \rho + \operatorname{div}(\rho v) = 0.}$$

Cele două forme sunt echivalente; prima urmăreşte o particulă materială, iar a doua exprimă conservarea masei într-un punct spaţial fix.

Exemplul 3.1.1 (dilatare omogenă)**.** Pentru $\varphi(X) = \lambda X$, $\lambda > 0$, avem $F = \lambda I$, $J = \lambda^3$. Dacă densitatea iniţială este constantă ρ_0, atunci $\rho = \rho_0/\lambda^3$. O dilatare liniară de 10% produce o variaţie de volum de aproximativ 33.1%, nu de 30% exact, ceea ce arată de ce determinantul este cantitatea corectă la deformări finite.

Exemplul 3.1.2 (întindere uniaxială incompresibilă)**.** Considerăm

$$\varphi(X_1, X_2, X_3) = (\lambda X_1, \lambda^{-1/2} X_2, \lambda^{-1/2} X_3).$$

Atunci $J = 1$. Într-un material incompresibil, contracţia transversală nu este o alegere independentă: ea este impusă de conservarea volumului.

3.2 Forţe de volum şi forţe de contact

Asupra unei părţi actuale $P_t \subset \Omega_t$ acţionează forţe de volum şi forţe de contact. Scriem rezultanta sub forma

$$\mathcal{F}(P_t) = \int_{P_t} \rho b \, dx + \int_{\partial P_t} t(x, n) \, da,$$

unde b este forţa specifică de masă, iar $t(x, n)$ este vectorul tracţiune pe suprafaţa de normală n.

Teorema lui Cauchy arată că dependenţa tracţiunii de normală este liniară.

3.3 Rezultate auxiliare pentru localizare

Înainte de teorema lui Cauchy fixăm instrumentele folosite apoi în bilanţuri: teorema divergenţei, localizarea şi transportul unui volum material.

3.3.1 Teorema divergenţei

Vom transforma integrale de suprafaţă în integrale de volum. Dacă $P \subset \mathbb{R}^3$ este mărginit, cu frontieră Lipschitz, n este normala exterioară şi $q \in C^1(\overline{P}; \mathbb{R}^3)$, atunci

$$\int_{\partial P} \langle q, n \rangle \, da = \int_P \operatorname{div} q \, dx.$$

Pentru un câmp matricial T aplicăm formula fiecărei linii. Componenta i a integralei de suprafaţă este

$$\int_{\partial P} (Tn)_i \, da = \int_{\partial P} \sum_{j=1}^{3} T_{ij} n_j \, da.$$

Considerând vectorul $q^{(i)} = (T_{i1}, T_{i2}, T_{i3})$, teorema divergenţei dă

$$\int_{\partial P} (Tn)_i \, da = \int_P \sum_{j=1}^{3} \partial_j T_{ij} \, dx = \int_P (\operatorname{div} T)_i \, dx.$$

Prin urmare

$$\boxed{\int_{\partial P} Tn \, da = \int_P \operatorname{div} T \, dx}, \qquad (\operatorname{div} T)_i = \partial_j T_{ij}.$$

Aceasta este forma pe care o vom folosi la localizarea bilanţului impulsului. În acest capitol lucrăm cu câmpuri clasice; forma slabă va fi introdusă separat în Capitolul 7.

3.3.2 Lema de localizare

Lema 3.3.1 (localizare)**.** *Dacă $f \in C(\Omega; \mathbb{R}^m)$ şi*

$$\int_{B_r(x)} f(y) \, dy = 0$$

pentru orice bilă $\overline{B_r(x)} \subset \Omega$, atunci $f \equiv 0$ în Ω.

Demonstraţie. Presupunem prin contradicţie că există $x_0 \in \Omega$ cu $f(x_0) \neq 0$ şi punem $e = f(x_0)/\left\|f(x_0)\right\|$. Atunci $\langle e, f(x_0) \rangle = \left\|f(x_0)\right\| > 0$. Prin continuitate există $r > 0$, cu $\overline{B_r(x_0)} \subset \Omega$, astfel încât

$$\langle e, f(x) \rangle > \frac{1}{2} \left\|f(x_0)\right\| \qquad \forall x \in B_r(x_0).$$

Prin urmare

$$\left\langle e, \int_{B_r(x_0)} f(x) \, dx \right\rangle = \int_{B_r(x_0)} \langle e, f(x) \rangle \, dx > \frac{1}{2} \left\|f(x_0)\right\| \, \mathcal{L}^3(B_r(x_0)) > 0,$$

contradicţie cu ipoteza. Deci $f \equiv 0$. □

3.3.3 Teorema transportului Reynolds pentru un volum material

Fie $P_t = \varphi(P_0, t)$ un subcorp material şi $q = q(x,t)$ un câmp scalar neted. Schimbarea de variabile $x = \varphi(X,t)$ dă

$$\int_{P_t} q(x,t)\,dx = \int_{P_0} q(\varphi(X,t),t)J(X,t)\,dX.$$

Derivăm membrul drept. Regula lanţului produce

$$\frac{d}{dt}q(\varphi(X,t),t) = \partial_t q(\varphi,t) + \langle \nabla_x q(\varphi,t), \partial_t\varphi\rangle = \frac{Dq}{Dt}(\varphi,t),$$

iar formula lui Jacobi din Capitolul 1 dă $\dot J = J\,\mathrm{div}\,v$. Aşadar

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\int_{P_t} q\,dx &= \int_{P_0}\left(\frac{Dq}{Dt}J + q\dot J\right)dX\\ &= \int_{P_0}\left(\frac{Dq}{Dt} + q\,\mathrm{div}\,v\right)J\,dX\\ &= \int_{P_t}\left(\frac{Dq}{Dt} + q\,\mathrm{div}\,v\right)dx.\end{aligned}$$

Echivalent,

$$\boxed{\frac{d}{dt}\int_{P_t} q\,dx = \int_{P_t}\Big(\partial_t q + \mathrm{div}(qv)\Big)dx.}$$

3.3.4 Consecinţă a conservării masei pentru volume materiale

Conservarea masei a fost dedusă în Capitolul 1, atât în forma materială

$$\rho(\varphi(X,t),t)J(X,t) = \rho_0(X),$$

cât şi în forma eulerianǎ

$$\partial_t\rho + \mathrm{div}(\rho v) = 0.$$

Din această relaţie şi din teorema Reynolds obţinem consecinţa necesară aici. Pentru un câmp scalar ψ,

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\int_{P_t}\rho\psi\,dx &= \int_{P_t}\left[\frac{D(\rho\psi)}{Dt} + \rho\psi\ \mathrm{div}\,v\right]dx\\ &= \int_{P_t}\left[\psi\left(\frac{D\rho}{Dt} + \rho\,\mathrm{div}\,v\right) + \rho\frac{D\psi}{Dt}\right]dx\\ &= \int_{P_t}\rho\frac{D\psi}{Dt}\,dx.\end{aligned}$$

Această identitate va fi folosită imediat pentru impuls şi moment cinetic.

Teorema 3.3.2 (Cauchy; cf. [7, 11]). *Fie $\Omega_t \subset \mathbb{R}^3$ deschis şi fixăm momentul t. Presupunem*

că ρ, b şi acceleraţia a sunt local mărginite în Ω_t, iar tracţiunea

$$(x, n) \longmapsto t(x, n), \qquad x \in \Omega_t,\ n \in \mathbb{S}^2,$$

este continuă în x, uniform în raport cu $n \in \mathbb{S}^2$, şi local uniform mărginită în normală: pentru orice compact $K \Subset \Omega_t$ există C_K cu

$$\sup_{x \in K,\, n \in \mathbb{S}^2} \|t(x, n)\| \leq C_K.$$

Nu cerem continuitate sau diferenţiabilitate în variabila n. Presupunem în plus că principiul impulsului

$$\int_{\partial P} t(x, n)\, da + \int_P \rho b\, dx = \int_P \rho a\, dx$$

este valabil pentru orice subcorp $P \Subset \Omega_t$ cu frontieră Lipschitz. Atunci există un unic câmp tensorial $\sigma : \Omega_t \to \mathbb{R}^{3\times 3}$ astfel încât

$$t(x, n) = \sigma(x)n \qquad \forall x \in \Omega_t, \quad \forall n \in \mathbb{S}^2.$$

Observaţia 3.3.3. Nu presupunem linearitatea tracţiunii în normală; aceasta este concluzia teoremei. Nicio ipoteză de continuitate sau diferenţiabilitate în variabila n nu este necesară în argumentul tetraedrului. Mărginirea local uniformă în n este însă necesară pentru a controla contribuţia suprafeţelor laterale ale corpurilor subţiri. Ipotezele de mărginire dau estimarea de scară necesară: termenii volumici sunt $O(h^3)$, iar termenii de suprafaţă sunt de ordinul ariei lor.

Demonstraţie. Fixăm un punct x şi o normală unitară arbitrară $n = (n_1, n_2, n_3)$. Argumentul este local, astfel încât putem lucra cu un tetraedru foarte mic în jurul lui x. Pentru fiecare indice cu $n_i \neq 0$ punem $s_i = \operatorname{sign}(n_i) \in \{-1, 1\}$. Alegem un tetraedru T_h cu diametrul proporţional cu h, având o faţă oblică S_h cu normală exterioară n şi feţe coordonate $S_{i,h}$ cu normale exterioare $-s_i e_i$. Dacă $n_i = 0$, faţa corespunzătoare are arie nulă şi termenul poate fi omis. Notăm cu A_h aria feţei oblice şi cu $A_{i,h}$ aria feţei $S_{i,h}$.

Pasul 1: relaţia geometrică dintre arii. Proiecţia ortogonală a feţei oblice pe planul perpendicular pe e_i are aria $|n_i|\, A_h$. Aceasta este aria feţei coordonate corespunzătoare, deci

$$A_{i,h} = |n_i|\, A_h.$$

Echivalent, relaţia dintre vectorii de arie orientată ai poliedrului închis este

$$A_h n - \sum_{i=1}^{3} A_{i,h} s_i e_i = 0,$$

care, componentă cu componentă, dă $A_{i,h} s_i = n_i A_h$.

Pasul 2: principiul impulsului. Aplicăm principiul impulsului pe T_h:

$$\int_{\partial T_h} t(y, n(y))\, da + \int_{T_h} \rho(y) b(y)\, dy = \int_{T_h} \rho(y) a(y)\, dy.$$

Separând feţele,

$$\int_{S_h} t(y,n)\,da + \sum_{i=1}^{3} \int_{S_{i,h}} t(y,-s_i e_i)\,da = \int_{T_h} \rho(a-b)\,dy.$$

Pasul 3: estimarea ordinelor în h. Cum diametrul tetraedrului este $O(h)$, avem

$$A_h = O(h^2), \qquad A_{i,h} = O(h^2), \qquad \mathcal{L}^3(T_h) = O(h^3).$$

Presupunând continuitatea câmpurilor în x, media valorii tracţiunii pe o faţă converge la valoarea sa în punctul x. Astfel

$$\int_{S_h} t(y,n)\,da = A_h t(x,n) + o(h^2),$$

şi

$$\int_{S_{i,h}} t(y,-s_i e_i)\,da = A_{i,h} t(x,-s_i e_i) + o(h^2).$$

În schimb, termenul volumic este $O(h^3)$, deoarece integrandul este local mărginit.

Împărţim relaţia de bilanţ la A_h. Deoarece $A_h = O(h^2)$, termenul volumic devine $O(h)$ şi tinde la zero. Folosind $A_{i,h}/A_h = |n_i|$, obţinem

$$t(x,n) + \sum_{i=1}^{3} |n_i|\ t(x,-s_i e_i) = 0.$$

Pasul 4: acţiune şi reacţiune. Considerăm acum un cilindru foarte subţire, de grosime h, care traversează o suprafaţă internă cu normalele opuse n şi $-n$. Ariile celor două feţe mari sunt $A + o(1)$, iar aria laterală şi volumul sunt $O(h)$. Aplicând principiul impulsului şi lăsând $h \to 0$, obţinem

$$t(x,n) + t(x,-n) = 0.$$

Aşadar

$$t(x,-n) = -t(x,n).$$

Revenind la tetraedru şi folosind acţiunea–reacţiunea,

$$\begin{aligned} t(x,n) &= \sum_{i=1}^{3} |n_i|\ t(x,s_i e_i) \\ &= \sum_{i=1}^{3} |n_i|\, s_i\, t(x,e_i) \\ &= \sum_{i=1}^{3} n_i t(x,e_i). \end{aligned}$$

Aşadar argumentul acoperă simultan toate tiparele de semne ale componentelor lui n. Definim matricea $\sigma(x)$ prin acţiunea asupra bazei canonice,

$$\sigma(x)e_i := t(x,e_i), \qquad i = 1,2,3.$$

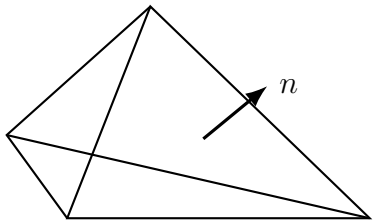
Atunci, deoarece $n = \sum_i n_i e_i$ şi acţiunea unei matrice este liniară,

$$\sigma(x)n = \sum_i n_i \sigma(x) e_i = \sum_i n_i t(x, e_i) = t(x, n).$$

Prin urmare

$$\boxed{t(x, n) = \sigma(x)n.}$$

Unicitatea lui σ este imediată: dacă $\sigma_1 n = \sigma_2 n$ pentru orice n, atunci, alegând $n = e_i$, cele două matrice au aceleaşi coloane şi deci coincid. □



tetraedru de dimensiune h

În mecanica mediilor continue legile de bilanţ sunt formulate mai întâi pe orice subcorp material sau spaţial suficient de regulat. Ecuaţiile diferenţiale apar numai după aplicarea teoremei divergenţei şi a unui argument de localizare. Cele două etape trebuie distinse în argument.

3.4 Bilanţul impulsului şi ecuaţia locală de mişcare

Pentru orice subcorp material P_t,

$$\frac{d}{dt} \int_{P_t} \rho v \, dx = \int_{P_t} \rho b \, dx + \int_{\partial P_t} \sigma n \, da.$$

Aplicăm Reynolds componentă cu componentă lui $q = \rho v_i$. Folosind ecuaţia de continuitate,

$$\begin{aligned} \partial_t(\rho v_i) + \operatorname{div}(\rho v_i v) &= \rho \partial_t v_i + v_i \partial_t \rho + v_i \operatorname{div}(\rho v) + \rho \langle v, \nabla v_i \rangle \\ &= \rho \Big(\partial_t v_i + \langle v, \nabla v_i \rangle \Big) = \rho \frac{D v_i}{D t}. \end{aligned}$$

Deci

$$\frac{d}{dt} \int_{P_t} \rho v \, dx = \int_{P_t} \rho \frac{Dv}{Dt} \, dx.$$

Pe de altă parte, teorema divergenţei dă

$$\int_{\partial P_t} \sigma n \, da = \int_{P_t} \operatorname{div} \sigma \, dx.$$

Rezultă

$$\int_{P_t} \Big(\rho \frac{Dv}{Dt} - \operatorname{div} \sigma - \rho b \Big) \, dx = 0.$$

Cum P_t este arbitrar, Lema 3.3.1 furnizează

$$\boxed{\rho \frac{Dv}{Dt} = \operatorname{div}\sigma + \rho b.}$$

În componente, cu convenţia $(\operatorname{div}\sigma)_i = \partial_j \sigma_{ij}$,

$$\rho\left(\partial_t v_i + v_j \partial_j v_i\right) = \partial_j \sigma_{ij} + \rho b_i.$$

3.5 Bilanţul momentului cinetic şi simetria tensiunii

În absenţa cuplurilor independente de volum şi de suprafaţă,

$$\frac{d}{dt}\int_{P_t} x \times \rho v \, dx = \int_{P_t} x \times \rho b \, dx + \int_{\partial P_t} x \times (\sigma n)\, da.$$

Calculăm mai întâi fără a sări pasul delicat din membrul stâng. Formula Reynolds pentru o densitate de masă spune

$$\frac{d}{dt}\int_{P_t} \rho q \, dx = \int_{P_t} \rho \frac{Dq}{Dt}\, dx.$$

Cu $q = x \times v$ avem $Dx/Dt = v$, deci

$$\frac{D}{Dt}(x \times v) = v \times v + x \times \frac{Dv}{Dt} = x \times \frac{Dv}{Dt}.$$

Prin urmare

$$\frac{d}{dt}\int_{P_t} x \times \rho v \, dx = \int_{P_t} \rho x \times \frac{Dv}{Dt}\, dx.$$

Pentru termenul de suprafaţă, componenta i este $\varepsilon_{ijk} x_j \sigma_{k\ell} n_\ell$. Teorema divergenţei dă

$$\int_{\partial P_t} \varepsilon_{ijk} x_j \sigma_{k\ell} n_\ell \, da = \int_{P_t} \varepsilon_{ijk}\Big(\delta_{j\ell}\sigma_{k\ell} + x_j \partial_\ell \sigma_{k\ell}\Big) dx.$$

Înlocuind ecuaţia impulsului, termenii cu $x \times \operatorname{div}\sigma$ şi $x \times \rho b$ se anulează. Rămâne

$$\int_{P_t} \varepsilon_{i\ell k}\sigma_{k\ell}\, dx = 0.$$

Localizarea conduce la $\varepsilon_{i\ell k}\sigma_{k\ell} = 0$. Pentru $i = 1, 2, 3$ obţinem succesiv $\sigma_{23} = \sigma_{32}$, $\sigma_{31} = \sigma_{13}$ şi $\sigma_{12} = \sigma_{21}$. Aşadar

$$\boxed{\sigma = \sigma^{T}.}$$

Simetria este o consecinţă a principiului momentului pentru un continuum Cauchy clasic; în teorii cu cupluri independente, precum mediile Cosserat, această concluzie se modifică.

3.6 Tensiuni normale şi tangenţiale

Pentru o normală unitară n, tracţiunea este $t = \sigma n$. Dacă pe o porţiune Γ_N a frontierei actuale este prescrisă o tracţiune g, condiţia naturală de frontieră este

$$\boxed{\sigma n = g \qquad \text{pe } \Gamma_N.}$$

În Capitolul 4 această condiţie va fi transportată în configuraţia de referinţă, unde ia forma $PN = t_0$ pentru tracţiunea nominală. Componenta normală scalară este $\sigma_n = \langle t, n\rangle = \langle n, \sigma n\rangle$. Vectorul normal al tracţiunii este $t_{\text{nor}} = \sigma_n n$, iar componenta tangenţială este $t_\tau = t - t_{\text{nor}}$. Prin ortogonalitate, $\|t\|^2 = |\sigma_n|^2 + \|t_\tau\|^2$. Dacă n este vector propriu al lui σ, atunci t este paralel cu n şi $t_\tau = 0$; reciproc, absenţa forfecării pe un plan înseamnă că normala acelui plan este direcţie principală de tensiune.

Exemplul 3.6.1 (stare hidrostatică)**.** Dacă $\sigma = -pI$, atunci $t(n) = -pn$ pentru orice n. Nu există tensiune tangenţială pe niciun plan. Presiunea pozitivă corespunde convenţional compresiei.

Exemplul 3.6.2 (tensiune uniaxială)**.** Pentru $\sigma = Te_1 \otimes e_1$, pe un plan de normală n avem $t = Tn_1 e_1$. Tensiunea normală este Tn_1^2, iar componenta tangenţială este în general nenulă. Acelaşi tensor produce, pe plane diferite, combinaţii diferite de tensiuni normale şi de forfecare.

3.7 Tensiuni principale şi formula tracţiunii pe un plan

Fiind simetrică, σ are o bază ortonormată de vectori proprii q_i şi tensiuni principale σ_i:

$$\sigma = \sum_{i=1}^{3} \sigma_i q_i \otimes q_i.$$

Pentru un plan de normală

$$n = \sum_i n_i q_i,$$

tracţiunea este

$$t(n) = \sum_i \sigma_i n_i q_i.$$

Componenta normală scalară este

$$\sigma_n = \langle n, \sigma n\rangle = \sum_i \sigma_i n_i^2,$$

iar vectorul de forfecare este

$$t_\tau = \sigma n - \sigma_n n.$$

Cum n este unitar, avem

$$n_i^2 \geq 0, \qquad \sum_{i=1}^{3} n_i^2 = 1.$$

Prin urmare σ_n este o combinaţie convexă a celor trei tensiuni principale. Dacă notăm

$$\sigma_{\min} := \min_i \sigma_i, \qquad \sigma_{\max} := \max_i \sigma_i,$$

atunci

$$\sigma_{\min} \sum_i n_i^2 \le \sum_i \sigma_i n_i^2 \le \sigma_{\max} \sum_i n_i^2,$$

ceea ce dă

$$\boxed{\sigma_{\min} \le \sigma_n \le \sigma_{\max}.}$$

Pe planele principale, $n = q_i$, tracţiunea este pur normală şi $t_\tau = 0$.

3.7.1 Tensiunea maximă de forfecare în planul a două direcţii principale

În planul generat de q_1, q_2, luăm

$$n = \cos\theta\, q_1 + \sin\theta\, q_2.$$

Calculăm mai întâi tracţiunea. Deoarece q_1, q_2 sunt direcţii principale,

$$t = \sigma n = \sigma_1 \cos\theta\, q_1 + \sigma_2 \sin\theta\, q_2.$$

Componenta normală scalară este

$$\sigma_n = \langle t, n\rangle = \sigma_1 \cos^2\theta + \sigma_2 \sin^2\theta.$$

Pentru partea tangenţială, $t_\tau = t - \sigma_n n$. Este mai scurt să calculăm norma ei din descompunerea ortogonală $t = \sigma_n n + t_\tau$:

$$\|t_\tau\|^2 = \|t\|^2 - \sigma_n^2.$$

Acum

$$\|t\|^2 = \sigma_1^2 \cos^2\theta + \sigma_2^2 \sin^2\theta,$$

şi, după dezvoltarea pătratului lui σ_n,

$$\begin{aligned}\|t_\tau\|^2 &= (\sigma_1 - \sigma_2)^2 \sin^2\theta \cos^2\theta \\ &= \frac{(\sigma_1 - \sigma_2)^2}{4} \sin^2(2\theta).\end{aligned}$$

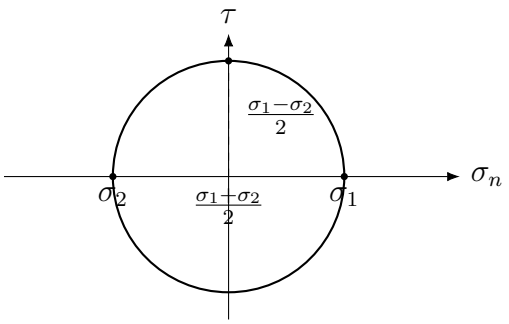
Prin urmare

$$\|t_\tau\| = \frac{|\sigma_1 - \sigma_2|}{2} \left|\sin 2\theta\right|.$$

Valoarea maximă este

$$\tau_{max} = \frac{|\sigma_1 - \sigma_2|}{2}$$

şi apare pentru $\theta = \pi/4$. Aceeaşi relaţie se vede pe cercul lui Mohr:



Centrul este $(\sigma_1 + \sigma_2)/2$, iar raza este $|\sigma_1 - \sigma_2|/2$.

Propoziţia 3.7.1 (forfecarea maximă tridimensională)**.** *Dacă ordonăm tensiunile principale* $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$*, atunci*

$$\max_{\|n\|=1} \|t_\tau(n)\| = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2}.$$

Demonstraţie. În baza principală scriem $p_i = n_i^2 \geq 0$, cu $p_1 + p_2 + p_3 = 1$. Avem

$$\|\sigma n\|^2 = \sum_{i=1}^{3} p_i \sigma_i^2, \qquad \sigma_n = \langle n, \sigma n \rangle = \sum_{i=1}^{3} p_i \sigma_i.$$

Deoarece $t_\tau = \sigma n - \sigma_n n$ este ortogonal pe n,

$$\|t_\tau\|^2 = \|\sigma n\|^2 - \sigma_n^2 = \sum_i p_i \sigma_i^2 - \left(\sum_i p_i \sigma_i \right)^2.$$

Notăm

$$m := \sigma_3, \qquad M := \sigma_1, \qquad \bar{\sigma} := \sum_i p_i \sigma_i.$$

Pentru orice $x \in [m, M]$ avem $(x - m)(M - x) \geq 0$, deci

$$x^2 \leq (m + M)x - mM.$$

Aplicând această inegalitate lui $x = \sigma_i$, înmulţind cu p_i şi sumând, obţinem

$$\sum_i p_i \sigma_i^2 \leq (m + M)\bar{\sigma} - mM.$$

Prin urmare

$$\begin{aligned} \|t_\tau\|^2 &\leq (m + M)\bar{\sigma} - mM - \bar{\sigma}^2 \\ &= \frac{(M - m)^2}{4} - \left(\bar{\sigma} - \frac{M + m}{2} \right)^2 \\ &\leq \frac{(M - m)^2}{4}. \end{aligned}$$

Rezultă

$$\|t_\tau(n)\| \leq \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2}.$$

Egalitatea este realizată pentru $p_1 = p_3 = 1/2$, $p_2 = 0$, de exemplu pentru

$$n = \frac{q_1 + q_3}{\sqrt{2}}.$$

În acest caz $\bar{\sigma} = (\sigma_1 + \sigma_3)/2$, astfel toate inegalităţile de mai sus devin egalităţi. Prin urmare maximul este exact $(\sigma_1 - \sigma_3)/2$. □

3.8 Exemplu: tracţiunea pe un plan şi tensiunile principale

Fie

$$\sigma = \begin{pmatrix} 120 & 30 & 0 \\ 30 & 40 & 0 \\ 0 & 0 & 20 \end{pmatrix} \text{ MPa}, \qquad n = (\cos\theta, \sin\theta, 0).$$

Atunci

$$t(n) = \sigma n = \begin{pmatrix} 120\cos\theta + 30\sin\theta \\ 30\cos\theta + 40\sin\theta \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Tensiunea normală este

$$\begin{aligned} \sigma_n &= \langle n, t(n) \rangle \\ &= 120\cos^2\theta + 60\sin\theta\cos\theta + 40\sin^2\theta \\ &= 80 + 40\cos 2\theta + 30\sin 2\theta. \end{aligned}$$

Valorile proprii ale blocului plan sunt soluţiile lui $(120 - \lambda)(40 - \lambda) - 900 = 0$, deci 130 MPa şi 30 MPa; a treia valoare principală este 20 MPa. Tensiunea maximă de forfecare tridimensională este

$$\tau_{\max} = \frac{130 - 20}{2} = 55 \text{ MPa}.$$

Descrierea prin tensorul σ, tracţiunile σn pe toate planele şi descrierea spectrală prin tensiuni principale conţin aceeaşi informaţie.

3.9 Puterea tensiunilor şi bilanţul local al energiei mecanice

Considerăm o parte materială actuală $\omega_t \subset \Omega_t$ şi câmpul de viteză v. Puterea forţelor exterioare este

$$\mathcal{P}_{\text{ext}}(\omega_t; v) = \int_{\omega_t} \rho\langle b, v\rangle \, dx + \int_{\partial\omega_t} \langle \sigma n, v\rangle \, da.$$

Aplicând formula lui Gauss componentei $(\sigma^T v)_j = \sigma_{ij} v_i$, obţinem

$$\int_{\partial\omega_t} \langle \sigma n, v\rangle \, da = \int_{\omega_t} \operatorname{div}(\sigma^T v) \, dx$$

$$= \int_{\omega_t} \Big[\langle \operatorname{div} \sigma, v \rangle + \langle \sigma, \nabla v \rangle \Big] dx.$$

Din $\rho \dot{v} = \operatorname{div} \sigma + \rho b$ rezultă

$$\mathcal{P}_{\text{ext}} = \int_{\omega_t} \rho \langle \dot{v}, v \rangle \, dx + \int_{\omega_t} \langle \sigma, \nabla v \rangle \, dx.$$

Pentru o parte materială, conservarea masei implică

$$\frac{d}{dt} \int_{\omega_t} \frac{1}{2} \rho \, \|v\|^2 \, dx = \int_{\omega_t} \rho \langle \dot{v}, v \rangle \, dx.$$

Prin urmare

$$\mathcal{P}_{\text{ext}} = \frac{d}{dt} \mathcal{K}(\omega_t) + \mathcal{P}_{\text{int}}(\omega_t), \qquad \mathcal{P}_{\text{int}} = \int_{\omega_t} \langle \sigma, \nabla v \rangle \, dx. \tag{3.2}$$

Definim tensorul vitezei de deformare

$$D := \operatorname{sym} \nabla v = \frac{1}{2} (\nabla v + \nabla v^T).$$

Cum $\sigma = \sigma^T$, avem $\langle \sigma, \nabla v \rangle = \langle \sigma, D \rangle$. Partea antisimetrică a gradientului vitezei descrie rotaţia rigidă locală şi nu produce putere internă într-un mediu Cauchy clasic.

Propoziţia 3.9.1 (puterea internă pe viteze rigide)**.** *Fie $v_r(x) = c + Wx$, cu $W \in \mathfrak{so}(3)$. Atunci*

$$\int_{\omega_t} \langle \sigma, \nabla v_r \rangle \, dx = 0$$

pentru orice parte ω_t şi orice W dacă şi numai dacă σ este simetric a.p.t.

Demonstraţie. Pentru $v_r(x) = c + Wx$ avem $\nabla v_r = W$. Dacă $\sigma = \sigma^T$ şi $W^T = -W$, atunci

$$\langle \sigma, W \rangle = \operatorname{tr}(\sigma W) = \operatorname{tr}((\sigma W)^T) = \operatorname{tr}(W^T \sigma^T) = -\operatorname{tr}(W\sigma) = -\langle \sigma, W \rangle.$$

Prin urmare $\langle \sigma, W \rangle = 0$ punctual, deci integrala se anulează.

Reciproc, presupunem că integrala este zero pentru orice subdomeniu ω şi orice matrice antisimetrică constantă W. Fixăm mai întâi W. Lema de localizare aplicată funcţiei scalare $x \mapsto \langle \sigma(x), W \rangle$ dă

$$\langle \sigma(x), W \rangle = 0 \qquad \text{a.p.t.}$$

Aplicăm aceasta pentru o bază a spaţiului $\mathfrak{so}(3)$; prin liniaritate, pentru aproape orice x egalitatea este valabilă pentru toate matricele antisimetrică W. Cum partea simetrică a lui σ este deja ortogonală pe $\mathfrak{so}(3)$, obţinem

$$\langle \operatorname{skew} \sigma(x), W \rangle = 0 \qquad \forall W \in \mathfrak{so}(3).$$

Alegând $W = \operatorname{skew} \sigma(x)$ rezultă $\|\operatorname{skew} \sigma(x)\|^2 = 0$. Deci $\sigma = \sigma^T$ a.p.t. □

3.10 Schimbarea observatorului şi principiul puterilor virtuale

Trebuie distinse două situaţii. Două observatoare *inerţiale* sunt legate printr-o transformare galileană

$$x^* = c_0 + V_0 t + Q_0 x, \qquad Q_0 \in SO(3) \text{ constant.}$$

În acest caz acceleraţiile se transformă numai prin rotaţia constantă Q_0, iar forma principiului impulsului se păstrează.

O schimbare rigidă generală dependentă de timp,

$$x^* = c(t) + Q(t)x, \qquad Q(t) \in SO(3),$$

poate descrie un observator neinerţial. Atunci acceleraţia conţine termeni suplimentari de translaţie, Coriolis, Euler şi centrifugal; ecuaţia impulsului nu păstrează aceeaşi formă decât dacă aceşti termeni sunt incluşi ca forţe de inerţie. În schimb, cerinţa de obiectivitate a legilor constitutive este formulată faţă de mişcări rigide superpuse generale şi va fi discutată în Capitolul 5.

Principiul puterilor virtuale poate fi scris, pentru un subcorp P_t şi un câmp virtual w, sub forma

$$\mathcal{P}_{\text{ext}}(w) = \mathcal{P}_{\text{in}}(w) + \mathcal{P}_{\text{int}}(w),$$

unde

$$\mathcal{P}_{\text{ext}}(w) = \int_{P_t} \rho\langle b, w\rangle \, dx + \int_{\partial P_t} \langle \sigma n, w\rangle \, da,$$

$$\mathcal{P}_{\text{in}}(w) = \int_{P_t} \rho\langle a, w\rangle \, dx, \qquad \mathcal{P}_{\text{int}}(w) = \int_{P_t} \langle \sigma, \nabla w\rangle \, dx.$$

Nu rededucem aici bilanţurile obţinute mai sus. Observăm numai cum apar ele din alegeri particulare ale lui w. Pentru o translaţie rigidă, $w = c$ şi $\nabla w = 0$; identitatea de putere se reduce la bilanţul impulsului. Pentru o rotaţie rigidă, $w = Wx$ cu $W^T = -W$; atunci $\nabla w = W$, iar Propoziţia precedentă arată de ce simetria tensiunii este exact condiţia care anulează puterea internă a unei viteze rigide. Astfel principiul puterilor virtuale regrupează aceleaşi bilanţuri, fără a introduce o a doua demonstraţie a lor.

3.11 Probleme pentru seminar

1. Deduceţi formula $t(-n) = -t(n)$ din principiul impulsului aplicat unui strat subţire.
2. Pentru $\sigma = \operatorname{diag}(3, 2, 1)$ determinaţi tracţiunea pe planul cu $n = (1, 1, 1)/\sqrt{3}$.
3. Determinaţi planele pe care tracţiunea este pur normală.
4. Arătaţi direct că $\int_{\partial P} \sigma n \, da = \int_P \operatorname{div} \sigma \, dx$ componentă cu componentă.
5. Folosind viteza rigidă virtuală $w(x) = \omega \times x$, arătaţi că anularea puterii părţii antisimetice conduce la $\sigma = \sigma^T$.

6. Pentru o stare de forfecare pură $\sigma = \tau(e_1 \otimes e_2 + e_2 \otimes e_1)$ determinaţi tensiunile principale.

3.12 Exerciţii rezolvate

Problema 3.12.1 (tracţiunea pe un plan)**.** Fie

$$\sigma = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}, \qquad n = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,1,0)^T.$$

Calculaţi vectorul de tracţiune $t(n) = \sigma n$.

Rezolvare. Înmulţim matricea cu vectorul normal:

$$t(n) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 2+1 \\ 1+3 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}(3,4,0)^T.$$

Componenta normală scalară este $\sigma_n = \langle t, n \rangle = 7/2$, iar partea tangenţială este $t - \sigma_n n$.

Problema 3.12.2 (acţiune şi reacţiune pe două feţe opuse)**.** Folosind formula lui Cauchy $t(n) = \sigma n$, demonstraţi $t(-n) = -t(n)$.

Rezolvare. Prin liniaritatea produsului matrice–vector,

$$t(-n) = \sigma(-n) = -(\sigma n) = -t(n).$$

Această identitate este forma locală a echilibrului forţelor de contact pe două feţe cu normale opuse.

Problema 3.12.3 (tensiune hidrostatică)**.** Dacă $\sigma = -pI$, calculaţi tracţiunea pe un plan cu normala unitară n şi arătaţi că ea nu are componentă tangenţială.

Rezolvare. Pentru o stare hidrostatică $\sigma = -pI$ şi o normală unitară n, aplicăm tensorul asupra normalei:

$$t(n) = \sigma n = (-pI)n = -p(In) = -pn.$$

Tracţiunea este paralelă cu n, deci componenta tangenţială este zero pe orice plan. Semnul minus corespunde unei presiuni compresive pentru $p > 0$.

Problema 3.12.4 (ecuaţia locală a impulsului în statică)**.** Ce devine ecuaţia

$$\rho \frac{Dv}{Dt} = \operatorname{div} \sigma + \rho b$$

în echilibru static?

Rezolvare. În statică $v = 0$, deci acceleraţia materială este zero. Rezultă

$$\boxed{\operatorname{div} \sigma + \rho b = 0.}$$

Dacă nu există forţe de volum, ecuaţia se reduce la $\operatorname{div}\sigma = 0$.

Problema 3.12.5 (simetria tensiunii)**.** Explicaţi de ce principiul momentului cinetic, în absenţa cuplurilor de volum şi de suprafaţă, conduce la $\sigma = \sigma^T$.

Rezolvare. După folosirea principiului impulsului, forma localizată a momentului cinetic conduce la

$$\varepsilon_{ijk}\sigma_{kj} = 0.$$

Pentru $i = 1$ obţinem $\sigma_{32} - \sigma_{23} = 0$, pentru $i = 2$, $\sigma_{13} - \sigma_{31} = 0$, iar pentru $i = 3$, $\sigma_{21} - \sigma_{12} = 0$. Prin urmare toate componentele antisimetice dispar şi σ este simetric.

Problema 3.12.6 (tensiuni principale şi tracţiune maximă)**.** Pentru tensorul plan

$$\sigma = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

calculaţi tensiunile principale.

Rezolvare. Valorile proprii satisfac

$$\det(\sigma - \lambda I) = (5 - \lambda)(1 - \lambda) - 4 = \lambda^2 - 6\lambda + 1 = 0.$$

Astfel

$$\lambda_{1,2} = 3 \pm 2\sqrt{2}.$$

Deoarece σ este simetric, direcţiile proprii sunt ortogonale. În plan, tensiunea maximă de forfecare este

$$\tau_{\max} = \frac{\lambda_1 - \lambda_2}{2} = 2\sqrt{2}.$$

Problema 3.12.7 (deducerea ecuaţiei locale din principiul global)**.** Presupuneţi că pentru orice subdomeniu material actual P_t,

$$\frac{d}{dt}\int_{P_t} \rho v \, dx = \int_{\partial P_t} \sigma n \, da + \int_{P_t} \rho b \, dx.$$

Deduceţi ecuaţia locală.

Rezolvare. Teorema de transport şi conservarea masei dau

$$\frac{d}{dt}\int_{P_t} \rho v \, dx = \int_{P_t} \rho \frac{Dv}{Dt} \, dx.$$

Prin teorema divergenţei,

$$\int_{\partial P_t} \sigma n \, da = \int_{P_t} \operatorname{div}\sigma \, dx.$$

Deci

$$\int_{P_t} \left(\rho \frac{Dv}{Dt} - \operatorname{div}\sigma - \rho b \right) dx = 0.$$

Cum P_t este arbitrar, lema de localizare implică

$$\rho \frac{Dv}{Dt} = \operatorname{div}\sigma + \rho b.$$

Problema 3.12.8 (conservarea masei)**.** Pornind de la $\rho(\varphi(X,t),t)J(X,t) = \rho_0(X)$, deduceţi ecuaţia eulerianǎ

$$\frac{D\rho}{Dt} + \rho \operatorname{div} v = 0.$$

Rezolvare. Derivăm la X fix:

$$0 = \frac{d}{dt}\Big(\rho(\varphi(X,t),t)J(X,t)\Big) = \frac{D\rho}{Dt}J + \rho\dot{J}.$$

Din capitolul 1, $\dot{J} = J \operatorname{div} v$. Atunci

$$0 = J\left(\frac{D\rho}{Dt} + \rho \operatorname{div} v\right).$$

Cum $J > 0$, obţinem ecuaţia dorită.

Problema 3.12.9 (tensiune constantă şi rezultanta pe frontieră)**.** Fie $P \subset \mathbb{R}^3$ un domeniu neted şi σ un tensor constant. Arătaţi că

$$\int_{\partial P} \sigma n \, da = 0.$$

Rezolvare. Deoarece σ este constant, $\operatorname{div}\sigma = 0$. Teorema divergenţei aplicată fiecărei linii a tensorului dă

$$\int_{\partial P} \sigma n \, da = \int_P \operatorname{div}\sigma \, dx = 0.$$

Acesta este un control util: un câmp uniform de tensiune produce pe un corp închis forţe de suprafaţă cu rezultantă nulă.

Problema 3.12.10 (puterea internă şi vitezele rigide)**.** Fie $v(x) = a + Wx$, unde a este constant şi $W^T = -W$. Arătaţi că, dacă σ este simetric,

$$\langle \sigma, \nabla v \rangle = 0.$$

Interpretaţi rezultatul.

Rezolvare. Avem $\nabla v = W$. Pentru orice matrice simetrică S şi antisimetrică W,

$$\langle S, W \rangle = \operatorname{tr}(S^T W) = \operatorname{tr}(SW).$$

Dar

$$\operatorname{tr}(SW) = \operatorname{tr}((SW)^T) = \operatorname{tr}(W^T S^T) = \operatorname{tr}((-W)S) = -\operatorname{tr}(WS) = -\operatorname{tr}(SW),$$

unde am folosit ciclicitatea urmei. Deci $\langle S, W \rangle = 0$. Prin urmare mişcările rigide nu produc putere internă într-un mediu Cauchy clasic.

3.13 Exerciţii propuse suplimentare

Nivelul A

3.A.1 *(reconstrucţia lui σ din tracţiuni şi tracţiunea pe un plan oblic)* Într-un punct x al unui corp se măsoară tracţiunile pe cele trei feţe coordonate:

$$t(e_1) = (3,1,0), \qquad t(e_2) = (1,2,0), \qquad t(e_3) = (0,0,4) \quad [\text{MPa}].$$

(a) Determinaţi σ şi verificaţi compatibilitatea cu simetria $\sigma = \sigma^T$. (b) Calculaţi tracţiunea $t(n)$, componenta normală σ_n şi mărimea componentei tangenţiale $\|t_{\tan}\|$ pe planul de normală unitară $n = \frac{1}{3}(2,1,2)$.
Indicaţie. Coloana j a lui σ este $t(e_j)$ (§ 3.1.5); apoi $t = \sigma n$, $\sigma_n = \langle n, \sigma n\rangle$, $\|t_{\tan}\|^2 = \|t\|^2 - \sigma_n^2$ (§ 3.8).
Răspuns.

$$\sigma = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

este simetric. Pentru $n = \frac{1}{3}(2,1,2)$,

$$t(n) = \left(\frac{7}{3}, \frac{4}{3}, \frac{8}{3}\right) \text{MPa}, \qquad \sigma_n = \frac{34}{9} \approx 3.778\,\text{MPa},$$

$$\|t\|^2 = \frac{43}{3}, \qquad \|t_{\tan}\| = \sqrt{\frac{43}{3} - \frac{1156}{81}} = \frac{\sqrt{5}}{9} \approx 0.248\,\text{MPa}.$$

3.A.2 *(ecuaţia locală de echilibru: determinarea forţei masice)* Un corp este în echilibru static ($a = 0$), cu densitatea constantă $\rho > 0$ şi câmpul de tensiuni

$$\sigma(x) = \begin{pmatrix} x_1 x_2 & x_2^2 & 0 \\ x_2^2 & x_1 & 0 \\ 0 & 0 & x_3 \end{pmatrix}.$$

Verificaţi că σ este simetric, calculaţi $\operatorname{div}\sigma$ şi determinaţi forţa masică b pentru care ecuaţia locală a impulsului este satisfăcută în orice punct.
Indicaţie. $(\operatorname{div}\sigma)_i = \partial_j \sigma_{ij}$; în statică, $\operatorname{div}\sigma + \rho b = 0$ (§ 3.4, Problema 3.16.4).
Răspuns.

$$\operatorname{div}\sigma = (3x_2, 0, 1), \qquad b(x) = -\frac{1}{\rho}(3x_2, 0, 1).$$

3.A.3 *(transport, izocorie şi conservarea masei)* Fie câmpul eulerian de viteză

$$v(x) = (2x_1, -x_2, -x_3),$$

staţionar, pe un domeniu mărginit. (a) Calculaţi $\operatorname{div} v$ şi deduceţi cum variază în timp volumul unei părţi materiale ω_t. (b) Ce devine ecuaţia de continuitate $\dot\rho + \rho \operatorname{div} v = 0$? Ce se întâmplă

cu densitatea urmărind o particulă? (c) Dacă la momentul $t = 0$ densitatea este constantă ρ_0, care este $\rho(x, t)$?
Indicaţie. Teorema transportului Reynolds pentru $f \equiv 1$ dă $\frac{d}{dt}\operatorname{vol}(\omega_t) = \int_{\omega_t} \operatorname{div} v\, dx$ (§ 3.5.3); apoi § 3.12 şi $\rho J = \rho_0$.
Răspuns. (a) $\operatorname{div} v = 2 - 1 - 1 = 0$, deci $\frac{d}{dt}\operatorname{vol}(\omega_t) = 0$: mişcarea este izocoră, $J \equiv 1$. (b) Ecuaţia devine $\dot\rho = 0$: densitatea este constantă de-a lungul traiectoriilor. (c) $\rho(x, t) = \rho_0$ pentru orice x şi t.

Nivelul B

3.B.1 *(caracterizarea stării hidrostatice)* Fie $\sigma \in \operatorname{Sym}(3)$ într-un punct fixat. Presupunem că pe orice plan tracţiunea este pur normală, adică pentru orice n cu $\|n\| = 1$ există $\alpha(n) \in \mathbb{R}$ cu $\sigma n = \alpha(n)n$. (a) Arătaţi că orice vector nenul este vector propriu al lui σ. (b) Deduceţi că α este constantă şi că $\sigma = -pI$ pentru un $p \in \mathbb{R}$. (c) Interpretaţi mecanic rezultatul şi precizaţi ce devine $\tau_{\max}$ într-o astfel de stare.
Indicaţie. (a) Aplicaţi ipoteza pentru n_1, n_2 ortogonali şi pentru $(n_1 + n_2)/\sqrt{2}$, apoi comparaţi. (c) § 3.8 (Exemplul 3.8.1) şi § 3.9.1.
Răspuns. Din $\sigma(n_1 + n_2) = \alpha_{12}(n_1 + n_2)$ şi $\sigma n_i = \alpha_i n_i$ rezultă

$$(\alpha_1 - \alpha_{12})n_1 + (\alpha_2 - \alpha_{12})n_2 = 0,$$

deci $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_{12}$. Toate tensiunile principale sunt egale, $\sigma = \alpha I = -pI$. Este starea hidrostatică: nu există forfecare pe niciun plan, iar

$$\tau_{\max} = \frac{1}{2}\max_{i,j} |\sigma_i - \sigma_j| = 0.$$

3.B.2 *(bară grea: ecuaţia locală + condiţia la limită)* O bară prismatică verticală ocupă $\Omega = (0, L) \times (0, h) \times (0, h)$, este suspendată la capătul $x_1 = L$, iar capătul $x_1 = 0$ este liber. Densitatea este constantă ρ şi forţa masică este $b = -ge_1$, $g > 0$. Se caută o stare de tensiune de forma $\sigma = \sigma_{11}(x_1)e_1 \otimes e_1$. (a) Scrieţi ecuaţia locală de echilibru şi condiţiile la limită pe feţele laterale şi pe capătul liber. (b) Determinaţi $\sigma_{11}(x_1)$. (c) Pentru $\rho = 8000\,\mathrm{kg/m^3}$, $g = 10\,\mathrm{m/s^2}$, $L = 2\,\mathrm{m}$, calculaţi tensiunea maximă şi precizaţi unde apare.
Indicaţie. $\operatorname{div}\sigma + \rho b = 0$ cu $a = 0$; condiţia pe o faţă de normală n este $\sigma n = 0$ (suprafaţă liberă), § 3.3–3.4 şi § 3.8.
Răspuns. Singura componentă nebanală este

$$\sigma_{11}'(x_1) - \rho g = 0.$$

Feţele laterale sunt automat libere, iar capătul liber impune $\sigma_{11}(0) = 0$. Prin urmare

$$\sigma_{11}(x_1) = \rho g x_1.$$

Tensiunea maximă este

$$\sigma_{\max} = \rho g L = 1.6 \cdot 10^5\,\mathrm{Pa} = 160\,\mathrm{kPa},$$

atinsă în secţiunea de prindere $x_1 = L$.

3.B.3 *(puterea tensiunilor într-o forfecare)* Un bloc de volum $V = 2 \cdot 10^{-3}\,\mathrm{m}^3$ este supus mişcării de forfecare

$$\varphi(X,t) = (X_1 + \dot\gamma\, t X_2, X_2, X_3), \qquad \dot\gamma = 0.1\,\mathrm{s}^{-1},$$

iar tensiunea Cauchy este omogenă,

$$\sigma = \tau_0(e_1 \otimes e_2 + e_2 \otimes e_1), \qquad \tau_0 = 2 \cdot 10^5\,\mathrm{Pa}.$$

(a) Calculaţi v, $L = \nabla_x v$, $D = \operatorname{sym} L$ şi $W = \operatorname{skew} L$. (b) Arătaţi că $\langle \sigma, L\rangle = \langle \sigma, D\rangle$ şi explicaţi de ce partea antisimetrică nu produce putere. (c) Calculaţi puterea internă $\mathcal{P}_{\mathrm{int}} = \int_{\omega_t} \langle \sigma, \nabla v\rangle\, dx$.
Indicaţie. § 3.13 şi Propoziţia 3.13.1: pentru S simetric şi A antisimetric, $\langle S, A\rangle = 0$.
Răspuns.

$$v = (\dot\gamma x_2, 0, 0), \qquad L = \dot\gamma e_1 \otimes e_2,$$
$$D = \frac{\dot\gamma}{2}(e_1 \otimes e_2 + e_2 \otimes e_1), \qquad W = \frac{\dot\gamma}{2}(e_1 \otimes e_2 - e_2 \otimes e_1).$$

Deoarece σ este simetric, $\langle \sigma, W\rangle = 0$, deci $\langle \sigma, L\rangle = \langle \sigma, D\rangle = \tau_0\dot\gamma$. Astfel

$$\mathcal{P}_{\mathrm{int}} = \tau_0 \dot\gamma V = 2 \cdot 10^5 \cdot 0.1 \cdot 2 \cdot 10^{-3} = 40\,\mathrm{W}.$$

Nivelul C

3.C.1 *(analiza unei stări de tensiune)* Fie, într-un punct,

$$\sigma = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix} \quad [\mathrm{MPa}].$$

(a) Determinaţi tensiunile principale şi direcţiile principale. Este starea hidrostatică? (b) Calculaţi $t(e_1)$, σ_n şi $\|t_{\tan}\|$ pe planul de normală e_1, apoi pe planul de normală $n_* = 3^{-1/2}(1,1,1)$. Comentaţi diferenţa. (c) Calculaţi $\tau_{\max}$ şi indicaţi o normală pe planul pe care este atinsă. Ce parte a lui σ produce forfecare: partea sferică sau deviatorul?
Indicaţie. $\sigma = 3I + \mathbf{1} \otimes \mathbf{1}$, cu $\mathbf{1} = (1,1,1)$; § 3.9 şi § 3.9.1 pentru $\tau_{\max} = \frac{1}{2}\max_{i,j} |\sigma_i - \sigma_j|$.
Răspuns. (a) $\sigma_1 = 6$ pe direcţia $3^{-1/2}(1,1,1)$, iar $\sigma_2 = \sigma_3 = 3$ pe planul ortogonal. Starea nu este hidrostatică. (b)

$$t(e_1) = (4,1,1), \qquad \sigma_n = 4, \qquad \|t_{\tan}\| = \sqrt{2} \approx 1.414\,\mathrm{MPa}.$$

Pe planul n_*, $t = 6n_*$, $\sigma_n = 6$ şi $\|t_{\tan}\| = 0$. (c)

$$\tau_{\max} = \frac{6-3}{2} = 1.5\,\text{MPa}.$$

De exemplu, dacă $q = 2^{-1/2}(1,-1,0)$ este o direcţie proprie asociată valorii 3, o normală corespunzătoare este $n = 2^{-1/2}(n_* + q)$. Partea sferică $\frac{1}{3}(\operatorname{tr}\sigma)I = 4I$ nu produce forfecare; numai deviatorul contribuie la $\tau_{\max}$.

3.C.2 *(cinematică + bilanţul impulsului: determinarea presiunii)* Se consideră mişcarea omogenă

$$\varphi(X,t) = (e^t X_1, e^{-t}X_2, X_3),$$

cu densitatea de referinţă constantă ρ_0 şi forţă masică nulă. (a) Calculaţi F, J, densitatea $\rho(x,t)$, viteza eulerianǎ v şi acceleraţia a atât material, cât şi eulerian; verificaţi că coincid. (b) Presupunând o stare de tensiune sferică $\sigma = -p(x)I$, determinaţi câmpul de presiune p care satisface ecuaţia locală a impulsului. (c) Verificaţi că σ astfel obţinut este compatibil cu simetria impusă de bilanţul momentului cinetic şi calculaţi puterea internă $\langle \sigma, \nabla v\rangle$ pe unitate de volum. Comentaţi rezultatul în raport cu izocoria mişcării.
Indicaţie. (a) § 1.4–1.5; (b) $\operatorname{div}(-pI) = -\nabla p$ şi $\operatorname{div}\sigma + \rho b = \rho a$ (§ 3.4); (c) § 3.13.
Răspuns.

$$F = \operatorname{diag}(e^t, e^{-t}, 1), \qquad J = 1, \qquad \rho = \rho_0,$$

$$v = (x_1, -x_2, 0), \qquad A = (e^t X_1, e^{-t}X_2, 0) = (x_1, x_2, 0).$$

Eulerian, $\partial_t v = 0$ şi $(\nabla v)v = (x_1, x_2, 0)$. Din $-\nabla p = \rho_0(x_1, x_2, 0)$ rezultă

$$p(x) = p_0 - \frac{\rho_0}{2}(x_1^2 + x_2^2), \qquad p_0 \in \mathbb{R}.$$

Tensorul $\sigma = -pI$ este simetric, iar

$$\langle \sigma, \nabla v\rangle = -p\,\operatorname{div} v = 0,$$

deoarece $\operatorname{div} v = 1 - 1 = 0$.

3.C.3 *(teorema transportului, energia cinetică şi bilanţul mecanic)* (a) Demonstraţi că, pentru orice câmp scalar neted ψ şi orice parte materială $\omega_t = \varphi_t(\mathcal{P})$,

$$\frac{d}{dt}\int_{\omega_t} \rho\psi\,dx = \int_{\omega_t} \rho\dot{\psi}\,dx,$$

folosind teorema transportului Reynolds şi conservarea masei. (b) Deduceţi

$$\frac{d}{dt}K(\omega_t) = \int_{\omega_t} \rho\langle \dot{v}, v\rangle\,dx, \qquad K = \int_{\omega_t} \frac{1}{2}\rho\,\|v\|^2\,dx,$$

şi regăsiţi identitatea $\mathcal{P}_{\text{ext}} = \dot{K} + \mathcal{P}_{\text{int}}$. (c) Aplicaţi (b) la dilatarea omogenă $\varphi(X,t) = \alpha(t)X$, $\alpha > 0$, a bilei unitate $\mathcal{P} = B(0,1)$, cu ρ_0 constant: calculaţi explicit $K(t)$ şi verificaţi formula prin derivare directă.
Indicaţie. (a) § 3.5.3 şi $\rho J = \rho_0$: transformaţi integrala pe configuraţia de referinţă. (c)

$\int_{B(0,1)} \|X\|^2 \, dX = 4\pi/5$ şi $\rho \, dx = \rho_0 \, dX$.
Răspuns. (a) Schimbând variabila,

$$\int_{\omega_t} \rho\psi \, dx = \int_{\mathcal{P}} \rho_0 \Psi \, dX, \qquad \Psi(X,t) = \psi(\varphi(X,t),t),$$

iar derivarea sub integrală dă rezultatul. (b) Pentru $\psi = \frac{1}{2}\|v\|^2$ se obţine $\dot{K} = \int \rho\langle \dot{v}, v\rangle$; combinând cu ecuaţia impulsului şi formula lui Gauss se regăseşte bilanţul mecanic. (c) $v = \dot{\alpha}X = (\dot{\alpha}/\alpha)x$ şi

$$K(t) = \frac{1}{2}\rho_0 \dot{\alpha}^2 \int_{B(0,1)} \|X\|^2 \, dX = \frac{2\pi}{5}\rho_0 \dot{\alpha}^2,$$

$$\dot{K} = \frac{4\pi}{5}\rho_0 \dot{\alpha}\ddot{\alpha}.$$

Pe de altă parte,

$$\int_{\omega_t} \rho\langle \dot{v}, v\rangle \, dx = \rho_0 \dot{\alpha}\ddot{\alpha} \int_{B(0,1)} \|X\|^2 \, dX = \frac{4\pi}{5}\rho_0 \dot{\alpha}\ddot{\alpha}.$$

Capitolul 4

Tensiuni Piola–Kirchhoff, transformarea Piola şi lucru virtual

Surse şi orientare. Pentru formula lui Nanson, transformarea Piola şi tensorii Piola–Kirchhoff folosim [3, 7, 10].

4.1 Descrierea în configuraţia de referinţă

Convenţie pentru câmpurile spaţiale şi forţe. Când o identitate este scrisă în variabila materială X, un câmp spaţial precum $\sigma(x,t)$ sau $b(x,t)$ trebuie compus cu deformarea: $\sigma \circ \varphi$ şi $b \circ \varphi$. Pentru lizibilitate, după prima apariţie explicită vom putea scrie abreviat σ în formule materiale, dar sensul va fi întotdeauna $\sigma(\varphi(X,t),t)$.

Convenţie pentru forţele din acest capitol. Notăm cu $B(X,t)$ forţa de volum pe unitatea de masă în descriere materială şi cu

$$f_0 = \rho_0 B$$

densitatea de forţă pe unitatea de volum de referinţă. Tracţiunea nominală pe o faţă materială de normală N este

$$t_0 = PN.$$

Astfel, ecuaţia materială se va scrie $\rho_0 \ddot{\varphi} = \operatorname{Div} P + f_0$ sau, echivalent, $\rho_0 \ddot{\varphi} = \operatorname{Div} P + \rho_0 B$. Nu vom folosi simboluri paralele b_0, g_0, T pentru aceleaşi mărimi.

Ecuaţiile din capitolul precedent sunt scrise pe domeniul necunoscut Ω_t. În elasticitate este adesea mai convenabil să transportăm toate cantităţile pe domeniul fix Ω. Această trecere produce tensorii Piola–Kirchhoff.

4.2 De la formula lui Nanson la primul tensor Piola–Kirchhoff

Transformarea geometrică a suprafeţelor a fost dedusă în Secţiunea 1.6.3. Pentru aceeaşi porţiune materială de suprafaţă,

$$n\,da = JF^{-T} N\,dA.$$

Folosim aici formula geometrică demonstrată în Subsecţiunea 1.6.3 pentru a transforma forţa de contact.

4.2.1 Transformarea tracţiunii

În configuraţia actuală, forţa elementară exercitată pe o suprafaţă deformată este

$$df = \sigma n \, da.$$

Vectorul df reprezintă aceeaşi forţă fizică indiferent dacă folosim aria actuală da sau aria de referinţă dA pentru a o descrie. Formula lui Nanson schimbă tocmai elementul de arie orientat:

$$n \, da = JF^{-T} N \, dA.$$

Înlocuind această relaţie în expresia forţei obţinem

$$\begin{aligned} df &= \sigma(n \, da) \\ &= (\sigma \circ \varphi) JF^{-T} N \, dA \\ &= J(\sigma \circ \varphi) F^{-T} N \, dA. \end{aligned}$$

Compunerea cu φ apare deoarece σ este definită în punctul actual $x = \varphi(X, t)$, în timp ce formula de mai sus este scrisă în variabila materială X.

Definim tracţiunea nominală $t_0(N)$ prin identitatea

$$df = t_0(N) \, dA.$$

Comparând cu ultima linie a calculului,

$$t_0(N) = J(\sigma \circ \varphi) F^{-T} N.$$

Pentru X şi t fixate, membrul drept depinde liniar de normala materială N. Există deci o matrice P care realizează această aplicaţie liniară:

$$t_0(N) = PN, \qquad \boxed{P = J(\sigma \circ \varphi) F^{-T}.}$$

Primul tensor Piola–Kirchhoff transformă astfel o normală materială N în forţa actuală pe unitatea de arie de referinţă. Primul său indice este spaţial, iar al doilea material. Tocmai această natură mixtă face ca P să nu fie, în general, simetric.

4.3 Al doilea tensor Piola–Kirchhoff şi tensiunea Kirchhoff

Primul tensor Piola–Kirchhoff a fost obţinut din transformarea tracţiunilor în secţiunea precedentă. Pornind de la el, definim al doilea tensor Piola–Kirchhoff prin

$$S := F^{-1}P.$$

Înlocuind expresia lui P dedusă mai sus, rezultă

$$S = JF^{-1}(\sigma \circ \varphi)F^{-T}.$$

Dacă tensorul Cauchy este simetric, atunci şi S este simetric. Această proprietate va fi verificată explicit mai jos, după transportul ecuaţiilor de bilanţ.

Mai folosim tensiunea Kirchhoff

$$\tau := J(\sigma \circ \varphi).$$

Cu această notaţie, relaţiile dintre cei trei tensori se scriu

$$P = \tau F^{-T}, \qquad S = F^{-1}\tau F^{-T}.$$

4.4 Ecuaţia de mişcare în configuraţia materială şi transformarea divergenţei

Pentru a transporta ecuaţia spaţială în configuraţia de referinţă trebuie să demonstrăm identitatea Piola şi transformarea divergenţei.

Păstrăm convenţia din prefaţă:

$$(\operatorname{Div} P)_i = \partial_{X_J} P_{iJ}, \qquad (\operatorname{div} \sigma)_i = \partial_{x_j} \sigma_{ij}.$$

Astfel $(PN)_i = P_{iJ}N_J$. Formula Levi–Civita pentru $\operatorname{Cof} \nabla\varphi$ folosită mai jos este cea demonstrată în Capitolul 1.

Propoziţia 4.4.1 (identitatea Piola pentru cofactor)**.** *Dacă $\varphi \in C^2(\Omega;\mathbb{R}^3)$ şi $F = \nabla\varphi$, atunci*

$$\operatorname{Div}(\operatorname{Cof} F) = 0.$$

Demonstraţie. În dimensiunea trei,

$$(\operatorname{Cof} F)_{iJ} = \frac{1}{2}\varepsilon_{iab}\varepsilon_{JKL}\,\partial_K\varphi_a\,\partial_L\varphi_b.$$

Derivând după X_J şi sumând în J,

$$(\operatorname{Div}\operatorname{Cof} F)_i = \frac{1}{2}\varepsilon_{iab}\varepsilon_{JKL}\left(\partial_J\partial_K\varphi_a\,\partial_L\varphi_b + \partial_K\varphi_a\,\partial_J\partial_L\varphi_b\right).$$

Primul produs se anulează deoarece $\partial_J\partial_K\varphi_a$ este simetric în J, K, iar ε_{JKL} este antisimetric în aceiaşi indici. Al doilea se anulează identic, acum prin simetria în J, L. Deci $\operatorname{Div}(\operatorname{Cof}\nabla\varphi) = 0$. □

Observaţia 4.4.2. Ipoteza C^2 permite demonstraţia clasică prin egalitatea derivatelor mixte. Identitatea lui Piola are însă şi o formă distribuţională pentru aplicaţii Sobolev suficient de regulate; aceasta va fi formulată şi folosită riguros în Capitolele 12–14, când discutăm minorii gradientului.

Pentru $P = J(\sigma\circ\varphi)F^{-T} = (\sigma\circ\varphi)\operatorname{Cof} F$, calculăm în componente

$$P_{iJ} = (\sigma_{ij}\circ\varphi)(\operatorname{Cof} F)_{jJ}.$$

Prin regula produsului,

$$\partial_J P_{iJ} = \partial_J(\sigma_{ij}\circ\varphi)(\operatorname{Cof} F)_{jJ} + (\sigma_{ij}\circ\varphi)\partial_J(\operatorname{Cof} F)_{jJ}.$$

Al doilea termen este zero prin Propoziţia 4.4.1. Pentru primul, regula lanţului dă

$$\partial_J(\sigma_{ij}\circ\varphi) = (\partial_k\sigma_{ij})\circ\varphi\, F_{kJ}.$$

Cum identitatea Cramer se scrie $F_{kJ}(\operatorname{Cof} F)_{jJ} = J\delta_{kj}$, rezultă

$$\partial_J P_{iJ} = J(\partial_j\sigma_{ij})\circ\varphi.$$

Prin urmare

$$\boxed{\operatorname{Div} P = J(\operatorname{div}\sigma)\circ\varphi.}$$

Dacă $B = b\circ\varphi$ şi $f_0 = \rho_0 B$, atunci din $\rho J = \rho_0$ şi din ecuaţia spaţială $\rho a = \operatorname{div}\sigma + \rho b$ obţinem

$$\boxed{\rho_0\ddot{\varphi} = \operatorname{Div} P + f_0 = \operatorname{Div} P + \rho_0 B.}$$

4.4.1 Simetria tensorilor Piola–Kirchhoff

Chiar dacă $\sigma = \sigma^T$, produsul $P = J\sigma F^{-T}$ nu este în general simetric. Cei doi indici ai lui P aparţin unor configuraţii diferite: primul este spaţial, al doilea material. În schimb

$$S = F^{-1}P = JF^{-1}\sigma F^{-T}$$

este simetric, deoarece

$$S^T = JF^{-1}\sigma^T F^{-T} = S.$$

În plus, forma materială a principiului momentului cinetic se obţine imediat din $PF^T = J\sigma$:

$$\boxed{PF^T = FP^T}.$$

Într-adevăr, $PF^T = J\sigma$ este simetric dacă şi numai dacă $PF^T = (PF^T)^T = FP^T$. Aceasta este expresia referenţială a aceleiaşi condiţii $\sigma = \sigma^T$.

4.4.2 Condiţii la frontieră şi transformarea tracţiunilor

Scriem

$$\partial\Omega = \overline{\Gamma_D} \cup \overline{\Gamma_N}, \qquad \Gamma_D \cap \Gamma_N = \varnothing$$

în sensul interioarelor relative. Dacă pe Γ_N este prescrisă tracţiunea nominală t_0, condiţia materială este

$$PN = t_0.$$

Pe suprafaţa actuală corespunzătoare, tracţiunea Cauchy este $t = \sigma n$. Din transformarea tracţiunii dedusă la începutul capitolului avem direct

$$PN\, dA = t\, da.$$

Folosind forma vectorială a formulei lui Nanson din Capitolul 1, aceeaşi relaţie poate fi scrisă

$$PN = \sigma(\operatorname{Cof} F\, N).$$

Factorul da/dA şi normala n sunt cele deduse în Secţiunea 1.6.3.

Un caz important este presiunea actuală $t = -\pi n$. Atunci

$$PN = -\pi \operatorname{Cof} F\, N.$$

Aceasta este o *încărcare urmăritoare*: în configuraţia de referinţă depinde de deformarea necunoscută prin F. O încărcare moartă nominală $PN = \bar{t}_0(X)$ este, în schimb, prescrisă independent de φ.

4.5 Puterea internă şi perechile conjugate

Pe unitatea de volum actual, densitatea puterii interne este

$$\langle \sigma, L \rangle, \qquad L = \nabla_x v.$$

Deoarece σ este simetrică, numai partea simetrică a lui L contribuie. Scriem

$$L = D + W, \qquad D = \operatorname{sym} L, \qquad W = \operatorname{skew} L.$$

Pentru o matrice simetrică S şi una antisimetrică A avem

$$\langle S, A\rangle = \operatorname{tr}(S^T A) = \operatorname{tr}(SA) = \operatorname{tr}((SA)^T) = \operatorname{tr}(A^T S^T) = -\operatorname{tr}(AS) = -\operatorname{tr}(SA),$$

unde am folosit ciclicitatea urmei. Prin urmare $\langle S, A\rangle = 0$. Aplicat la $S = \sigma$ şi $A = W$, rezultă

$$\langle \sigma, L\rangle = \langle \sigma, D\rangle.$$

Pentru a exprima aceeaşi putere pe unitatea de volum de referinţă, folosim $dx = J\,dX$. Densitatea referenţială este deci

$$J\langle \sigma, L\rangle.$$

Cum $P = J\sigma F^{-T}$ şi $L = \dot{F}F^{-1}$, calculăm

$$\begin{aligned}
\langle P, \dot{F}\rangle &= J\langle \sigma F^{-T}, \dot{F}\rangle \\
&= J\operatorname{tr}\Big((\sigma F^{-T})^T \dot{F}\Big) \\
&= J\operatorname{tr}\Big(F^{-1}\sigma^T \dot{F}\Big) \\
&= J\operatorname{tr}\Big(\sigma \dot{F} F^{-1}\Big) \\
&= J\langle \sigma, L\rangle,
\end{aligned}$$

unde, la a treia egalitate, am folosit $\sigma^T = \sigma$, iar la următoarea ciclicitatea urmei. Astfel

$$\boxed{\langle P, \dot{F}\rangle = J\langle \sigma, L\rangle = J\langle \sigma, D\rangle.}$$

Mai rămâne să legăm această expresie de al doilea tensor Piola–Kirchhoff. Pentru

$$E = \frac{1}{2}(F^T F - I)$$

avem

$$\dot{E} = \frac{1}{2}(\dot{F}^T F + F^T \dot{F}) = \operatorname{sym}(F^T \dot{F}).$$

Deoarece $S = S^T$,

$$\langle S, \dot{E}\rangle = \langle S, F^T \dot{F}\rangle.$$

Pentru a vedea ultima egalitate fără a omite un pas, observăm că

$$F^T \dot{F} = \operatorname{sym}(F^T \dot{F}) + \operatorname{skew}(F^T \dot{F}),$$

iar produsul scalar dintre S simetric şi partea antisimetrică este zero. Apoi

$$\langle S, F^T \dot{F}\rangle = \operatorname{tr}(SF^T \dot{F}) = \operatorname{tr}((FS)^T \dot{F}) = \langle FS, \dot{F}\rangle.$$

Cum $P = FS$, rezultă

$$\boxed{\langle \tau, D\rangle = \langle P, \dot{F}\rangle = \langle S, \dot{E}\rangle}, \qquad \tau := J\sigma.$$

Acestea sunt trei scrieri ale aceleiaşi densităţi de putere pe unitatea de volum de referinţă. Perechile conjugate sunt (τ, D), $(P, \dot{F})$ şi $(S, \dot{E})$.

4.6 Principiul lucrului virtual

O viteză virtuală materială $\eta(X)$ produce în configuraţia actuală câmpul $w(x) = \eta(\varphi^{-1}(x))$. Lucrul virtual intern în configuraţia de referinţă este $\int_\Omega \langle P, \nabla_X \eta\rangle \, dX$. Integrarea prin părţi dă

$$\int_\Omega \langle P, \nabla\eta\rangle = -\int_\Omega \langle \operatorname{Div} P, \eta\rangle \, dX + \int_{\partial\Omega} \langle PN, \eta\rangle \, dA.$$

Dacă ecuaţia de echilibru este $-\operatorname{Div} P = f_0$ şi condiţia naturală $PN = t_0$ pe Γ_N, atunci această expresie este egală cu lucrul forţelor exterioare. Reciproc, dacă identitatea de lucru virtual este valabilă pentru toate testele care se anulează pe Γ_D, alegând mai întâi teste cu suport compact obţinem ecuaţia în interior, iar apoi testele cu urmă arbitrară pe Γ_N identifică tracţiunea naturală. Forma slabă şi forma tare sunt astfel două expresii ale aceleiaşi legi, nu două modele diferite.

În capitolul următor vom vedea că, atunci când tensiunea derivă dintr-o energie stocată, aceeaşi identitate se obţine prin derivarea energiei totale. Pentru moment o folosim numai ca formulare a echilibrului virtual.

4.7 Deducerea principiilor din invarianta lucrului

Pentru a vedea separat rolul translaţiilor şi al rotaţiilor rigide, considerăm o parte materială aflată la momentul curent în regiunea P_t şi scriem puterea forţelor exterioare sub forma

$$\mathcal{P}_{\text{ext}}(w) = \int_{P_t} \langle f, w\rangle \, dx + \int_{\partial P_t} \langle t, w\rangle \, da.$$

Pentru o mişcare virtuală rigidă, gradientul lui w este antisimetric. Orice asemenea câmp poate fi scris

$$w(x) = c + Wx, \qquad c \in \mathbb{R}^3, \qquad W^T = -W.$$

Matricei antisimetice W îi corespunde un vector $\omega \in \mathbb{R}^3$ astfel încât

$$Wx = \omega \times x.$$

Prin urmare putem analiza independent partea de translaţie c şi partea de rotaţie $\omega \times x$.

Pentru o translaţie virtuală, $w = c$, avem

$$\mathcal{P}_{\text{ext}}(c) = \left\langle \int_{P_t} f \, dx + \int_{\partial P_t} t \, da, \; c \right\rangle.$$

Termenul de inerţie corespunzător este

$$\int_{P_t} \langle \rho a, c\rangle \, dx = \left\langle \int_{P_t} \rho a \, dx, c \right\rangle.$$

Dacă identitatea de putere este valabilă pentru orice vector constant c, rezultă

$$\boxed{\int_{P_t} \rho a \, dx = \int_{P_t} f \, dx + \int_{\partial P_t} t \, da.}$$

Aceasta este forma globală a bilanţului impulsului. Nu am ales o direcţie particulară: egalitatea vectorială rezultă tocmai din arbitrarietatea lui c.

Luăm acum o rotaţie virtuală, $w(x) = \omega \times x$. Folosind identitatea

$$\langle y, \omega \times x \rangle = \langle \omega, x \times y \rangle,$$

obţinem

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_{\text{ext}}(\omega \times x) &= \left\langle \omega, \int_{P_t} x \times f \, dx + \int_{\partial P_t} x \times t \, da \right\rangle, \\ \int_{P_t} \langle \rho a, \omega \times x \rangle \, dx &= \left\langle \omega, \int_{P_t} x \times (\rho a) \, dx \right\rangle. \end{aligned}$$

Egalitatea pentru orice $\omega \in \mathbb{R}^3$ dă

$$\boxed{\int_{P_t} x \times (\rho a) \, dx = \int_{P_t} x \times f \, dx + \int_{\partial P_t} x \times t \, da.}$$

Aceasta este forma globală a bilanţului momentului cinetic. Calculul arată explicit de ce translaţiile rigide selectează rezultanta forţelor, iar rotaţiile rigide selectează momentul lor. Formele locale din Capitolul 3 se obţin apoi prin localizare, sub ipotezele de regularitate folosite acolo.

4.8 Exemple pentru tensorii Piola–Kirchhoff

4.8.1 Exemplu: extensie uniaxială

Fie

$$F = \operatorname{diag}(\lambda, \lambda_t, \lambda_t), \qquad \sigma = \operatorname{diag}(\sigma_1, \sigma_t, \sigma_t).$$

Atunci

$$P = J\sigma F^{-T} = \operatorname{diag}(\lambda_t^2 \sigma_1, \lambda\lambda_t\sigma_t, \lambda\lambda_t\sigma_t).$$

În această stare omogenă, prima componentă P_{11} este forţa axială raportată la aria iniţială, în timp ce σ_1 este aceeaşi forţă raportată la aria actuală. Într-adevăr, aria transversală se transformă prin factorul λ_t^2, deci

$$P_{11} = \frac{F_{\text{axial}}}{A_0} = \frac{F_{\text{axial}}}{A}\frac{A}{A_0} = \sigma_1 \lambda_t^2.$$

Această identitate simplă oferă interpretarea experimentală a diferenţei dintre tensiunea Cauchy şi tensiunea nominală.

4.8.2 Forfecare simplă şi simetria lui S

Pentru

$$F = I + \gamma e_1 \otimes e_2 = \begin{pmatrix} 1 & \gamma & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad J = 1,$$

şi

$$\sigma = \begin{pmatrix} \sigma_{11} & \tau & 0 \\ \tau & \sigma_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{33} \end{pmatrix},$$

avem

$$F^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -\gamma & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad F^{-T} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\gamma & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Prin urmare

$$P = \sigma F^{-T} = \begin{pmatrix} \sigma_{11} - \gamma\tau & \tau & 0 \\ \tau - \gamma\sigma_{22} & \sigma_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{33} \end{pmatrix},$$

care nu este în general simetric. În schimb

$$S = F^{-1}P = \begin{pmatrix} \sigma_{11} - 2\gamma\tau + \gamma^2\sigma_{22} & \tau - \gamma\sigma_{22} & 0 \\ \tau - \gamma\sigma_{22} & \sigma_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{33} \end{pmatrix},$$

care este simetric. Simetria nu este accidentală: $S = JF^{-1}\sigma F^{-T}$ este o congruenţă a tensorului simetric σ.

4.9 Probleme pentru seminar

1. Pentru $F = \operatorname{diag}(2, 1, 1/2)$ şi $N = (1, 1, 0)/\sqrt{2}$, calculaţi n şi raportul da/dA şi interpretaţi rotaţia normalei.
2. Un corp incompresibil este supus unei presiuni uniforme actuale $\pi > 0$. Arătaţi că încărcarea nominală satisface $PN = -\pi \operatorname{Cof} F\, N$ şi explicaţi de ce este o încărcare urmăritoare, nu una moartă.
3. Pentru o dilatare $F = \lambda I$, exprimaţi P şi S în funcţie de σ.
4. Verificaţi identitatea Piola pentru $\varphi(X) = (X_1 + X_2X_3, X_2, X_3)$.
5. Pornind de la $PF^T = FP^T$, deduceţi simetria lui $S = F^{-1}P$.
6. Deduceţi forma slabă din ecuaţia $-\operatorname{Div} P = f_0$ şi condiţia Neumann.

4.10 Exerciţii rezolvate

Problema 4.10.1 (formula lui Nanson pentru o întindere diagonală)**.** Fie $F = \operatorname{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$. Pentru o suprafaţă materială cu normala $N = e_1$, determinaţi vectorul de arie actual $n\,da$ în funcţie de dA.

Rezolvare. Formula lui Nanson este

$$n\,da = \operatorname{Cof} F\, N\, dA.$$

Pentru o matrice diagonală,

$$\operatorname{Cof} F = \operatorname{diag}(\lambda_2\lambda_3, \lambda_1\lambda_3, \lambda_1\lambda_2).$$

Deci

$$n\,da = \lambda_2\lambda_3 e_1\, dA.$$

Aria unei feţe normale la e_1 se multiplică exact cu întinderile din cele două direcţii tangente.

Problema 4.10.2 (prima tensiune Piola–Kirchhoff)**.** Dacă $F = \operatorname{diag}(2, 1, 1)$ şi $\sigma = qI$, unde q este scalar, calculaţi

$$P = J\sigma F^{-T}.$$

Rezolvare. Avem $J = 2$ şi

$$F^{-T} = \operatorname{diag}(1/2, 1, 1).$$

Prin urmare

$$P = 2q\ \operatorname{diag}(1/2, 1, 1) = q\operatorname{diag}(1, 2, 2).$$

Deşi σ este sferic, P nu mai este sferic deoarece măsoară forţa actuală raportată la aria de referinţă.

Problema 4.10.3 (a doua tensiune Piola–Kirchhoff)**.** Arătaţi că

$$S = F^{-1}P = JF^{-1}\sigma F^{-T}.$$

De ce este S simetric dacă σ este simetric?

Rezolvare. Înlocuim $P = J\sigma F^{-T}$:

$$S = F^{-1}(J\sigma F^{-T}) = JF^{-1}\sigma F^{-T}.$$

Transpunând,

$$S^T = J(F^{-T})^T\sigma^T(F^{-1})^T = JF^{-1}\sigma F^{-T} = S.$$

Am folosit $\sigma^T = \sigma$.

Problema 4.10.4 (reconstrucţia tensiunii Cauchy)**.** Pornind de la S, demonstraţi formula

$$\sigma = J^{-1}FSF^T.$$

Rezolvare. Din $S = JF^{-1}\sigma F^{-T}$, înmulţim la stânga cu F şi la dreapta cu F^T:

$$FSF^T = J\sigma.$$

Împărţind prin $J > 0$ rezultă formula.

Problema 4.10.5 (identitatea lui Piola în cazul afin)**.** Dacă $\varphi(X) = FX + b$ cu F constant, verificaţi direct că

$$\mathrm{Div}(\mathrm{Cof}\, F) = 0.$$

Rezolvare. Matricea $\mathrm{Cof}\, F$ este constantă în X. Prin urmare fiecare derivată în raport cu variabila materială X a componentelor sale este zero şi

$$(\mathrm{Div}\,\mathrm{Cof}\, F)_i = \sum_J \partial_{X_J}(\mathrm{Cof}\, F)_{iJ} = 0.$$

Problema 4.10.6 (conjugarea energetică $\langle P, \dot{F}\rangle$)**.** Pentru o mişcare netedă, arătaţi că

$$\langle P, \dot{F}\rangle = J\langle \sigma, L\rangle, \qquad L = \nabla_x v.$$

Rezolvare. Din capitolul 1, $\dot{F} = LF$. Folosind $P = J\sigma F^{-T}$,

$$\langle P, \dot{F}\rangle = J\langle \sigma F^{-T}, LF\rangle.$$

Cu identitatea $\langle A, B\rangle = \mathrm{tr}(A^T B)$,

$$\langle \sigma F^{-T}, LF\rangle = \mathrm{tr}(F^{-1}\sigma^T LF).$$

Cum $\sigma^T = \sigma$ şi urma este ciclică,

$$\mathrm{tr}(F^{-1}\sigma LF) = \mathrm{tr}(\sigma LFF^{-1}) = \mathrm{tr}(\sigma L) = \langle \sigma, L\rangle.$$

Rezultă formula dorită.

Problema 4.10.7 (conjugarea energetică $\langle S, \dot{E}\rangle$)**.** Fie $E = \frac{1}{2}(F^T F - I)$. Arătaţi că

$$\langle S, \dot{E}\rangle = \langle P, \dot{F}\rangle$$

când $P = FS$ şi $S = S^T$.

Rezolvare. Derivăm

$$\dot{E} = \frac{1}{2}(\dot{F}^T F + F^T \dot{F}).$$

Atunci

$$\langle S, \dot{E}\rangle = \frac{1}{2}\langle S, \dot{F}^T F\rangle + \frac{1}{2}\langle S, F^T \dot{F}\rangle.$$

Pentru primul termen,

$$\langle S, \dot{F}^T F\rangle = \mathrm{tr}(S^T \dot{F}^T F) = \mathrm{tr}(S\dot{F}^T F)$$

$$= \operatorname{tr}\left((S\dot{F}^T F)^T\right) = \operatorname{tr}(F^T \dot{F} S^T)$$
$$= \operatorname{tr}(SF^T\dot{F}) = \langle S, F^T\dot{F}\rangle,$$

unde am folosit $S^T = S$ şi ciclicitatea urmei. Prin urmare cei doi termeni din $\langle S, \dot{E}\rangle$ sunt egali şi

$$\langle S, \dot{E}\rangle = \langle S, F^T\dot{F}\rangle = \langle FS, \dot{F}\rangle = \langle P, \dot{F}\rangle.$$

Rezultă astfel relaţia de conjugare energetică dintre S şi E.

Problema 4.10.8 (transformarea ecuaţiei de echilibru)**.** Presupuneţi relaţia

$$\operatorname{Div} P = J(\operatorname{div}\sigma)\circ\varphi.$$

Arătaţi cum ecuaţia eulerianǎ statică $\operatorname{div}\sigma + \rho b = 0$ se transformă în configuraţia de referinţă.

Rezolvare. Compunem cu φ şi înmulţim cu J:

$$J(\operatorname{div}\sigma)\circ\varphi + J(\rho b)\circ\varphi = 0.$$

Primul termen este $\operatorname{Div} P$. Din conservarea masei,

$$J\rho\circ\varphi = \rho_0.$$

Dacă $B(X) = b(\varphi(X))$, rezultă

$$\boxed{\operatorname{Div} P + \rho_0 B = 0.}$$

Problema 4.10.9 (Nanson pentru o normală oblică)**.** Fie

$$F = \operatorname{diag}(2,1,1/2), \qquad N = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,1,0).$$

Determinaţi raportul da/dA şi normala actuală n.

Rezolvare. Avem $J = 1$ şi

$$\operatorname{Cof} F = JF^{-T} = \operatorname{diag}(1/2,1,2).$$

Formula lui Nanson dă

$$\operatorname{Cof} F\, N = \frac{1}{\sqrt{2}}(1/2,1,0).$$

Prin urmare

$$\frac{da}{dA} = \|\operatorname{Cof} F\, N\| = \sqrt{\frac{1}{8}+\frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{5}}{2\sqrt{2}},$$

iar

$$n = \frac{\operatorname{Cof} F\, N}{\|\operatorname{Cof} F\, N\|} = \frac{1}{\sqrt{5}}(1,2,0).$$

Exemplul arată că Nanson transformă simultan aria şi direcţia normalei.

Problema 4.10.10 (calcul numeric pentru P, S şi τ)**.** Fie

$$F = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \sigma = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

Calculaţi J, $\tau = J\sigma$, $P = J\sigma F^{-T}$ şi $S = F^{-1}P$. Verificaţi că $PF^T = \tau$ şi că S este simetric.

Rezolvare. Avem

$$J = 2, \qquad F^{-1} = \begin{pmatrix} 1/2 & -1/2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad F^{-T} = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 0 \\ -1/2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Deci

$$\tau = 2\sigma = \begin{pmatrix} 6 & 2 & 0 \\ 2 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{pmatrix},$$

$$P = \tau F^{-T} = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ -1 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{pmatrix},$$

şi

$$S = F^{-1}P = \begin{pmatrix} 3/2 & -1 & 0 \\ -1 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{pmatrix}.$$

Într-adevăr,

$$PF^T = \begin{pmatrix} 6 & 2 & 0 \\ 2 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{pmatrix} = \tau,$$

iar $S = S^T$.

4.11 Exerciţii propuse suplimentare

Nivelul A

4.A.1 *(formula lui Nanson: arie şi normală deformate)* Fie deformarea omogenă cu $F = \operatorname{diag}(2,3,1)$, $J = \det F > 0$, şi o suprafaţă materială plană cu normala unitară

$$N = \frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,1)$$

şi arie dA. Calculaţi vectorul-arie deformat $n\,da$, raportul da/dA şi normala unitară deformată n.
Indicaţie. $n\,da = JF^{-T}N\,dA = \operatorname{Cof} F\,N\,dA$ (§ 4.2.2); apoi $da/dA = \left\|JF^{-T}N\right\|$, iar n se obţine prin normalizare.
Răspuns. $J = 6$ şi

$$JF^{-T}N = \frac{1}{\sqrt{3}}(3,2,6),$$

deci

$$\frac{da}{dA} = \frac{7}{\sqrt{3}} \approx 4.041, \qquad n = \frac{1}{7}(3,2,6).$$

Observaţi că $n \neq N$: deformarea roteşte normala, chiar dacă F este diagonal; normala nu se transformă cu F, ci cu F^{-T}.

4.A.2 *(cei trei tensori de tensiune pentru o întindere izocoră)* Fie

$$F = \operatorname{diag}\left(3,1,\frac{1}{3}\right), \qquad \sigma = \operatorname{diag}(9,0,0) \quad [\text{MPa}].$$

Calculaţi J, $\tau = J\sigma$, $P = J\sigma F^{-T}$ şi $S = F^{-1}P$; verificaţi $P = FS$, $\tau = PF^T$ şi simetria lui S.
Indicaţie. § 4.3; pentru tensori diagonali toate produsele sunt diagonale.
Răspuns.

$$J = 1, \qquad \tau = \operatorname{diag}(9,0,0), \qquad P = \operatorname{diag}(3,0,0), \qquad S = \operatorname{diag}(1,0,0) \quad [\text{MPa}].$$

Se verifică $FS = P$, $PF^T = \tau$; S este simetric, ca şi σ.

4.A.3 *(verificarea identităţii lui Piola pe un exemplu neafin)* Fie

$$\varphi(X) = (X_1 + X_3^2,\ X_2 + X_1^2,\ X_3), \qquad \varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^3;\mathbb{R}^3).$$

Calculaţi F, J, $\operatorname{Cof} F$ şi verificaţi prin calcul direct identitatea lui Piola

$$\operatorname{Div}(\operatorname{Cof} \nabla\varphi) = 0.$$

Indicaţie. Propoziţia 4.6.1; $(\operatorname{Div} A)_i = \partial_{X_J} A_{iJ}$, iar pentru $J = 1$ avem $\operatorname{Cof} F = F^{-T}$.

Răspuns.

$$F = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2X_3 \\ 2X_1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad J = 1,$$

$$\operatorname{Cof} F = F^{-T} = \begin{pmatrix} 1 & -2X_1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2X_3 & 4X_1X_3 & 1 \end{pmatrix}.$$

Prin urmare

$$\operatorname{Div}(\operatorname{Cof} F) = \Big(\partial_1 1 + \partial_2(-2X_1) + \partial_3 0,\ 0,\ \partial_1(-2X_3) + \partial_2(4X_1X_3) + \partial_3 1\Big) = 0.$$

Nivelul B

4.B.1 *(identitatea* $\operatorname{Div} P = J(\operatorname{div}\sigma)\circ\varphi$ *pe un exemplu)* Fie deformarea omogenă $\varphi(X) = (2X_1, 3X_2, X_3)$ şi câmpul spaţial de tensiuni

$$\sigma(x) = c\, x_1 e_1 \otimes e_1, \qquad c > 0.$$

(a) Calculaţi F, J şi $\operatorname{div}_x \sigma$. (b) Calculaţi transformata Piola $P(X) = J\sigma(\varphi(X))F^{-T}$ şi $\operatorname{Div}_X P$. (c) Verificaţi identitatea $\operatorname{Div} P = J(\operatorname{div}\sigma)\circ\varphi$ şi explicaţi de ce ecuaţia de mişcare materială şi cea spaţială sunt echivalente.
Indicaţie. § 4.7–4.8; atenţie la compunere: $x_1 = 2X_1$.
Răspuns.

$$F = \operatorname{diag}(2,3,1), \qquad J = 6, \qquad \operatorname{div}\sigma = (c,0,0).$$

Deoarece $x_1 = 2X_1$,

$$P = \operatorname{diag}(6cX_1, 0, 0), \qquad \operatorname{Div} P = (6c, 0, 0),$$

iar

$$J(\operatorname{div}\sigma)\circ\varphi = 6(c,0,0).$$

Ecuaţiile $\operatorname{div}\sigma + \rho b = \rho a$ şi $\operatorname{Div} P + \rho_0 b_0 = \rho_0 A$ sunt aceeaşi lege scrisă în două configuraţii, cu $\rho_0 = \rho J$.

4.B.2 *(forfecare simplă:* P *nesimetric,* S *şi* τ *simetrice)* Fie

$$F = I + \gamma e_1 \otimes e_2, \qquad \gamma = 2,$$

şi $\sigma = \operatorname{diag}(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$, cu σ_i constante. (a) Calculaţi J, F^{-1}, F^{-T}. (b) Calculaţi P, S, τ în funcţie de σ_i şi γ; arătaţi că P nu este simetric, în timp ce S şi $\tau = PF^T$ sunt simetrice. (c) Particularizaţi pentru $\sigma = \operatorname{diag}(1,2,3)$ MPa.
Indicaţie. § 4.3 şi § 4.8.1: P amestecă o normală materială cu o forţă spaţială; simetria lui $PF^T = J\sigma$ este consecinţa bilanţului momentului cinetic.

Răspuns.

$$J = 1, \qquad F^{-1} = I - \gamma e_1 \otimes e_2, \qquad F^{-T} = I - \gamma e_2 \otimes e_1.$$

$$P = \sigma F^{-T} = \sigma - \gamma \sigma_2 e_2 \otimes e_1,$$

deci $P_{21} = -\gamma\sigma_2 \neq 0 = P_{12}$. Mai mult,

$$\tau = PF^T = \sigma,$$

$$S = F^{-1}P = \sigma - \gamma\sigma_2(e_1 \otimes e_2 + e_2 \otimes e_1) + \gamma^2\sigma_2 e_1 \otimes e_1.$$

Pentru $\sigma = \operatorname{diag}(1,2,3)$ şi $\gamma = 2$,

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -4 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}, \qquad S = \begin{pmatrix} 9 & -4 & 0 \\ -4 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}, \qquad \tau = \operatorname{diag}(1,2,3).$$

4.B.3 *(cele trei perechi energetic conjugate, verificate pe o întindere)* Fie mişcarea

$$\varphi(X,t) = \operatorname{diag}(\lambda(t),1,1)X, \qquad \lambda(t) > 0, \quad \dot\lambda > 0,$$

şi tensiunea Cauchy $\sigma = se_1 \otimes e_1$, $s > 0$ constant.

(a) Calculaţi $F, \dot F, J, L = \dot F F^{-1}, E, \dot E$.

(b) Calculaţi P, S, apoi cele trei densităţi de putere $J\langle\sigma, L\rangle$, $\langle P, \dot F\rangle$, $\langle S, \dot E\rangle$ şi arătaţi că sunt egale.

(c) Demonstraţi identitatea generală

$$J\langle\sigma, L\rangle = \langle P, \dot F\rangle = \langle S, \dot E\rangle,$$

precizând unde se foloseşte simetria lui σ.

Indicaţie. Folosiţi secţiunea despre puterea internă şi identităţile

$$\langle AB, C\rangle = \langle A, CB^T\rangle,$$

$$\langle S, F^T\dot F\rangle = \langle S, \operatorname{sym}(F^T\dot F)\rangle = \langle S, \dot E\rangle.$$

Răspuns.

$$F = \operatorname{diag}(\lambda,1,1), \quad \dot F = \operatorname{diag}(\dot\lambda,0,0), \quad J = \lambda, \quad L = \operatorname{diag}\left(\frac{\dot\lambda}{\lambda},0,0\right),$$

$$E = \frac{1}{2}\operatorname{diag}(\lambda^2 - 1,0,0), \qquad \dot E = \operatorname{diag}(\lambda\dot\lambda,0,0).$$

$$P = \operatorname{diag}(s,0,0), \qquad S = \operatorname{diag}\left(\frac{s}{\lambda},0,0\right),$$

$$J\langle\sigma, L\rangle = \lambda s\frac{\dot\lambda}{\lambda} = s\dot\lambda, \qquad \langle P, \dot F\rangle = s\dot\lambda, \qquad \langle S, \dot E\rangle = \frac{s}{\lambda}\lambda\dot\lambda = s\dot\lambda.$$

În general,

$$\langle P, \dot{F}\rangle = \langle J\sigma F^{-T}, \dot{F}\rangle = \langle J\sigma, \dot{F}F^{-1}\rangle = J\langle \sigma, L\rangle,$$

iar

$$\langle P, \dot{F}\rangle = \langle FS, \dot{F}\rangle = \langle S, F^T\dot{F}\rangle = \langle S, \dot{E}\rangle,$$

ultima egalitate folosind simetria lui S, echivalentă cu simetria lui σ.

Nivelul C

4.C.1 *(forfecare simplă: Nanson, cei trei tensori, egalitatea forţelor)* Fie

$$F = I + \gamma e_1 \otimes e_2, \qquad \gamma = \frac{1}{2},$$

şi starea de tensiune Cauchy

$$\sigma = \tau_0(e_1 \otimes e_2 + e_2 \otimes e_1), \qquad \tau_0 = 4\,\mathrm{MPa}.$$

(a) Calculaţi $J, \operatorname{Cof} F$; pentru faţa materială de normală $N = e_1$ şi arie $dA = 1$, determinaţi $n\,da$, raportul da/dA şi normala deformată n. Comparaţi cu cazul $N = e_2$. (b) Calculaţi P, S, τ; verificaţi că $\tau = PF^T$ şi S sunt simetrice. (c) Calculaţi forţa de contact pe faţa din (a), în ambele configuraţii: $df = PN\,dA$ şi $df = \sigma n\,da$.
Indicaţie. § 4.2.2–4.3; pentru forfecare simplă $J = 1$ şi $\operatorname{Cof} F = F^{-T} = I - \gamma e_2 \otimes e_1$.
Răspuns.

$$J = 1, \qquad \operatorname{Cof} F = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1/2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Pentru $N = e_1$,

$$n\,da = (1, -1/2, 0), \qquad \frac{da}{dA} = \frac{\sqrt{5}}{2}, \qquad n = \frac{1}{\sqrt{5}}(2, -1, 0).$$

Pentru $N = e_2$, $n\,da = e_2$, deci aria şi normala nu se schimbă. Mai mult,

$$P = \begin{pmatrix} -2 & 4 & 0 \\ 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad S = \begin{pmatrix} -4 & 4 & 0 \\ 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\tau = PF^T = \begin{pmatrix} 0 & 4 & 0 \\ 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \sigma \quad [\mathrm{MPa}].$$

Pe faţa $N = e_1$,

$$PN\,dA = (-2, 4, 0)\,\mathrm{MPa\,m^2},$$

iar $\sigma n\,da$ dă acelaşi vector.

4.C.2 *(identitatea Piola şi transformarea divergenţei)* Fie $\varphi \in C^2(\Omega; \mathbb{R}^3)$ o deformare cu $J > 0$

şi T un câmp tensorial spaţial de clasă C^1 pe $\varphi(\Omega)$. (a) Demonstraţi identitatea lui Piola $\operatorname{Div}(\operatorname{Cof}\nabla\varphi)=0$, folosind scrierea cu simbolul Levi–Civita şi egalitatea derivatelor mixte. (b) Folosind (a) şi regula lanţului, demonstraţi că transformata Piola

$$P_T(X)=J(X)T(\varphi(X))F(X)^{-T}$$

satisface

$$\operatorname{Div}_X P_T = J(\operatorname{div}_x T)\circ\varphi.$$

(c) Aplicaţi (b) cu $T=\sigma$ şi deduceţi ecuaţia de mişcare în configuraţia de referinţă, precizând legătura dintre forţele de volum şi dintre densităţi.
Indicaţie. Propoziţia 4.6.1, § 4.7 şi § 4.8.5; pentru (c) folosiţi $\rho_0=\rho J$ (§ 1.10) şi $b_0=\rho_0 b\circ\varphi$.
Răspuns. (a)

$$(\operatorname{Cof}F)_{iJ}=\frac{1}{2}\varepsilon_{iab}\varepsilon_{JKL}\,\partial_K\varphi_a\,\partial_L\varphi_b.$$

La derivarea după X_J, derivatele secunde, simetrice în indicii de derivare, sunt contractate cu tensorul antisimetric ε_{JKL}, deci se anulează. (b)

$$\partial_J\Big(T_{ik}(\operatorname{Cof}F)_{kJ}\Big)=(\partial_{x_l}T_{ik})\,\partial_J\varphi_l\,(\operatorname{Cof}F)_{kJ}+T_{ik}\partial_J(\operatorname{Cof}F)_{kJ}.$$

Al doilea termen este zero, iar

$$\partial_J\varphi_l(\operatorname{Cof}F)_{kJ}=J\delta_{lk},$$

de unde $\operatorname{Div}P_T=J(\operatorname{div}T)\circ\varphi$. (c) Din $\operatorname{div}\sigma+\rho b=\rho a$, după multiplicare cu J şi compunere cu φ, rezultă

$$\operatorname{Div}P+\rho_0 b\circ\varphi=\rho_0\ddot{\varphi},\qquad \rho_0=\rho J.$$

4.C.3 *(încărcare cu presiune: sarcină de tip "follower")* Un corp elastic ocupă Ω (deschis, mărginit, conex, cu frontieră netedă) şi este supus unei presiuni exterioare uniforme $p>0$, astfel încât în configuraţia deformată $\sigma=-pI$ pe tot corpul. (a) Calculaţi P şi S în funcţie de p şi F. (b) Arătaţi că, pentru orice deformare $\varphi\in C^2$, $\operatorname{Div}P=0$ automat; ce forţă masică este necesară pentru echilibru? (c) Arătaţi că rezultanta forţelor de contact pe întreaga frontieră este nulă, $\int_{\partial\Omega}PN\,dA=0$, şi explicaţi de ce încărcarea cu presiune depinde de deformare, spre deosebire de o sarcină moartă $PN=t_0(X)$ dată. (d) Ilustraţi pentru

$$F=\begin{pmatrix}1 & 1/2 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 2\end{pmatrix},\qquad p=3,$$

calculând P.
Indicaţie. $P=J\sigma F^{-T}=-p\operatorname{Cof}F$; apoi Propoziţia 4.6.1 şi teorema divergenţei.
Răspuns.

$$P=-p\operatorname{Cof}F,\qquad S=F^{-1}P=-pJC^{-1}.$$

Din identitatea lui Piola, $\operatorname{Div}P=-p\operatorname{Div}(\operatorname{Cof}F)=0$, deci echilibrul static cere $b_0=0$. De

asemenea,

$$\int_{\partial\Omega} PN\, dA = \int_{\Omega} \operatorname{Div} P\, dX = 0.$$

Tracţiunea nominală $PN = -p \operatorname{Cof} F\, N$ depinde de F, deci de deformarea necunoscută. Pentru matricea din (d), $J = 2$ şi

$$\operatorname{Cof} F = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad P = \begin{pmatrix} -6 & 0 & 0 \\ 3 & -6 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}.$$

Capitolul 5

Materiale elastice, obiectivitate, izotropie şi hiperelasticitate

Surse şi orientare. Pentru obiectivitate, simetrii materiale, hiperelasticitate şi reprezentări izotrope folosim ca repere [3, 14, 10, 11].

5.1 Funcţii de răspuns şi legea constitutivă

Ecuaţiile de bilanţ conţin atât deformarea, cât şi tensiunea, deci nu determină singure evoluţia corpului. Pentru un material elastic simplu presupunem că tensiunea într-un punct material depinde de gradientul deformării din acel punct. În configuraţia de referinţă scriem

$$P(X) = \widehat{P}(X, F(X)), \qquad \widehat{P} : \overline{\Omega} \times GL^+(3) \longrightarrow \mathbb{R}^{3\times 3}.$$

Aceasta este legea constitutivă. Dacă $\widehat{P}$ nu depinde explicit de X, materialul este omogen în configuraţia de referinţă aleasă.

Relaţia

$$P = J\sigma F^{-T}$$

permite trecerea la o funcţie de răspuns pentru tensorul Cauchy, astfel încât nu este nevoie să introducem două legi constitutive independente pentru P şi σ.

Necesitatea unei legi constitutive poate fi citită din ecuaţia materială

$$\rho_0 \ddot{\varphi} = \operatorname{Div} P + \rho_0 B.$$

Dacă P ar fi o necunoscută independentă, cele trei ecuaţii de mişcare nu ar determina simultan cele trei componente ale lui φ şi cele nouă componente ale lui P. Relaţia

$$P = \widehat{P}(X, \nabla\varphi)$$

exprimă P prin deformare şi transformă bilanţul impulsului într-un sistem pentru φ.

5.1.1 Indiferenţa faţă de reper

Considerăm un al doilea observator obţinut printr-o mişcare rigidă dependentă de timp,

$$x^* = c(t) + Q(t)x, \qquad Q(t) \in SO(3).$$

La un timp fix, derivarea în raport cu coordonata materială X dă

$$F^* = \nabla_X \varphi^* = \nabla_X (c + Q\varphi) = Q\nabla_X \varphi = QF,$$

deoarece c şi Q nu depind de X. În plus $J^* = \det(QF) = \det Q \det F = J$.

Tensorul Cauchy reprezintă aceeaşi aplicaţie fizică între normale şi tracţiuni, dar exprimată în baze rotite. Dacă $n^* = Qn$ şi $t^* = Qt$, atunci din $t = \sigma n$ rezultă

$$t^* = Qt = Q\sigma n = Q\sigma Q^T n^*.$$

Cum această relaţie este valabilă pentru orice normală n^*, avem

$$\boxed{\sigma^* = Q\sigma Q^T.}$$

Pentru primul tensor Piola–Kirchhoff folosim $P = J\sigma F^{-T}$. Deoarece $(QF)^{-T} = QF^{-T}$, obţinem

$$P^* = J^*\sigma^*(F^*)^{-T} = J(Q\sigma Q^T)(QF^{-T}) = Q(J\sigma F^{-T}) = QP.$$

Aşadar legea constitutivă este compatibilă cu schimbarea observatorului numai dacă

$$\boxed{\widehat{P}(X, QF) = Q\widehat{P}(X, F)} \qquad (Q \in SO(3)).$$

Aceasta este forma pentru P a principiului indiferenţei faţă de reper; formulări echivalente pentru σ şi pentru energii se găsesc, de exemplu, în [3, 7, 14].

5.1.2 Dependenţa obiectivă a lui S de $C = F^T F$

Definim $S = F^{-1}P$. Folosind transformările $F^* = QF$ şi $P^* = QP$, calculăm fără a omite paşi:

$$S^* = (F^*)^{-1}P^* = (QF)^{-1}(QP) = F^{-1}Q^T QP = F^{-1}P = S.$$

Prin urmare S este invariant la superpunerea unei rotaţii rigide. Presupunem că $S = \widehat{S}(X, F)$ este o funcţie elastică de răspuns. Indiferenţa faţă de reper se scrie

$$\widehat{S}(X, QF) = \widehat{S}(X, F) \qquad (Q \in SO(3)).$$

Acum folosim descompunerea polară, introdusă şi demonstrată în Capitolul 2. Pentru orice $F \in GL^+(3)$ există unic $F = RU$, cu $R \in SO(3)$ şi $U = (F^T F)^{1/2} \in \mathrm{Sym}^+(3)$. Alegând $Q = R^T$ în relaţia precedentă,

$$\widehat{S}(X, F) = \widehat{S}(X, RU) = \widehat{S}(X, U).$$

Dar $U = C^{1/2}$, unde $C = F^T F$. Definind

$$\widetilde{S}(X, C) := \widehat{S}(X, C^{1/2}), \qquad C \in \mathrm{Sym}^+(3),$$

obţinem reprezentarea

$$\boxed{S = \widetilde{S}(X, C).}$$

Reciproc, orice lege de forma $S = \widetilde{S}(X, F^T F)$ este automat invariantă la rotaţii superpuse, deoarece $(QF)^T(QF) = F^T F$. Pentru o lege constitutivă materială obiectivă, dependenţa de

F se reduce deci la dependenţa de $C = F^T F$ [3, 14].

5.2 Hiperelasticitate şi obiectivitatea energiei

Până aici am discutat o funcţie de răspuns $P = \widehat{P}(X, F)$ fără a presupune că ea provine dintr-un potenţial. Spunem că materialul este *hiperelastic* dacă există o densitate de energie stocată

$$W : \overline{\Omega} \times GL^+(3) \to \mathbb{R}$$

diferenţiabilă în F, astfel încât

$$\boxed{P(X, F) = D_F W(X, F).}$$

Abia din acest punct folosim sistematic simbolul W ca energie. Pentru un material nehiperelastic, obiectivitatea şi izotropia se formulează direct pentru funcţia de răspuns, nu pentru un potenţial inexistent.

Pentru un material hiperelastic, indiferenţa faţă de reper se exprimă prin

$$W(QF) = W(F) \qquad \forall Q \in SO(3), \quad F \in GL^+(3).$$

Nu repetăm argumentul din subsecţiunea precedentă. Folosim direct descompunerea polară $F = RU$, cu $R \in SO(3)$ şi $U = (F^T F)^{1/2}$. Alegerea $Q = R^T$ în condiţia de obiectivitate dă

$$W(F) = W(RU) = W(U).$$

Cum $U = C^{1/2}$, valoarea energiei este determinată de $C = F^T F$. Definim aşadar

$$\Psi(C) := W(C^{1/2}), \qquad C \in \mathrm{Sym}^+(3),$$

şi obţinem

$$\boxed{W(F) = \Psi(C), \qquad C = F^T F.}$$

Reciproc, dacă $W(F) = \Psi(F^T F)$, atunci pentru orice $Q \in SO(3)$,

$$W(QF) = \Psi((QF)^T(QF)) = \Psi(F^T Q^T Q F) = \Psi(F^T F) = W(F),$$

deci reprezentarea prin C este echivalentă cu obiectivitatea energiei.

Presupunem de aici că W este diferenţiabilă. Pentru o variaţie H,

$$D(F \mapsto F^T F)(F)[H] = F^T H + H^T F.$$

Deoarece $D_C \Psi(C) \in \mathrm{Sym}(3)$, regula lanţului dă

$$\begin{aligned} DW(F)[H] &= \langle D_C \Psi(C), F^T H + H^T F \rangle \\ &= 2\langle D_C \Psi(C), F^T H \rangle \\ &= \langle 2F D_C \Psi(C), H \rangle. \end{aligned}$$

Cum $P = D_F W$, rezultă

$$\boxed{P = 2FD_C\Psi(C)}, \qquad \boxed{S = F^{-1}P = 2D_C\Psi(C)}.$$

Dacă folosim $E = (C - I)/2$ drept variabilă, atunci $C = I + 2E$ şi

$$D_E W(E)[K] = 2\langle D_C\Psi(C), K\rangle = \langle S, K\rangle,$$

deci

$$\boxed{S = D_E W(E).}$$

Aceasta explică formula de putere $\langle S, \dot{E}\rangle = \langle P, \dot{F}\rangle$ obţinută în Capitolul 4.

Obiectivitatea energiei mai implică simetria lui PF^T. Fie $A^T = -A$ şi $Q(t) = \exp(tA) \in SO(3)$. Deoarece $t \mapsto W(Q(t)F)$ este constantă,

$$0 = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} W(Q(t)F) = \langle P, AF\rangle = \langle PF^T, A\rangle.$$

Relaţia este valabilă pentru orice matrice antisimetrică A. Alegând $A = \operatorname{skew}(PF^T)$ obţinem

$$0 = \left\|\operatorname{skew}(PF^T)\right\|^2,$$

aşadar $PF^T \in \operatorname{Sym}(3)$. Cum $PF^T = J\sigma$, rezultă $\sigma \in \operatorname{Sym}(3)$. Acest argument porneşte din obiectivitatea energiei; demonstraţia mecanică a simetriei lui σ din Capitolul 3 porneşte, în schimb, din bilanţul momentului cinetic.

5.3 Simetrii materiale şi izotropie

Izotropia şi rotaţia reperului material. Indiferenţa faţă de reper şi izotropia sunt cerinţe diferite. Prima se referă la schimbarea observatorului spaţial, $F \mapsto QF$; izotropia afirmă că materialul nu distinge direcţii privilegiate în configuraţia de referinţă. O rotaţie a reperului material transformă F în FQ, cu $Q \in SO(3)$.

Pentru o energie W, izotropia se exprimă prin

$$W(FQ) = W(F) \qquad (F \in GL^+(3),\ Q \in SO(3)).$$

Dacă W este diferenţiabilă şi $P(F) = D_F W(F)$, derivăm această identitate pentru a vedea transformarea lui P. Fixăm F, H şi considerăm $F + sH$. Din

$$W((F + sH)Q) = W(F + sH)$$

obţinem, derivând în s la $s = 0$,

$$\langle P(FQ), HQ\rangle = \langle P(F), H\rangle.$$

Folosim identitatea Frobenius $\langle A, HQ\rangle = \langle AQ^T, H\rangle$ şi faptul că egalitatea este valabilă pentru

orice H. Rezultă

$$P(FQ)Q^T = P(F), \qquad \text{adică} \qquad \boxed{P(FQ) = P(F)Q.}$$

Pentru $S = F^{-1}P$ deducem

$$S(FQ) = (FQ)^{-1}P(FQ) = Q^T F^{-1}P(F)Q = Q^T S(F)Q.$$

Aceasta este transformarea tensorială corectă a răspunsului material izotrop. Pentru teoria clasică a funcţiilor tensoriale izotrope şi reprezentările asociate vezi [24, 25, 14].

Omogenitate versus izotropie. Omogenitatea înseamnă independenţă de poziţia materială X; izotropia înseamnă invarianta la rotaţii ale reperului material. Un material poate fi omogen şi anizotrop (de exemplu un solid cu o familie fixă de fibre), ori neomogen şi izotrop (parametrii elastici depind de X, dar local nu există o direcţie privilegiată).

Obiectivitate versus izotropie. Obiectivitatea priveşte rotaţia observatorului şi acţionează la stânga, $F \mapsto QF$; este o cerinţă universală asupra unei legi constitutive. Izotropia priveşte rotaţia reperului material şi acţionează la dreapta, $F \mapsto FQ$; este o proprietate a unei clase particulare de materiale. Cele două condiţii au deci semnificaţii fizice diferite chiar dacă folosesc acelaşi grup $SO(3)$.

Pentru o energie hiperelastică omogenă definim *grupul de simetrie materială*

$$\mathcal{G} := \{Q \in SO(3) : W(FQ) = W(F) \text{ pentru orice } F \in GL^+(3)\}.$$

Identitatea aparţine lui $\mathcal{G}$, iar dacă $Q_1, Q_2 \in \mathcal{G}$, atunci $W(FQ_1Q_2) = W((FQ_1)Q_2) = W(FQ_1) = W(F)$; de asemenea $Q^{-1} \in \mathcal{G}$ dacă $Q \in \mathcal{G}$. Deci $\mathcal{G}$ este un subgrup al lui $SO(3)$. Materialul este izotrop exact atunci când $\mathcal{G} = SO(3)$. Combinând obiectivitatea $W(Q_1F) = W(F)$ cu izotropia $W(FQ_2) = W(F)$ obţinem

$$W(Q_1FQ_2) = W(F) \qquad \forall Q_1, Q_2 \in SO(3).$$

Teorema următoare precizează consecinţa acestei duble invarianţe.

Teorema 5.3.1 (reprezentarea izotropă)**.** *Dacă $W : GL^+(3) \to \mathbb{R}$ este obiectivă şi izotropă, atunci există o funcţie simetrică*

$$g : (0, \infty)^3 \to \mathbb{R}$$

astfel încât

$$W(F) = g(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3),$$

unde λ_i sunt valorile singulare ale lui F. Echivalent, W se poate exprima prin invarianţii principali ai lui C sau ai lui U.

Demonstraţie. Prin descompunerea în valori singulare există iniţial $\widetilde{Q}_1, \widetilde{Q}_2 \in O(3)$ şi

$$D = \operatorname{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3), \qquad \lambda_i > 0,$$

astfel încât $F = \widetilde{Q}_1 D \widetilde{Q}_2^T$. Din $\det F > 0$ rezultă $\det \widetilde{Q}_1 \det \widetilde{Q}_2 = 1$. Dacă ambele determinante sunt -1, luăm $S_0 = \mathrm{diag}(-1, -1, 1)$ şi definim $Q_1 = \widetilde{Q}_1 S_0$, $Q_2 = \widetilde{Q}_2 S_0$; deoarece $S_0 D S_0 = D$, obţinem tot $F = Q_1 D Q_2^T$, dar acum $Q_1, Q_2 \in SO(3)$. Aşadar putem scrie

$$F = Q_1 D Q_2^T, \qquad Q_1, Q_2 \in SO(3).$$

Obiectivitatea, adică invarianta la rotaţii aplicate la stânga, dă

$$W(F) = W(Q_1 D Q_2^T) = W(D Q_2^T).$$

Izotropia materială, adică invarianta la rotaţii aplicate la dreapta, dă apoi

$$W(D Q_2^T) = W(D).$$

Prin urmare valoarea energiei este determinată numai de valorile singulare:

$$W(F) = g(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3), \qquad g(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) := W(D).$$

Mai trebuie verificată simetria lui g. Pentru o permutare π, fie P_π matricea sa de permutare. Dacă $\det P_\pi = 1$, conjugarea cu P_π este deja realizată prin rotaţii proprii. Dacă $\det P_\pi = -1$, luăm $S_0 = \mathrm{diag}(1, 1, -1)$ şi definim

$$R_\pi := P_\pi S_0 \in SO(3).$$

Deoarece $S_0 D S_0 = D$,

$$R_\pi D R_\pi^T = P_\pi S_0 D S_0 P_\pi^T = P_\pi D P_\pi^T = \mathrm{diag}(\lambda_{\pi(1)}, \lambda_{\pi(2)}, \lambda_{\pi(3)}).$$

Aşadar chiar şi o permutare impară a axelor principale este realizată prin conjugare cu o rotaţie proprie. Astfel orice permutare a lui $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ este realizată prin rotaţii admisibile. Invarianţa energiei implică

$$g(\lambda_{\pi(1)}, \lambda_{\pi(2)}, \lambda_{\pi(3)}) = g(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$$

pentru orice permutare π. Deci g este simetrică. □

Observaţia 5.3.2. Tripletul neordonat de valori singulare pozitive este determinat de polinoamele simetrice elementare în λ_i^2, adică de invarianţii $I_1(C), I_2(C), I_3(C)$. Prin urmare formularea printr-o funcţie simetrică de $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ şi formularea prin invarianţii principali ai lui C descriu aceeaşi clasă de energii izotrope, cu regularitatea corespunzătoare a funcţiei reprezentante.

5.4 Teorema de reprezentare Rivlin–Ericksen pentru funcţii tensoriale izotrope

Rezultatul de reprezentare are originea în teoria clasică Rivlin–Ericksen [24]; noi îl formulăm în versiunea necesară elasticităţii izotrope. În multe legi constitutive nu apare numai o energie scalară, ci o funcţie tensorială de un tensor simetric. Avem nevoie de forma generală a unei astfel de funcţii.

Teorema 5.4.1 (reprezentare izotropă)**.** *Fie* $\mathcal{T} : \mathrm{Sym}^+(3) \to \mathrm{Sym}(3)$ *continuă şi izotropă, adică*

$$\mathcal{T}(QCQ^T) = Q\mathcal{T}(C)Q^T \qquad \forall Q \in SO(3).$$

Atunci există funcţii scalare $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2$*, dependente numai de invarianţii principali ai lui* C*, astfel încât*

$$\boxed{\mathcal{T}(C) = \alpha_0 I + \alpha_1 C + \alpha_2 C^2.}$$

Demonstraţie. Diagonalizăm $C = QDQ^T$, $D = \mathrm{diag}(c_1, c_2, c_3)$. Prin izotropie,

$$\mathcal{T}(C) = Q\mathcal{T}(D)Q^T.$$

Pentru orice rotaţie diagonală $R = \mathrm{diag}(\pm 1, \pm 1, \pm 1)$ cu determinant 1, avem $RDR^T = D$, deci

$$\mathcal{T}(D) = R\mathcal{T}(D)R^T.$$

Alegând succesiv astfel de rotaţii, componentele nediagonale ale lui $\mathcal{T}(D)$ trebuie să fie zero. Aşadar $\mathcal{T}(D) = \mathrm{diag}(t_1, t_2, t_3)$.

Dacă valorile proprii c_i sunt distincte, există un unic polinom de grad cel mult doi

$$p(s) = \alpha_0 + \alpha_1 s + \alpha_2 s^2$$

care interpolează $p(c_i) = t_i$, $i = 1, 2, 3$. Prin urmare

$$\mathcal{T}(D) = \alpha_0 I + \alpha_1 D + \alpha_2 D^2.$$

Rămâne cazul valorilor proprii multiple; aici nu putem invoca pur şi simplu continuitatea coeficienţilor de interpolare, deoarece coeficienţii Lagrange pot deveni singulari când două noduri se apropie. Dacă, de exemplu, $D = \mathrm{diag}(c, c, d)$ cu $c \neq d$, atunci D este invariant la orice rotaţie în planul generat de e_1, e_2. Izotropia impune ca restricţia lui $\mathcal{T}(D)$ la acest plan să fie un multiplu al identităţii; deci

$$\mathcal{T}(D) = \mathrm{diag}(t, t, s).$$

Există atunci un polinom de grad cel mult unu, $p(\xi) = \alpha_0 + \alpha_1 \xi$, cu $p(c) = t$ şi $p(d) = s$, deci din nou $\mathcal{T}(D) = p(D)$. Dacă $D = cI$, invarianta faţă de toate rotaţiile implică $\mathcal{T}(D) = tI$, deci este suficient polinomul constant $p \equiv t$. Celelalte cazuri cu multiplicitate doi se obţin prin permutarea axelor.

Coeficienţii astfel obţinuţi nu depind de alegerea bazei proprii, ci numai de spectrul neordonat al lui C; acesta este determinat de invarianţii elementari

$$I_1 = \operatorname{tr} C, \quad I_2 = \tfrac{1}{2}[(\operatorname{tr} C)^2 - \operatorname{tr} C^2], \quad I_3 = \det C.$$

Prin urmare coeficienţii pot fi priviţi ca funcţii scalare ale (I_1, I_2, I_3), ceea ce încheie demonstraţia. □

Corolarul 5.4.2. *Pentru un material hiperelastic obiectiv şi izotrop, al doilea tensor Piola–Kirchhoff poate fi scris*

$$S = \beta_0(I_1, I_2, I_3)I + \beta_1(I_1, I_2, I_3)C + \beta_2(I_1, I_2, I_3)C^2.$$

Demonstraţie. Obiectivitatea dă $W(F) = \Psi(C)$, cu $C = F^T F$, iar formula tensiunii este

$$S(C) = 2D_C\Psi(C).$$

Izotropia materială $W(FQ) = W(F)$ se traduce, pentru C, prin

$$\Psi(Q^T C Q) = \Psi(C) \qquad \forall Q \in SO(3).$$

Fixăm $C \in \operatorname{Sym}^+(3)$, $H \in \operatorname{Sym}(3)$ şi considerăm curba $C + sH$. Aplicând identitatea precedentă lui $C + sH$,

$$\Psi\Big(Q^T(C + sH)Q\Big) = \Psi(C + sH).$$

Derivâm faţă de s în $s = 0$:

$$\langle D_C\Psi(Q^T C Q), Q^T H Q\rangle = \langle D_C\Psi(C), H\rangle.$$

Pentru produsul Frobenius avem

$$\langle A, Q^T H Q\rangle = \langle Q A Q^T, H\rangle.$$

Prin urmare

$$\langle Q D_C\Psi(Q^T C Q)Q^T - D_C\Psi(C), H\rangle = 0 \qquad \forall H \in \operatorname{Sym}(3).$$

Ambele matrice din diferenţă sunt simetrice. Cum produsul Frobenius este nedegenerat pe $\operatorname{Sym}(3)$, rezultă

$$Q D_C\Psi(Q^T C Q)Q^T = D_C\Psi(C),$$

sau, echivalent,

$$D_C\Psi(Q^T C Q) = Q^T D_C\Psi(C) Q.$$

Înmulţind cu 2, obţinem aceeaşi lege de transformare pentru $S(C)$. Aşadar S este o funcţie tensorială izotropă de C, iar teorema precedentă furnizează reprezentarea polinomială din enunţ. □

5.5 Derivatele invarianţilor şi tensiunile pentru energii izotrope

Teorema de reprezentare de mai sus arată că o energie obiectivă şi izotropă poate fi scrisă fie ca funcţie simetrică de valorile singulare, fie ca funcţie de invarianţii principali ai lui C. Pentru calculul tensiunilor folosim a doua formă:

$$W(F) = \Psi(C) = \widehat{W}(I_1(C), I_2(C), I_3(C)), \qquad C = F^T F.$$

Calculăm mai întâi derivatele celor trei invarianţi.

Notăm de aici înainte cu $\Psi(C)$ reprezentarea energiei ca funcţie de C şi cu

$$\widehat{W}(I_1, I_2, I_3)$$

reprezentarea aceleiaşi energii prin invarianţii lui C. Cele două notaţii sunt legate prin

$$\Psi(C) = \widehat{W}(I_1(C), I_2(C), I_3(C)).$$

Calculăm derivatele fără a le memora. Pentru $I_1(C) = \operatorname{tr} C$,

$$DI_1(C)[H] = \operatorname{tr} H = \langle I, H\rangle, \qquad D_C I_1 = I.$$

Pentru $I_2(C) = \frac{1}{2}[(\operatorname{tr} C)^2 - \operatorname{tr}(C^2)]$,

$$\begin{aligned} DI_2(C)[H] &= (\operatorname{tr} C)(\operatorname{tr} H) - \frac{1}{2}\operatorname{tr}(CH + HC) \\ &= (\operatorname{tr} C)(\operatorname{tr} H) - \langle C, H\rangle, \end{aligned}$$

deci

$$D_C I_2 = (\operatorname{tr} C)I - C.$$

În sfârşit, pentru $I_3(C) = \det C$ şi $C \in \operatorname{Sym}^+(3)$,

$$DI_3(C)[H] = \langle \operatorname{Cof} C, H\rangle = \langle I_3 C^{-1}, H\rangle, \qquad D_C I_3 = I_3 C^{-1}.$$

Regula lanţului furnizează

$$D_C\Psi(C) = \widehat{W}_{,1} I + \widehat{W}_{,2}[(\operatorname{tr} C)I - C] + \widehat{W}_{,3} I_3 C^{-1}.$$

Cum $S = 2D_C\Psi(C)$,

$$\boxed{S = 2\widehat{W}_{,1} I + 2\widehat{W}_{,2}[(\operatorname{tr} C)I - C] + 2\widehat{W}_{,3} I_3 C^{-1}.}$$

Aceasta este formula constitutivă de bază pentru energiile izotrope exprimate prin invarianţi.

5.5.1 Tensiunea Cauchy

Formula pentru S a fost obţinută mai sus din derivatele lui I_1, I_2, I_3. Trecem acum la tensiunea Cauchy. Din

$$\sigma = J^{-1} F S F^T, \qquad B = F F^T,$$

şi identităţile

$$F I F^T = B, \qquad F[(\operatorname{tr} C) I - C] F^T = (\operatorname{tr} C) B - F C F^T = I_1 B - B^2,$$

unde am folosit $\operatorname{tr} C = I_1$ şi

$$F C F^T = F(F^T F) F^T = (F F^T)^2 = B^2.$$

Pentru ultimul termen, deoarece $C^{-1} = F^{-1} F^{-T}$,

$$F(I_3 C^{-1}) F^T = I_3 F F^{-1} F^{-T} F^T = I_3 I.$$

Prin urmare

$$\boxed{\sigma = \frac{2}{J}\left[\widehat{W}_{,1} B + \widehat{W}_{,2}(I_1 B - B^2) + \widehat{W}_{,3} I_3 I\right].}$$

5.6 Tensiunile principale pentru energii izotrope

Fie F exprimat în bazele principale,

$$F = \operatorname{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3), \qquad W(F) = g(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3),$$

unde $\lambda_i > 0$ sunt întinderile principale. Considerăm o variaţie diagonală

$$H = \operatorname{diag}(h_1, h_2, h_3).$$

Pe de o parte,

$$DW(F)[H] = \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial g}{\partial \lambda_i} h_i.$$

Pe de altă parte, din definiţia lui $P = D_F W(F)$,

$$DW(F)[H] = \langle P, H \rangle = \sum_{i=1}^{3} P_i h_i,$$

unde P_i sunt componentele principale ale primului tensor Piola. Cum h_1, h_2, h_3 sunt arbitrare, rezultă

$$P_i = \frac{\partial g}{\partial \lambda_i}, \qquad i = 1, 2, 3.$$

Relaţia $\sigma = J^{-1} P F^T$ este de asemenea diagonală în aceste baze; componenta i este

$$\sigma_i = \frac{1}{J} P_i \lambda_i .$$

Prin urmare

$$\boxed{\sigma_i = \frac{\lambda_i}{J} \frac{\partial g}{\partial \lambda_i}.}$$

Formula va fi folosită imediat pentru energiile Ogden şi, mai târziu, în criteriile spectrale. În exemple va trebui calculată numai derivata specifică energiei considerate.

5.7 Energii hiperelastice clasice şi calculul tensiunilor

În exemplele următoare pornim de la energia W şi calculăm tensiunile cu formulele demonstrate mai sus. Pentru fiecare model scriem numai derivata care intervine efectiv.

Convenţie de notaţie pentru modelele următoare. În acest capitol λ_i denotă întinderile principale. Pentru a evita coliziunea cu acestea, coeficientul Lamé scalar va fi notat temporar λ_{L}; în Capitolul 6, unde valorile singulare nu mai sunt variabilele curente, revenim la notaţia standard λ.

5.7.1 Saint Venant–Kirchhoff

Energia este

$$W_{\mathrm{SVK}}(F) = \mu \, \|E\|^2 + \frac{\lambda_{\mathrm{L}}}{2} (\operatorname{tr} E)^2, \qquad E = \frac{1}{2}(F^T F - I).$$

Pentru $H \in \mathbb{R}^{3\times 3}$,

$$DE(F)[H] = \frac{1}{2}(H^T F + F^T H) = \operatorname{sym}(F^T H).$$

Derivata energiei în raport cu E este

$$D_E W(E)[K] = \langle 2\mu E + \lambda_{\mathrm{L}} \operatorname{tr}(E) I, K \rangle .$$

Prin regula lanţului,

$$\begin{aligned} DW(F)[H] &= \langle 2\mu E + \lambda_{\mathrm{L}} \operatorname{tr}(E) I, \operatorname{sym}(F^T H) \rangle \\ &= \langle F(2\mu E + \lambda_{\mathrm{L}} \operatorname{tr}(E) I), H \rangle , \end{aligned}$$

fiindcă tensorul din prima paranteză este simetric. Rezultă

$$\boxed{S = 2\mu E + \lambda_{\mathrm{L}} \operatorname{tr}(E) I}, \qquad \boxed{P = FS}.$$

Pentru $F = I + \nabla u$ cu $\|\nabla u\|$ mic,

$$E = \operatorname{sym} \nabla u + O(\|\nabla u\|^2),$$

şi astfel

$$S = 2\mu \operatorname{sym} \nabla u + \lambda_{\mathrm{L}} \operatorname{div} u\, I + O(\|\nabla u\|^2).$$

La ordinul întâi aceasta este exact legea lui Hooke din Capitolul 6; coeficienţii λ_{L} şi μ din energia SVK sunt deci constantele Lamé. În $F = I$ avem $E = 0$ şi $P = 0$, deci configuraţia de referinţă este naturală.

Limitarea modelului la compresii extreme. Energia Saint Venant–Kirchhoff nu satisface bariera fizică $W(F) \to +\infty$ când $\det F \downarrow 0$. Pentru

$$F_\varepsilon = \operatorname{diag}(\varepsilon, 1, 1), \qquad \varepsilon > 0,$$

avem

$$E_\varepsilon = \frac{1}{2} \operatorname{diag}(\varepsilon^2 - 1, 0, 0)$$

şi deci

$$W_{\mathrm{SVK}}(F_\varepsilon) = \frac{2\mu + \lambda_{\mathrm{L}}}{8}(\varepsilon^2 - 1)^2 \longrightarrow \frac{2\mu + \lambda_{\mathrm{L}}}{8} < \infty \qquad (\varepsilon \downarrow 0).$$

Mai mult, fiindcă energia depinde numai de $C = F^T F$, ea nu distinge o rotaţie de o reflexie cu acelaşi C; de exemplu $F = \operatorname{diag}(-1, 1, 1)$ dă $C = I$ şi deci $W_{\mathrm{SVK}} = 0$, deşi $\det F = -1$. Aceste calcule arată de ce modelul este adecvat în principal pentru deformaţii moderate şi de ce energiile neliniare moderne introduc o barieră explicită la $J \downarrow 0$.

5.7.2 Neo-Hooke compresibil

Considerăm

$$W(F) = \frac{\mu}{2}\Big(\|F\|^2 - 3 - 2\log J \Big) + \frac{\lambda_{\mathrm{L}}}{2}(\log J)^2, \qquad J = \det F > 0.$$

Avem $D(\frac{1}{2}\|F\|^2)[H] = \langle F, H \rangle$ şi, din formula lui Jacobi,

$$D(\log J)[H] = \frac{1}{J} DJ(F)[H] = \langle F^{-T}, H \rangle.$$

De aceea

$$\begin{aligned} DW(F)[H] &= \mu\langle F, H\rangle - \mu\langle F^{-T}, H\rangle + \lambda_{\mathrm{L}} \log J\, \langle F^{-T}, H\rangle \\ &= \Big\langle \mu(F - F^{-T}) + \lambda_{\mathrm{L}} \log J\, F^{-T}, H \Big\rangle. \end{aligned}$$

Prin urmare

$$\boxed{P = \mu(F - F^{-T}) + \lambda_{\mathrm{L}} \log J\, F^{-T}}.$$

Înmulţind la dreapta cu F^T şi împărţind prin J,

$$\boxed{\sigma = \frac{\mu}{J}(B - I) + \frac{\lambda_{\mathrm{L}}}{J} \log J\, I}, \qquad B = FF^T.$$

În particular $P(I) = 0$.

5.7.3 Mooney–Rivlin incompresibil

Pentru un material incompresibil, $J = 1$ este o constrângere şi presiunea p apare ca multiplicator Lagrange. Luăm

$$W(F) = c_1(I_1 - 3) + c_2(I_2 - 3), \qquad I_1 = \operatorname{tr} C, \quad I_2 = \tfrac{1}{2}[(\operatorname{tr} C)^2 - \operatorname{tr}(C^2)].$$

Din formulele demonstrate pentru invarianţi,

$$D_C I_1 = I, \qquad D_C I_2 = I_1 I - C.$$

Astfel partea elastică a celui de-al doilea tensor Piola este

$$S_{\mathrm{el}} = 2c_1 I + 2c_2(I_1 I - C).$$

Trecând la tensiunea Cauchy şi adăugând presiunea nedeterminată de constrângere,

$$\boxed{\sigma = -pI + 2c_1 B + 2c_2(I_1 B - B^2)}.$$

Pentru $J = 1$, teorema Cayley–Hamilton pentru B dă

$$B^3 - I_1 B^2 + I_2 B - I = 0.$$

Înmulţind cu B^{-1},

$$I_1 B - B^2 = I_2 I - B^{-1}.$$

Termenul sferic $2c_2 I_2 I$ poate fi absorbit în multiplicatorul Lagrange (care este oricum determinat numai până la această rescriere). Cu o presiune redenumită $\widetilde{p} = p - 2c_2 I_2$, aceeaşi lege devine forma clasică

$$\boxed{\sigma = -\widetilde{p} I + 2c_1 B - 2c_2 B^{-1}.}$$

Valoarea presiunii se determină din condiţiile la frontieră, nu din legea constitutivă izocoră.

5.7.4 Energii Ogden în întinderi principale

Aici $\lambda_i > 0$ sunt valorile singulare ale lui F, adică întinderile principale. Pentru un material izotrop putem scrie $W(F) = g(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$. O familie compresibilă clasică este

$$W = \sum_{r=1}^{N} \frac{\mu_r}{\alpha_r}\Big(\lambda_1^{\alpha_r} + \lambda_2^{\alpha_r} + \lambda_3^{\alpha_r} - 3\Big) + W_{\mathrm{vol}}(J), \qquad J = \lambda_1\lambda_2\lambda_3.$$

În mod uzual se aleg $\mu_r \alpha_r > 0$; modulul de forfecare liniar asociat părţii distorsionale este

$$\mu = \frac{1}{2}\sum_{r=1}^{N} \mu_r \alpha_r.$$

Derivând energia în raport cu λ_i obţinem

$$\frac{\partial g}{\partial \lambda_i} = \sum_{r=1}^{N} \mu_r \lambda_i^{\alpha_r - 1} + W'_{\mathrm{vol}}(J)\frac{J}{\lambda_i},$$

deoarece $\partial J/\partial \lambda_i = J/\lambda_i$. Folosind formula pentru tensiunile principale demonstrată mai sus,

$$\boxed{\sigma_i = \frac{\lambda_i}{J}\frac{\partial g}{\partial \lambda_i} = \frac{1}{J}\sum_{r=1}^{N} \mu_r \lambda_i^{\alpha_r} + W'_{\mathrm{vol}}(J).}$$

Pentru ca $F = I$ să fie o stare naturală în cazul compresibil, termenul volumetric trebuie calibrat astfel încât tensiunea sferică reziduală să se anuleze; în particular $W'_{\mathrm{vol}}(1) = -\sum_r \mu_r$. În cazul incompresibil, W_{vol} nu se adaugă: condiţia $J = 1$ este impusă printr-un multiplicator Lagrange de presiune. Vezi [14].

5.7.5 Energia Hencky

Cu U tensorul de întindere drept, energia pătratică Hencky se scrie

$$W_H(F) = \mu \left\|\operatorname{dev} \log U\right\|^2 + \frac{K}{2}(\operatorname{tr} \log U)^2,$$

unde

$$K := \lambda_{\mathrm{L}} + \frac{2}{3}\mu$$

este modulul de compresiune. Deoarece

$$\|e\|^2 = \|\operatorname{dev} e\|^2 + \frac{1}{3}(\operatorname{tr} e)^2,$$

avem

$$\mu \|\operatorname{dev} e\|^2 + \frac{K}{2}(\operatorname{tr} e)^2 = \mu \|e\|^2 + \frac{\lambda_{\mathrm{L}}}{2}(\operatorname{tr} e)^2.$$

Astfel liniarizarea lui Hencky la $F = I$ reproduce exact energia elastică pătratică cu coeficienţii Lamé $(\lambda_{\mathrm{L}}, \mu)$. Deoarece $\operatorname{tr} \log U = \log \det U = \log J$, primul termen măsoară distorsiunea, iar al doilea schimbarea de volum. În apropierea lui I, $\log U = \operatorname{sym} \nabla u + O(\|\nabla u\|^2)$, astfel energia recuperează forma pătratică a elasticităţii liniare la ordinul principal.

5.8 Testul de extensie uniaxială pentru un material neo-Hookean incompresibil

Considerăm

$$F = \operatorname{diag}(\Lambda, \Lambda^{-1/2}, \Lambda^{-1/2}), \qquad B = \operatorname{diag}(\Lambda^2, \Lambda^{-1}, \Lambda^{-1}).$$

Pentru neo-Hooke incompresibil,

$$\sigma = -pI + \mu B.$$

Pe feţele laterale libere impunem

$$\sigma_{22} = \sigma_{33} = 0.$$

Rezultă $p = \mu\Lambda^{-1}$. Tensiunea axială este deci

$$\sigma_{11} = \mu(\Lambda^2 - \Lambda^{-1}).$$

Pentru $\Lambda = 1 + \varepsilon$, $|\varepsilon| \ll 1$, dezvoltarea

$$\Lambda^2 - \Lambda^{-1} = (1 + 2\varepsilon + O(\varepsilon^2)) - (1 - \varepsilon + O(\varepsilon^2)) = 3\varepsilon + O(\varepsilon^2)$$

dă

$$\sigma_{11} = 3\mu\varepsilon + O(\varepsilon^2).$$

Modulul Young efectiv pentru un material liniar incompresibil este astfel $E_Y = 3\mu$.

5.9 Exemplu: energie dependentă numai de determinant

Dacă $W(F) = h(\det F)$, atunci

$$P = h'(J)\,\mathrm{Cof}\,F, \qquad \sigma = h'(J)I.$$

Un astfel de material produce numai tensiune hidrostatică şi nu poate susţine forfecare. Exemplul arată cum structura funcţională a energiei se traduce direct în tipul de tensiuni pe care modelul îl poate produce.

5.10 Comportamentul energiei pentru $J \downarrow 0$

Dacă o succesiune de deformări poate comprima volume finite către volume arbitrar de mici cu energie mărginită, modelul nu împiedică colapsul local al materiei. Cerinţa

$$W(F) \to +\infty \qquad \text{când } \det F \downarrow 0$$

introduce o barieră energetică împotriva pierderii orientării prin compresie extremă. Această cerinţă va avea mai târziu şi un rol analitic. Pentru moment reţinem numai semnificaţia mecanică: compresiile extreme trebuie să devină energetic prohibitive.

Un termen simplu este

$$h(J) = J^r + J^{-s}, \qquad r, s > 0.$$

Derivata a doua este

$$h''(J) = r(r-1)J^{r-2} + s(s+1)J^{-s-2}.$$

Pentru $r \geq 1$, funcţia este convexă pe $(0, \infty)$ şi diverge atât la 0^+, cât şi la $+\infty$.

5.11 Probleme pentru seminar

1. Pentru energia cu o familie de fibre $W(F) = \frac{k}{2}(\|Fa_0\|^2 - 1)^2$, determinaţi grupul de rotaţii materiale care lasă energia invariantă şi explicaţi legătura cu izotropia transversală.
2. Arătaţi că $W(F) = \Phi(F^T F)$ este obiectivă.
3. Arătaţi că $W(F) = g(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ este izotropă dacă g este simetrică.
4. Calculaţi P pentru $W(F) = \frac{\mu}{2}\|F\|^2 + h(\det F)$.
5. Pentru energia St. Venant–Kirchhoff calculaţi S în funcţie de E.
6. Pentru o dilatare $F = \Lambda I$ determinaţi tensiunile produse de energia neo-Hooke dată mai sus.
7. Arătaţi că o energie obiectivă nu poate fi strict convexă pe întregul $GL^+(3)$ dacă are minim pe toate rotaţiile.

5.12 Exerciţii rezolvate

Problema 5.12.1 (verificarea obiectivităţii)**.** Arătaţi că energia $W(F) = \left\|F^T F - I\right\|^2$ este obiectivă.

Rezolvare. Pentru $Q \in SO(3)$,

$$(QF)^T(QF) = F^T Q^T Q F = F^T F.$$

Prin urmare

$$W(QF) = \left\|(QF)^T(QF) - I\right\|^2 = \left\|F^T F - I\right\|^2 = W(F).$$

Problema 5.12.2 (o energie neobiectivă)**.** Verificaţi că $W(F) = \|F - I\|^2$ nu este obiectivă.

Rezolvare. Luăm $F = I$ şi o rotaţie $Q \neq I$. Atunci

$$W(I) = 0,$$

dar

$$W(Q) = \|Q - I\|^2 > 0.$$

Deci $W(QF) \neq W(F)$, deşi superpunerea unei rotaţii rigide nu ar trebui să modifice energia.

Problema 5.12.3 (energie pur volumetrică)**.** Fie $W(F) = h(J)$, $J = \det F$. Calculaţi $P = D_F W(F)$.

Rezolvare. Prin regula lanţului,

$$DW(F)[H] = h'(J) D(\det)(F)[H].$$

Din capitolul 1,

$$D(\det)(F)[H] = \langle \operatorname{Cof} F, H\rangle.$$

Prin urmare

$$DW(F)[H] = h'(J)\langle \operatorname{Cof} F, H\rangle,$$

şi, prin identificarea gradientului faţă de F,

$$\boxed{P = h'(J)\operatorname{Cof} F = h'(J)JF^{-T}.}$$

Problema 5.12.4 (energia Saint Venant–Kirchhoff)**.** Pentru

$$W(F) = \mu\,\|E\|^2 + \frac{\lambda_{\mathrm{L}}}{2}(\operatorname{tr} E)^2, \qquad E = \frac{1}{2}(F^TF - I),$$

calculaţi $S = \partial W/\partial E$.

Rezolvare. Pentru o variaţie H_E,

$$D_EW(E)[H_E] = 2\mu\langle E, H_E\rangle + \lambda_{\mathrm{L}}(\operatorname{tr} E)(\operatorname{tr} H_E).$$

Cum $\langle I, H_E\rangle = \operatorname{tr} H_E$,

$$D_EW(E)[H_E] = \langle 2\mu E + \lambda_{\mathrm{L}}(\operatorname{tr} E)I, H_E\rangle.$$

Deci

$$\boxed{S = 2\mu E + \lambda_{\mathrm{L}}(\operatorname{tr} E)I.}$$

Problema 5.12.5 (invarianţii lui C)**.** Pentru $C = \operatorname{diag}(c_1, c_2, c_3)$ calculaţi

$$I_1 = \operatorname{tr} C, \quad I_2 = \frac{1}{2}[(\operatorname{tr} C)^2 - \operatorname{tr}(C^2)], \quad I_3 = \det C.$$

Rezolvare. Direct,

$$I_1 = c_1 + c_2 + c_3,$$

$$I_2 = \frac{1}{2}[(c_1 + c_2 + c_3)^2 - (c_1^2 + c_2^2 + c_3^2)] = c_1c_2 + c_1c_3 + c_2c_3,$$

şi

$$I_3 = c_1c_2c_3.$$

Problema 5.12.6 (tensiuni principale pentru neo-Hooke compresibil)**.** Pentru energia spectrală

$$g(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = \frac{\mu}{2}(\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2 - 3) - \mu\log J + \frac{\lambda_{\mathrm{L}}}{2}(\log J)^2, \qquad J = \lambda_1\lambda_2\lambda_3,$$

calculaţi tensiunile principale nominale P_i şi tensiunile principale Cauchy σ_i.

Rezolvare. Într-o stare diagonală, $P_i = \partial g/\partial\lambda_i$. Deoarece

$$\frac{\partial J}{\partial\lambda_i} = \frac{J}{\lambda_i}, \qquad \frac{\partial \log J}{\partial\lambda_i} = \frac{1}{\lambda_i},$$

rezultă

$$P_i = \mu\lambda_i - \frac{\mu}{\lambda_i} + \frac{\lambda_{\mathrm{L}} \log J}{\lambda_i} = \boxed{\mu\lambda_i + \frac{\lambda_{\mathrm{L}} \log J - \mu}{\lambda_i}}.$$

Pentru o deformare diagonală, relaţia $\sigma = J^{-1} P F^T$ dă

$$\sigma_i = \frac{\lambda_i P_i}{J},$$

şi deci

$$\boxed{\sigma_i = \frac{1}{J}\Big[\mu(\lambda_i^2 - 1) + \lambda_{\mathrm{L}} \log J\Big].}$$

Formula coincide cu expresia tensorială $\sigma = J^{-1}[\mu(B - I) + \lambda_{\mathrm{L}} \log J\, I]$.

Problema 5.12.7 (obiectivă, dar anizotropă)**.** Fie a_0 un vector unitar material fix şi

$$W(F) = \frac{k}{2}(\|Fa_0\|^2 - 1)^2.$$

Arătaţi că energia este obiectivă, dar nu este izotropă, şi daţi un contraexemplu numeric pentru invarianta la rotaţii materiale.

Rezolvare. Pentru orice $Q \in SO(3)$,

$$\|QFa_0\|^2 = \langle QFa_0, QFa_0\rangle = \|Fa_0\|^2,$$

deci $W(QF) = W(F)$: energia este obiectivă. Pentru izotropie ar trebui însă să avem $W(FR) = W(F)$ pentru orice $R \in SO(3)$. Alegem $a_0 = e_1$, $F = \mathrm{diag}(2, 1, 1)$ şi rotaţia de $\pi/2$ în planul e_1e_2, pentru care $Re_1 = e_2$. Atunci

$$\|Fa_0\|^2 = 4, \qquad \|FRa_0\|^2 = \|Fe_2\|^2 = 1.$$

Prin urmare

$$W(F) = \frac{9k}{2}, \qquad W(FR) = 0,$$

şi izotropia eşuează explicit. Vectorul a_0 reprezintă o direcţie materială preferenţială.

Problema 5.12.8 (extensie uniaxială neo-Hooke incompresibilă)**.** Pentru modelul neo-Hooke incompresibil

$$\sigma = -pI + \mu B$$

şi deformarea

$$F = \mathrm{diag}(\lambda, \lambda^{-1/2}, \lambda^{-1/2}), \qquad \lambda > 0,$$

determinaţi presiunea p din condiţia ca feţele laterale să fie libere şi calculaţi tensiunea axială Cauchy.

Rezolvare. Avem $J = 1$ şi

$$B = FF^T = \mathrm{diag}(\lambda^2, \lambda^{-1}, \lambda^{-1}).$$

Prin urmare

$$\sigma_{22} = \sigma_{33} = -p + \mu\lambda^{-1}.$$

Feţele laterale libere cer $\sigma_{22} = \sigma_{33} = 0$, deci

$$\boxed{p = \mu\lambda^{-1}.}$$

Tensiunea axială este atunci

$$\boxed{\sigma_{11} = -\mu\lambda^{-1} + \mu\lambda^2 = \mu(\lambda^2 - \lambda^{-1}).}$$

Exerciţiul arată de ce presiunea din modelul incompresibil nu este un parametru constitutiv prescris, ci un multiplicator determinat de condiţiile la frontieră.

Problema 5.12.9 (de ce Saint Venant–Kirchhoff nu este o barieră la $J \downarrow 0$)**.** Consideraţi

$$F_\varepsilon = \operatorname{diag}(\varepsilon, 1, 1), \qquad \varepsilon > 0.$$

Calculaţi limita energiei Saint Venant–Kirchhoff când $\varepsilon \downarrow 0$ şi comparaţi-o cu energia neo-Hooke compresibilă.

Rezolvare. Pentru Saint Venant–Kirchhoff,

$$E_\varepsilon = \frac{1}{2}(F_\varepsilon^T F_\varepsilon - I) = \operatorname{diag}\left(\frac{\varepsilon^2 - 1}{2}, 0, 0\right).$$

Deci

$$\|E_\varepsilon\|^2 = \frac{(\varepsilon^2-1)^2}{4}, \qquad (\operatorname{tr} E_\varepsilon)^2 = \frac{(\varepsilon^2-1)^2}{4}.$$

Prin urmare

$$W_{\mathrm{SVK}}(F_\varepsilon) = \frac{2\mu + \lambda_{\mathrm{L}}}{8}(\varepsilon^2-1)^2 \longrightarrow \frac{2\mu+\lambda_{\mathrm{L}}}{8} < \infty.$$

Aşadar modelul SVK nu împiedică energetic colapsul volumetric. Pentru neo-Hooke compresibil, $J = \varepsilon$ şi termenii

$$-\mu \log \varepsilon + \frac{\lambda_{\mathrm{L}}}{2}(\log \varepsilon)^2$$

tind la $+\infty$ când $\varepsilon \downarrow 0$. Modelul neo-Hooke considerat aici are deci barieră volumetrică, spre deosebire de SVK.

Problema 5.12.10 (liniarizarea tensiunii neo-Hooke în starea naturală)**.** Fie

$$P(F) = \mu(F - F^{-T}) + \lambda_{\mathrm{L}} \log(\det F) F^{-T}.$$

Pentru $F_\varepsilon = I + \varepsilon H$, demonstraţi că

$$P(F_\varepsilon) = \varepsilon\Big[2\mu \operatorname{sym} H + \lambda_{\mathrm{L}} \operatorname{tr}(H) I\Big] + O(\varepsilon^2).$$

Rezolvare. Dezvoltarea inversei dă

$$F_\varepsilon^{-T} = I - \varepsilon H^T + O(\varepsilon^2).$$

Din formula determinantului,

$$\det F_\varepsilon = 1 + \varepsilon \operatorname{tr} H + O(\varepsilon^2),$$

iar $\log(1+s) = s + O(s^2)$ conduce la

$$\log \det F_\varepsilon = \varepsilon \operatorname{tr} H + O(\varepsilon^2).$$

Prin urmare

$$\begin{aligned} \mu(F_\varepsilon - F_\varepsilon^{-T}) &= \mu\varepsilon(H + H^T) + O(\varepsilon^2) \\ &= 2\mu\varepsilon \operatorname{sym} H + O(\varepsilon^2), \end{aligned}$$

şi

$$\lambda_{\mathrm{L}} \log(\det F_\varepsilon) F_\varepsilon^{-T} = \lambda_{\mathrm{L}} \varepsilon \operatorname{tr}(H) I + O(\varepsilon^2).$$

Adunând,

$$\boxed{P(F_\varepsilon) = \varepsilon\Big[2\mu \operatorname{sym} H + \lambda_{\mathrm{L}} \operatorname{tr}(H) I\Big] + O(\varepsilon^2).}$$

Aceasta este exact legea lui Hooke liniarizată pentru gradientul de deplasare $H = \nabla u$.

5.13 Exerciţii propuse suplimentare

Nivelul A

5.A.1 *(test de obiectivitate şi de izotropie)* Pentru fiecare dintre funcţiile de energie definite pe $GL^+(3)$,

$$W_1(F) = \|\mathrm{Cof}\, F\|^2, \qquad W_2(F) = \mathrm{tr}\, F,$$

$$W_3(F) = \left\|FF^T - I\right\|^2, \qquad W_4(F) = (\mathrm{tr}\, C)^2 \det F,$$

decideţi dacă este obiectivă, $W(QF) = W(F)$ pentru orice $Q \in SO(3)$, şi dacă este izotropă, $W(FQ) = W(F)$ pentru orice $Q \in SO(3)$. Justificaţi fiecare răspuns printr-un calcul scurt sau printr-un contraexemplu.

Indicaţie. Folosiţi $\mathrm{Cof}(QF) = Q\,\mathrm{Cof}\, F$, invarianţa normei Frobenius la înmulţirea cu matrice ortogonale, $B(QF) = QBQ^T$, $C(FQ) = Q^TCQ$ (§ 5.2–5.3, Teorema 5.3.1).

Răspuns.

energie	obiectivă	izotropă
$W_1 = \|\mathrm{Cof}\, F\|^2$	da	da
$W_2 = \mathrm{tr}\, F$	nu	nu
$W_3 = \|B - I\|^2$	da	da
$W_4 = (\mathrm{tr}\, C)^2 \det F$	da	da

Pentru W_2, luaţi $F = I$ şi $Q = \mathrm{diag}(-1,-1,1)$: $\mathrm{tr}\, Q = -1 \neq 3 = \mathrm{tr}\, I$. Acelaşi contraexemplu arată lipsa izotropiei.

5.A.2 *(Saint Venant–Kirchhoff: calcul numeric)* Pentru energia

$$W_{SVK}(F) = \mu\,\|E\|^2 + \frac{\lambda}{2}(\mathrm{tr}\, E)^2, \qquad E = \frac{1}{2}(C - I),$$

şi pentru deformarea $F = \mathrm{diag}(2,1,1)$, calculaţi E, $S = 2\mu E + \lambda(\mathrm{tr}\, E)I$, $P = FS$, J şi $\sigma = J^{-1}PF^T$.

Indicaţie. § 5.14.1 şi § 5.15.1; toate matricele sunt diagonale.

Răspuns.

$$E = \mathrm{diag}\left(\frac{3}{2}, 0, 0\right), \qquad \mathrm{tr}\, E = \frac{3}{2}, \qquad J = 2,$$

$$S = \mathrm{diag}\left(3\mu + \frac{3\lambda}{2}, \frac{3\lambda}{2}, \frac{3\lambda}{2}\right),$$

$$P = \mathrm{diag}\left(6\mu + 3\lambda, \frac{3\lambda}{2}, \frac{3\lambda}{2}\right),$$

$$\sigma = \mathrm{diag}\left(6\mu + 3\lambda, \frac{3\lambda}{4}, \frac{3\lambda}{4}\right).$$

Pentru $\mu = 2$, $\lambda = 3$, rezultă

$$S = \mathrm{diag}(10.5, 4.5, 4.5), \qquad P = \mathrm{diag}(21, 4.5, 4.5),$$

$$\sigma = \operatorname{diag}(21, 2.25, 2.25).$$

O întindere axială prescrisă produce tensiuni transversale nenule dacă $\lambda \neq 0$; feţele laterale nu sunt libere.

5.A.3 *(neo-Hooke compresibil: tensiuni pentru o deformare izocoră)* Pentru

$$W_{NH}(F) = \frac{\mu}{2}(\|F\|^2 - 3) - \mu \log J + \frac{\lambda}{2}(\log J)^2, \qquad J = \det F > 0,$$

şi pentru $F = \operatorname{diag}(2, 1, 1/2)$, calculaţi J, B,

$$P = \mu F - \mu F^{-T} + \lambda (\log J) F^{-T}$$

şi

$$\sigma = \frac{\mu}{J}(B - I) + \frac{\lambda \log J}{J} I.$$

Verificaţi că în starea naturală $F = I$ tensiunea este nulă.
Indicaţie. § 5.11.3 şi § 5.14.2.
Răspuns. $J = 1$, deci $\log J = 0$ şi constanta λ nu intervine:

$$B = \operatorname{diag}\left(4, 1, \frac{1}{4}\right),$$

$$P = \mu(F - F^{-T}) = \mu \operatorname{diag}\left(\frac{3}{2}, 0, -\frac{3}{2}\right),$$

$$\sigma = \mu(B - I) = \mu \operatorname{diag}\left(3, 0, -\frac{3}{4}\right).$$

Pentru $F = I$, $B = I$ şi $\log J = 0$, deci $\sigma = 0$ şi $P = 0$.

Nivelul B

5.B.1 *(Mooney–Rivlin incompresibil: testul de extensie uniaxială)* Un material Mooney–Rivlin incompresibil are tensiunea Cauchy

$$\sigma = -pI + 2c_1 B - 2c_2 B^{-1}, \qquad c_1, c_2 > 0,$$

unde p este multiplicatorul Lagrange asociat constrângerii $J = 1$. Se consideră extensia uniaxială

$$F = \operatorname{diag}(\lambda, \lambda^{-1/2}, \lambda^{-1/2}), \qquad \lambda > 0,$$

cu feţele laterale libere. (a) Verificaţi $J = 1$ şi calculaţi B, B^{-1}. (b) Din condiţia $\sigma_{22} = \sigma_{33} = 0$ determinaţi p şi apoi $\sigma_{11}(\lambda)$. (c) Dezvoltaţi σ_{11} pentru $\lambda = 1 + \epsilon$, $|\epsilon| \ll 1$, şi identificaţi modulul Young efectiv E_Y şi modulul de forfecare μ.
Indicaţie. § 5.16; pentru (c) folosiţi $E_Y = 3\mu$ pentru materiale incompresibile.
Răspuns.

$$J = 1, \qquad B = \operatorname{diag}(\lambda^2, \lambda^{-1}, \lambda^{-1}), \qquad B^{-1} = \operatorname{diag}(\lambda^{-2}, \lambda, \lambda).$$

Condiţiile laterale dau

$$p = 2c_1\lambda^{-1} - 2c_2\lambda,$$

$$\sigma_{11}(\lambda) = 2(\lambda^2 - \lambda^{-1})\left(c_1 + \frac{c_2}{\lambda}\right).$$

Pentru $\lambda = 1 + \epsilon$,

$$\sigma_{11} = 6(c_1 + c_2)\epsilon + O(\epsilon^2),$$

deci

$$E_Y = 6(c_1 + c_2), \qquad \mu = 2(c_1 + c_2).$$

5.B.2 *(modelul Ogden: tensiuni principale şi condiţia de consistenţă)* Pentru un material izotrop incompresibil de tip Ogden,

$$W = \sum_{p=1}^{N} \frac{\mu_p}{\alpha_p}\Big(\lambda_1^{\alpha_p} + \lambda_2^{\alpha_p} + \lambda_3^{\alpha_p} - 3\Big), \qquad \lambda_1\lambda_2\lambda_3 = 1,$$

cu $\lambda_i > 0$, $\alpha_p \neq 0$. (a) Arătaţi că tensiunile principale au forma

$$\sigma_i = -p + \sum_{p=1}^{N} \mu_p \lambda_i^{\alpha_p}.$$

(b) Arătaţi că starea $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 1$ este naturală după alegerea presiunii p şi că linearizarea conduce la condiţia de consistenţă

$$\sum_p \mu_p\alpha_p = 2\mu, \qquad E_Y = 3\mu = \frac{3}{2}\sum_p \mu_p\alpha_p.$$

(c) Verificaţi numeric pentru $N = 3$, $(\mu_p) = (2, -1, 1/2)$, $(\alpha_p) = (3/2, -2, 4)$.
Indicaţie. § 5.19 şi § 5.14.4; incompresibilitatea adaugă termenul arbitrar $-pI$ (§ 5.21).
Răspuns. Formula din (a) rezultă din derivarea energiei pe direcţiile principale, cu termenul de presiune impus de constrângere. Linearizarea dă

$$\mu = \frac{1}{2}\sum_p \mu_p\alpha_p.$$

Pentru datele din (c),

$$\sum_p \mu_p\alpha_p = 2\cdot\frac{3}{2} + (-1)(-2) + \frac{1}{2}\cdot 4 = 7,$$

deci

$$\mu = 3.5, \qquad E_Y = 10.5.$$

Panta curbei σ_{11} la $\epsilon = 0$ în extensie uniaxială este 10.5.

5.B.3 *(o consecinţă a obiectivităţii şi izotropiei)* Fie $W : GL^+(3) \to \mathbb{R}$ obiectivă şi izotropă. (a) Arătaţi că

$$W(F) = W(U) = g(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3),$$

cu g simetrică în argumente. (b) Demonstraţi că $W(F^T) = W(F)$ pentru orice $F \in GL^+(3)$. (c) Deduceţi că $W(F)$ depinde de F numai prin valorile singulare şi daţi un exemplu de energie obiectivă, dar neizotropă, pentru care (b) este falsă.
Indicaţie. Teorema 5.5.1 şi § 5.7. Pentru (b), folosiţi faptul că factorii de întindere ai lui F şi F^T au aceleaşi valori proprii.
Răspuns. Din obiectivitate, $W(F) = W(U)$; din izotropie şi diagonalizarea lui U, rezultă o funcţie simetrică g a valorilor singulare. Cum F şi F^T au aceleaşi valori singulare, $W(F^T) = W(F)$. Un exemplu obiectiv, dar anizotrop, este

$$W(F) = \frac{k}{2}\Big(\|Fa_0\|^2 - 1\Big)^2.$$

Cu $a_0 = e_1$ şi $F = I + \gamma e_1 \otimes e_2$ avem $\|Fa_0\| = 1$, dar $\left\|F^T a_0\right\| = \sqrt{1+\gamma^2}$, deci $W(F^T) \neq W(F)$.

Nivelul C

5.C.1 *(energia Hencky: tensiuni principale, coeficientul Poisson, modulul Young)* Fie energia Hencky

$$W_H(F) = \mu \,\|\operatorname{dev}\log U\|^2 + \frac{\kappa}{2}(\operatorname{tr}\log U)^2, \qquad \mu, \kappa > 0.$$

(a) Arătaţi că W_H este obiectivă şi izotropă şi că se separă într-o parte izocoră şi una volumetrică. Puneţi $\ell_i = \log \lambda_i$. (b) Arătaţi că

$$\sigma_i = \frac{1}{J}\left[2\mu\left(\ell_i - \frac{1}{3}\log J\right) + \kappa \log J\right], \qquad \log J = \ell_1 + \ell_2 + \ell_3.$$

(c) Pentru extensia uniaxială cu feţe laterale libere, $\sigma_2 = \sigma_3 = 0$, $\lambda_2 = \lambda_3$, determinaţi raportul ℓ_2/ℓ_1 şi deduceţi, în regim de deformaţii mici, coeficientul Poisson şi modulul Young. Verificaţi numeric pentru $\mu = 1$, $\kappa = 2$.
Indicaţie. § 2.9, § 5.14.5 şi § 5.19.
Răspuns. Cu $d_i = \ell_i - \frac{1}{3}\sum_k \ell_k$,

$$W_H = \mu \sum_i d_i^2 + \frac{\kappa}{2}\left(\sum_i \ell_i\right)^2.$$

Din $\sigma_2 = 0$ rezultă

$$\frac{\ell_2}{\ell_1} = -\nu, \qquad \nu = \frac{3\kappa - 2\mu}{2(3\kappa + \mu)},$$

$$E_Y = \frac{9\kappa\mu}{3\kappa + \mu}.$$

Pentru $\mu = 1$, $\kappa = 2$,

$$\nu = \frac{2}{7} \approx 0.2857, \qquad E_Y = \frac{18}{7} \approx 2.5714.$$

5.C.2 *(forfecare simplă neo-Hookeană incompresibilă şi efectul Poynting)* Fie $F = I + \gamma e_1 \otimes e_2$,

$\gamma > 0$, şi un material neo-Hookean incompresibil cu

$$\sigma = -pI + \mu B.$$

(a) Calculaţi J, C, B şi invarianţii I_1, I_2, I_3 ai lui C; verificaţi că deformarea este izocoră. (b) Impunând $\sigma_{33} = 0$, determinaţi p şi scrieţi σ. (c) Arătaţi că $\sigma_{12} = \mu\gamma$, dar apar tensiuni normale nenule:

$$\sigma_{11} - \sigma_{22} = \mu\gamma^2 = \gamma\sigma_{12}.$$

Interpretaţi efectul Poynting şi comparaţi cu teoria liniară. (d) Calculaţi P şi S şi precizaţi tracţiunea nominală pe faţa $X_2 = \text{const}$.
Indicaţie. § 5.20; $B = FF^T$ are $B_{11} = 1 + \gamma^2$. Pentru (d), $P = J\sigma F^{-T}$ şi $S = F^{-1}P$.
Răspuns.

$$J = 1,$$

$$C = I + \gamma(e_1 \otimes e_2 + e_2 \otimes e_1) + \gamma^2 e_2 \otimes e_2,$$

$$B = I + \gamma(e_1 \otimes e_2 + e_2 \otimes e_1) + \gamma^2 e_1 \otimes e_1,$$

$$I_1 = I_2 = 3 + \gamma^2, \qquad I_3 = 1.$$

Din $\sigma_{33} = 0$ rezultă $p = \mu$, deci

$$\sigma = \mu(B - I) = \mu \begin{pmatrix} \gamma^2 & \gamma & 0 \\ \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Astfel $\sigma_{12} = \mu\gamma$, $\sigma_{11} = \mu\gamma^2$, $\sigma_{22} = 0$. Mai mult,

$$P = \mu \begin{pmatrix} 0 & \gamma & 0 \\ \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad S = \mu \begin{pmatrix} -\gamma^2 & \gamma & 0 \\ \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Pe faţa materială de normală $N = e_2$, $PN = \mu\gamma e_1$.

5.C.3 *(incompresibilitate, multiplicatorul p şi testul echibiaxial)* Fie un material neo-Hookean incompresibil, pentru care

$$W(F) = \frac{\mu}{2}(I_1 - 3)$$

este definit pe $\{F \in GL^+(3) : \det F = 1\}$. (a) Explicaţi de ce legea constitutivă determină σ numai până la un termen sferic şi scrieţi $\sigma = -pI + \mu B$; ce rol joacă p? (b) Consideraţi testul echibiaxial

$$F = \operatorname{diag}(\lambda, \lambda, \lambda^{-2}), \qquad \lambda > 0,$$

cu faţa de normală e_3 liberă. Calculaţi J, B, p şi $\sigma_{11} = \sigma_{22}$. (c) Calculaţi tensiunea nominală P_{11} şi forţa necesară pe o faţă de referinţă de arie A_0; apoi linearizaţi pentru $\lambda = 1 + \epsilon$ şi verificaţi consistenţa cu $E_Y = 3\mu$, $\nu = 1/2$.
Indicaţie. § 5.21 şi § 5.16; $P = J\sigma F^{-T}$ cu $J = 1$.
Răspuns. Constrângerea $\det F = 1$ lasă nedeterminat constitutiv un termen sferic; p este

multiplicator Lagrange şi se determină din echilibru şi condiţiile la limită. Pentru testul echibiaxial,

$$J = 1, \qquad B = \mathrm{diag}(\lambda^2, \lambda^2, \lambda^{-4}).$$

Din $\sigma_{33} = 0$ rezultă

$$p = \mu\lambda^{-4}, \qquad \sigma_{11} = \sigma_{22} = \mu(\lambda^2 - \lambda^{-4}).$$

Tensiunea nominală este

$$P_{11} = \frac{\sigma_{11}}{\lambda} = \mu(\lambda - \lambda^{-5}),$$

iar forţa este $P_{11}A_0$. Pentru $\lambda = 1 + \epsilon$,

$$\sigma_{11} = 6\mu\epsilon + O(\epsilon^2),$$

în acord cu formula echibiaxială $\sigma_{11} \approx E_Y\epsilon/(1-\nu) = 6\mu\epsilon$.

Capitolul 6

Elasticitatea liniarizată: de la teoria finită la ecuaţiile Navier–Lamé

Surse şi orientare. Liniarizarea este tratată ca aproximaţie a teoriei finite, în spiritul lui Ciarlet [3]; problemele clasice de bară sunt dezvoltate prin calcule tridimensionale elementare, cu repere în [7, 10].

6.1 Liniarizarea în jurul configuraţiei naturale

Considerăm o familie de deformări

$$\varphi_\varepsilon(X) = X + \varepsilon u(X), \qquad F_\varepsilon = I + \varepsilon \nabla u,$$

unde $\varepsilon > 0$ este un parametru mic. Vom identifica termenii de ordinul ε ai mărimilor neliniare, păstrând în calcule ordinul restului. Astfel, liniarizarea va rezulta din dezvoltări precise, nu din eliminarea informală a termenilor consideraţi mici.

6.1.1 Gradient, determinant şi cofactor

Pentru orice matrice $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ avem identitatea exactă

$$\det(I + \varepsilon A) = 1 + \varepsilon \operatorname{tr} A + \frac{\varepsilon^2}{2}\Big[(\operatorname{tr} A)^2 - \operatorname{tr}(A^2)\Big] + \varepsilon^3 \det A.$$

Aplicând formula lui $A = \nabla u$,

$$J_\varepsilon = 1 + \varepsilon \operatorname{div} u + \frac{\varepsilon^2}{2}\Big[(\operatorname{div} u)^2 - \operatorname{tr}((\nabla u)^2)\Big] + \varepsilon^3 \det \nabla u.$$

În particular,

$$\frac{d}{d\varepsilon} J_\varepsilon \Big|_{\varepsilon=0} = \operatorname{div} u.$$

Pentru inversă folosim seria Neumann. Dacă $|\varepsilon|\,\|A\| < 1$, atunci

$$(I + \varepsilon A)^{-1} = I - \varepsilon A + \varepsilon^2 A^2 + O(\varepsilon^3 \|A\|^3).$$

Cum $\operatorname{Cof} F = J F^{-T}$, rezultă

$$\operatorname{Cof} F_\varepsilon = I + \varepsilon\Big[(\operatorname{div} u) I - (\nabla u)^T\Big] + O(\varepsilon^2).$$

6.1.2 Tensorul Green–Saint Venant şi deformaţia infinitesimală

Calculul este exact:

$$\begin{aligned} C_\varepsilon &= F_\varepsilon^T F_\varepsilon \\ &= I + \varepsilon(\nabla u + \nabla u^T) + \varepsilon^2 \nabla u^T \nabla u, \end{aligned}$$

şi deci

$$E_\varepsilon := \frac{1}{2}(C_\varepsilon - I) = \varepsilon e(u) + \frac{\varepsilon^2}{2} \nabla u^T \nabla u, \qquad \boxed{e(u) := \operatorname{sym} \nabla u.}$$

Aceasta este originea tensorului deformaţiilor infinitesimale. Partea antisimetrică skew ∇u descrie rotaţia infinitesimală şi nu apare în termenul de ordin întâi al lui E_ε.

6.1.3 Liniarizarea energiei hiperelastice

Pentru a obţine energia tangentă în jurul configuraţiei de referinţă, presupunem

$$W(I) = 0, \qquad DW(I) = 0,$$

şi $W \in C^2$ într-o vecinătate a lui I. Pentru $F_\varepsilon = I + \varepsilon H$, formula Taylor dă

$$W(I + \varepsilon H) = \frac{\varepsilon^2}{2} D^2 W(I)[H, H] + o(\varepsilon^2).$$

Termenul de ordinul întâi lipseşte deoarece $DW(I) = 0$. Prin urmare energia liniarizată este determinată de forma pătratică

$$H \longmapsto \frac{1}{2} D^2 W(I)[H, H].$$

Obiectivitatea impune ca forma tangentă să nu depindă de partea antisimetrică a lui H. Verificăm separat termenii pur antisimetrici şi termenii de cuplaj. Fie $A^T = -A$ şi

$$Q_t = \exp(tA) \in SO(3).$$

Din obiectivitate,

$$W(Q_t) = W(I).$$

Derivând de două ori în t la $t = 0$ şi folosind $DW(I) = 0$, obţinem

$$D^2 W(I)[A, A] = 0.$$

Pentru termenul mixt fixăm o matrice arbitrară H şi folosim identitatea

$$W\Big(Q_t(I + sH)\Big) = W(I + sH).$$

Derivăm mai întâi în s la $s = 0$:

$$DW(Q_t)[Q_t H] = DW(I)[H].$$

Membrul drept este zero. Derivând apoi în t la $t = 0$ rezultă

$$D^2W(I)[A, H] + DW(I)[AH] = 0.$$

Din nou $DW(I) = 0$, deci

$$D^2W(I)[A, H] = 0 \qquad \text{pentru orice } A^T = -A,\ H \in \mathbb{R}^{3\times 3}.$$

Scriem acum $H = E + A$, cu $E = \operatorname{sym} H$ şi $A = \operatorname{skew} H$. Biliniaritatea lui $D^2W(I)$ dă

$$\begin{aligned} D^2W(I)[H, H] &= D^2W(I)[E, E] + 2D^2W(I)[E, A] + D^2W(I)[A, A] \\ &= D^2W(I)[E, E]. \end{aligned}$$

Prin urmare forma tangentă depinde numai de

$$e = \operatorname{sym} H.$$

Forma explicită a acestei energii pentru un material izotrop nu o postulăm aici. O vom deduce mai jos din teorema de reprezentare a operatorilor liniari izotropi pe Sym(3). Aceasta evită introducerea legii lui Hooke de două ori.

6.1.4 Compatibilitatea Saint–Venant în două dimensiuni

Teorema 6.1.1 (compatibilitate Saint–Venant în plan)**.** *Fie $\omega \subset \mathbb{R}^2$ deschis simplu conex şi fie $e \in C^2(\omega; \operatorname{Sym}(2))$. Există $u \in C^3(\omega; \mathbb{R}^2)$ cu $e = \operatorname{sym} \nabla u$ dacă şi numai dacă*

$$\partial_{22} e_{11} + \partial_{11} e_{22} - 2\partial_{12} e_{12} = 0.$$

Deplasarea este determinată până la o mişcare rigidă infinitesimală $u(x) = a + Wx$, $W^T = -W$.

Demonstraţie. Necesitatea. Dacă $e = \operatorname{sym} \nabla u$, atunci

$$e_{11} = u_{1,1}, \qquad e_{22} = u_{2,2}, \qquad 2e_{12} = u_{1,2} + u_{2,1}.$$

Derivăm şi obţinem

$$\begin{aligned} \partial_{22} e_{11} + \partial_{11} e_{22} - 2\partial_{12} e_{12} &= u_{1,122} + u_{2,211} - u_{1,212} - u_{2,121} \\ &= 0, \end{aligned}$$

deoarece derivatele mixte de ordin trei comută pentru $u \in C^3$. În particular, condiţia din enunţ este necesară.

Suficienţa. Acesta este pasul care cere construcţia deplasării. Dacă $e = \operatorname{sym} \nabla u$, putem scrie formal

$$\nabla u = \begin{pmatrix} e_{11} & e_{12} - \zeta \\ e_{12} + \zeta & e_{22} \end{pmatrix},$$

unde $\zeta = \frac{1}{2}(u_{2,1} - u_{1,2})$ este rotaţia infinitezimală scalară. Căutăm mai întâi ζ astfel încât cele două linii ale matricei de mai sus să fie câmpuri gradient.

Pentru prima linie condiţia de integrabilitate este

$$\partial_2 e_{11} = \partial_1(e_{12} - \zeta),$$

adică

$$\partial_1 \zeta = \partial_1 e_{12} - \partial_2 e_{11}.$$

Pentru a doua linie cerem

$$\partial_2(e_{12} + \zeta) = \partial_1 e_{22},$$

deci

$$\partial_2 \zeta = \partial_1 e_{22} - \partial_2 e_{12}.$$

Definim astfel câmpul

$$g = \Big(\partial_1 e_{12} - \partial_2 e_{11},\ \partial_1 e_{22} - \partial_2 e_{12}\Big).$$

Condiţia ca g să fie gradient este $\partial_2 g_1 = \partial_1 g_2$. Calculând,

$$\begin{aligned} \partial_2 g_1 - \partial_1 g_2 &= \partial_{12} e_{12} - \partial_{22} e_{11} - \partial_{11} e_{22} + \partial_{12} e_{12} \\ &= -\Big(\partial_{22} e_{11} + \partial_{11} e_{22} - 2\partial_{12} e_{12}\Big) = 0. \end{aligned}$$

Cum ω este simplu conex, lema lui Poincaré pentru câmpuri conservative furnizează o funcţie scalară $\zeta \in C^2(\omega)$ cu $\nabla \zeta = g$.

Considerăm apoi câmpurile

$$r_1 = (e_{11}, e_{12} - \zeta), \qquad r_2 = (e_{12} + \zeta, e_{22}).$$

Relaţiile care definesc ζ dau

$$\partial_2 (r_1)_1 = \partial_1 (r_1)_2, \qquad \partial_2 (r_2)_1 = \partial_1 (r_2)_2.$$

Pe domeniul simplu conex, fiecare r_i este deci gradientul unei funcţii u_i. Punând $u = (u_1, u_2)$ obţinem exact

$$\nabla u = \begin{pmatrix} e_{11} & e_{12} - \zeta \\ e_{12} + \zeta & e_{22} \end{pmatrix}, \qquad \operatorname{sym} \nabla u = e.$$

Dacă u şi $\widetilde{u}$ produc acelaşi e, atunci $\operatorname{sym} \nabla(u - \widetilde{u}) = 0$. Teorema rigidităţii infinitezimale din Capitolul 2 arată că diferenţa este o mişcare rigidă infinitesimală $a + Wx$. □

Forma tridimensională a compatibilităţii. În trei dimensiuni, dacă un câmp simetric $e = (e_{ij})$ provine dintr-o deplasare, $e = \operatorname{sym} \nabla u$, atunci derivatele sale satisfac identităţile

Saint–Venant

$$\boxed{\partial_{kl}e_{ij} + \partial_{ij}e_{kl} - \partial_{ik}e_{jl} - \partial_{jl}e_{ik} = 0, \qquad i,j,k,l \in \{1,2,3\}.}$$

Ele pot fi condensate tensorial sub forma $\operatorname{Curl}\operatorname{Curl} e = 0$ (cu convenţia adecvată pentru Curl pe matrici). Din simetriile indicilor rezultă şase condiţii independente în trei dimensiuni. Demonstraţia suficienţei pe domenii simplu conexe este mai tehnică decât cazul plan şi nu este necesară pentru argumentele de existenţă din capitolul următor; o folosim aici numai ca reper geometric.

6.2 Reprezentarea tensorului elastic izotrop

În teoria liniară, o lege elastică omogenă are forma

$$\sigma = \mathbb{C}[e],$$

unde $\mathbb{C} : \operatorname{Sym}(3) \to \operatorname{Sym}(3)$ este liniară. Izotropia cere

$$\mathbb{C}[QEQ^T] = Q\mathbb{C}[E]Q^T \qquad \forall Q \in SO(3),\ E \in \operatorname{Sym}(3).$$

Teorema 6.2.1 (forma legii lui Hooke izotrope)**.** *Orice operator liniar izotrop* $\mathbb{C} : \operatorname{Sym}(3) \to \operatorname{Sym}(3)$ *are forma*

$$\mathbb{C}[E] = 2\mu E + \lambda \operatorname{tr}(E) I$$

pentru două constante $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

Demonstraţie. Descompunem mai întâi orice tensor simetric în partea sferică şi partea deviatorică:

$$E = \frac{1}{3}\operatorname{tr}(E) I + \operatorname{dev} E, \qquad \operatorname{Sym}(3) = \mathbb{R}I \oplus \operatorname{Sym}_0(3), \qquad \operatorname{Sym}_0(3) = \{E \in \operatorname{Sym}(3) : \operatorname{tr} E = 0\}.$$

Vom determina separat acţiunea lui $\mathbb{C}$ pe cele două subspaţii.

1. Partea sferică. Deoarece $QIQ^T = I$ pentru orice $Q \in SO(3)$, izotropia dă

$$\mathbb{C}[I] = Q\mathbb{C}[I]Q^T \qquad \forall Q \in SO(3).$$

Aşadar matricea simetrică $A := \mathbb{C}[I]$ este invariantă la conjugarea cu orice rotaţie:

$$QAQ^T = A \qquad \forall Q \in SO(3).$$

Explicăm de ce aceasta obligă matricea A să fie scalară. Fie q un vector propriu unitar al lui A, $Aq = \alpha q$. Pentru orice vector unitar n există o rotaţie Q cu $n = Qq$. Din $QAQ^T = A$ rezultă echivalent $AQ = QA$, iar atunci

$$An = AQq = QAq = \alpha Qq = \alpha n.$$

Deci orice direcţie unitară este vector propriu pentru aceeaşi valoare proprie α, ceea ce înseamnă $A = \alpha I$. Scriem convenabil $\alpha = 3K$:

$$\mathbb{C}[I] = 3KI.$$

Prin liniaritate,

$$\mathbb{C}[\alpha I] = 3K\alpha I = K\,\mathrm{tr}(\alpha I)I.$$

2. Un tensor deviatoric diagonal. Considerăm

$$D = \mathrm{diag}(1, -1, 0).$$

Rotaţiile de unghi π în jurul axelor coordonatelor sunt

$$R_1 = \mathrm{diag}(1, -1, -1), \quad R_2 = \mathrm{diag}(-1, 1, -1), \quad R_3 = \mathrm{diag}(-1, -1, 1).$$

Pentru fiecare dintre ele avem $R_i D R_i^T = D$. Prin izotropie,

$$R_i \mathbb{C}[D] R_i^T = \mathbb{C}[D].$$

Scriem $\mathbb{C}[D] = (c_{ij})$. Dacă $R = \mathrm{diag}(r_1, r_2, r_3)$, atunci

$$(R\mathbb{C}[D]R^T)_{ij} = r_i r_j c_{ij}.$$

Pentru $R_1 = \mathrm{diag}(1, -1, -1)$, invarianta $R_1\mathbb{C}[D]R_1^T = \mathbb{C}[D]$ dă

$$c_{12} = -c_{12}, \qquad c_{13} = -c_{13},$$

deci $c_{12} = c_{13} = 0$. Pentru $R_2 = \mathrm{diag}(-1, 1, -1)$ obţinem în acelaşi mod

$$c_{23} = -c_{23},$$

deci $c_{23} = 0$. Cum $\mathbb{C}[D]$ este simetrică, dispar şi componentele transpuselor lor. Prin urmare

$$\mathbb{C}[D] = \mathrm{diag}(a, b, c).$$

Alegem acum rotaţia

$$Q_{12} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \in SO(3).$$

Ea schimbă primele două axe şi satisface

$$Q_{12} D Q_{12}^T = -D.$$

Pe de o parte, prin izotropie,

$$\mathbb{C}[-D] = Q_{12}\mathbb{C}[D]Q_{12}^T = \operatorname{diag}(b, a, c).$$

Pe de altă parte, prin liniaritatea lui $\mathbb{C}$,

$$\mathbb{C}[-D] = -\mathbb{C}[D] = \operatorname{diag}(-a, -b, -c).$$

Comparând componentele obţinem $b = -a$ şi $c = 0$. Există deci o constantă μ astfel încât

$$\mathbb{C}[D] = 2\mu D.$$

Am notat coeficientul cu 2μ pentru a ajunge la convenţia folosită în legea lui Hooke.

3. Toate tensorele deviatorice. Prin permutarea ciclică a axelor, realizată de o rotaţie din $SO(3)$, obţinem aceeaşi relaţie pentru

$$D_{23} = \operatorname{diag}(0, 1, -1): \qquad \mathbb{C}[D_{23}] = 2\mu D_{23}.$$

Orice matrice diagonală cu urmă zero,

$$D_0 = \operatorname{diag}(d_1, d_2, d_3), \qquad d_1 + d_2 + d_3 = 0,$$

se scrie

$$D_0 = d_1 D - d_3 D_{23}.$$

Prin liniaritate rezultă

$$\mathbb{C}[D_0] = 2\mu D_0.$$

Fie acum $E_0 \in \operatorname{Sym}_0(3)$ arbitrar. Teorema spectrală furnizează $Q \in SO(3)$ şi un D_0 diagonal cu urmă zero astfel încât

$$E_0 = QD_0Q^T.$$

Atunci izotropia şi relaţia demonstrată pentru D_0 dau

$$\mathbb{C}[E_0] = Q\mathbb{C}[D_0]Q^T = 2\mu QD_0Q^T = 2\mu E_0.$$

4. Reunirea celor două părţi. Aplicăm liniaritatea descompunerii lui E:

$$\begin{aligned}\mathbb{C}[E] &= \mathbb{C}[\operatorname{dev} E] + \mathbb{C}\Big[\frac{1}{3}\operatorname{tr}(E)I\Big] \\ &= 2\mu \operatorname{dev} E + K \operatorname{tr}(E)I \\ &= 2\mu E + \Big(K - \frac{2\mu}{3}\Big)\operatorname{tr}(E)I.\end{aligned}$$

Punând

$$\lambda := K - \frac{2\mu}{3}$$

obţinem

$$\mathbb{C}[E] = 2\mu E + \lambda \operatorname{tr}(E) I,$$

care este formula din enunţ. □

6.2.1 Pozitivitatea energiei

Energia pătratică asociată legii izotrope este

$$W_{lin}(E) = \frac{1}{2}\langle \mathbb{C}[E], E\rangle = \mu \|E\|^2 + \frac{\lambda}{2}(\operatorname{tr} E)^2.$$

Pentru a vedea separat contribuţia de forfecare şi cea volumetrică, scriem

$$E = \operatorname{dev} E + \frac{1}{3}\operatorname{tr}(E) I.$$

Cele două părţi sunt ortogonale în produsul Frobenius, deoarece $\operatorname{tr}(\operatorname{dev} E) = 0$. Cum $\|I\|^2 = 3$,

$$\|E\|^2 = \|\operatorname{dev} E\|^2 + \frac{1}{3}(\operatorname{tr} E)^2.$$

Introducând această identitate în energie,

$$\begin{aligned} W_{lin}(E) &= \mu \|\operatorname{dev} E\|^2 + \left(\frac{\mu}{3} + \frac{\lambda}{2}\right)(\operatorname{tr} E)^2 \\ &= \mu \|\operatorname{dev} E\|^2 + \frac{1}{6}(3\lambda + 2\mu)(\operatorname{tr} E)^2. \end{aligned}$$

Cele două variabile pot fi testate independent. Dacă E este nenul şi fără urmă, atunci $W_{lin}(E) = \mu \|E\|^2$, deci pozitivitatea pentru toate asemenea matrice impune $\mu > 0$. Dacă $E = \alpha I$, atunci $\operatorname{dev} E = 0$ şi energia este pozitivă pentru orice $\alpha \neq 0$ exact când $3\lambda + 2\mu > 0$. Reciproc, dacă aceste două inegalităţi sunt satisfăcute, ambii termeni din ultima expresie sunt nenegativi şi nu se pot anula simultan decât pentru $E = 0$. Prin urmare

$$W_{lin}(E) > 0 \quad \forall E \in \operatorname{Sym}(3) \setminus \{0\}$$

este echivalent cu

$$\boxed{\mu > 0, \qquad 3\lambda + 2\mu > 0.}$$

6.2.2 Legea lui Hooke şi operatorul Navier–Lamé

Din teorema de reprezentare avem

$$\sigma = \mathbb{C}[e] = 2\mu e + \lambda \operatorname{tr}(e) I.$$

Pentru $e = e(u) = \operatorname{sym} \nabla u$, urma lui $e(u)$ este $\operatorname{div} u$, deci

$$\boxed{\sigma(u) = 2\mu e(u) + \lambda (\operatorname{div} u) I.}$$

Scriem formula şi în componente, deoarece ea va fi folosită la derivarea ecuaţiei diferenţiale:

$$\sigma_{ij} = \mu(\partial_j u_i + \partial_i u_j) + \lambda(\partial_k u_k)\delta_{ij}.$$

Presupunem λ, μ constante. Atunci

$$\begin{aligned}(\operatorname{div}\sigma)_i &= \partial_j \sigma_{ij} \\ &= \mu\partial_j\partial_j u_i + \mu\partial_j\partial_i u_j + \lambda\partial_i\partial_k u_k \\ &= \mu\Delta u_i + (\lambda+\mu)\partial_i(\operatorname{div} u).\end{aligned}$$

Prin urmare

$$\boxed{\operatorname{div}\sigma = \mu\Delta u + (\lambda+\mu)\nabla \operatorname{div} u.}$$

În echilibru static, dacă f este densitatea forţei de volum, ecuaţia $-\operatorname{div}\sigma = f$ devine

$$\boxed{-\mu\Delta u - (\lambda+\mu)\nabla \operatorname{div} u = f.} \tag{6.1}$$

Acesta este operatorul Navier–Lamé. Formula va fi folosită în capitolele următoare pentru formularea variaţională şi pentru problema dinamică.

6.3 Constante inginereşti şi conversii

Pentru un test uniaxial în direcţia e_1 impunem

$$\sigma = \begin{pmatrix} \Sigma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Starea de tensiune este invariantă la orice rotaţie în jurul axei e_1. Pentru un material izotrop, aceeaşi simetrie este transportată de legea constitutivă asupra deformaţiei, astfel încât deformaţiile transversale trebuie să coincidă. Scriem deci, motivat de izotropie şi nu ca simplu ansatz,

$$e = \operatorname{diag}(\varepsilon, -\nu\varepsilon, -\nu\varepsilon).$$

Din legea lui Hooke rezultă

$$0 = 2\mu(-\nu\varepsilon) + \lambda(1-2\nu)\varepsilon,$$

deci

$$\nu = \frac{\lambda}{2(\lambda+\mu)}.$$

Prima componentă dă $\Sigma = E_Y\varepsilon$ cu

$$E_Y = \frac{\mu(3\lambda+2\mu)}{\lambda+\mu}.$$

Invers,

$$\mu = \frac{E_Y}{2(1+\nu)}, \qquad \lambda = \frac{E_Y \nu}{(1+\nu)(1-2\nu)}.$$

Modulul volumetric este

$$K = \lambda + \frac{2\mu}{3} = \frac{E_Y}{3(1-2\nu)}.$$

Condiţiile de pozitivitate sunt echivalente, pentru $E_Y > 0$, cu

$$-1 < \nu < \frac{1}{2}.$$

Limita $\nu \uparrow 1/2$ corespunde incompresibilităţii şi $K \to \infty$.

Pentru liniarizarea legii constitutive în jurul unei stări naturale şi pentru relaţia dintre teoria finită şi elasticitatea liniară, vezi [3].

6.4 Legea inversă a lui Hooke

Forma directă

$$\sigma = 2\mu e + \lambda \operatorname{tr}(e) I$$

exprimă tensiunea în funcţie de deformaţie. Pentru reducerile plane şi pentru problemele în care tensiunea este prescrisă avem nevoie şi de relaţia inversă. O deducem algebric, fără a introduce o nouă lege constitutivă.

Luând urma relaţiei de mai sus şi folosind $\operatorname{tr} I = 3$, obţinem

$$\operatorname{tr}\sigma = 2\mu \operatorname{tr} e + 3\lambda \operatorname{tr} e = (3\lambda + 2\mu) \operatorname{tr} e.$$

Deoarece $3\lambda + 2\mu > 0$ pentru o energie pozitiv definită, putem izola urma deformaţiei:

$$\operatorname{tr} e = \frac{\operatorname{tr}\sigma}{3\lambda + 2\mu}.$$

Revenim apoi în legea lui Hooke:

$$\begin{aligned} 2\mu e &= \sigma - \lambda \operatorname{tr}(e) I \\ &= \sigma - \frac{\lambda}{3\lambda + 2\mu} (\operatorname{tr}\sigma) I. \end{aligned}$$

Prin împărţire la 2μ,

$$e = \frac{1}{2\mu}\sigma - \frac{\lambda}{2\mu(3\lambda + 2\mu)} (\operatorname{tr}\sigma) I.$$

Relaţiile dintre constantele elastice deduse în secţiunea precedentă dau

$$\frac{1}{2\mu} = \frac{1+\nu}{E_Y}, \qquad \frac{\lambda}{2\mu(3\lambda+2\mu)} = \frac{\nu}{E_Y}.$$

Prin urmare

$$\boxed{e = \frac{1+\nu}{E_Y}\sigma - \frac{\nu}{E_Y}(\operatorname{tr}\sigma)I.}$$

Această formulă este aceeaşi lege izotropă liniară, scrisă cu e ca necunoscută. O vom folosi mai jos la deformaţia plană, tensiunea plană şi extensia unei bare.

6.5 Forma dinamică, elipticitatea şi problema mixtă

Ecuaţia statică Navier–Lamé a fost dedusă în (6.1). Pentru problema dinamică se adaugă termenul de inerţie:

$$\rho\ddot{u} - \mu\Delta u - (\lambda+\mu)\nabla \operatorname{div} u = f. \tag{6.2}$$

Afirmaţiile de elipticitate şi hiperbolicitate cer ipoteze precise. Simbolul principal al operatorului static, în direcţia $\xi \neq 0$, este

$$\mathcal{A}(\xi) = \mu\,|\xi|^2\, I + (\lambda+\mu)\xi\otimes\xi.$$

Pe subspaţiul $\xi^{\perp}$ valorile proprii sunt $\mu\,|\xi|^2$, iar în direcţia ξ valoarea proprie este $(\lambda+2\mu)\,|\xi|^2$. Aşadar operatorul este puternic eliptic dacă şi numai dacă

$$\boxed{\mu > 0, \qquad \lambda + 2\mu > 0.}$$

Pozitivitatea energiei pe toate matricile simetrice, condiţia folosită mai sus, este mai puternică: $\mu > 0$ şi $3\lambda + 2\mu > 0$; ea implică $\lambda + 2\mu > 0$. Pentru $\rho > 0$, aceleaşi două valori proprii dau vitezele reale ale modurilor transversale şi longitudinale din problema dinamică, ceea ce conduce la caracterul hiperbolic discutat riguros în Capitolul 8.

Problema clasică mixtă. Pentru a vorbi despre o problemă la limită trebuie să precizăm şi datele pe frontieră. Scriem $\partial\Omega = \overline{\Gamma_D} \cup \overline{\Gamma_N}$, cu interioare relative disjuncte, şi considerăm

$$-\operatorname{div}\sigma(u) = f \quad \text{în } \Omega, \qquad u = u_D \quad \text{pe } \Gamma_D, \qquad \sigma(u)n = g \quad \text{pe } \Gamma_N,$$

unde $\sigma(u) = 2\mu e(u) + \lambda\operatorname{tr}(e(u))I$. În acest capitol folosim această formulare pentru calcule clasice. În Capitolul 7 vom introduce, înainte de utilizare, spaţiile Sobolev, urma la frontieră, inegalitatea lui Korn şi teorema Lax–Milgram şi vom demonstra existenţa şi unicitatea soluţiei slabe. Cazul $\Gamma_D = \varnothing$ are un nucleu format din mişcări rigide infinitezimale şi necesită condiţii de echilibru ale încărcărilor; acest fapt va fi demonstrat în Capitolul 7.

6.6 Deformaţie plană şi tensiune plană

Cele două reduceri bidimensionale pornesc din ipoteze fizice diferite şi nu trebuie confundate.

6.6.1 Deformaţie plană

Presupunem

$$u = (u_1(x_1, x_2), u_2(x_1, x_2), 0), \qquad \partial_3 u = 0.$$

Atunci $e_{33} = e_{13} = e_{23} = 0$, dar tensiunea transversală nu este în general nulă:

$$\sigma_{33} = \lambda(e_{11} + e_{22}).$$

În termenii constantelor inginereşti, folosind $\lambda = E_Y\nu/[(1+\nu)(1-2\nu)]$ şi $\mu = E_Y/[2(1+\nu)]$, relaţia plană se scrie

$$\begin{pmatrix}\sigma_{11}\\ \sigma_{22}\\ \sigma_{12}\end{pmatrix} = \frac{E_Y}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{pmatrix}1-\nu & \nu & 0\\ \nu & 1-\nu & 0\\ 0 & 0 & 1-2\nu\end{pmatrix} \begin{pmatrix}e_{11}\\ e_{22}\\ e_{12}\end{pmatrix}.$$

În deformaţie plană este adesea mai util să exprimăm tensiunea transversală direct prin tensiunile din plan. Din forma inversă a legii lui Hooke şi condiţia $e_{33} = 0$ rezultă

$$0 = \frac{1+\nu}{E_Y}\sigma_{33} - \frac{\nu}{E_Y}(\sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33}),$$

de unde

$$\boxed{\sigma_{33} = \nu(\sigma_{11} + \sigma_{22}).}$$

Aceasta modelează, de exemplu, un corp foarte lung constrâns în direcţia x_3.

6.6.2 Tensiune plană

Pentru o placă subţire cu feţe libere se impune

$$\sigma_{33} = \sigma_{13} = \sigma_{23} = 0.$$

Condiţia $\sigma_{33} = 0$ dă

$$(2\mu + \lambda)e_{33} = -\lambda(e_{11} + e_{22}), \qquad e_{33} = -\frac{\lambda}{2\mu+\lambda}(e_{11} + e_{22}).$$

Înlocuind în legea tridimensională,

$$\sigma_{\alpha\beta} = 2\mu e_{\alpha\beta} + \lambda_{ps}(e_{11} + e_{22})\delta_{\alpha\beta}, \qquad \lambda_{ps} = \frac{2\mu\lambda}{2\mu+\lambda} = \frac{E_Y\nu}{1-\nu^2}, \quad \alpha, \beta \in \{1, 2\}.$$

Echivalent, în constante inginereşti,

$$\begin{pmatrix}\sigma_{11}\\ \sigma_{22}\\ \sigma_{12}\end{pmatrix} = \frac{E_Y}{1-\nu^2} \begin{pmatrix}1 & \nu & 0\\ \nu & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1-\nu\end{pmatrix} \begin{pmatrix}e_{11}\\ e_{22}\\ e_{12}\end{pmatrix}.$$

Din forma inversă rezultă şi relaţia utilă

$$\boxed{e_{33} = -\frac{\nu}{E_Y}(\sigma_{11} + \sigma_{22}).}$$

Aşadar aceeaşi pereche (E_Y, ν) produce operatori bidimensionali diferiţi în deformaţie plană şi tensiune plană. Pentru calcule este util să ştim cum se transformă parametrii atunci când vrem să reutilizăm formal aceeaşi matrice constitutivă bidimensională.

Dacă pornim de la formula de *tensiune plană* şi vrem să obţinem matricea de *deformaţie plană*, facem substituţiile

$$\boxed{E_Y \mapsto \frac{E_Y}{1-\nu^2}, \qquad \nu \mapsto \frac{\nu}{1-\nu}.}$$

Reciproc, pentru a transforma formal formula de deformaţie plană în cea de tensiune plană,

$$\boxed{E_Y \mapsto E_Y \frac{1+2\nu}{(1+\nu)^2}, \qquad \nu \mapsto \frac{\nu}{1+\nu}.}$$

În ambele transformări modulul de forfecare $\mu = E_Y/[2(1+\nu)]$ rămâne neschimbat. Verificarea este pur algebrică: substituind prima pereche în matricea de tensiune plană se obţin coeficienţii $E_Y(1-\nu)/[(1+\nu)(1-2\nu)]$ şi $E_Y\nu/[(1+\nu)(1-2\nu)]$ ai deformaţiei plane; pentru a doua pereche calculul este invers.

6.7 Extensia unei bare prismatice

Considerăm o bară dreaptă

$$\Omega = \omega \times (0, L),$$

unde secţiunea transversală $\omega \subset \mathbb{R}^2$ este perpendiculară pe axa e_3. Aplicăm calculul uniaxial folosit la definirea constantelor inginereşti, dar orientăm axa de încărcare după e_3. Pentru starea omogenă

$$\sigma = \Sigma\, e_3 \otimes e_3 = \operatorname{diag}(0, 0, \Sigma)$$

rezultă

$$e = \operatorname{diag}(-\nu\alpha, -\nu\alpha, \alpha), \qquad \alpha := \frac{\Sigma}{E_Y}.$$

Pentru bară mai trebuie construit un câmp de deplasare pe întregul domeniu şi dedusă relaţia dintre forţa rezultantă şi alungirea capetelor.

Tensorul e este constant. O alegere fără rotaţie rigidă este $\nabla u = e$, adică

$$\partial_1 u_1 = -\nu\alpha, \qquad \partial_2 u_2 = -\nu\alpha, \qquad \partial_3 u_3 = \alpha,$$

iar toate celelalte derivate din această alegere sunt nule. Integrarea dă

$$u_1 = -\nu\alpha X_1 + c_1, \qquad u_2 = -\nu\alpha X_2 + c_2, \qquad u_3 = \alpha X_3 + c_3.$$

Constanta vectorială c este o translaţie rigidă. Fixând originea deplasărilor, luăm $c = 0$ şi

obţinem

$$\boxed{u(X) = (-\nu\alpha X_1, -\nu\alpha X_2, \alpha X_3).}$$

Dacă n este normala unei feţe laterale, atunci $\langle n, e_3\rangle = 0$, deci

$$\sigma n = \Sigma e_3 \langle e_3, n\rangle = 0.$$

Câmpul este astfel compatibil cu feţe laterale libere. Pe capătul $X_3 = L$, unde $n = e_3$, tracţiunea este $t = \Sigma e_3 = E_Y \alpha e_3$.

Dacă $A_\omega := \mathcal{L}^3(\omega)$ este aria secţiunii, forţa axială rezultantă este

$$N = \int_\omega \langle t, e_3\rangle \, dA = E_Y \alpha A_\omega.$$

Deplasarea axială dintre cele două capete este

$$\Delta L = u_3(X_1, X_2, L) - u_3(X_1, X_2, 0) = \alpha L,$$

deci $\alpha = \Delta L / L$. Eliminând α rezultă

$$\boxed{N = \frac{E_Y A_\omega}{L}\, \Delta L.}$$

Coeficientul $E_Y A_\omega / L$ este rigiditatea axială a barei în acest model. Relaţia unidimensională forţă–alungire este astfel obţinută din starea tridimensională de tensiune şi din cinematica deplasării.

6.8 Cilindrul gros sub presiune: soluţia Lamé

Considerăm un cilindru lung, cu raze $a < b$, şi o stare axisimetrică de deformaţie plană. Coordonatele cilindrice sunt (r, θ, z), iar

$$e_r = (\cos\theta, \sin\theta, 0), \qquad e_\theta = (-\sin\theta, \cos\theta, 0).$$

Căutăm un câmp de deplasare pur radial,

$$u(r, \theta, z) = u_r(r) e_r.$$

Deducem mai jos atât deformaţiile, cât şi ecuaţia radială de echilibru, pentru a nu folosi formule de coordonate cilindrice fără justificare. Formulele Lamé obţinute la final sunt cele clasice; vezi, de exemplu, [27].

Deformaţiile. Derivând baza cilindrică după θ,

$$\partial_\theta e_r = e_\theta, \qquad \partial_\theta e_\theta = -e_r.$$

Pe direcţia radială, $\partial_r u = u_r' e_r$. Pe direcţia circumferenţială, o variaţie $d\theta$ are lungimea fizică $r\,d\theta$, iar

$$\frac{1}{r}\partial_\theta u = \frac{u_r}{r} e_\theta.$$

Prin urmare, în baza ortonormată (e_r, e_θ, e_z),

$$\nabla u = u_r'\, e_r \otimes e_r + \frac{u_r}{r}\, e_\theta \otimes e_\theta.$$

Matricea este simetrică, deci $e(u) = \nabla u$ şi

$$\boxed{e_{rr} = u_r', \qquad e_{\theta\theta} = \frac{u_r}{r}, \qquad e_{zz} = 0.}$$

Aceeaşi formulă pentru $e_{\theta\theta}$ se poate vedea direct pe un arc: lungimea $r\,d\theta$ devine $(r + u_r)d\theta$, iar variaţia relativă este u_r/r. Nu apar componente de forfecare din cauza simetriei axiale.

Tensiunile. Avem

$$\operatorname{tr} e = u_r' + \frac{u_r}{r}.$$

Legea lui Hooke dă

$$\begin{aligned}
\sigma_{rr} &= 2\mu u_r' + \lambda\left(u_r' + \frac{u_r}{r}\right),\\
\sigma_{\theta\theta} &= 2\mu\frac{u_r}{r} + \lambda\left(u_r' + \frac{u_r}{r}\right),\\
\sigma_{zz} &= \lambda\left(u_r' + \frac{u_r}{r}\right).
\end{aligned}$$

Ultima relaţie foloseşte $e_{zz} = 0$. Deformaţia plană nu implică $\sigma_{zz} = 0$; constrângerea axială poate produce o tensiune axială nenulă.

Ecuaţia radială de echilibru. Pentru a deduce componenta radială a lui $\operatorname{div}\sigma$, considerăm un sector inelar de unghi $d\theta$, grosime dr şi lungime unitară în direcţia z. Pe feţele r şi $r + dr$, rezultanta radială este, la primul ordin,

$$\begin{aligned}
&\Big(\sigma_{rr}(r) + \sigma_{rr}'(r)dr\Big)(r + dr)d\theta - \sigma_{rr}(r) r\, d\theta\\
&\qquad = \Big(r\sigma_{rr}' + \sigma_{rr}\Big)dr\, d\theta + o(dr\, d\theta).
\end{aligned}$$

Pe cele două feţe de unghi constant acţionează tensiunile circumferenţiale. Normalele acestor feţe diferă cu unghiul $d\theta$, iar suma componentelor lor radiale este

$$-\sigma_{\theta\theta}\, dr\, d\theta + o(dr\, d\theta).$$

Suma forţelor radiale trebuie să fie zero. După împărţirea prin $r\, dr\, d\theta$ şi trecerea la limită obţinem

$$\boxed{\frac{d\sigma_{rr}}{dr} + \frac{\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta}}{r} = 0.}$$

Acesta este termenul radial al ecuaţiei $\operatorname{div}\sigma = 0$ pentru un tensor axisimetric diagonal.

Substituim acum legea constitutivă. Derivata primei tensiuni este

$$\begin{aligned}\frac{d\sigma_{rr}}{dr} &= (2\mu+\lambda)u_r'' + \lambda\frac{d}{dr}\left(\frac{u_r}{r}\right)\\ &= (2\mu+\lambda)u_r'' + \lambda\left(\frac{u_r'}{r} - \frac{u_r}{r^2}\right),\end{aligned}$$

iar diferenţa tensiunilor este

$$\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta} = 2\mu\left(u_r' - \frac{u_r}{r}\right).$$

Prin urmare

$$\begin{aligned}0 &= \frac{d\sigma_{rr}}{dr} + \frac{\sigma_{rr}-\sigma_{\theta\theta}}{r}\\ &= (\lambda+2\mu)\left(u_r'' + \frac{1}{r}u_r' - \frac{1}{r^2}u_r\right).\end{aligned}$$

Cum $\lambda + 2\mu > 0$, rezultă

$$\boxed{u_r'' + \frac{1}{r}u_r' - \frac{1}{r^2}u_r = 0.}$$

Căutăm soluţii de forma $u_r = r^m$. Atunci

$$u_r' = mr^{m-1}, \qquad u_r'' = m(m-1)r^{m-2},$$

şi ecuaţia devine

$$(m^2-1)r^{m-2} = 0.$$

Valorile $m = 1$ şi $m = -1$ dau soluţia generală

$$\boxed{u_r(r) = Ar + \frac{B}{r}.}$$

Pentru acest câmp,

$$u_r' = A - \frac{B}{r^2}, \qquad \frac{u_r}{r} = A + \frac{B}{r^2}, \qquad u_r' + \frac{u_r}{r} = 2A.$$

De aici

$$\sigma_{zz} = 2\lambda A,$$

constantă în r, iar

$$\begin{aligned}\sigma_{rr} &= 2(\lambda+\mu)A - \frac{2\mu B}{r^2},\\ \sigma_{\theta\theta} &= 2(\lambda+\mu)A + \frac{2\mu B}{r^2}.\end{aligned}$$

Notăm

$$C_1 = 2(\lambda + \mu)A, \qquad C_2 = 2\mu B.$$

Atunci

$$\sigma_{rr} = C_1 - \frac{C_2}{r^2}, \qquad \sigma_{\theta\theta} = C_1 + \frac{C_2}{r^2}.$$

Condiţiile de presiune sunt

$$\sigma_{rr}(a) = -p_i, \qquad \sigma_{rr}(b) = -p_o,$$

adică

$$C_1 - \frac{C_2}{a^2} = -p_i, \qquad C_1 - \frac{C_2}{b^2} = -p_o.$$

Scăzând cele două relaţii,

$$C_2 \left(\frac{1}{b^2} - \frac{1}{a^2} \right) = p_o - p_i,$$

de unde

$$C_2 = \frac{a^2 b^2 (p_i - p_o)}{b^2 - a^2}.$$

Apoi

$$C_1 = -p_o + \frac{C_2}{b^2} = \frac{p_i a^2 - p_o b^2}{b^2 - a^2}.$$

Obţinem formulele Lamé

$$\boxed{\sigma_{rr}(r) = \frac{p_i a^2 - p_o b^2}{b^2 - a^2} - \frac{a^2 b^2 (p_i - p_o)}{(b^2 - a^2) r^2},}$$

$$\boxed{\sigma_{\theta\theta}(r) = \frac{p_i a^2 - p_o b^2}{b^2 - a^2} + \frac{a^2 b^2 (p_i - p_o)}{(b^2 - a^2) r^2}.}$$

Dacă $p_i > p_o$, termenul cu r^{-2} este pozitiv în $\sigma_{\theta\theta}$ şi descreşte odată cu r. Prin urmare tensiunea circumferenţială maximă apare la $r = a$, pe peretele interior.

6.9 Sferă groasă sub presiune

Considerăm corpul sferic $a < r < b$, solicitat de presiuni p_i şi p_o. Prin simetrie căutăm o deplasare radială

$$u(x) = u_r(r) e_r, \qquad r = \|x\|.$$

Deducem componentele deformaţiei fără a apela la formule memorate în coordonate sferice. Un segment material radial de lungime dr devine, la primul ordin,

$$dr + u_r'(r) dr = (1 + u_r'(r)) dr,$$

aşadar deformaţia normală radială este

$$e_{rr} = u_r'.$$

Pentru o direcţie tangentă, luăm un arc material care subîntinde un unghi mic $d\theta$. Lungimea iniţială este $r\,d\theta$. După deplasarea radială, punctele de pe sferă se află la raza $r + u_r(r)$, iar lungimea arcului devine $(r + u_r(r))d\theta$. Deformaţia relativă este deci

$$\frac{(r + u_r)d\theta - r\,d\theta}{r\,d\theta} = \frac{u_r}{r}.$$

Pe sferă există două direcţii tangenţiale ortogonale, echivalente prin simetrie. Prin urmare

$$e_{rr} = u_r', \qquad e_{\theta\theta} = e_{\varphi\varphi} = \frac{u_r}{r}.$$

Urma tensorului deformaţiei este

$$\operatorname{tr} e = u_r' + 2\frac{u_r}{r},$$

unde factorul 2 provine tocmai din cele două direcţii tangenţiale. Legea lui Hooke conduce la

$$\sigma_{rr} = (\lambda + 2\mu)u_r' + 2\lambda\frac{u_r}{r},$$
$$\sigma_{\theta\theta} = \sigma_{\varphi\varphi} = \lambda u_r' + 2(\lambda + \mu)\frac{u_r}{r}.$$

Deducem acum ecuaţia radială de echilibru. Datorită simetriei sferice, tensorul tensiune se poate scrie

$$\sigma = \sigma_{\theta\theta}(r)I + \Big(\sigma_{rr}(r) - \sigma_{\theta\theta}(r)\Big)e_r \otimes e_r.$$

Folosim $e_r = x/r$, unde $r = \|x\|$. Pentru a nu folosi formulele radiale fără justificare, le deducem în coordonate carteziene. Avem

$$(e_r)_i = \frac{x_i}{r}, \qquad \partial_j r = \frac{x_j}{r} = (e_r)_j.$$

Prin regula raportului,

$$\begin{aligned}\partial_j (e_r)_i = \partial_j \left(\frac{x_i}{r}\right) &= \frac{\delta_{ij}}{r} - \frac{x_i}{r^2}\partial_j r \\ &= \frac{1}{r}\left(\delta_{ij} - (e_r)_i (e_r)_j\right).\end{aligned}$$

Aceasta este exact identitatea matricială

$$\nabla e_r = \frac{1}{r}(I - e_r \otimes e_r).$$

Luând urma obţinem

$$\operatorname{div} e_r = \frac{1}{r}(3 - \|e_r\|^2) = \frac{2}{r},$$

iar înmulţind matricea ∇e_r cu e_r rezultă

$$(\nabla e_r)e_r = \frac{1}{r}(e_r - \|e_r\|^2 e_r) = 0.$$

Ultima relaţie exprimă faptul că direcţia radială nu se schimbă atunci când ne deplasăm pe aceeaşi rază. Pentru o funcţie radială $f = f(r)$ avem $\nabla f = f'(r)e_r$ şi deci $\langle \nabla f, e_r \rangle = f'$.

Aplicând regula produsului componentă cu componentă,

$$\begin{aligned}\operatorname{div}\Big(fe_r \otimes e_r\Big) &= \langle \nabla f, e_r\rangle e_r + f\Big[(\nabla e_r)e_r + (\operatorname{div} e_r)e_r\Big] \\ &= \left(f' + \frac{2f}{r}\right) e_r.\end{aligned}$$

Luăm

$$f = \sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta}.$$

De asemenea, $\operatorname{div}(\sigma_{\theta\theta} I) = \nabla\sigma_{\theta\theta} = \sigma'_{\theta\theta} e_r$. Prin urmare

$$\begin{aligned}\operatorname{div}\sigma &= \sigma'_{\theta\theta} e_r + \left[(\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta})' + \frac{2}{r}(\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta})\right] e_r \\ &= \left[\sigma'_{rr} + \frac{2}{r}(\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta})\right] e_r.\end{aligned}$$

În absenţa forţelor de volum, $\operatorname{div}\sigma = 0$, astfel că ecuaţia radială este

$$\boxed{\frac{d\sigma_{rr}}{dr} + \frac{2}{r}(\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta}) = 0.}$$

Factorul 2 provine din relaţia $\operatorname{div} e_r = 2/r$, adică din existenţa celor două direcţii tangenţiale ale sferei. Calculăm acum

$$\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta} = 2\mu\left(u'_r - \frac{u_r}{r}\right)$$

şi

$$\frac{d\sigma_{rr}}{dr} = (\lambda + 2\mu)u''_r + 2\lambda\left(\frac{u'_r}{r} - \frac{u_r}{r^2}\right).$$

Înlocuirea dă

$$(\lambda + 2\mu)\left(u''_r + \frac{2}{r}u'_r - \frac{2}{r^2}u_r\right) = 0,$$

deci

$$\boxed{u''_r + \frac{2}{r}u'_r - \frac{2}{r^2}u_r = 0.}$$

Cu $u_r = r^m$, obţinem

$$m(m-1) + 2m - 2 = m^2 + m - 2 = (m-1)(m+2) = 0,$$

aşadar

$$u_r(r) = Ar + \frac{B}{r^2}.$$

Avem $u'_r = A - 2B/r^3$ şi $u_r/r = A + B/r^3$, deci

$$\operatorname{tr} e = \left(A - \frac{2B}{r^3}\right) + 2\left(A + \frac{B}{r^3}\right) = 3A.$$

Folosind $K = \lambda + 2\mu/3$, rezultă

$$\sigma_{rr} = 3KA - \frac{4\mu B}{r^3}, \qquad \sigma_{\theta\theta} = 3KA + \frac{2\mu B}{r^3}.$$

Condiţiile $\sigma_{rr}(a) = -p_i$, $\sigma_{rr}(b) = -p_o$ dau

$$B = \frac{(p_i - p_o)a^3b^3}{4\mu(b^3 - a^3)}, \qquad A = \frac{p_i a^3 - p_o b^3}{3K(b^3 - a^3)}.$$

Prin urmare

$$\sigma_{rr}(r) = \frac{p_i a^3 - p_o b^3}{b^3 - a^3} - \frac{(p_i - p_o)a^3b^3}{(b^3 - a^3)r^3},$$

$$\sigma_{\theta\theta}(r) = \frac{p_i a^3 - p_o b^3}{b^3 - a^3} + \frac{(p_i - p_o)a^3b^3}{2(b^3 - a^3)r^3}.$$

Comparând cu cilindrul, observăm că termenul singular este acum r^{-3}, nu r^{-2}. Diferenţa provine exclusiv din geometrie: în sferă există două direcţii circumferenţiale.

6.10 Torsiunea unei bare circulare

Construirea deplasării din rotaţia secţiunilor

Fixăm de aici înainte axa barei ca fiind e_3. Presupunem că secţiunea de la abscisa x_3 se roteşte cu un unghi mic ϑx_3 în jurul lui e_3, unde ϑ este unghiul de torsiune pe unitatea de lungime. Pentru $x_\perp = (x_1, x_2, 0)$,

$$u = (\vartheta x_3 e_3) \times x_\perp = \vartheta x_3(-x_2, x_1, 0).$$

Deci

$$\nabla u = \vartheta \begin{pmatrix} 0 & -x_3 & -x_2 \\ x_3 & 0 & x_1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

iar prin simetrizare termenii $\pm\vartheta x_3$ dispar şi rămân

$$e_{13} = e_{31} = -\frac{\vartheta x_2}{2}, \qquad e_{23} = e_{32} = \frac{\vartheta x_1}{2}.$$

Cum $\operatorname{tr} e = 0$, legea Hooke izotropă dă

$$\sigma_{13} = -\mu\vartheta x_2, \qquad \sigma_{23} = \mu\vartheta x_1.$$

Verificarea feţei laterale libere

Pe mantaua $x_1^2 + x_2^2 = R^2$, normala este $n = (x_1/R, x_2/R, 0)$. Atunci

$$(\sigma n)_3 = -\mu\vartheta x_2 \frac{x_1}{R} + \mu\vartheta x_1 \frac{x_2}{R} = 0,$$

iar celelalte componente sunt nule deoarece $n_3 = 0$. Deci $\sigma n = 0$ exact pe suprafaţa laterală.

Momentul de torsiune

Pe secţiunea terminală cu normală e_3 avem $t = \sigma e_3 = (\sigma_{13}, \sigma_{23}, 0)$. Momentul elementar în jurul axei este

$$\langle x_\perp \times t, e_3 \rangle = x_1 t_2 - x_2 t_1 = \mu\vartheta(x_1^2 + x_2^2).$$

Definim momentul polar de arie

$$I_p := \int_\omega (x_1^2 + x_2^2)\, dA.$$

Prin integrare,

$$\boxed{T = \mu I_p \vartheta.}$$

Pentru un disc de rază R,

$$I_p = \int_0^{2\pi} \int_0^R r^3\, dr\, d\theta = \frac{\pi R^4}{2}.$$

Dacă unghiul total dintre capetele unei bare de lungime L este Θ, atunci $\vartheta = \Theta/L$ şi

$$T = \frac{\mu I_p}{L}\Theta.$$

Pentru secţiunea circulară obţinem astfel cazul particular al problemei Saint–Venant. Legătura cu funcţia de deplanare este discutată în secţiunea următoare; vezi [19, 27].

6.11 Torsiunea Saint–Venant pentru o secţiune generală

Ansatz cu deplanare şi calculul deformaţiilor

Pentru o secţiune care nu este circulară, rotaţia rigidă a fiecărei secţiuni nu poate satisface în general condiţia de tracţiune laterală nulă. Introducem de aceea o deplasare axială suplimentară, numită deplanare:

$$u_1 = -\vartheta x_2 x_3, \qquad u_2 = \vartheta x_1 x_3, \qquad u_3 = \vartheta\psi(x_1, x_2).$$

Calculăm toate derivatele care intră în $e = \operatorname{sym} \nabla u$:

$$\partial_3 u_1 = -\vartheta x_2, \quad \partial_1 u_3 = \vartheta\psi_{,1}, \quad \partial_3 u_2 = \vartheta x_1, \quad \partial_2 u_3 = \vartheta\psi_{,2}.$$

Prin urmare

$$2e_{13} = \vartheta(\psi_{,1} - x_2), \qquad 2e_{23} = \vartheta(\psi_{,2} + x_1),$$

în timp ce $e_{11} = e_{22} = e_{33} = e_{12} = 0$. Deoarece $\operatorname{tr} e = 0$, legea lui Hooke furnizează

$$\sigma_{13} = \mu\vartheta(\psi_{,1} - x_2), \qquad \sigma_{23} = \mu\vartheta(\psi_{,2} + x_1).$$

Pe mantaua laterală, normala are forma $n = (n_1, n_2, 0)$. Singura componentă posibil nenulă a tracţiunii este

$$(\sigma n)_3 = \sigma_{31} n_1 + \sigma_{32} n_2 = \mu\vartheta[(\psi_{,1} - x_2)n_1 + (\psi_{,2} + x_1)n_2].$$

Condiţia $\sigma n = 0$ este deci echivalentă cu

$$\frac{\partial \psi}{\partial n} = x_2 n_1 - x_1 n_2 \quad \text{pe } \partial\omega.$$

Aceasta explică de unde provine condiţia Neumann din formularea variaţională care urmează.

Formularea cu funcţia de deplanare este standard în problema Saint–Venant [19]. După calculul cinematic de mai sus, energia depinde numai de gradientul lui ψ: Densitatea de energie elastică liniară este

$$W_{\text{lin}}(e) = \mu \|e\|^2 + \frac{\lambda}{2}(\operatorname{tr} e)^2.$$

Cum $\operatorname{tr} e = 0$ şi matricea simetrică are componentele $e_{13} = e_{31}$, $e_{23} = e_{32}$,

$$\|e\|^2 = 2e_{13}^2 + 2e_{23}^2.$$

Prin substituţie,

$$W_{\text{lin}} = \frac{\mu\vartheta^2}{2}\left[(\partial_1\psi - x_2)^2 + (\partial_2\psi + x_1)^2\right].$$

Energia pe unitatea de lungime este deci

$$\mathcal{E}(\psi) = \frac{\mu\vartheta^2}{2}\int_\omega \left[(\partial_1\psi - x_2)^2 + (\partial_2\psi + x_1)^2\right] dx_1 dx_2.$$

Pentru a obţine ecuaţia lui ψ, perturbăm ψ prin $\psi_t = \psi + t\eta$. Atunci

$$\frac{d}{dt}\mathcal{E}(\psi_t)\Big|_{t=0} = \mu\vartheta^2 \int_\omega [(\partial_1\psi - x_2)\partial_1\eta + (\partial_2\psi + x_1)\partial_2\eta] dx.$$

La un minimizator această expresie este zero pentru orice η. Introducem vectorul

$$q = (\partial_1\psi - x_2, \partial_2\psi + x_1).$$

Atunci condiţia variaţională este $\int_\omega \langle q, \nabla\eta\rangle = 0$. Integrarea prin părţi dă

$$\int_\omega \langle q, \nabla\eta\rangle = -\int_\omega (\operatorname{div} q)\eta\, dx + \int_{\partial\omega} (\langle q, n\rangle)\eta\, ds.$$

Dar

$$\operatorname{div} q = \partial_{11}\psi - \partial_1 x_2 + \partial_{22}\psi + \partial_2 x_1 = \Delta\psi.$$

Separăm riguros cele două concluzii. Mai întâi alegem $\eta \in C_c^\infty(\omega)$; termenul de frontieră

dispare şi lema fundamentală a calculului variaţional dă

$$\boxed{\Delta\psi = 0 \quad \text{în } \omega.}$$

Revenim apoi la variaţii netede arbitrare până la frontieră. Folosind ecuaţia din interior, identitatea variaţională se reduce la

$$\int_{\partial\omega} (\langle q, n\rangle)\eta \, ds = 0 \qquad \forall \eta,$$

şi rezultă condiţia naturală

$$\boxed{\langle q, n\rangle = 0 \quad \text{pe } \partial\omega,}$$

adică

$$\frac{\partial\psi}{\partial n} = x_2 n_1 - x_1 n_2.$$

Pentru compatibilitatea problemei Neumann calculăm integrala datelor de frontieră. Prin teorema divergenţei aplicată câmpului $(x_2, -x_1)$,

$$\begin{aligned}\int_{\partial\omega} (x_2 n_1 - x_1 n_2)\, ds &= \int_\omega \operatorname{div}(x_2, -x_1)\, dx \\ &= \int_\omega (\partial_1 x_2 - \partial_2 x_1)\, dx \\ &= 0.\end{aligned}$$

Condiţia de compatibilitate necesară este deci satisfăcută. Nu invocăm aici o teoremă de existenţă pentru problema Neumann, deoarece spaţiile Sobolev, Poincaré–Wirtinger şi Lax–Milgram vor fi introduse sistematic abia în Capitolul 7. În acest capitol am dedus riguros problema la limită pe care trebuie să o satisfacă funcţia de deplanare; existenţa ei în clasa energetică va fi un exemplu direct al metodei variaţionale din capitolul următor. Pentru cazul circular nu avem nevoie de acel rezultat general: dacă discul este centrat în origine, $n = (x_1, x_2)/R$, iar data Neumann este identic zero, astfel încât alegerea explicită $\psi = 0$ satisface ecuaţia şi condiţia laterală. Aceasta explică absenţa deplanării pentru secţiunea circulară.

6.12 Încovoierea pură: de la cinematică la formula lui Navier

6.12.1 Încovoierea Euler–Bernoulli: de la ipoteza cinematică la tensiunea normală

Modelul Euler–Bernoulli este un model redus de grindă. Fie X_1 coordonata de-a lungul grinzii şi X_2 coordonata în direcţia încovoirii. Pentru pante mici, ipoteza Bernoulli spune că secţiunile plane rămân plane şi ortogonale axei deformate. Dacă deplasarea transversală a axei este $w(X_1)$, rotaţia secţiunii este aproximativ $w'(X_1)$; un punct aflat la distanţa X_2 de

axă capătă deplasarea axială $u_1 = -X_2 w'(X_1)$. Luăm deci

$$u_1 = -X_2 w'(X_1), \qquad u_2 = w(X_1), \qquad u_3 = 0.$$

Derivatele relevante sunt $u_{1,1} = -X_2 w''$, $u_{1,2} = -w'$ şi $u_{2,1} = w'$. De aceea

$$e_{11} = -X_2 w'', \qquad e_{12} = \frac{1}{2}(u_{1,2} + u_{2,1}) = 0.$$

Trebuie să distingem cinematica de mai sus de o soluţie tridimensională exactă. Pe feţe laterale libere nu impunem $e_{22} = e_{33} = 0$; efectul Poisson produce, în general, deformaţii laterale. În modelul redus adoptăm o stare de tensiune uniaxială, $\sigma_{22} = \sigma_{33} = 0$. Legea inversă a lui Hooke dă $e_{11} = \sigma_{11}/E_Y$ şi $e_{22} = e_{33} = -\nu\sigma_{11}/E_Y$. Relaţia axială redusă este deci $\sigma_{11} = E_Y e_{11} = -E_Y X_2 w''$; deformaţiile laterale nu sunt nule în modelul tridimensional. Rezultanta axială este $N = \int_A \sigma_{11} dA = -E_Y w'' \int_A X_2 dA = 0$ dacă axa trece prin centrul de greutate. Momentul încovoietor este

$$M = \int_A (-X_2)\sigma_{11}\, dA = E_Y w'' \int_A X_2^2 dA = E_Y I w''.$$

Aceasta produce formula curbură–moment. Dacă semnul convenţiei pentru M este invers, apare $M = -E_Y I w''$; importantă este consistenţa semnelor în ecuaţiile de echilibru. Formula tensiunii se poate rescrie $\sigma_{11} = -MX_2/I$, cunoscută ca formula lui Navier; vezi [20, 27].

6.13 Ecuaţia Euler–Bernoulli şi echilibrul unei grinzi

Pentru a fixa semnele, dezvoltăm echilibrul pe elementul $[x, x+\Delta x]$. Pe faţa stângă acţionează rezultantele interne $-V(x)$ şi $-M(x)$, iar pe dreapta $V(x+\Delta x)$ şi $M(x+\Delta x)$ în convenţia aleasă. Sarcina distribuită are rezultanta

$$\int_x^{x+\Delta x} q(s)ds = q(x)\Delta x + o(\Delta x).$$

Echilibrul forţelor transversale dă

$$-V(x) + V(x+\Delta x) + q(x)\Delta x + o(\Delta x) = 0.$$

Folosind dezvoltarea Taylor $V(x+\Delta x) = V(x) + V'(x)\Delta x + o(\Delta x)$, împărţind prin Δx şi trecând la limită, obţinem $V' + q = 0$.

Pentru momente faţă de capătul stâng, momentul sarcinii distribuite este de ordin $q(x)(\Delta x)^2/2$, deci după împărţirea prin Δx dispare în limita locală. Avem

$$-M(x) + M(x+\Delta x) - V(x+\Delta x)\Delta x + O((\Delta x)^2) = 0.$$

Înlocuind dezvoltările Taylor şi simplificând rezultă $M' - V = 0$. Cele două relaţii locale sunt astfel

$$V = M', \qquad M'' = -q,$$

cu semnele corespunzătoare convenţiei adoptate. Numai după acest pas introducem relaţia constitutiv-cinematică $M = E_Y I w''$.

Trecerea de la echilibrul tridimensional la modelul de grindă este o reducere dimensională; în acest curs o folosim la nivel elementar, prin echilibrul rezultantelor, iar pentru tratări sistematice ale barelor elastice vezi [16, 20]. Combinând relaţiile deja deduse $V = M'$, $V' + q = 0$ şi $M = E_Y I w''$, obţinem

$$E_Y I w'''' = M'' = V' = -q.$$

Aşadar, pentru convenţia de semn fixată aici,

$$\boxed{E_Y I w'''' = -q.}$$

Un autor care defineşte sarcina pozitivă în sens opus obţine semnul opus; ceea ce contează este consistenţa dintre convenţiile pentru q, V, M şi w.

6.14 Problemă rezolvată: grindă simplu rezemată sub sarcină uniformă

Considerăm

$$E_Y I w'''' = -q_0 \quad \text{pe } (0, L),$$

cu condiţii de reazem simplu

$$w(0) = w(L) = 0, \qquad M(0) = M(L) = 0.$$

Cum $M = E_Y I w''$, ultimele două condiţii sunt echivalente cu $w''(0) = w''(L) = 0$.

Integrăm ecuaţia de patru ori. Prima integrare dă

$$w'''(x) = -\frac{q_0}{E_Y I} x + C_1.$$

A doua,

$$w''(x) = -\frac{q_0}{2E_Y I} x^2 + C_1 x + C_2.$$

Din $w''(0) = 0$ rezultă $C_2 = 0$, iar din $w''(L) = 0$,

$$0 = -\frac{q_0 L^2}{2E_Y I} + C_1 L, \qquad C_1 = \frac{q_0 L}{2E_Y I}.$$

A treia integrare furnizează

$$w'(x) = -\frac{q_0}{6E_Y I} x^3 + \frac{q_0 L}{4E_Y I} x^2 + C_3.$$

A patra,

$$w(x) = -\frac{q_0}{24E_Y I} x^4 + \frac{q_0 L}{12E_Y I} x^3 + C_3 x + C_4.$$

Din $w(0) = 0$ rezultă $C_4 = 0$. Condiţia $w(L) = 0$ dă

$$0 = -\frac{q_0 L^4}{24 E_Y I} + \frac{q_0 L^4}{12 E_Y I} + C_3 L,$$

aşadar $C_3 = -q_0 L^3/(24 E_Y I)$. În concluzie,

$$\boxed{w(x) = -\frac{q_0}{24 E_Y I}\left(x^4 - 2Lx^3 + L^3 x\right).}$$

Pentru a localiza deplasarea maximă derivăm:

$$w'(x) = -\frac{q_0}{24 E_Y I}\left(4x^3 - 6Lx^2 + L^3\right).$$

Factorizăm polinomul din derivată:

$$4x^3 - 6Lx^2 + L^3 = (2x - L)(2x^2 - 2Lx - L^2).$$

Rădăcinile factorului pătratic sunt

$$x = \frac{L}{2}(1 \pm \sqrt{3}),$$

una negativă, cealaltă mai mare decât L. Prin urmare singurul punct critic din intervalul $(0, L)$ este $x = L/2$. Cum $w(0) = w(L) = 0$, acesta este punctul în care modulul deplasării atinge maximul global. Evaluarea dă

$$\begin{aligned} w\left(\frac{L}{2}\right) &= -\frac{q_0}{24 E_Y I}\left(\frac{L^4}{16} - \frac{L^4}{4} + \frac{L^4}{2}\right) \\ &= -\frac{5 q_0 L^4}{384 E_Y I}. \end{aligned}$$

Aşadar

$$\boxed{\|w\|_{L^\infty(0,L)} = \frac{5\,|q_0|\,L^4}{384 E_Y I}}$$

în convenţia de semn adoptată.

6.15 Flexiune cu forţă transversală şi tensiuni de forfecare

Dacă M variază cu x, echilibrul elementului de grindă dă $V = M'$ (până la convenţia de semn). Prin urmare o variaţie a momentului implică o forţă tăietoare nenulă. În modelul tridimensional, această forţă trebuie să fie rezultanta unor tensiuni de forfecare:

$$V = \int_\omega \sigma_{12}\, dA$$

în cazul unei flexiuni în planul corespunzător. În flexiunea generală Saint–Venant apar deci şi tensiuni de forfecare: tensiunea normală σ_{11} nu poate singură echilibra o forţă transversală.

6.16 Principiul Saint–Venant: interpretare matematică

Două sisteme de încărcări aplicate la capătul unei bare sunt static echivalente dacă au aceeaşi forţă şi acelaşi moment rezultant. Principiul Saint–Venant afirmă, calitativ, că diferenţele locale dintre asemenea încărcări influenţează în principal o vecinătate a capătului, iar la distanţă răspunsul este dominat de rezultantele globale. În teoria matematică acest principiu este legat de estimări de decădere a energiei elastice. Pentru cursul nostru îl folosim ca motivaţie a soluţiilor elementare de extensie, torsiune şi încovoiere, nu ca substitut pentru o teoremă de existenţă tridimensională; vezi discuţiile clasice din [3, 7].

6.17 Problema plană şi funcţia de tensiune Airy

Considerăm, pentru simplitate, o problemă plană fără forţe de volum pe un domeniu $\omega \subset \mathbb{R}^2$ simplu conex. Ipoteza de simplă conexitate este cea care permite reprezentarea globală a oricărui câmp de tensiune plan, simetric şi echilibrat printr-o singură funcţie Airy; pe domenii multiplu conexe pot apărea condiţii globale suplimentare. Ecuaţiile de echilibru sunt

$$\partial_1 \sigma_{11} + \partial_2 \sigma_{12} = 0, \qquad \partial_1 \sigma_{12} + \partial_2 \sigma_{22} = 0.$$

Introducem funcţia de tensiune Airy χ prin

$$\boxed{\sigma_{11} = \chi_{,22}, \qquad \sigma_{22} = \chi_{,11}, \qquad \sigma_{12} = -\chi_{,12}.}$$

Verificăm ambele ecuaţii de echilibru. Pentru prima,

$$\partial_1 \sigma_{11} + \partial_2 \sigma_{12} = \chi_{,122} - \chi_{,212} = 0,$$

deoarece $\chi_{,122} = \chi_{,212}$. Pentru a doua,

$$\partial_1 \sigma_{12} + \partial_2 \sigma_{22} = -\chi_{,112} + \chi_{,211} = 0,$$

deoarece $\chi_{,112} = \chi_{,211}$. Astfel reprezentarea prin χ satisface automat cele două ecuaţii de echilibru.

Rămâne compatibilitatea deformaţiilor. O deducem în cazul de tensiune plană; cazul de deformaţie plană conduce la aceeaşi ecuaţie biharmonică, cu un factor elastic global diferit. Legea inversă în tensiune plană este

$$e_{11} = \frac{1}{E_Y}(\sigma_{11} - \nu\sigma_{22}), \qquad e_{22} = \frac{1}{E_Y}(\sigma_{22} - \nu\sigma_{11}), \qquad e_{12} = \frac{1+\nu}{E_Y}\sigma_{12}.$$

Folosim condiţia de compatibilitate din Teorema 6.1.1. După înlocuirea legii inverse şi a

reprezentării Airy, obţinem

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{1}{E_Y}\Big[\partial_{22}(\chi_{,22} - \nu\chi_{,11}) + \partial_{11}(\chi_{,11} - \nu\chi_{,22}) + 2(1+\nu)\chi_{,1122}\Big] \\ &= \frac{1}{E_Y}\Big[\chi_{,2222} + \chi_{,1111} + (-2\nu + 2 + 2\nu)\chi_{,1122}\Big] \\ &= \frac{1}{E_Y}\Big(\chi_{,1111} + 2\chi_{,1122} + \chi_{,2222}\Big). \end{aligned}$$

Prin urmare

$$\boxed{\Delta^2\chi = 0.}$$

Biharmonicitatea nu rezultă numai din echilibru: echilibrul permite introducerea lui χ, iar ecuaţia de ordin patru apare după combinarea legii constitutive cu compatibilitatea deformaţiilor.

În deformaţie plană, legea inversă conduce la

$$e_{11} + e_{22} = c(\sigma_{11} + \sigma_{22}) = c\,\Delta\chi, \qquad c = \frac{(1+\nu)(1-2\nu)}{E_Y},$$

în timp ce în tensiune plană $c = (1-\nu)/E_Y$. Condiţia de compatibilitate, folosind echilibrul, se poate rescrie $\Delta(e_{11} + e_{22}) = 0$; în ambele cazuri constanta nenulă c se factorizează şi rezultă aceeaşi ecuaţie $\Delta^2\chi = 0$.

Exemplu: încovoiere pură. Pentru un moment constant M şi moment de inerţie I, alegem

$$\chi(x_1, x_2) = -\frac{M}{6I}x_2^3.$$

Atunci

$$\sigma_{11} = \chi_{,22} = -\frac{M}{I}x_2, \qquad \sigma_{22} = \chi_{,11} = 0, \qquad \sigma_{12} = -\chi_{,12} = 0,$$

şi $\Delta^2\chi = 0$. Astfel funcţia Airy recuperează imediat distribuţia liniară a tensiunii din încovoierea pură.

6.18 Problema Saint–Venant de torsiune în formularea funcţiei de tensiune

Fixăm din nou axa barei ca fiind e_3. Reprezentăm tensiunile de forfecare prin funcţia Prandtl Ψ:

$$\boxed{\sigma_{13} = \partial_2 \Psi, \qquad \sigma_{23} = -\partial_1 \Psi.}$$

Atunci echilibrul axial este satisfăcut identic,

$$\partial_1 \sigma_{13} + \partial_2 \sigma_{23} = \Psi_{,21} - \Psi_{,12} = 0.$$

Pe frontiera laterală, condiţia de tracţiune nulă în direcţia axei este

$$\sigma_{31} n_1 + \sigma_{32} n_2 = \Psi_{,2} n_1 - \Psi_{,1} n_2 = 0.$$

Dacă $t = (-n_2, n_1)$ este tangenta orientată la $\partial\omega$, membrul stâng este chiar $\langle \nabla\Psi, t\rangle = \partial_t \Psi$. Aşadar Ψ este constantă pe fiecare componentă conexă a frontierei. Pentru o secţiune simplu conexă putem normaliza această constantă la zero:

$$\Psi = 0 \qquad \text{pe } \partial\omega.$$

Deducem acum ecuaţia din interior. Din legea Hooke, deoarece numai tensiunile de forfecare sunt relevante,

$$e_{13} = \frac{\sigma_{13}}{2\mu} = \frac{\Psi_{,2}}{2\mu}, \qquad e_{23} = \frac{\sigma_{23}}{2\mu} = -\frac{\Psi_{,1}}{2\mu}.$$

Pe de altă parte, cinematica de torsiune cu deplanare din Secţiunea 6.11 dă

$$2e_{13} = \vartheta(\psi_{,1} - x_2), \qquad 2e_{23} = \vartheta(\psi_{,2} + x_1).$$

Derivăm prima relaţie după x_2, a doua după x_1 şi scădem. Derivatele mixte ale lui ψ se anulează reciproc:

$$2(\partial_2 e_{13} - \partial_1 e_{23}) = \vartheta(\psi_{,12} - 1 - \psi_{,21} - 1) = -2\vartheta.$$

Înlocuind expresiile în funcţie de Ψ,

$$\frac{1}{\mu}(\Psi_{,22} + \Psi_{,11}) = -2\vartheta,$$

deci

$$\boxed{-\Delta\Psi = 2\mu\vartheta \quad \text{în } \omega, \qquad \Psi = 0 \quad \text{pe } \partial\omega.}$$

Calculul arată explicit echivalenţa cu formularea prin deplanarea ψ: derivatele mixte ale lui ψ dispar în combinaţia care produce $\Delta\Psi$. Pentru secţiuni multiplu conexe, Ψ este constantă pe fiecare componentă de frontieră, dar constantele nu pot fi toate normalizate simultan la

zero; formula momentului trebuie atunci completată cu termenii corespunzători golurilor.

Rămâne formula momentului. Pentru o secţiune normală pe e_3,

$$\begin{aligned} T &= \int_\omega (x_1\sigma_{23} - x_2\sigma_{13})\, dA \\ &= -\int_\omega \langle x, \nabla\Psi\rangle\, dA. \end{aligned}$$

În două dimensiuni,

$$\operatorname{div}(\Psi x) = 2\Psi + \langle x, \nabla\Psi\rangle.$$

Prin teorema divergenţei şi condiţia $\Psi = 0$ pe frontieră,

$$\int_\omega \langle x, \nabla\Psi\rangle\, dA = \int_{\partial\omega} \Psi\, \langle x, n\rangle\, ds - 2\int_\omega \Psi\, dA = -2\int_\omega \Psi\, dA.$$

Prin urmare

$$\boxed{T = 2\int_\omega \Psi\, dA.}$$

6.18.1 Secţiunea circulară

Pentru discul $r < R$, problema

$$-\Delta\Psi = 2\mu\vartheta, \qquad \Psi = 0 \quad \text{pe } r = R$$

are soluţia radială

$$\Psi(r) = \frac{\mu\vartheta}{2}(R^2 - r^2),$$

deoarece $\Delta(R^2 - r^2) = -4$. Formula

$$T = 2\int_\omega \Psi\, dA$$

recuperează relaţia

$$T = \mu I_p \vartheta, \qquad I_p = \frac{\pi R^4}{2},$$

deja obţinută în Secţiunea 6.10. Aici rolul exemplului este numai să verifice echivalenţa dintre formularea prin deplasare şi formularea prin funcţia de tensiune.

6.19 Probleme pentru seminar

1. Deduceţi ecuaţia Navier–Lamé din legea lui Hooke.
2. Demonstraţi relaţiile dintre E_Y, ν, λ, μ.
3. Calculaţi energia pe unitatea de volum pentru extensia uniaxială.
4. Verificaţi că deplasarea de torsiune de mai sus are $\operatorname{div} u = 0$.
5. Calculaţi momentul de torsiune pentru o secţiune circulară de rază R.

6. Pentru cinematica de încovoiere calculaţi matricea $e(u)$, componentă cu componentă.

7. Ce se schimbă în câmpul de torsiune dacă secţiunea nu este circulară? Formulaţi problema pentru funcţia de deplanare fără a o rezolva.

6.20 Exerciţii rezolvate

Problema 6.20.1 (deformaţia infinitezimală)**.** Pentru $u(x) = (ax_1, bx_2, cx_3)$ calculaţi $e(u) = \operatorname{sym} \nabla u$.

Rezolvare. Avem

$$\nabla u = \operatorname{diag}(a, b, c),$$

care este deja simetrică. Deci

$$e(u) = \operatorname{diag}(a, b, c), \qquad \operatorname{tr} e(u) = a + b + c.$$

Problema 6.20.2 (rotaţie infinitezimală)**.** Fie $u(x) = \omega \times x$, cu ω constant. Arătaţi că $e(u) = 0$.

Rezolvare. Matricea ∇u este matricea antisimetrică asociată produsului vectorial cu ω. Prin urmare

$$(\nabla u)^T = -\nabla u,$$

şi

$$e(u) = \frac{1}{2}(\nabla u + \nabla u^T) = 0.$$

Acesta este analogul liniar al faptului că rotaţiile rigide nu produc deformaţie.

Problema 6.20.3 (legea lui Hooke izotropă)**.** Pentru $e = \operatorname{diag}(\varepsilon, 0, 0)$ calculaţi $\sigma = 2\mu e + \lambda \operatorname{tr}(e) I$.

Rezolvare. Cum $\operatorname{tr} e = \varepsilon$,

$$\sigma = \operatorname{diag}((2\mu + \lambda)\varepsilon, \lambda\varepsilon, \lambda\varepsilon).$$

O deformare uniaxială impusă produce, în general, şi tensiuni laterale dacă deformaţiile laterale sunt constrânse la zero.

Problema 6.20.4 (ecuaţia Navier–Lamé)**.** Arătaţi că, pentru $\sigma = 2\mu e(u) + \lambda(\operatorname{div} u) I$,

$$\operatorname{div} \sigma = \mu \Delta u + (\lambda + \mu) \nabla \operatorname{div} u.$$

Rezolvare. În componente,

$$\sigma_{ij} = \mu(u_{i,j} + u_{j,i}) + \lambda u_{k,k} \delta_{ij}.$$

Derivând după x_j,

$$\partial_j \sigma_{ij} = \mu \partial_j \partial_j u_i + \mu \partial_j \partial_i u_j + \lambda \partial_i u_{k,k}.$$

Comutând derivatele mixte,

$$\partial_j \partial_i u_j = \partial_i(\operatorname{div} u),$$

deci rezultă formula.

Problema 6.20.5 (condiţia Legendre–Hadamard pentru tensorul izotrop)**.** Pentru tensorul elastic izotrop

$$\mathbb{C}[E] = 2\mu E + \lambda \operatorname{tr}(E) I,$$

arătaţi că

$$\langle \mathbb{C}[a \odot b], a \odot b \rangle > 0 \qquad \forall a, b \neq 0,$$

unde $a \odot b = \frac{1}{2}(a \otimes b + b \otimes a)$, este echivalentă cu

$$\mu > 0, \qquad \lambda + 2\mu > 0.$$

Rezolvare. Punem $E = a \odot b$. Avem

$$\operatorname{tr} E = \langle a, b \rangle, \qquad \|E\|^2 = \frac{1}{2}\Big(\|a\|^2 \|b\|^2 + (\langle a, b \rangle)^2\Big).$$

Prin urmare

$$\begin{aligned} \langle \mathbb{C}[E], E \rangle &= 2\mu \|E\|^2 + \lambda (\operatorname{tr} E)^2 \\ &= \mu \|a\|^2 \|b\|^2 + (\lambda + \mu)(\langle a, b \rangle)^2. \end{aligned}$$

Scriem $c = (\langle a, b \rangle)/(\|a\| \, \|b\|) \in [-1, 1]$. Atunci

$$\frac{\langle \mathbb{C}[E], E \rangle}{\|a\|^2 \|b\|^2} = \mu + (\lambda + \mu) c^2.$$

Dacă $\lambda + \mu \geq 0$, minimul pentru $c^2 \in [0, 1]$ este μ; dacă $\lambda + \mu < 0$, minimul este $\lambda + 2\mu$. Pozitivitatea pentru toate direcţiile este deci echivalentă cu

$$\boxed{\mu > 0, \qquad \lambda + 2\mu > 0.}$$

Observăm că aceasta este condiţia de elipticitate puternică/rank-one a operatorului liniarizat şi este mai slabă decât pozitivitatea energiei pe toate matricile simetrice, care cere $3\lambda + 2\mu > 0$.

Problema 6.20.6 (încercarea uniaxială)**.** Presupuneţi

$$\sigma = \operatorname{diag}(\Sigma, 0, 0)$$

şi material izotrop liniar. Deduceţi deformaţiile în funcţie de modulul lui Young E_Y şi coeficientul Poisson ν.

Rezolvare. Legea inversă a lui Hooke este

$$e = \frac{1 + \nu}{E_Y} \sigma - \frac{\nu}{E_Y} (\operatorname{tr} \sigma) I.$$

Cum $\operatorname{tr}\sigma = \Sigma$,

$$e_{11} = \frac{1+\nu}{E_Y}\Sigma - \frac{\nu}{E_Y}\Sigma = \frac{\Sigma}{E_Y},$$

şi

$$e_{22} = e_{33} = -\frac{\nu}{E_Y}\Sigma.$$

Raportul contracţiei laterale la alungirea axială este astfel $-\nu$.

Problema 6.20.7 (torsiunea unui cilindru circular)**.** Pentru deplasarea

$$u(x_1, x_2, x_3) = \vartheta x_3(-x_2, x_1, 0),$$

calculaţi componentele de forfecare e_{13} şi e_{23}.

Rezolvare. Componentele sunt

$$u_1 = -\vartheta x_2 x_3, \quad u_2 = \vartheta x_1 x_3, \quad u_3 = 0.$$

Atunci

$$e_{13} = \frac{1}{2}(u_{1,3} + u_{3,1}) = -\frac{\vartheta}{2}x_2,$$

$$e_{23} = \frac{1}{2}(u_{2,3} + u_{3,2}) = \frac{\vartheta}{2}x_1.$$

Tensiunile de forfecare sunt $\sigma_{13} = 2\mu e_{13} = -\mu\vartheta x_2$ şi $\sigma_{23} = \mu\vartheta x_1$.

Problema 6.20.8 (încovoiere Euler–Bernoulli)**.** Pentru

$$u_1 = -x_2 w'(x_1), \qquad u_2 = w(x_1), \qquad u_3 = 0,$$

calculaţi componentele nenule ale deformaţiei liniare.

Rezolvare. Derivăm:

$$u_{1,1} = -x_2 w''(x_1), \quad u_{1,2} = -w'(x_1), \quad u_{2,1} = w'(x_1).$$

Prin urmare

$$e_{11} = u_{1,1} = -x_2 w'',$$

iar

$$e_{12} = \frac{1}{2}(u_{1,2} + u_{2,1}) = 0.$$

Pentru ansatz-ul cinematic Euler–Bernoulli, celelalte componente calculate direct din acest câmp sunt zero, iar forfecarea transversală este eliminată. Această afirmaţie priveşte modelul redus de grindă; nu trebuie confundată cu starea tridimensională de tensiune uniaxială pe feţe laterale libere, unde legea lui Hooke dă $e_{22} = e_{33} = -\nu e_{11}$ (efect Poisson/anticlastic).

Problema 6.20.9 (cilindru gros axisimetric)**.** Într-un cilindru gros presupuneţi $u = u(r)e_r$. Arătaţi că ecuaţia de echilibru fără forţe de volum conduce la

$$u'' + \frac{1}{r}u' - \frac{1}{r^2}u = 0.$$

Rezolvare. Pentru deplasare radială,

$$e_{rr} = u', \qquad e_{\theta\theta} = \frac{u}{r}.$$

În plane strain, $e_{zz} = 0$. Legea lui Hooke dă

$$\sigma_{rr} = 2\mu u' + \lambda\left(u' + \frac{u}{r}\right),$$

$$\sigma_{\theta\theta} = 2\mu\frac{u}{r} + \lambda\left(u' + \frac{u}{r}\right).$$

Echilibrul radial este

$$\sigma_{rr}' + \frac{\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta}}{r} = 0.$$

Înlocuind expresiile şi simplificând factorul comun $\lambda + 2\mu$ rezultă

$$u'' + \frac{1}{r}u' - \frac{1}{r^2}u = 0.$$

Soluţia generală este $u(r) = Ar + B/r$.

Problema 6.20.10 (consolă fără sarcină distribuită, cu forţă tăietoare la capăt)**.** O grindă Euler–Bernoulli de lungime L este încastrată la $x = 0$ şi nu are sarcină distribuită, $q = 0$. La capătul liber se prescriu

$$M(L) = 0, \qquad V(L) = V_0.$$

Cu convenţiile $V = M'$ şi $M = E_Y I w''$, determinaţi $M(x)$ şi $w(x)$ dacă $w(0) = w'(0) = 0$.

Rezolvare. Din $q = 0$ rezultă $V' = 0$, deci

$$V(x) = V_0.$$

Cum $M' = V_0$ şi $M(L) = 0$,

$$M(x) = V_0(x - L).$$

Relaţia moment–curbură dă

$$w''(x) = \frac{V_0}{E_Y I}(x - L).$$

Integrând şi folosind $w'(0) = 0$,

$$w'(x) = \frac{V_0}{E_Y I}\left(\frac{x^2}{2} - Lx\right).$$

O nouă integrare, împreună cu $w(0) = 0$, furnizează

$$\boxed{w(x) = \frac{V_0}{E_Y I}\left(\frac{x^3}{6} - \frac{Lx^2}{2}\right).}$$

În particular,

$$w(L) = -\frac{V_0 L^3}{3E_Y I}.$$

Semnul reflectă convenţia aleasă pentru V_0; modulul coincide cu formula clasică a deplasării la capătul unei console încărcate transversal.

6.21 Exerciţii propuse suplimentare

Nivelul A

6.A.1 *(conversii între constante elastice)* Un material omogen izotrop are constantele Lamé $\lambda = 60\,\mathrm{GPa}$ şi $\mu = 30\,\mathrm{GPa}$. (i) Calculaţi modulul Young E_Y, coeficientul Poisson ν şi modulul de compresiune K. (ii) Verificaţi că perechea (E_Y, ν) obţinută reproduce, prin formulele inverse, valorile λ, μ. (iii) Verificaţi condiţiile de pozitivitate a energiei.
Indicaţie. § 6.5:

$$E_Y = \frac{\mu(3\lambda + 2\mu)}{\lambda + \mu}, \qquad \nu = \frac{\lambda}{2(\lambda + \mu)}, \qquad K = \lambda + \frac{2\mu}{3} = \frac{E_Y}{3(1 - 2\nu)},$$

$$\mu = \frac{E_Y}{2(1 + \nu)}, \qquad \lambda = \frac{E_Y \nu}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)}.$$

Răspuns.

$$E_Y = 80\,\mathrm{GPa}, \qquad \nu = \frac{1}{3}, \qquad K = 80\,\mathrm{GPa}.$$

Formulele inverse dau $\mu = 30$ GPa şi $\lambda = 60$ GPa. Condiţiile $\mu > 0$ şi $3\lambda + 2\mu > 0$ sunt satisfăcute; echivalent, $-1 < \nu < 1/2$.

6.A.2 *(forfecare simplă liniarizată)* Pentru $\mu = 30\,\mathrm{GPa}$, $\lambda = 60\,\mathrm{GPa}$ şi

$$u(X) = (\gamma X_2, 0, 0), \qquad \gamma = 2 \cdot 10^{-3},$$

(i) calculaţi $e(u)$, $\operatorname{tr} e(u)$ şi σ; (ii) verificaţi că u satisface ecuaţia Navier–Lamé omogenă; (iii) calculaţi densitatea de energie

$$W_{\mathrm{lin}}(e) = \mu \|e\|^2 + \frac{\lambda}{2}(\operatorname{tr} e)^2.$$

Indicaţie. § 6.1 şi § 6.2.6. Atenţie: $\|e\|^2 = e_{ij}e_{ij}$ numără de două ori componentele nediagonale.
Răspuns.

$$e_{12} = e_{21} = \frac{\gamma}{2} = 10^{-3}, \qquad \operatorname{tr} e = 0,$$

$$\sigma_{12} = \sigma_{21} = \mu\gamma = 60\,\mathrm{MPa},$$

restul componentelor fiind nule. Cum $\Delta u = 0$ şi $\operatorname{div} u = 0$, ecuaţia omogenă este satisfăcută. Mai mult,

$$\|e\|^2 = \frac{\gamma^2}{2}, \qquad W_{\mathrm{lin}} = \frac{\mu\gamma^2}{2} = 60\,\mathrm{kJ/m^3}.$$

6.A.3 *(torsiunea unei bare circulare)* O bară cilindrică plină de rază $R = 20\,\mathrm{mm}$, din material cu $\mu = 80\,\mathrm{GPa}$, este supusă torsiunii Saint-Venant cu rată constantă $\vartheta = 10^{-2}\,\mathrm{rad/m}$. (i) Calculaţi momentul polar de inerţie I_p. (ii) Calculaţi momentul de torsiune T. (iii) Calculaţi tensiunea tangenţială maximă şi precizaţi unde se atinge.
Indicaţie. § 6.14:

$$I_p = \frac{\pi R^4}{2}, \qquad T = \mu I_p \vartheta, \qquad |\tau(r)| = \mu\vartheta r.$$

Răspuns.

$$I_p = 8\pi \cdot 10^{-8}\,\mathrm{m}^4 \approx 2.513 \cdot 10^{-7}\,\mathrm{m}^4,$$

$$T = 64\pi \approx 201.1\,\mathrm{N\,m}, \qquad \tau_{\max} = \mu\vartheta R = 16\,\mathrm{MPa}.$$

Maximul se atinge pe suprafaţa laterală $r = R$; tensiunea se anulează pe axă.

Nivelul B

6.B.1 *(compatibilitate Saint-Venant şi reconstrucţia deplasării)* În deformaţie plană se dă câmpul simetric

$$e_{11} = \alpha X_2^2, \qquad e_{22} = \alpha X_1^2, \qquad e_{12} = e_{21} = \gamma X_1 X_2,$$

cu $\alpha, \gamma \in \mathbb{R}$, $\alpha \neq 0$. (i) Determinaţi valoarea lui γ pentru care e este compatibil. (ii) Pentru această valoare, determinaţi u până la o mişcare rigidă infinitezimală. (iii) Arătaţi că pentru celelalte valori ale lui γ nu există un câmp u cu $e = \operatorname{sym} \nabla u$.
Indicaţie. § 6.2.7:

$$\partial_{22} e_{11} + \partial_{11} e_{22} - 2\partial_{12} e_{12} = 0.$$

Răspuns. Condiţia dă $2\alpha + 2\alpha - 2\gamma = 0$, deci $\gamma = 2\alpha$. Atunci

$$u = (\alpha X_1 X_2^2, \alpha X_1^2 X_2, 0) + a + WX, \qquad a \in \mathbb{R}^3, \quad W^T = -W.$$

Pentru $\gamma \neq 2\alpha$, expresia de compatibilitate este $4\alpha - 2\gamma \neq 0$, deci un asemenea u nu există.

6.B.2 *(deformaţie plană versus tensiune plană)* Pentru $\lambda = 60$ GPa şi $\mu = 30$ GPa: (i) deduceţi, din condiţia $\sigma_{33} = 0$,

$$e_{33} = -\frac{\lambda}{2\mu + \lambda}(e_{11} + e_{22})$$

şi legea plană $\sigma_{\alpha\beta} = 2\mu e_{\alpha\beta} + \lambda_{ps}(e_{11} + e_{22})\delta_{\alpha\beta}$, identificând λ_{ps}; (ii) calculaţi λ_{ps}; (iii) pentru $e_{11} = 10^{-3}$, $e_{22} = e_{12} = 0$, calculaţi tensiunile în ipoteza deformaţie plană şi, separat, în ipoteza tensiune plană.
Indicaţie. § 6.8.1–6.8.2. În tensiune plană,

$$\lambda_{ps} = \frac{2\mu\lambda}{2\mu + \lambda}.$$

Răspuns.

$$\lambda_{ps} = 30\,\mathrm{GPa}.$$

Deformaţie plană:

$$\sigma_{11} = 120\,\mathrm{MPa}, \qquad \sigma_{22} = \sigma_{33} = 60\,\mathrm{MPa}, \qquad e_{33} = 0.$$

Tensiune plană:

$$\sigma_{11} = 90\,\mathrm{MPa}, \qquad \sigma_{22} = 30\,\mathrm{MPa}, \qquad \sigma_{33} = 0,$$

$$e_{33} = -\frac{1}{2}e_{11} = -0.5 \cdot 10^{-3}.$$

6.B.3 *(consolă sub sarcină uniformă)* O grindă Euler–Bernoulli de lungime L, încastrată în $x = 0$ şi liberă în $x = L$, este solicitată de sarcina transversală uniformă q_0. Condiţiile sunt $w(0) = w'(0) = 0$ şi $w''(L) = w'''(L) = 0$. (i) Integraţi ecuaţia $E_Y I w^{(4)} = q_0$. (ii) Determinaţi săgeata maximă. (iii) Pentru $L = 2$ m, $q_0 = 6$ kN/m, $E_Y = 200$ GPa, secţiune $b \times h = 50 \times 100$ mm, calculaţi săgeata maximă şi $|\sigma_{11}|_{\max}$.
Indicaţie. § 6.17–6.18; $I = bh^3/12$, iar $|M(0)| = q_0 L^2/2$.
Răspuns.

$$w(x) = \frac{q_0}{24 E_Y I}\big(x^4 - 4Lx^3 + 6L^2x^2\big),$$

$$w_{\max} = w(L) = \frac{q_0 L^4}{8 E_Y I}.$$

Numeric,

$$I \approx 4.167 \cdot 10^{-6}\,\mathrm{m}^4, \qquad E_Y I \approx 8.33 \cdot 10^5\,\mathrm{N\,m}^2,$$

$$w_{\max} \approx 14.4\,\mathrm{mm}.$$

Momentul maxim este 12 kN m, iar

$$|\sigma_{11}|_{\max} = \frac{|M|h}{2I} \approx 144\,\mathrm{MPa}.$$

Nivelul C

6.C.1 *(sferă groasă sub presiune interioară)* Se consideră o sferă groasă $a < r < b$ din material omogen izotrop, cu presiune interioară $p_i = p > 0$ şi presiune exterioară $p_o = 0$. (a) Plecând de la $e_{rr} = u_r'$, $e_{\theta\theta} = e_{\varphi\varphi} = u_r/r$ şi de la echilibrul radial

$$\sigma_{rr}' + \frac{2}{r}(\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta}) = 0,$$

deduceţi ecuaţia Euler pentru u_r şi soluţia generală. (b) Determinaţi constantele şi scrieţi $\sigma_{rr}, \sigma_{\theta\theta}$. (c) Pentru $b = 2a$, $p = 70$ MPa, calculaţi $\sigma_{rr}(a)$, $\sigma_{\theta\theta}(a)$, $\sigma_{\theta\theta}(b)$ şi comparaţi cu aproximaţia de înveliş subţire.
Indicaţie. § 6.13. Se obţine

$$u_r = Ar + \frac{B}{r^2}, \qquad \sigma_{rr} = 3KA - \frac{4\mu B}{r^3}, \qquad \sigma_{\theta\theta} = 3KA + \frac{2\mu B}{r^3}.$$

Răspuns. Ecuaţia este

$$u_r'' + \frac{2}{r}u_r' - \frac{2}{r^2}u_r = 0, \qquad u_r = Ar + \frac{B}{r^2}.$$

Constantele sunt

$$A = \frac{pa^3}{3K(b^3 - a^3)}, \qquad B = \frac{pa^3b^3}{4\mu(b^3 - a^3)},$$

iar

$$\sigma_{rr}(r) = \frac{pa^3}{b^3 - a^3}\left(1 - \frac{b^3}{r^3}\right),$$

$$\sigma_{\theta\theta}(r) = \frac{pa^3}{b^3 - a^3}\left(1 + \frac{b^3}{2r^3}\right).$$

Pentru $b = 2a$,

$$\sigma_{rr}(a) = -70\,\text{MPa}, \quad \sigma_{\theta\theta}(a) = 50\,\text{MPa}, \quad \sigma_{\theta\theta}(b) = 15\,\text{MPa}.$$

Maximul circumferenţial apare la $r = a$. Formula de înveliş subţire dă $p/2 = 35$ MPa, deci subestimează cu aproximativ 30%.

6.C.2 *(extensie şi torsiune combinate; stare de tensiune la suprafaţă)* O bară cilindrică plină de rază $R = 20$ mm, cu axa e_3, este supusă simultan unei forţe axiale N şi unui moment de torsiune T. (a) Justificaţi prin liniaritate suprapunerea soluţiei de extensie cu cea de torsiune şi scrieţi matricea σ pe suprafaţa laterală, în baza (e_r, e_θ, e_3), în funcţie de $N, T, A_\omega = \pi R^2, I_p = \pi R^4/2$. (b) Verificaţi că $\sigma n = 0$ pe suprafaţa laterală şi $\operatorname{div}\sigma = 0$ în interior. (c) Alegeţi N, T astfel încât pe suprafaţă $\sigma_{33} = 30$ MPa şi $\sigma_{\theta 3} = 20$ MPa; calculaţi tensiunile principale şi $\tau_{\max}$.
Indicaţie. § 6.9 şi § 6.14.
Răspuns. Pe suprafaţă,

$$\sigma = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & TR/I_p \\ 0 & TR/I_p & N/A_\omega \end{pmatrix}.$$

Normala este e_r, deci tracţiunea laterală este nulă. Pentru datele din (c),

$$N = 30 \cdot 10^6 \pi R^2 = 12000\pi\,\text{N} \approx 37.70\,\text{kN},$$

$$T = 20 \cdot 10^6 \frac{\pi R^3}{2} = 80\pi\,\text{N m} \approx 251.3\,\text{N m}.$$

Tensiunile principale sunt $40, 0, -10$ MPa, iar

$$\tau_{\max} = 25\,\text{MPa}.$$

Suma lor este 30 MPa, egală cu $\operatorname{tr}\sigma = \sigma_{33}$.

6.C.3 *(funcţia Airy: un polinom biarmonic de gradul patru)* În elasticitate plană fără forţe de volum se caută

$$\Phi(x_1, x_2) = x_1^4 + a x_1^2 x_2^2 + b x_2^4.$$

(a) Determinaţi toate perechile (a, b) pentru care $\Delta^2\Phi = 0$ şi scrieţi soluţia normalizată cu $b = 1$. (b) Calculaţi $\sigma_{11}, \sigma_{22}, \sigma_{12}$ şi verificaţi direct ecuaţiile de echilibru. (c) Arătaţi că $\operatorname{tr}\sigma = 0$ şi discutaţi consecinţele pentru tensiune plană şi deformaţie plană.
Indicaţie. § 6.22:

$$\sigma_{11} = \partial_{22}\Phi, \qquad \sigma_{22} = \partial_{11}\Phi, \qquad \sigma_{12} = -\partial_{12}\Phi.$$

Răspuns.

$$\Delta^2\Phi = 24 + 8a + 24b,$$

deci $a = -3(1 + b)$. Pentru $b = 1$, $a = -6$ şi

$$\Phi = x_1^4 - 6x_1^2x_2^2 + x_2^4.$$

$$\sigma_{11} = 12(x_2^2 - x_1^2), \qquad \sigma_{22} = 12(x_1^2 - x_2^2), \qquad \sigma_{12} = 24x_1x_2.$$

Se verifică

$$\partial_1\sigma_{11} + \partial_2\sigma_{12} = 0, \qquad \partial_1\sigma_{12} + \partial_2\sigma_{22} = 0.$$

De asemenea, $\sigma_{11} + \sigma_{22} = 0$. În tensiune plană, $\sigma_{33} = 0$, deci $\operatorname{tr}\sigma = 0$ şi legea inversă a lui Hooke dă o deformaţie pur deviatorică, inclusiv $e_{33} = 0$. În acest exemplu particular, aceeaşi concluzie rezultă şi în deformaţie plană.

Capitolul 7

Formularea variaţională a elasticităţii liniare şi existenţa statică

Surse şi orientare. Forma slabă, spaţiile Sobolev, inegalitatea Korn şi argumentul Lax–Milgram urmează reperele [3, 4, 6, 1, 13]. Introducem rezultatele analitice atunci când devin necesare pentru formularea variaţională şi pentru demonstrarea existenţei şi unicităţii soluţiei statice.

7.1 Integrarea prin părţi şi norma L^2

Vom trece în curând de la ecuaţia diferenţială la forma slabă. Pentru aceasta avem nevoie de două fapte elementare.

Pentru funcţii scalare suficient de regulate u, v şi pentru un domeniu $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ cu frontieră suficient de regulată, formula de integrare prin părţi este

$$\int_\Omega \partial_j u \, v \, dx = -\int_\Omega u \, \partial_j v \, dx + \int_{\partial\Omega} uv \, n_j \, dS.$$

Formula rezultă din teorema divergenţei aplicată câmpului vectorial $uv\, e_j$, deoarece

$$\operatorname{div}(uv\, e_j) = \partial_j(uv) = (\partial_j u)v + u\,\partial_j v.$$

Integrarea pe Ω şi mutarea celui de-al doilea termen în membrul opus dau formula de mai sus.

Pentru funcţii vectoriale şi tensoriale aplicăm aceeaşi identitate componentă cu componentă. Dacă $\sigma = (\sigma_{ij})$ şi $v = (v_i)$ sunt suficient de regulate, atunci

$$\int_\Omega \langle \operatorname{div}\sigma, v\rangle \, dx = -\int_\Omega \langle \sigma, \nabla v\rangle \, dx + \int_{\partial\Omega} \langle \sigma n, v\rangle \, dS.$$

Într-adevăr, pentru fiecare i,

$$\int_\Omega \partial_j \sigma_{ij}\, v_i \, dx = -\int_\Omega \sigma_{ij}\, \partial_j v_i \, dx + \int_{\partial\Omega} \sigma_{ij} n_j v_i \, dS,$$

iar apoi însumăm după i, j.

Vom folosi şi inegalitatea Cauchy–Schwarz în forma

$$\left| \int_\Omega \langle f, g\rangle \, dx \right| \le \|f\|_{L^2(\Omega)} \, \|g\|_{L^2(\Omega)}.$$

Aici

$$\|f\|_{L^2(\Omega)} := \left(\int_\Omega |f(x)|^2 \, dx \right)^{1/2}.$$

Nu avem nevoie în acest moment de teoria generală a spaţiilor L^p; ea va fi reamintită numai

acolo unde devine necesară.

7.2 Derivate slabe, H^1, H^1_0 şi urma la frontieră

Forma slabă va conţine numai derivate de ordinul întâi. Reamintim deci noţiunile strict necesare înainte de folosirea lor.

O funcţie $u \in L^2(\Omega)$ are derivata slabă $\partial_j u \in L^2(\Omega)$ dacă

$$\int_\Omega u\, \partial_j \phi \, dx = -\int_\Omega (\partial_j u)\, \phi \, dx \qquad \forall \phi \in C_c^\infty(\Omega).$$

Definiţia reproduce formula de integrare prin părţi, dar elimină termenul de frontieră deoarece funcţia-test are suport compact în interiorul lui Ω.

Definim

$$H^1(\Omega) = \{u \in L^2(\Omega) : \partial_j u \in L^2(\Omega),\ j = 1, 2, 3\},$$

cu norma

$$\|u\|^2_{H^1(\Omega)} = \|u\|^2_{L^2(\Omega)} + \|\nabla u\|^2_{L^2(\Omega)}\,.$$

Pentru câmpuri vectoriale folosim $H^1(\Omega; \mathbb{R}^3)$ componentă cu componentă.

Presupunem de aici înainte că Ω este mărginit, conex şi Lipschitz. Teorema urmei furnizează un operator liniar continuu

$$\mathrm{Tr} : H^1(\Omega) \longrightarrow L^2(\partial\Omega)$$

care coincide cu restricţia clasică pentru funcţii netede. Această formă este suficientă pentru toate argumentele de existenţă din capitol.

Definim

$$H^1_0(\Omega) := \overline{C_c^\infty(\Omega)}^{\,H^1}.$$

Pe un domeniu Lipschitz, acesta coincide cu subspaţiul funcţiilor din $H^1(\Omega)$ cu urmă nulă pe întreaga frontieră. Mai general, dacă $\Gamma_D \subset \partial\Omega$ are măsură superficială pozitivă, vom folosi spaţiul funcţiilor cu urmă nulă numai pe Γ_D.

Pentru asemenea funcţii vom folosi inegalitatea Poincaré–Friedrichs

$$\|u\|_{L^2(\Omega)} \le C_P \, \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}\,.$$

Nu demonstrăm aici teoria generală a urmei sau a lui Poincaré; folosim numai formele care intră în demonstraţia problemei elastice.

7.3 Rigiditatea infinitezimală în H^1 şi două fapte de compactitate

În Capitolul 2 am demonstrat rigiditatea infinitezimală pentru câmpuri C^2. Acum, după introducerea derivatelor slabe, extindem rezultatul la regularitatea de care avem nevoie pentru

inegalitatea lui Korn.

Lema 7.3.1 (rigiditatea infinitezimală în H^1)**.** *Fie $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ deschis şi conex şi $u \in H^1(\Omega;\mathbb{R}^3)$. Dacă*

$$\operatorname{sym} \nabla u = 0 \qquad \text{a.p.t. în } \Omega,$$

atunci există $a \in \mathbb{R}^3$ şi $W \in \mathbb{R}^{3\times 3}$, $W^T = -W$, astfel încât

$$u(x) = a + Wx \qquad \text{a.p.t. în } \Omega.$$

Demonstraţie. Identitatea clasică din Capitolul 2,

$$\partial_{ij} u_k = \partial_i e_{jk}(u) + \partial_j e_{ik}(u) - \partial_k e_{ij}(u), \tag{7.R1}$$

rămâne valabilă în sens slab. Concret, fiecare membru din (7.R1) este interpretat după integrare prin părţi împotriva unei funcţii-test $\phi \in C_c^\infty(\Omega)$; identitatea rezultă prin aceeaşi grupare algebrică a derivatelor slabe ca în cazul neted.

Dacă $e(u) = 0$ a.p.t., (7.R1) arată că toate derivatele slabe de ordinul al doilea ale componentelor lui u sunt zero. Prin urmare fiecare funcţie $\partial_j u_i \in L^2_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ are gradient slab nul şi este constantă a.p.t. pe domeniul conex. Rezultă

$$\nabla u = W$$

cu W constant. Condiţia $\operatorname{sym}\nabla u = 0$ dă $W^T = -W$. În sfârşit, $u - Wx$ are gradient slab nul, deci este constantă a.p.t.; astfel $u = a + Wx$. □

Pentru demonstraţia formei Korn cu condiţie Dirichlet vom folosi încă două rezultate standard despre spaţiul Hilbert $H^1(\Omega)$. Le enunţăm înainte de utilizare.

- Spunem că $v_m \rightharpoonup v$ slab în H^1 dacă

  $$(v_m, w)_{H^1} \longrightarrow (v, w)_{H^1} \qquad \forall w \in H^1(\Omega).$$

  Orice şir mărginit în H^1 conţine o subsecvenţă slab convergentă. Acesta este cazul particular Hilbert al compactităţii slabe.

- Dacă Ω este mărginit şi Lipschitz, teorema Rellich–Kondrachov implică faptul că dintr-un şir mărginit în $H^1(\Omega)$ putem extrage o subsecvenţă care converge tare în $L^2(\Omega)$.

Nu demonstrăm aici aceste două rezultate de analiză funcţională; ele vor fi formulate într-un cadru mai general în Capitolul 13. În capitolul de faţă le folosim numai în demonstraţia prin contradicţie a corolarului Korn.

7.4 Spaţiul energetic

Fie $\Gamma_D \subset \partial\Omega$ cu măsură de suprafaţă pozitivă. Definim

$$V = \{v \in H^1(\Omega;\mathbb{R}^3) : \operatorname{Tr} v = 0 \text{ pe } \Gamma_D\}.$$

Să verificăm de ce acesta este un spaţiu Hilbert. Operatorul de urmă

$$\operatorname{Tr} : H^1(\Omega;\mathbb{R}^3) \longrightarrow H^{1/2}(\partial\Omega;\mathbb{R}^3)$$

este liniar şi continuu pe un domeniu Lipschitz. Dacă $v_k \in V$ şi $v_k \to v$ în H^1, atunci

$$\operatorname{Tr} v_k \to \operatorname{Tr} v$$

în spaţiul urmelor. Dar $\operatorname{Tr} v_k = 0$ pe Γ_D pentru fiecare k, deci şi $\operatorname{Tr} v = 0$ pe Γ_D. Aşadar V este închis în $H^1(\Omega;\mathbb{R}^3)$. Un subspaţiu închis al unui spaţiu Hilbert este complet pentru norma indusă; prin urmare V este Hilbert cu norma H^1.

7.5 Inegalitatea lui Korn

Inegalitatea lui Korn permite trecerea de la controlul lui $e(u)$ la controlul lui u în H^1; vezi, de exemplu, [3, 4].

Energia liniară depinde numai de $e(u) = \operatorname{sym}\nabla u$, nu de gradientul complet. Fără condiţii la frontieră, orice mişcare rigidă $u(x) = a + Wx$ cu $W^T = -W$ satisface $e(u) = 0$, deşi u nu este zero. De aceea o estimare de forma $\|u\|_{H^1} \le C\,\|e(u)\|_{L^2}$ nu poate fi adevărată pe întregul H^1. Dacă fixăm o porţiune de frontieră cu măsură pozitivă, mişcările rigide compatibile sunt eliminate, iar inegalitatea Korn devine coercivă pe spaţiul de test. Eliminarea acestui nucleu geometric permite apoi aplicarea teoremei Lax–Milgram.

Forma utilizată aici este standard în teoria variaţională a elasticităţii; vezi [3, 4, 13]. Definim spaţiul mişcărilor rigide infinitezimale

$$\mathcal{R}_0 := \{r(x) = a + Wx :\ a \in \mathbb{R}^3,\ W^T = -W\}.$$

Lema 7.3.1 identifică exact acest spaţiu drept nucleul operatorului $v \mapsto e(v) = \operatorname{sym}\nabla v$ în H^1.

Teorema 7.5.1 (Korn I şi Korn II)**.** *Fie $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ un domeniu mărginit, conex, cu frontieră Lipschitz.*

(i) Există $C > 0$ astfel încât

$$\|v\|_{H^1} \le C\Big(\|e(v)\|_{L^2} + \|v\|_{L^2}\Big) \qquad \forall v \in H^1(\Omega;\mathbb{R}^3).$$

Aceasta este forma Korn II.

(ii) Dacă $\Gamma_D \subset \partial\Omega$ are măsură de suprafaţă pozitivă şi $V = \{v \in H^1(\Omega;\mathbb{R}^3) : \operatorname{Tr} v = 0$ pe $\Gamma_D\}$, atunci există $C_K > 0$ astfel încât

$$\|v\|_{H^1} \le C_K\,\|e(v)\|_{L^2} \qquad \forall v \in V.$$

Aceasta este forma Korn I folosită în problema mixtă de deplasare–tracţiune.

Statutul rezultatului şi deducerea formei cu condiţie Dirichlet. Forma Korn II este un rezultat funcţional-analitic pe care îl admitem aici; o demonstraţie completă se găseşte

în [3, 4]. Arătăm însă de ce ea implică forma Korn I utilizată în curs. Presupunem prin contradicţie că nu există C_K. Atunci putem alege $v_m \in V$ cu

$$\|v_m\|_{H^1} = 1, \qquad \|e(v_m)\|_{L^2} \longrightarrow 0.$$

Prin cele două rezultate de compactitate enunţate mai sus, după extragerea unei subsecvenţe,

$$v_m \rightharpoonup v \text{ în } H^1, \qquad v_m \to v \text{ în } L^2.$$

Continuitatea operatorului de urmă arată că $v \in V$, iar convergenţa slabă a gradienţilor şi convergenţa tare $e(v_m) \to 0$ dau $e(v) = 0$. Lema 7.3.1 furnizează $v(x) = a + Wx$. Cum urma lui $v(x) = a + Wx$ este zero pe o porţiune de frontieră de măsură superficială pozitivă, avem $v = 0$. Într-adevăr, dacă $W \neq 0$, o matrice antisimetrică nenulă în dimensiunea trei are rangul 2, iar mulţimea soluţiilor ecuaţiei $a + Wx = 0$ este fie vidă, fie o dreaptă afină; aceasta are măsură superficială zero pe frontiera Lipschitz. Dacă $W = 0$, anularea pe un singur punct ar da deja $a = 0$. Prin urmare $W = 0$ şi $a = 0$. Rezultă $v_m \to 0$ în L^2. Korn II dă atunci

$$1 = \|v_m\|_{H^1} \le C\Big(\|e(v_m)\|_{L^2} + \|v_m\|_{L^2}\Big) \longrightarrow 0,$$

contradicţie. Deci forma Korn I este demonstrată din Korn II şi compactitatea Rellich.

Inegalitatea spune că, după eliminarea mişcărilor rigide prin condiţia Dirichlet, partea simetrică a gradientului controlează întregul câmp de deplasări. Ipoteza de conexitate este necesară: pe componente conexe diferite pot exista mişcări rigide independente.

În cazul $V = H^1_0(\Omega;\mathbb{R}^3)$ există şi un argument elementar. Pentru $v \in C^\infty_c$,

$$\int_\Omega \partial_j v_i \, \partial_i v_j \, dx = \int_\Omega (\operatorname{div} v)^2 \, dx,$$

prin două integrări prin părţi. Astfel

$$2\int \|e(v)\|^2 = \int \|\nabla v\|^2 + \int (\operatorname{div} v)^2 \ge \int \|\nabla v\|^2 .$$

Prin densitate şi Poincaré se obţine controlul normei H^1.

7.6 Forma slabă: deducerea ecuaţiei variaţionale

Considerăm problema mixtă

$$-\operatorname{div}\sigma(u) = f \quad \text{în } \Omega, \qquad u = 0 \quad \text{pe } \Gamma_D, \qquad \sigma(u)n = g \quad \text{pe } \Gamma_N,$$

unde

$$\partial\Omega = \overline{\Gamma_D} \cup \overline{\Gamma_N}, \qquad \Gamma_D \cap \Gamma_N = \varnothing$$

în sensul interioarelor relative, iar

$$\sigma(u) = 2\mu e(u) + \lambda \operatorname{tr}(e(u)) I.$$

Presupunem $\mathcal{H}^2(\Gamma_D) > 0$ şi folosim spaţiul energetic V definit în secţiunea precedentă.

Derivăm forma slabă componentă cu componentă. Înmulţim ecuaţia $-\partial_j \sigma_{ij} = f_i$ cu v_i şi integrăm:

$$-\int_\Omega \partial_j \sigma_{ij}\, v_i \, dx = \int_\Omega f_i v_i \, dx.$$

Regula produsului şi teorema divergenţei dau

$$\int_\Omega \sigma_{ij} \partial_j v_i \, dx - \int_{\partial\Omega} \sigma_{ij} n_j v_i \, da = \int_\Omega f_i v_i \, dx.$$

Pe Γ_D urma lui v este zero, iar pe Γ_N avem $\sigma n = g$. Cum σ este simetrică,

$$\langle \sigma, \nabla v \rangle = \langle \sigma, e(v) \rangle,$$

fiindcă produsul Frobenius dintre o matrice simetrică şi una antisimetrică este zero. Obţinem

$$a(u, v) = \ell(v) \qquad \forall v \in V,$$

unde

$$a(u, v) = \int_\Omega \Big(2\mu \langle e(u), e(v) \rangle + \lambda \operatorname{div} u \, \operatorname{div} v \Big) dx$$

şi

$$\ell(v) = \int_\Omega \langle f, v \rangle \, dx + \int_{\Gamma_N} \langle g, v \rangle \, da.$$

În formularea abstractă nu avem nevoie să presupunem neapărat f, g netede; este suficient ca $\ell \in V^*$.

Forma slabă codifică simultan ecuaţia de echilibru şi condiţia naturală Neumann. Condiţia Dirichlet este încorporată în alegerea spaţiului V. Teorema Korn transformă controlul lui $e(v)$ în controlul normei H^1; acest control furnizează coercivitatea formei bilineare folosite mai jos.

7.7 Spaţii Hilbert şi funcţionale liniare continue

Teorema pe care urmează să o folosim este formulată într-un spaţiu Hilbert. Reamintim numai noţiunile necesare aici.

Un spaţiu vectorial real V cu produs scalar $\langle \cdot, \cdot \rangle_V$ este Hilbert dacă este complet pentru norma $\|v\|_V = \langle v, v \rangle_V^{1/2}$. Spaţiul energetic introdus mai sus este un subspaţiu închis al lui $H^1(\Omega; \mathbb{R}^3)$ şi, cu produsul scalar moştenit din H^1, este Hilbert.

Un funcţional liniar $\ell : V \to \mathbb{R}$ este continuu dacă există $C > 0$ astfel încât

$$|\ell(v)| \le C \, \|v\|_V \qquad \text{pentru orice } v \in V.$$

O formă biliniară $a : V \times V \to \mathbb{R}$ este continuă dacă

$$|a(u, v)| \le C \, \|u\|_V \, \|v\|_V \,,$$

şi este coercivă dacă există $\alpha > 0$ cu

$$a(v,v) \geq \alpha \|v\|_V^2 \qquad \text{pentru orice } v \in V.$$

Acestea sunt ipotezele pe care le verificăm imediat pentru forma elastică.

Teorema 7.7.1 (reprezentarea Riesz)**.** *Fie V un spaţiu Hilbert real. Pentru orice $\ell \in V^*$ există un unic $h \in V$ astfel încât*

$$\ell(v) = \langle h, v \rangle_V \qquad \forall v \in V,$$

şi $\|h\|_V = \|\ell\|_{V^*}$.

Rezultatul permite reprezentarea unui funcţional liniar continuu printr-un vector al spaţiului şi va fi folosit în demonstraţia lui Lax–Milgram.

7.8 Teorema Lax–Milgram

Folosim forma clasică Hilbertiană a teoremei Lax–Milgram; pentru o prezentare de analiză funcţională vezi [6, 13].

Teorema 7.8.1 (Lax–Milgram)**.** *Fie V un spaţiu Hilbert real, $a : V \times V \to \mathbb{R}$ biliniară continuă şi coercivă:*

$$|a(u,v)| \leq M \|u\|_V \|v\|_V, \qquad a(v,v) \geq \alpha \|v\|_V^2.$$

Atunci pentru orice $\ell \in V^*$ există un unic $u \in V$ astfel încât

$$a(u,v) = \ell(v) \qquad \forall v \in V,$$

şi $\|u\|_V \leq \alpha^{-1} \|\ell\|_{V^*}$.

Demonstraţie. Pentru fiecare $u \in V$, funcţionalul $v \mapsto a(u,v)$ este liniar şi continuu. Prin teorema Riesz există un unic $Au \in V$ astfel încât

$$a(u,v) = \langle Au, v \rangle_V \qquad \forall v \in V.$$

Aceasta defineşte un operator liniar $A : V \to V$. Din continuitatea lui a,

$$\|Au\|_V = \sup_{\|v\|_V = 1} |a(u,v)| \leq M \|u\|_V.$$

Coercivitatea şi Cauchy–Schwarz dau

$$\alpha \|u\|_V^2 \leq a(u,u) = \langle Au, u \rangle_V \leq \|Au\|_V \|u\|_V,$$

deci

$$\|Au\|_V \geq \alpha \|u\|_V.$$

În particular, A este injectiv.

Arătăm că imaginea este închisă. Dacă $Au_n \to y$, atunci

$$\|u_n - u_m\|_V \leq \frac{1}{\alpha} \|Au_n - Au_m\|_V ,$$

deci (u_n) este Cauchy. Există $u \in V$ cu $u_n \to u$, iar continuitatea lui A implică $Au = y$. Aşadar $\operatorname{Ran} A$ este închisă.

Dacă $w \perp \operatorname{Ran} A$, atunci

$$0 = \langle Av, w\rangle_V = a(v, w) \qquad \forall v \in V.$$

Luând $v = w$ şi folosind coercivitatea,

$$0 = a(w, w) \geq \alpha \|w\|_V^2 ,$$

deci $w = 0$. Prin urmare $\operatorname{Ran} A$ este densă. Fiind şi închisă, este întregul V.

Prin Riesz, există $h \in V$ cu $\ell(v) = \langle h, v\rangle_V$. Surjectivitatea lui A dă un unic u cu $Au = h$, iar

$$a(u, v) = \langle Au, v\rangle_V = \langle h, v\rangle_V = \ell(v).$$

În plus,

$$\alpha \|u\|_V \leq \|Au\|_V = \|h\|_V = \|\ell\|_{V^*} ,$$

ceea ce dă estimarea a priori. □

7.9 Existenţă şi unicitate

Verificăm continuitatea formei bilineare, coercivitatea prin inegalitatea Korn şi continuitatea funcţionalului de încărcare, apoi aplicăm teorema Lax–Milgram.

Teorema 7.9.1 (problema statică liniară)**.** *Fie $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ mărginit, conex, cu frontieră Lipschitz. Fie $\Gamma_D \subset \partial\Omega$ măsurabilă, cu măsură de suprafaţă pozitivă, şi $\Gamma_N := \partial\Omega \setminus \Gamma_D$ (până la mulţimi de măsură superficială nulă). Presupunem*

$$\mu > 0, \qquad 3\lambda + 2\mu > 0,$$

şi date

$$f \in L^2(\Omega; \mathbb{R}^3), \qquad g \in L^2(\Gamma_N; \mathbb{R}^3).$$

Folosim spaţiul V, forma biliniară a şi funcţionalul ℓ definite mai sus. Atunci există un unic $u \in V$ astfel încât

$$a(u, v) = \ell(v) \qquad \forall v \in V.$$

Mai mult,

$$\|u\|_{H^1(\Omega)} \leq \frac{C_K^2}{c_0}\Big(\|f\|_{L^2(\Omega)} + C_{tr} \|g\|_{L^2(\Gamma_N)}\Big), \qquad c_0 = \min\{2\mu, 3\lambda + 2\mu\},$$

unde C_K este constanta Korn şi C_{tr} include constantele de urmă şi scufundarea $H^1 \hookrightarrow L^2$.

Demonstraţie. Spaţiul V este Hilbert, aşa cum am verificat la introducerea lui. Rămâne să verificăm ipotezele teoremei Lax–Milgram pentru a şi ℓ.

Continuitatea lui a. Prin Cauchy–Schwarz,

$$|a(u,v)| \le 2\mu \, \|e(u)\|_{L^2} \, \|e(v)\|_{L^2} + |\lambda| \, \|\operatorname{div} u\|_{L^2} \, \|\operatorname{div} v\|_{L^2} .$$

Cum $\|e(u)\| \le \|\nabla u\|$ şi

$$|\operatorname{div} u|^2 = |\partial_1 u_1 + \partial_2 u_2 + \partial_3 u_3|^2 \le 3 \, \|\nabla u\|^2 ,$$

rezultă

$$|a(u,v)| \le C \, \|u\|_{H^1} \, \|v\|_{H^1} .$$

Coercivitatea densităţii elastice. Pentru $E \in \operatorname{Sym}(3)$,

$$E = \operatorname{dev} E + \frac{1}{3} \operatorname{tr}(E) I,$$

iar cele două părţi sunt ortogonale. De aici

$$\|E\|^2 = \|\operatorname{dev} E\|^2 + \frac{1}{3} (\operatorname{tr} E)^2 .$$

Prin urmare

$$2\mu \, \|E\|^2 + \lambda (\operatorname{tr} E)^2 = 2\mu \, \|\operatorname{dev} E\|^2 + \left(\lambda + \frac{2\mu}{3} \right) (\operatorname{tr} E)^2 .$$

Condiţiile $\mu > 0$ şi $3\lambda + 2\mu > 0$ dau explicit

$$2\mu \, \|E\|^2 + \lambda (\operatorname{tr} E)^2 \ge c_0 \, \|E\|^2 , \qquad \boxed{c_0 = \min\{2\mu, 3\lambda + 2\mu\} > 0.}$$

Aplicând pentru $E = e(v)$,

$$a(v,v) \ge c_0 \, \|e(v)\|_{L^2}^2 .$$

Inegalitatea lui Korn pe V dă

$$\|v\|_{H^1} \le C_K \, \|e(v)\|_{L^2} ,$$

şi deci

$$a(v,v) \ge \frac{c_0}{C_K^2} \, \|v\|_{H^1}^2 .$$

Continuitatea funcţionalei sarcinilor. Pentru

$$\ell(v) = \int_\Omega \langle f, v \rangle \, dx + \int_{\Gamma_N} \langle g, v \rangle \, da,$$

primul termen este continuu prin Cauchy–Schwarz. Pentru al doilea folosim teorema de urmă:

$$\|\operatorname{Tr} v\|_{L^2(\partial\Omega)} \le C_{tr} \, \|v\|_{H^1(\Omega)} .$$

Astfel $\ell \in V^*$.

Toate ipotezele teoremei Lax–Milgram sunt satisfăcute. Există deci un unic $u \in V$ astfel încât

$$a(u, v) = \ell(v) \qquad \forall v \in V.$$

Pentru estimarea a priori luăm $v = u$. Din coercivitate şi continuitatea încărcărilor,

$$\begin{aligned} \frac{c_0}{C_K^2} \|u\|_{H^1}^2 &\le a(u,u) = \ell(u) \\ &\le \left(\|f\|_{L^2(\Omega)} + C_{tr} \|g\|_{L^2(\Gamma_N)} \right) \|u\|_{H^1} . \end{aligned}$$

Dacă $u \neq 0$, împărţim prin $\|u\|_{H^1}$; pentru $u = 0$ estimarea este trivială. Rezultă exact

$$\|u\|_{H^1} \le \frac{C_K^2}{c_0} \left(\|f\|_{L^2(\Omega)} + C_{tr} \|g\|_{L^2(\Gamma_N)} \right).$$

Aceasta este soluţia slabă a problemei statice liniare. □

7.10 Cazurile pur Dirichlet şi pur Neumann; observaţii de regularitate

Cadrul variaţional anterior acoperă problema mixtă. Tratăm separat cele două cazuri-limită.

Problema pur Dirichlet. Dacă $\Gamma_D = \partial\Omega$, spaţiul energetic este $V = H_0^1(\Omega; \mathbb{R}^3)$. Inegalitatea lui Korn elimină complet nucleul mişcărilor rigide, iar argumentul Lax–Milgram dă o soluţie slabă unică pentru orice funcţional de încărcare continuu pe V.

Problema pur Neumann. Dacă $\Gamma_D = \varnothing$, forma biliniară nu este coercivă pe întregul H^1, deoarece

$$\mathcal{R}_0 = \{ r(x) = a + Wx : \ a \in \mathbb{R}^3, \ W^T = -W \}$$

este exact nucleul lui $e(u)$. Pentru încărcări clasice

$$\ell(v) = \int_\Omega \langle f, v \rangle \, dx + \int_{\partial\Omega} \langle g, v \rangle \, da,$$

condiţia $\ell(r) = 0$ pentru orice $r \in \mathcal{R}_0$ este echivalentă cu

$$\boxed{\int_\Omega f \, dx + \int_{\partial\Omega} g \, da = 0}$$

şi

$$\boxed{\int_\Omega x \times f \, dx + \int_{\partial\Omega} x \times g \, da = 0}.$$

Prima se obţine alegând $r(x) = a$. Pentru a doua alegem $r(x) = Wx = \omega \times x$, cu ω arbitrar, şi folosim $\langle f, \omega \times x \rangle = \langle \omega, x \times f \rangle$.

Existenţa se formulează pe spaţiul factor

$$\widehat{V} := H^1(\Omega;\mathbb{R}^3)/\mathcal{R}_0, \qquad \|[v]\|_{\widehat{V}} := \inf_{r\in\mathcal{R}_0} \|v-r\|_{H^1}.$$

Forma biliniară este bine definită pe clase deoarece $e(v+r)=e(v)$. Cum $\mathcal{R}_0$ este finit dimensional, el este închis în $H^1(\Omega;\mathbb{R}^3)$, iar $\widehat{V}$ este un spaţiu Hilbert. Forma Korn pe spaţiul factor afirmă că există $C>0$ cu

$$\|[v]\|_{\widehat{V}} \le C\,\|e(v)\|_{L^2}.$$

Ea rezultă standard din Korn II şi din faptul că $\mathcal{R}_0$ este finit dimensional; vezi [3, 4].

Teorema 7.10.1 (problema pură de tracţiune)**.** *Fie Ω mărginit, conex şi Lipschitz, $\mu>0$, $3\lambda+2\mu>0$, iar $\ell\in(H^1(\Omega;\mathbb{R}^3))^*$ să satisfacă $\ell(r)=0$ pentru orice $r\in\mathcal{R}_0$. Atunci există o unică clasă*

$$[u]\in H^1(\Omega;\mathbb{R}^3)/\mathcal{R}_0$$

astfel încât

$$a(u,v)=\ell(v) \qquad \forall v\in H^1(\Omega;\mathbb{R}^3).$$

Orice două reprezentante ale soluţiei diferă printr-o mişcare rigidă infinitezimală.

Demonstraţie. Trebuie mai întâi să verificăm că problema depinde numai de clasa modulo mişcări rigide. Dacă $r\in\mathcal{R}_0$, atunci $e(r)=0$, deci

$$a(u+r,v)=a(u,v), \qquad a(u,v+r)=a(u,v).$$

Prin urmare putem defini fără ambiguitate

$$\widehat{a}([u],[v]) := a(u,v).$$

La fel, condiţia de compatibilitate $\ell(r)=0$ pentru orice $r\in\mathcal{R}_0$ este exact ceea ce permite definirea

$$\widehat{\ell}([v]) := \ell(v).$$

Dacă alegem un alt reprezentant $v+r$, atunci

$$\ell(v+r)=\ell(v)+\ell(r)=\ell(v).$$

Mai mult, pentru orice $r\in\mathcal{R}_0$,

$$|\ell(v)| = |\ell(v-r)| \le \|\ell\|_{(H^1)^*}\,\|v-r\|_{H^1}.$$

Luând infimul după r obţinem

$$\left|\widehat{\ell}([v])\right| \le \|\ell\|_{(H^1)^*}\,\|[v]\|_{\widehat{V}},$$

deci funcţionala indusă este continuă pe spaţiul factor.

Fiind finit dimensional, $\mathcal{R}_0$ este închis în $H^1(\Omega;\mathbb{R}^3)$; de aceea spaţiul factor $\widehat{V}$ definit mai sus este Hilbert. Continuitatea formei biliniare se verifică la fel ca în problema mixtă. Pentru coercivitate folosim pozitivitatea tensorului elastic,

$$a(v,v) \geq c_0 \, \|e(v)\|_{L^2}^2 \,,$$

iar

$$\|[v]\|_{\widehat{V}} \leq C_K \, \|e(v)\|_{L^2}$$

implică

$$a(v,v) \geq \frac{c_0}{C_K^2} \, \|[v]\|_{\widehat{V}}^2 \,.$$

Aşadar $\widehat{a}$ este coercivă pe $\widehat{V}$.

Putem aplica teorema Lax–Milgram lui $\widehat{a}$ şi $\widehat{\ell}$. Există o unică clasă $[u] \in \widehat{V}$ pentru care

$$\widehat{a}([u],[v]) = \widehat{\ell}([v]) \qquad \forall [v] \in \widehat{V}.$$

Revenind la reprezentanţi, aceasta este exact identitatea

$$a(u,v) = \ell(v) \qquad \forall v \in H^1(\Omega;\mathbb{R}^3).$$

Unicitatea priveşte clasa $[u]$, nu un reprezentant particular. Dacă u_1 şi u_2 reprezintă aceeaşi soluţie, atunci $[u_1] = [u_2]$, adică

$$u_1 - u_2 \in \mathcal{R}_0.$$

Aceasta este tocmai nedeterminarea soluţiei printr-o mişcare rigidă infinitezimală. □

Despre regularitate. Lax–Milgram furnizează o soluţie în H^1. Pentru a deduce $W^{2,p}$ sau regularitate superioară sunt necesare ipoteze suplimentare asupra frontierei, coeficienţilor şi datelor; acestea ţin de teoria de regularitate a sistemelor eliptice. Nu le folosim în demonstraţia de existenţă slabă. Când, în Capitolul 9, vom aplica teorema funcţiei implicite într-un cadru $W^{2,p}$, vom formula explicit regularitatea eliptică necesară ca ipoteză separată, fără a o deduce din Lax–Milgram. Pentru rezultate precise vezi [3, 6].

7.11 Teorema lui Clapeyron pentru elasticitatea liniară

Presupunem încărcări proporţionale şi condiţii la frontieră omogene pe partea Dirichlet. Fie u soluţia problemei statice şi $\sigma = \mathbb{C}e(u)$. Energia elastică este

$$\mathcal{E}(u) = \frac{1}{2} \int_\Omega \langle \sigma, e(u) \rangle \, dx.$$

Din forma slabă, alegând funcţia-test $v = u$, obţinem

$$\int_\Omega \langle \sigma, e(u) \rangle \, dx = \int_\Omega \langle f, u \rangle \, dx + \int_{\Gamma_N} \langle g, u \rangle \, da.$$

Prin urmare

$$\boxed{2\mathcal{E}(u) = \mathcal{W}_{\text{ext}}(u)}, \qquad \mathcal{W}_{\text{ext}}(u) := \int_\Omega \langle f, u\rangle\, dx + \int_{\Gamma_N} \langle g, u\rangle\, da.$$

Aceasta este teorema lui Clapeyron. Ea nu afirmă că energia internă este egală cu lucrul final al forţelor calculat ca şi cum forţele ar fi aplicate instantaneu; factorul $1/2$ reflectă faptul că, pentru o încărcare crescută proporţional de la zero, atât forţa cât şi deplasarea cresc liniar cu parametrul de încărcare.

7.12 Teorema de reciprocitate a lui Betti

Considerăm două sisteme de încărcări $(f^{(1)}, g^{(1)})$ şi $(f^{(2)}, g^{(2)})$, cu soluţiile $u^{(1)}, u^{(2)}$, pentru acelaşi corp elastic liniar şi aceleaşi condiţii Dirichlet omogene. Formele slabe sunt

$$a(u^{(1)}, v) = \ell_1(v), \qquad a(u^{(2)}, v) = \ell_2(v).$$

Alegem succesiv $v = u^{(2)}$ şi $v = u^{(1)}$. Simetria tensorului elastic dă $a(u^{(1)}, u^{(2)}) = a(u^{(2)}, u^{(1)})$, de unde

$$\boxed{\ell_1(u^{(2)}) = \ell_2(u^{(1)})}.$$

Scris explicit,

$$\int_\Omega \langle f^{(1)}, u^{(2)}\rangle\, dx + \int_{\Gamma_N} \langle g^{(1)}, u^{(2)}\rangle\, da = \int_\Omega \langle f^{(2)}, u^{(1)}\rangle\, dx + \int_{\Gamma_N} \langle g^{(2)}, u^{(1)}\rangle\, da.$$

Reciprocitatea este utilă atât conceptual, cât şi computaţional: răspunsul măsurat în punctul A la o forţă aplicată în B coincide, în sensul precis al lucrului, cu răspunsul în B la forţa corespunzătoare aplicată în A.

Observaţia 7.12.1 (unicitatea văzută direct din energie). Dacă u_1, u_2 sunt două soluţii pentru aceleaşi date, punem $w = u_1 - u_2$. Scăzând cele două ecuaţii slabe obţinem

$$a(w, v) = 0 \qquad \forall v \in V.$$

Alegerea $v = w$ dă $a(w, w) = 0$. Pozitivitatea energiei implică $e(w) = 0$, iar Korn, împreună cu condiţia Dirichlet, dă $w = 0$. Acesta este argumentul energetic care stă în spatele unicităţii în problema mixtă.

7.13 Principiul minimului energiei

Definim

$$\Pi(v) = \frac{1}{2} a(v, v) - \ell(v), \qquad v \in V.$$

Fie $u \in V$ soluţia slabă, adică

$$a(u, h) = \ell(h) \qquad \forall h \in V.$$

Pentru un $v \in V$ arbitrar punem $h = v - u$, deci $v = u + h$. Folosind biliniaritatea şi simetria lui a,

$$\begin{aligned}\Pi(v) &= \frac{1}{2}a(u+h, u+h) - \ell(u+h) \\ &= \frac{1}{2}a(u,u) + a(u,h) + \frac{1}{2}a(h,h) - \ell(u) - \ell(h).\end{aligned}$$

Ecuaţia slabă, testată cu h, dă $a(u,h) = \ell(h)$. Termenii liniari în h se anulează, iar

$$\boxed{\Pi(v) - \Pi(u) = \frac{1}{2}a(v-u, v-u).}$$

Coercivitatea lui a arată că membrul drept este nenegativ şi se anulează numai pentru $v = u$. Prin urmare soluţia slabă este unicul minimizator al lui Π pe V.

Reciproc, dacă u minimizează Π, pentru orice $h \in V$ funcţia de o variabilă

$$t \longmapsto \Pi(u + th)$$

are derivata zero în $t = 0$. Calculând,

$$\left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} \Pi(u+th) = a(u,h) - \ell(h) = 0.$$

Obţinem astfel ecuaţia slabă. Pentru elasticitatea liniară cu formă biliniară simetrică şi coercivă, formularea variaţională şi minimizarea energiei sunt deci echivalente.

7.14 Probleme pentru seminar

1. Demonstraţi identitatea folosită în dovada elementară a lui Korn pe H_0^1.
2. Verificaţi continuitatea funcţionalului de încărcare folosind Hölder şi teorema de urmă.
3. Arătaţi că energia elastică liniară este strict convexă pe V.
4. Discutaţi ce se întâmplă pentru problema de tracţiune pură, când mişcările rigide nu sunt eliminate.
5. Deduceţi condiţiile de compatibilitate pentru forţa şi momentul total în problema de tracţiune pură.
6. Formulaţi problema cu deplasare nenulă pe Γ_D printr-o extensie a datelor de frontieră.

7.15 Exerciţii rezolvate

Problema 7.15.1 (o funcţie în H^1)**.** Fie $u(x) = x(1-x)$ pe $(0,1)$. Verificaţi că $u \in H_0^1(0,1)$ şi calculaţi $\|u'\|_{L^2}$.

Rezolvare. Funcţia este netedă, $u(0) = u(1) = 0$, deci urma sa se anulează la frontieră. Derivata este $u'(x) = 1 - 2x$, iar

$$\|u'\|_{L^2}^2 = \int_0^1 (1-2x)^2 dx = \frac{1}{3}.$$

Astfel $\|u'\|_{L^2} = 1/\sqrt{3}$.

Problema 7.15.2 (forma slabă a unei ecuaţii scalare)**.** Pentru $-u'' = f$ pe $(0,1)$, $u(0) = u(1) = 0$, deduceţi formularea slabă.

Rezolvare. Înmulţim ecuaţia cu $v \in H_0^1(0,1)$ şi integrăm:

$$-\int_0^1 u''v\,dx = \int_0^1 fv\,dx.$$

Integrarea prin părţi dă

$$\int_0^1 u'v'\,dx - [u'v]_0^1 = \int_0^1 fv\,dx.$$

Termenul de frontieră este zero deoarece $v = 0$ la capete. Deci

$$\int_0^1 u'v'\,dx = \int_0^1 fv\,dx \quad \forall v \in H_0^1(0,1).$$

Problema 7.15.3 (energia elastică liniară)**.** Arătaţi că forma biliniară

$$a(u,v) = \int_\Omega [2\mu\langle e(u), e(v)\rangle + \lambda \operatorname{div} u \operatorname{div} v]dx$$

este simetrică.

Rezolvare. Produsul Frobenius este simetric: $\langle A, B\rangle = \langle B, A\rangle$. De asemenea produsul scalar al divergenţelor este simetric. Prin urmare

$$a(v,u) = a(u,v).$$

Această simetrie permite interpretarea problemei slabe ca problemă de minimizare a unei energii pătratice.

Problema 7.15.4 (continuitatea formei biliniare)**.** Demonstraţi estimarea

$$|a(u,v)| \le C\,\|u\|_{H^1}\,\|v\|_{H^1}.$$

Rezolvare. Prin Cauchy–Schwarz,

$$\left|\int 2\mu\langle e(u), e(v)\rangle\right| \le 2\mu\,\|e(u)\|_{L^2}\,\|e(v)\|_{L^2}.$$

Cum $\|e(u)\| \le \|\nabla u\|$, fiecare normă este controlată de norma H^1. Similar,

$$\left|\int \lambda \operatorname{div} u \operatorname{div} v\right| \le |\lambda|\,\|\operatorname{div} u\|_2\,\|\operatorname{div} v\|_2 \le C\,\|u\|_{H^1}\,\|v\|_{H^1}.$$

Adunând obţinem continuitatea.

Problema 7.15.5 (de ce este necesară inegalitatea Korn)**.** Explicaţi de ce controlul lui $e(u)$ trebuie transformat într-un control al întregii norme H^1 pentru a aplica Lax–Milgram.

Rezolvare. Energia elastică controlează $\|e(u)\|_{L^2}$, nu direct $\|\nabla u\|_{L^2}$. Dar coercivitatea Lax–Milgram trebuie formulată în norma spaţiului Hilbert $V \subset H^1$. Inegalitatea Korn, în prezenţa unei condiţii Dirichlet pe o parte de frontieră de măsură pozitivă, furnizează

$$\|u\|_{H^1} \le C_K \, \|e(u)\|_{L^2} \, .$$

Prin urmare energia controlează exact norma necesară pentru compactitatea şi existenţa în spaţiul ales.

Problema 7.15.6 (coercivitatea elasticităţii izotrope)**.** Presupuneţi $\mu > 0$ şi $3\lambda + 2\mu > 0$. Arătaţi că există $c > 0$ astfel încât

$$2\mu \, \|E\|^2 + \lambda (\operatorname{tr} E)^2 \ge c \, \|E\|^2$$

pentru orice $E = E^T$.

Rezolvare. Scriem

$$E = \operatorname{dev} E + \frac{1}{3} (\operatorname{tr} E) I,$$

cu

$$\|E\|^2 = \|\operatorname{dev} E\|^2 + \frac{1}{3} (\operatorname{tr} E)^2.$$

Atunci

$$2\mu \, \|E\|^2 + \lambda (\operatorname{tr} E)^2 = 2\mu \, \|\operatorname{dev} E\|^2 + \left(\lambda + \frac{2\mu}{3} \right) (\operatorname{tr} E)^2.$$

Ambii coeficienţi sunt pozitivi. Alegând minimul dintre coeficienţii corespunzători celor două componente obţinem o constantă $c > 0$ cu estimarea dorită.

Problema 7.15.7 (aplicarea Lax–Milgram)**.** Fie

$$V = \{ u \in H^1(\Omega; \mathbb{R}^3) : u = 0 \text{ pe } \Gamma_D \},$$

unde $\mathcal{H}^2(\Gamma_D) > 0$. Explicaţi de ce problema

$$a(u, v) = \ell(v) \quad \forall v \in V$$

are o soluţie unică.

Rezolvare. Mai întâi, V este subspaţiu închis al lui H^1, deci Hilbert. Forma a este biliniară şi continuă prin estimarea exerciţiului 4. Pozitivitatea tensorului elastic dă

$$a(v, v) \ge c_0 \, \|e(v)\|_2^2 \, .$$

Korn dă $\|v\|_{H^1} \le C_K \, \|e(v)\|_2$, deci

$$a(v, v) \ge \frac{c_0}{C_K^2} \, \|v\|_{H^1}^2 \, .$$

Dacă ℓ este continuă pe V (de exemplu prin Hölder şi teorema urmei pentru sarcini volumice şi de frontieră), toate ipotezele Lax–Milgram sunt îndeplinite. Există astfel un unic $u \in V$ care satisface ecuaţia slabă.

Problema 7.15.8 (echivalenţa cu minimizarea)**.** Pentru $J(v) = \frac{1}{2}a(v,v) - \ell(v)$, arătaţi că soluţia Lax–Milgram este unicul minimizator.

Rezolvare. Fie u soluţia slabă, deci $a(u,w) = \ell(w)$ pentru orice $w \in V$. Pentru $v = u + w$,

$$J(u+w) - J(u) = \frac{1}{2}a(u+w,u+w) - \ell(u+w) - \left[\frac{1}{2}a(u,u) - \ell(u)\right].$$

Dezvoltând şi folosind simetria,

$$J(u+w) - J(u) = a(u,w) - \ell(w) + \frac{1}{2}a(w,w) = \frac{1}{2}a(w,w).$$

Coercivitatea implică $a(w,w) > 0$ pentru $w \neq 0$. Deci u este minimizator strict şi unic.

Problema 7.15.9 (problema de tracţiune pură)**.** Presupuneţi $\Gamma_D = \varnothing$ şi

$$\ell(v) = \int_\Omega \langle f, v\rangle \, dx + \int_{\partial\Omega} \langle g, v\rangle \, da.$$

(a) Arătaţi că solvabilitatea impune rezultantă şi moment total nule. (b) Explicaţi de ce soluţia este unică numai modulo $\mathcal{R}_0$.

Rezolvare. Pentru orice mişcare rigidă infinitezimală $r(x) = a + Wx$, $W^T = -W$, avem $e(r) = 0$. Testând ecuaţia slabă cu r,

$$0 = a(u,r) = \ell(r).$$

Pentru $r(x) = a$ arbitrar rezultă

$$\left\langle a, \int_\Omega f \, dx + \int_{\partial\Omega} g \, da \right\rangle = 0 \qquad \forall a,$$

deci rezultanta totală este zero. Scriem apoi $Wx = \omega \times x$ şi obţinem

$$0 = \ell(r) = \left\langle \omega, \int_\Omega x \times f \, dx + \int_{\partial\Omega} x \times g \, da \right\rangle \qquad \forall \omega,$$

deci momentul total este zero.

Dacă u este soluţie şi $r \in \mathcal{R}_0$, atunci $e(u+r) = e(u)$ şi, datorită compatibilităţii, $\ell(u+r) = \ell(u)$. Prin urmare $u + r$ este aceeaşi soluţie fizică exprimată prin alt reprezentant. Teorema 7.10.1 arată că ceea ce este unic este clasa $[u] \in H^1/\mathcal{R}_0$.

Problema 7.15.10 (estimare a priori)**.** Dacă $u \in V$ rezolvă $a(u,v) = \ell(v)$, arătaţi

$$\|u\|_{H^1} \leq C \, \|\ell\|_{V^*}.$$

Rezolvare. Alegem $v = u$:

$$a(u,u) = \ell(u) \leq \|\ell\|_{V^*} \|u\|_V .$$

Coercivitatea dă

$$\alpha \|u\|_V^2 \leq a(u,u).$$

Prin urmare

$$\alpha \|u\|_V^2 \leq \|\ell\|_{V^*} \|u\|_V .$$

Dacă $u \neq 0$, împărţim prin $\|u\|_V$ şi obţinem

$$\|u\|_V \leq \alpha^{-1} \|\ell\|_{V^*} .$$

Norma lui V este echivalentă cu norma H^1 pe spaţiul cu condiţii Dirichlet.

7.16 Exerciţii propuse suplimentare

Nivelul A

7.A.1 *(evaluarea formei biliniare)* Fie $\Omega = (0,1)^3$, $\lambda = 60\,\mathrm{GPa}$, $\mu = 30\,\mathrm{GPa}$ şi

$$u(x) = (\alpha x_1, 0, 0), \qquad \alpha = 10^{-3}.$$

(i) Calculaţi $e(u)$ şi $\operatorname{div} u$. (ii) Calculaţi

$$a(u,u) = \int_\Omega \Big[2\mu\langle e(u), e(u)\rangle + \lambda(\operatorname{div} u)^2\Big]\,dx.$$

(iii) Deduceţi energia elastică $\frac{1}{2}a(u,u)$ şi verificaţi că $a(u,u) > 0$.
Indicaţie. § 7.5; pentru un câmp afin integrandul este constant şi $|\Omega| = 1$.
Răspuns.

$$e(u) = \operatorname{diag}(\alpha, 0, 0), \qquad \operatorname{div} u = \alpha,$$

$$a(u,u) = (2\mu + \lambda)\alpha^2 = 120\,\mathrm{kJ},$$

iar energia elastică este 60 kJ.

7.A.2 *(verificarea condiţiilor de compatibilitate la tracţiune pură)* Pe cubul $\Omega = (0,1)^3$ se consideră $f = 0$ şi tracţiunea g definită prin $g = \Sigma e_1$ pe faţa $x_1 = 1$, $g = -\Sigma e_1$ pe faţa $x_1 = 0$, iar $g = 0$ pe celelalte feţe; $\Gamma_D = \varnothing$. (i) Verificaţi anularea rezultantei $\int_{\partial\Omega} g\,da$. (ii) Verificaţi anularea momentului $\int_{\partial\Omega} x \times g\,da$. (iii) Concluzionaţi asupra solvabilităţii şi unicităţii.
Indicaţie. § 7.5.6, § 7.9.3 şi Teorema 7.10.5: condiţia este $\ell(r) = 0$ pentru orice mişcare rigidă infinitezimală $r(x) = a + Wx$.
Răspuns. Rezultanta este

$$\Sigma e_1 - \Sigma e_1 = 0.$$

Pentru moment, contribuţia feţei $x_1 = 1$ este $(0, \Sigma/2, -\Sigma/2)$, iar cea a feţei $x_1 = 0$ este $(0, -\Sigma/2, \Sigma/2)$; suma este zero. Problema admite soluţie în $H^1(\Omega;\mathbb{R}^3)$, unică până la o deplasare rigidă infinitezimală $a + Wx$.

7.A.3 *(teorema lui Clapeyron pentru o bară)* O bară prismatică de lungime $L = 2$ m şi arie $A_\omega = 4\,\mathrm{cm}^2$, din material cu $E_Y = 200$ GPa, este fixată la un capăt şi solicitată axial la celălalt de o forţă $N = 80$ kN. (i) Calculaţi alungirea ΔL. (ii) Calculaţi lucrul forţelor exterioare $W_{\mathrm{ext}} = N\Delta L$ şi energia elastică $E(u)$. (iii) Verificaţi $2E(u) = W_{\mathrm{ext}}$.
Indicaţie. § 6.11: $N = E_Y A_\omega \Delta L/L$; § 7.11 pentru Clapeyron.
Răspuns.

$$\Delta L = \frac{NL}{E_Y A_\omega} = 2\cdot 10^{-3}\,\mathrm{m} = 2\,\mathrm{mm}.$$

$$W_{\mathrm{ext}} = 160\,\mathrm{J}, \qquad E(u) = \frac{1}{2}N\Delta L = 80\,\mathrm{J}.$$

Nivelul B

7.B.1 *(constanta optimă de coercivitate a densităţii elastice)* Fie $\mu > 0$, $3\lambda + 2\mu > 0$ şi

$$Q(E) = 2\mu \|E\|^2 + \lambda(\operatorname{tr} E)^2, \qquad E \in \operatorname{Sym}(3).$$

(i) Rescrieţi Q folosind $E = \operatorname{dev} E + \frac{1}{3}(\operatorname{tr} E)I$. (ii) Determinaţi cea mai mare constantă c_0 pentru care $Q(E) \geq c_0 \|E\|^2$ pentru orice $E \in \operatorname{Sym}(3)$ şi indicaţi cazurile de egalitate. (iii) Calculaţi c_0 pentru $\lambda = 60$ GPa, $\mu = 30$ GPa şi deduceţi constanta de coercivitate a lui a pe V în funcţie de constanta Korn C_K.
Indicaţie.

$$Q(E) = 2\mu \|\operatorname{dev} E\|^2 + \left(\lambda + \frac{2\mu}{3}\right)(\operatorname{tr} E)^2,$$

$$\|E\|^2 = \|\operatorname{dev} E\|^2 + \frac{1}{3}(\operatorname{tr} E)^2.$$

Răspuns.

$$Q(E) = 2\mu \|\operatorname{dev} E\|^2 + \frac{3\lambda + 2\mu}{3}(\operatorname{tr} E)^2,$$

$$c_0 = \min\{2\mu, 3\lambda + 2\mu\} = \min\{2\mu, 3K\}.$$

Egalitatea se atinge pe deformaţii pur deviatorice dacă minimul este 2μ, respectiv pe $E = \alpha I$ dacă minimul este $3\lambda + 2\mu$. Pentru datele numerice, $c_0 = 60$ GPa şi

$$a(v, v) \geq c_0 \|e(v)\|_{L^2}^2 \geq \frac{c_0}{C_K^2} \|v\|_{H^1}^2 .$$

7.B.2 *(Betti şi variaţia de volum)* Fie Ω un corp elastic liniar izotrop, omogen, supus la tracţiune pură cu încărcări (f, g) compatibile, şi fie u o soluţie. Notăm

$$\Delta V = \int_\Omega \operatorname{div} u \, dx.$$

(i) Construiţi al doilea sistem cu $f^{(2)} = 0$, $g^{(2)} = \sigma_0 n$ pe $\partial\Omega$ şi arătaţi că

$$u^{(2)}(x) = \frac{\sigma_0}{3K} x$$

este soluţie. (ii) Aplicaţi teorema de reciprocitate a lui Betti şi deduceţi

$$\Delta V = \frac{1}{3K}\left(\int_\Omega \langle f, x\rangle \, dx + \int_{\partial\Omega} \langle g, x\rangle \, da\right).$$

(iii) Verificaţi formula pe cubul din 7.A.2 cu $\Sigma = 80$ MPa, $E_Y = 80$ GPa, $\nu = 1/3$.
Indicaţie. § 7.12; pentru sistemul auxiliar $e(u^{(2)}) = \frac{\sigma_0}{3K} I$ şi $\sigma^{(2)} = \sigma_0 I$.
Răspuns. Betti dă

$$\int_\Omega \langle f, u^{(2)}\rangle \, dx + \int_{\partial\Omega} \langle g, u^{(2)}\rangle \, da = \int_{\partial\Omega} \langle \sigma_0 n, u\rangle \, da = \sigma_0 \Delta V,$$

de unde formula. Pentru datele numerice,

$$3K = \frac{E_Y}{1-2\nu} = 240\,\mathrm{GPa},$$

$$\Delta V = \frac{\Sigma}{3K} = \frac{1}{3}\cdot 10^{-3}.$$

Direct, $e_{11} = 10^{-3}$, $e_{22} = e_{33} = -(1/3)10^{-3}$, deci $\operatorname{tr} e = (1/3)10^{-3}$.

7.B.3 *(principiul minimului energiei şi Rayleigh–Ritz pe o bară)* Fie bara $\Omega = \omega \times (0, L)$, fixată la $z = 0$, liberă lateral, cu forţă axială N aplicată la $z = L$. În modelul unidimensional,

$$\Pi(v) = \frac{1}{2}\int_0^L E_Y A_\omega (v')^2 dz - Nv(L), \qquad V_1 = \{v \in H^1(0,L) : v(0) = 0\}.$$

(i) Arătaţi că Π este strict convexă pe V_1 şi explicaţi rolul condiţiei $v(0) = 0$. (ii) Minimizaţi pe subspaţiul $v = \alpha z$. (iii) Arătaţi că minimizatorul este soluţia exactă şi legaţi valoarea minimă de energia din 7.A.3.

Indicaţie. § 7.14 şi inegalitatea Poincaré/Korn.

Răspuns. Pentru $h \neq 0$ cu $h(0) = 0$, $\int_0^L (h')^2 > 0$, deci partea pătratică este strict pozitivă. Pentru $v = \alpha z$,

$$\Pi(\alpha z) = \frac{1}{2} E_Y A_\omega \alpha^2 L - N\alpha L,$$

cu minimul la

$$\alpha_* = \frac{N}{E_Y A_\omega}.$$

Funcţia $u(z) = \alpha_* z$ satisface ecuaţia şi condiţiile la limită; iar

$$\Pi(\alpha_* z) = -\frac{N^2 L}{2E_Y A_\omega} = -\frac{1}{2} N \Delta L.$$

Nivelul C

7.C.1 *(problema de tracţiune pură pe cub: de la compatibilitate la soluţia normalizată)* Se consideră $\Omega = (0,1)^3$, $f = 0$, $\Gamma_D = \varnothing$, şi tracţiunea $g = \bar\sigma n$ pe $\partial\Omega$, unde $\bar\sigma = \operatorname{diag}(\Sigma, 0, 0)$ este constant. Materialul are $E_Y = 80$ GPa, $\nu = 1/3$, $\Sigma = 80$ MPa. (a) Arătaţi că încărcarea este compatibilă, $\ell(r) = 0$ pentru orice mişcare rigidă infinitezimală. (b) Determinaţi soluţia cu legea inversă a lui Hooke şi precizaţi sensul unicităţii. (c) Fixaţi mişcările rigide impunând $\int_\Omega u = 0$ şi $\int_\Omega \operatorname{skew} \nabla u = 0$; scrieţi u şi calculaţi energia.

Indicaţie. § 7.5.6, § 7.9.3, Teorema 7.10.5, § 6.10 şi § 7.11.

Răspuns. Pentru $r(x) = a + Wx$,

$$\ell(r) = \int_{\partial\Omega} \langle \bar\sigma n, r\rangle \, da = \int_\Omega \langle \bar\sigma, \nabla r\rangle \, dx = \langle \bar\sigma, W\rangle \, |\Omega| = 0.$$

Legea inversă dă

$$e = 10^{-3}\operatorname{diag}\left(1, -\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}\right).$$

Orice soluţie are forma $u = ex + a + Wx$. Normalizarea impune $W = 0$ şi

$$a = -e\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)^T,$$

deci

$$u(x) = 10^{-3}\left(x_1 - \frac{1}{2}, -\frac{1}{3}\left(x_2 - \frac{1}{2}\right), -\frac{1}{3}\left(x_3 - \frac{1}{2}\right)\right).$$

Energia este

$$E(u) = \frac{1}{2}\int_\Omega \langle \bar{\sigma}, e\rangle \, dx = 40\,\mathrm{kJ},$$

iar lucrul exterior este 80 kJ, egal cu $2E(u)$.

7.C.2 *(date Dirichlet neomogene: ridicare şi Lax–Milgram)* Fie Ω Lipschitz mărginit, Γ_D de măsură pozitivă, $u_D \in H^1(\Omega;\mathbb{R}^3)$ o ridicare a datei Dirichlet, $f \in L^2(\Omega;\mathbb{R}^3)$ şi $g \in L^2(\Gamma_N;\mathbb{R}^3)$. Se caută $u \in u_D + V$ cu $a(u,v) = \ell(v)$ pentru orice $v \in V$. (a) Punând $w = u - u_D$, scrieţi problema pentru w şi demonstraţi continuitatea noii funcţionale. (b) Aplicaţi Lax–Milgram şi obţineţi estimarea a priori. (c) Arătaţi că u este unicul minimizator al lui $\Pi(v) = \frac{1}{2}a(v,v) - \ell(v)$ pe $u_D + V$ şi că soluţia nu depinde de ridicarea aleasă.
Indicaţie. § 7.7, § 7.8 şi § 7.14.
Răspuns. Problema echivalentă este

$$a(w,v) = \widetilde{\ell}(v) := \ell(v) - a(u_D, v), \qquad v \in V.$$

Prin Cauchy–Schwarz, teorema urmei şi continuitatea lui a,

$$|\widetilde{\ell}(v)| \le C\,\|v\|_{H^1}.$$

Coercivitatea dă un unic $w \in V$ şi

$$\|u\|_{H^1} \le \|u_D\|_{H^1} + \frac{C_K^2}{c_0}\Big(\|f\|_{L^2} + C_{\mathrm{tr}}\,\|g\|_{L^2(\Gamma_N)} + M\,\|u_D\|_{H^1}\Big).$$

Pentru $v = u + h$, $h \in V$,

$$\Pi(u+h) - \Pi(u) = \frac{1}{2}a(h,h) > 0 \qquad (h \neq 0).$$

Două ridicări cu aceeaşi urmă diferă printr-un element al lui V, deci definesc aceeaşi mulţime afină.

7.C.3 *(torsiunea Saint-Venant ca problemă Neumann: formulare variaţională)* Fie $\omega \subset \mathbb{R}^2$ deschis, mărginit, Lipschitz, conex şi simplu conex, secţiunea unei bare prismatice. Funcţia de deplanare ψ satisface

$$\Delta\psi = 0 \quad \text{în } \omega, \qquad \frac{\partial \psi}{\partial n} = x_2 n_1 - x_1 n_2 \quad \text{pe } \partial\omega.$$

(a) Deduceţi forma slabă din energia de torsiune. (b) Arătaţi că funcţionala de încărcare se anulează pe constante şi că forma biliniară nu este coercivă pe $H^1(\omega)$; identificaţi nucleul. (c)

Lucraţi pe subspaţiul de medie zero şi aplicaţi Lax–Milgram. Verificaţi că pentru un disc soluţia este constantă.
Indicaţie. § 6.15 şi analogia cu problema de tracţiune pură.
Răspuns.

$$b(\psi,\eta)=\int_\omega \langle\nabla\psi,\nabla\eta\rangle\,dx,$$

$$\ell(\eta)=\int_\omega (x_2\partial_1\eta - x_1\partial_2\eta)\,dx=\int_{\partial\omega}(x_2n_1-x_1n_2)\eta\,ds.$$

Avem $\ell(1)=0$. Nucleul lui b este mulţimea constantelor. Pe

$$H^1_*(\omega)=\left\{\eta\in H^1(\omega):\int_\omega \eta\,dx=0\right\},$$

inegalitatea Poincaré–Wirtinger dă coercivitatea, iar Lax–Milgram furnizează o soluţie unică de medie zero; toate soluţiile din H^1 diferă printr-o constantă. Pentru discul centrat în origine, $x_2n_1-x_1n_2=0$ pe frontieră, deci ψ este constantă.

Capitolul 8

Elastodinamica liniară, energie şi propagarea undelor

Surse şi orientare. Formularea energetică şi metoda Galerkin sunt inspirate de tratările matematice din [10]; pentru propagarea undelor folosim şi [15].

8.1 Problema cu valori iniţiale şi la frontieră

Fixăm de la început ipotezele geometrice şi notarea datelor. Fie $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ mărginit, conex, cu frontieră Lipschitz, $0 < T < \infty$, şi

$$\partial\Omega = \overline{\Gamma_D} \cup \overline{\Gamma_N}, \qquad \Gamma_D \cap \Gamma_N = \varnothing$$

în sensul interioarelor relative, cu Γ_D de măsură superficială pozitivă. Considerăm

$$\rho \ddot{u} - \operatorname{div}(\mathbb{C}e(u)) = f \quad \text{în } \Omega \times (0,T), \tag{8.1}$$

cu

$$u = 0 \quad \text{pe } \Gamma_D \times (0,T), \qquad (\mathbb{C}e(u))n = g \quad \text{pe } \Gamma_N \times (0,T),$$

şi date iniţiale

$$u(0) = u_0, \qquad \dot{u}(0) = v_0.$$

Presupunem $0 < \rho_* \le \rho(x) \le \rho^* < \infty$ şi că $\mathbb{C}(x)$ este mărginit, are simetriile elastice şi este uniform pozitiv pe $\operatorname{Sym}(3)$. Pentru material izotrop omogen,

$$\mathbb{C}E = 2\mu E + \lambda \operatorname{tr}(E) I.$$

Regularitatea datelor u_0, v_0, f, g este precizată în teorema de existenţă şi în cadrul funcţional de mai jos. În particular, demonstraţia energetică elementară va fi dată pentru încărcarea totală reprezentabilă printr-un element din $L^1(0,T;H)$; o tracţiune generală produce un element din V^* şi cere formularea duală explicitată imediat.

8.2 Existenţa prin metoda Galerkin

Metoda Galerkin transformă problema cu infinit de grade de libertate într-o succesiune de sisteme de ecuaţii diferenţiale ordinare cu un număr finit de necunoscute. Ideea nu este să rezolvăm direct problema în spaţiul V, ci să construim soluţii aproximative u_m în subspaţii finite $V_m \subset V$, să obţinem estimări independente de m şi abia apoi să trecem la limită. Pentru trecerea la limită vom introduce noţiunea de convergenţă slabă folosită în demonstraţie.

8.2.1 Cadrul funcţional, spaţiile în timp şi noţiunea de soluţie slabă

Păstrăm ipotezele geometrice şi descompunerea frontierei fixate în secţiunea precedentă. Punem

$$V = \{v \in H^1(\Omega;\mathbb{R}^3) : \operatorname{Tr} v = 0 \text{ pe } \Gamma_D\}, \qquad H = L^2(\Omega;\mathbb{R}^3).$$

Pentru o forţă de volum f şi o tracţiune g pe Γ_N, funcţionalul de încărcare este

$$\langle F(t), v\rangle = \int_\Omega \langle f(x,t), v(x)\rangle\, dx + \int_{\Gamma_N} \langle g(x,t), \operatorname{Tr} v(x)\rangle\, da.$$

Prin teorema urmei, date suficient de integrabile definesc astfel un element din V^*. Avem scufundarea densă şi continuă $V \hookrightarrow H$. Identificând H cu dualul său prin produsul scalar L^2, obţinem tripletul Gelfand

$$V \hookrightarrow H \simeq H^* \hookrightarrow V^*.$$

Nu vom folosi teoria abstractă a tripletelor Gelfand ca o "cutie neagră"; această notaţie serveşte numai pentru a indica în ce spaţiu trăieşte fiecare termen.

Funcţii cu valori într-un spaţiu Banach. Dacă X este un spaţiu Banach, $L^p(0,T;X)$ notează spaţiul funcţiilor măsurabile $z(t)$ cu valori în X pentru care $t \mapsto \|z(t)\|_X$ aparţine lui $L^p(0,T)$; pentru $p=\infty$ folosim norma esenţial supremă. Scriem $C_w([0,T];X)$ pentru funcţiile slab continue: $z \in C_w([0,T];X)$ dacă $t \mapsto \ell(z(t))$ este continuă pentru orice $\ell \in X^*$. În demonstraţie vom folosi numai aceste două noţiuni şi derivata distribuţională în timp, introdusă explicit mai jos.

Densitatea satisface

$$0 < \rho_* \le \rho(x) \le \rho^* < \infty \qquad \text{a.p.t. în } \Omega.$$

Pe H introducem produsul scalar de masă

$$\langle u, v\rangle_\rho := \int_\Omega \rho(x)\langle u(x), v(x)\rangle\, dx, \qquad \|u\|_\rho^2 = \langle u, u\rangle_\rho.$$

Din ipotezele asupra lui ρ,

$$\rho_* \|u\|_H^2 \le \|u\|_\rho^2 \le \rho^* \|u\|_H^2,$$

deci $\|\cdot\|_\rho$ şi norma L^2 sunt echivalente.

Definim operatorul de masă $\mathcal{M} : H \to V^*$ prin

$$\langle \mathcal{M}w, v\rangle_{V^*,V} := \langle w, v\rangle_\rho \qquad (w \in H,\ v \in V).$$

Acesta este liniar şi continuu, deoarece

$$|\langle \mathcal{M}w, v\rangle| \le \rho^* \|w\|_H \|v\|_H \le C \|w\|_H \|v\|_V.$$

În acest fel inerţia va fi scrisă corect ca $(\mathcal{M}\dot u)' \in V^*$, fără a identifica în mod tacit o acceleraţie ponderată cu una neponderată.

Pentru tensorul elastic $\mathbb{C}$ definim

$$a(u,v) = \int_\Omega \langle \mathbb{C}(x)e(u), e(v)\rangle \, dx.$$

Aici $\mathbb{C}(x)$ acţionează liniar asupra matricei simetrice $e(u)$, iar produsul scalar este produsul Frobenius dintre $\mathbb{C}(x)e(u)$ şi $e(v)$. Presupunem simetriile elastice, mărginirea lui $\mathbb{C}$ şi existenţa lui $c_E > 0$ astfel încât

$$\langle \mathbb{C}(x)E, E\rangle \geq c_E \|E\|^2 \qquad \forall E \in \mathrm{Sym}(3), \quad \text{a.p.t. } x \in \Omega.$$

Atunci

$$|a(u,v)| \leq C \|u\|_V \|v\|_V, \qquad a(v,v) \geq c\|v\|_V^2$$

prin Cauchy–Schwarz şi inegalitatea lui Korn. Notăm cu $A : V \to V^*$ operatorul elastic

$$\langle Au, v\rangle = a(u,v).$$

Definiţia 8.2.1 (soluţie slabă a problemei elastodinamice)**.** Fie $F \in L^1(0,T;V^*)$. O funcţie u este soluţie slabă dacă

$$u \in L^\infty(0,T;V), \qquad \dot u \in L^\infty(0,T;H), \qquad (\mathcal{M}\dot u)' \in L^1(0,T;V^*),$$

şi

$$(\mathcal{M}\dot u)'(t) + Au(t) = F(t) \quad \text{în } V^* \text{ pentru a.p.t. } t \in (0,T). \tag{8.2}$$

Echivalent, pentru orice $v \in V$,

$$\frac{d}{dt}\langle \dot u(t), v\rangle_\rho + a(u(t), v) = \langle F(t), v\rangle$$

în sensul distribuţiilor în timp. Datele iniţiale vor fi înţelese prin reprezentanţii slab continui construiţi mai jos.

În demonstraţia energetică explicită vom presupune

$$F \in L^1(0,T;H) \subset L^1(0,T;V^*).$$

Această ipoteză acoperă, de exemplu, o forţă volumică $f \in L^1(0,T;L^2)$. O tracţiune generală g pe Γ_N produce, prin operatorul de urmă, un funcţional din V^*; teoria abstractă poate trata astfel de date, dar estimarea elementară de mai jos, în forma în care o prezentăm, foloseşte norma H. Nu vom pretinde că rezultatul demonstrat pentru $F \in L^1(0,T;H)$ acoperă automat orice încărcare de frontieră.

8.2.2 Alegerea spaţiilor Galerkin

Alegem $w_1, w_2, \cdots \in V$ liniar independente astfel încât

$$V_m := \operatorname{span}\{w_1, \ldots, w_m\}, \qquad \overline{\bigcup_{m\geq 1} V_m}^{V} = V.$$

Cum V este dens în H, putem alege proiecţii iniţiale

$$u_{0m} \in V_m, \qquad v_{0m} \in V_m,$$

cu

$$u_{0m} \to u_0 \text{ în } V, \qquad v_{0m} \to v_0 \text{ în } H.$$

Căutăm

$$u_m(t) = \sum_{j=1}^{m} d_j^{(m)}(t) w_j. \tag{8.3}$$

Impunem pentru $i = 1, \ldots, m$

$$\langle \ddot{u}_m, w_i \rangle_\rho + a(u_m, w_i) = \langle F, w_i \rangle_H.$$

Înlocuind dezvoltarea obţinem sistemul finit

$$M_m \ddot{d}^{(m)} + K_m d^{(m)} = f_m, \tag{8.4}$$

unde

$$(M_m)_{ij} = \langle w_j, w_i \rangle_\rho, \qquad (K_m)_{ij} = a(w_j, w_i), \qquad (f_m)_i = \langle F, w_i \rangle_H.$$

Pentru $\xi \in \mathbb{R}^m$ şi $v_\xi = \sum_j \xi_j w_j$,

$$\xi^T M_m \xi = \|v_\xi\|_\rho^2 \geq \rho_* \|v_\xi\|_H^2 .$$

Dacă $\xi \neq 0$, atunci $v_\xi \neq 0$ prin independenţa lui w_j, deci M_m este simetrică pozitiv definită şi inversabilă. Sistemul poate fi scris ca

$$\ddot{d}^{(m)} = M_m^{-1}(f_m - K_m d^{(m)}).$$

Pentru $f_m \in L^1(0, T; \mathbb{R}^m)$, teoria standard a sistemelor ODE liniare cu termen liber integrabil furnizează o unică soluţie cu $d^{(m)}$ şi $\dot{d}^{(m)}$ absolut continue pe intervalele compacte. Nu vom folosi rezultate mai fine din teoria ODE; estimarea de energie următoare furnizează controlul uniform în m.

Un exemplu concret de spaţii Galerkin. Pentru bara unidimensională fixată la capete, $V = H_0^1(0, L)$ şi putem lua

$$w_j(x) = \sin \frac{j\pi x}{L}, \qquad V_m = \operatorname{span}\{w_1, \ldots, w_m\}.$$

Aceste funcţii sunt modurile proprii ale operatorului axial. Pentru densitate şi modul Young constante, ortogonalitatea sinusurilor face matricile de masă şi rigiditate diagonale, iar sistemul Galerkin se decuplează în m oscilatori armonici. În acest exemplu metoda se vede cel mai simplu; cazul tridimensional general păstrează aceeaşi logică, dar nu mai este diagonal în baza aleasă arbitrar.

8.2.3 Identitatea de energie discretă, pas cu pas

Alegem ca test $\dot{u}_m(t) \in V_m$:

$$\langle \ddot{u}_m, \dot{u}_m \rangle_\rho + a(u_m, \dot{u}_m) = \langle F, \dot{u}_m \rangle_H.$$

Deoarece ρ nu depinde de timp,

$$\langle \ddot{u}_m, \dot{u}_m \rangle_\rho = \frac{d}{dt} \frac{1}{2} \|\dot{u}_m\|_\rho^2 .$$

Simetria lui a dă

$$a(u_m, \dot{u}_m) = \frac{d}{dt} \frac{1}{2} a(u_m, u_m).$$

Definim

$$E_m(t) := \frac{1}{2} \|\dot{u}_m(t)\|_\rho^2 + \frac{1}{2} a(u_m(t), u_m(t)).$$

Atunci

$$E_m'(t) = \langle F(t), \dot{u}_m(t) \rangle_H. \tag{8.5}$$

Prin Cauchy–Schwarz şi echivalenţa normelor,

$$|E_m'(t)| \le \|F(t)\|_H \, \|\dot{u}_m(t)\|_H \le C \, \|F(t)\|_H \, E_m(t)^{1/2}.$$

Pentru $Y_m = (E_m + \varepsilon)^{1/2}$, cu $\varepsilon > 0$, evităm împărţirea prin zero şi obţinem

$$Y_m'(t) = \frac{E_m'(t)}{2(E_m + \varepsilon)^{1/2}} \le C \, \|F(t)\|_H .$$

Integrăm, apoi lăsăm $\varepsilon \downarrow 0$:

$$\sup_{0 \le t \le T} E_m(t)^{1/2} \le E_m(0)^{1/2} + C \, \|F\|_{L^1(0,T;H)} . \tag{8.6}$$

Cum $u_{0m} \to u_0$ în V şi $v_{0m} \to v_0$ în H, energiile iniţiale sunt uniform mărginite. Coercivitatea lui a şi $\rho \ge \rho_*$ dau

$$\sup_m \Big(\|u_m\|_{L^\infty(0,T;V)} + \|\dot{u}_m\|_{L^\infty(0,T;H)} \Big) < \infty. \tag{8.7}$$

8.2.4 Compactitatea slab-$*$ şi identificarea derivatei în timp

Înainte de a folosi convergenţa slabă şi slab-$*$, fixăm precis sensul lor în acest capitol. Dacă X este un spaţiu Hilbert, scriem

$$z_m \rightharpoonup z \quad \text{în } X$$

dacă

$$(z_m, \xi)_X \longrightarrow (z, \xi)_X \qquad \forall \xi \in X.$$

Pentru funcţii esenţial mărginite cu valori în X, scriem

$$z_m \overset{*}{\rightharpoonup} z \quad \text{în } L^\infty(0,T;X)$$

dacă

$$\int_0^T (z_m(t), \Phi(t))_X \, dt \longrightarrow \int_0^T (z(t), \Phi(t))_X \, dt \qquad \forall \Phi \in L^1(0,T;X).$$

Aceasta este topologia slab-$*$ folosită pentru $L^\infty(0,T;X)$ în dualitate cu $L^1(0,T;X)$. Cum spaţiile V şi H sunt Hilbert separabile, teorema Banach–Alaoglu, împreună cu separabilitatea spaţiului predual, implică faptul că orice şir mărginit în $L^\infty(0,T;X)$ admite un subşir slab-$*$ convergent. Nu avem nevoie aici de teoria generală a topologiilor slabe; folosim numai această caracterizare prin testare integrală.

Astfel, din estimările uniforme, după extragerea unei subsecvenţe,

$$u_m \overset{*}{\rightharpoonup} u \quad \text{în } L^\infty(0,T;V), \qquad \dot{u}_m \overset{*}{\rightharpoonup} v \quad \text{în } L^\infty(0,T;H).$$

Arătăm că $v = \dot{u}$. Pentru $\eta \in C_c^\infty(0,T)$ şi $\phi \in H$,

$$\int_0^T \langle u_m, \phi \rangle_H \eta' \, dt = -\int_0^T \langle \dot{u}_m, \phi \rangle_H \eta \, dt.$$

Trecând la limită,

$$\int_0^T \langle u, \phi \rangle_H \eta' \, dt = -\int_0^T \langle v, \phi \rangle_H \eta \, dt.$$

Aceasta este definiţia derivatei distribuţionale, deci $v = \dot{u}$. În particular $u \in W^{1,\infty}(0,T;H)$ şi are un reprezentant continuu $u \in C([0,T];H)$.

8.2.5 Trecerea la limită în ecuaţia Galerkin

Fixăm k şi $m \geq k$. Pentru $\eta \in C_c^\infty(0,T)$,

$$-\int_0^T \langle \dot{u}_m, w_k \rangle_\rho \eta' \, dt + \int_0^T a(u_m, w_k)\eta \, dt = \int_0^T \langle F, w_k \rangle_H \eta \, dt.$$

Primul termen trece la limită prin convergenţa slab-$*$ a lui $\dot{u}_m$ în $L^\infty(H)$; al doilea prin convergenţa slab-$*$ a lui u_m în $L^\infty(V)$ şi continuitatea lui $a(\cdot, w_k)$. Obţinem

$$-\int_0^T \langle \dot{u}, w_k \rangle_\rho \eta' \, dt + \int_0^T a(u, w_k)\eta \, dt = \int_0^T \langle F, w_k \rangle_H \eta \, dt.$$

Prin densitatea lui $\bigcup_m V_m$ în V, identitatea este valabilă pentru orice $w \in V$. Ea se scrie

$$(\mathcal{M}\dot{u})' + Au = F \quad \text{în } \mathcal{D}'(0,T;V^*).$$

Cum $Au \in L^\infty(0,T;V^*)$ şi $F \in L^1(0,T;H) \subset L^1(0,T;V^*)$, rezultă de fapt

$$(\mathcal{M}\dot{u})' \in L^1(0,T;V^*). \tag{8.8}$$

8.2.6 Continuitatea slabă şi recuperarea datelor iniţiale

Înainte de a scrie $\dot{u}(0)$ trebuie să justificăm că această valoare are sens.

Lema 8.2.2 (continuitatea slabă a vitezei)**.** *Dacă $\dot{u} \in L^\infty(0,T;H)$ şi $(\mathcal{M}\dot{u})' \in L^1(0,T;V^*)$, atunci $\dot{u}$ admite un reprezentant în $C_w([0,T];H)$.*

Demonstraţie. Pentru orice $v \in V$, funcţia

$$t \longmapsto \langle \dot{u}(t), v\rangle_\rho = \langle \mathcal{M}\dot{u}(t), v\rangle$$

are derivata în $L^1(0,T)$ şi este deci absolut continuă. Astfel ea are un reprezentant continuu. Fie acum $h \in H$. Alegem $v_j \in V$ cu $v_j \to h$ în H. Din mărginirea uniformă a lui $\dot{u}$ în H şi echivalenţa normelor,

$$\sup_t |\langle \dot{u}(t), h - v_j\rangle_\rho| \le C \left\|\dot{u}\right\|_{L^\infty(H)} \left\|h - v_j\right\|_H \to 0.$$

Prin urmare $t \mapsto \langle \dot{u}(t), h\rangle_\rho$ este limită uniformă de funcţii continue şi este continuă. Produsul $\langle\cdot,\cdot\rangle_\rho$ este echivalent cu produsul H, deci aceasta este exact continuitatea slabă în H. □

Mai întâi observăm că $\dot{u} \in L^\infty(0,T;H)$ implică $u \in W^{1,\infty}(0,T;H) \subset C([0,T];H)$, deoarece

$$\left\|u(t) - u(s)\right\|_H \le \int_s^t \left\|\dot{u}(\tau)\right\|_H \, d\tau \le \left\|\dot{u}\right\|_{L^\infty(H)} |t - s| \,.$$

Din $u \in L^\infty(0,T;V)$ şi această continuitate tare în H rezultă $u \in C_w([0,T];V)$: dacă $t_j \to t$, orice subşir al lui $u(t_j)$ are, prin mărginirea în V, un subşir slab convergent în V; scufundarea continuă $V \hookrightarrow H$ şi convergenţa tare în H identifică orice asemenea limită cu $u(t)$.

Pentru poziţia iniţială pornim de la

$$u_m(t) = u_{0m} + \int_0^t \dot{u}_m(s)\, ds.$$

Trecerea la limită în dualitate cu orice $\phi \in H$ dă

$$\langle u(t), \phi\rangle_H = \langle u_0, \phi\rangle_H + \int_0^t \langle \dot{u}(s), \phi\rangle_H \, ds,$$

deci $u(0) = u_0$.

Pentru viteza iniţială alegem $w \in \bigcup_m V_m$ şi $\eta \in C^1([0,T])$ cu $\eta(T) = 0$. Integrarea prin părţi a ecuaţiei Galerkin dă

$$-\int_0^T \langle \dot{u}_m, w\rangle_\rho \eta' \, dt + \int_0^T a(u_m, w)\eta \, dt = \int_0^T \langle F, w\rangle_H \eta \, dt + \langle v_{0m}, w\rangle_\rho \eta(0).$$

Trecem la limită. Pe de altă parte, deoarece $\mathcal{M}\dot{u}$ are un reprezentant continuu în V^*, integrarea prin părţi a ecuaţiei-limită produce $\langle \mathcal{M}\dot{u}(0), w\rangle \eta(0) = \langle \dot{u}(0), w\rangle_\rho \eta(0)$. Comparând,

$$\langle \dot{u}(0) - v_0, w\rangle_\rho = 0 \qquad \forall w \in \bigcup_m V_m.$$

Densitatea în H şi echivalenţa produsului de masă cu cel L^2 implică

$$\dot{u}(0) = v_0.$$

8.2.7 Unicitatea soluţiei slabe: testul integrat în timp

Fie u_1, u_2 două soluţii cu aceleaşi date şi $w = u_1 - u_2$. Atunci

$$(\mathcal{M}\dot{w})' + Aw = 0, \qquad w(0) = 0, \quad \dot{w}(0) = 0.$$

Nu putem testa direct cu $\dot{w}$, deoarece $\dot{w}$ aparţine a priori numai lui H. Fixăm $s \in (0, T]$ şi punem

$$z(t) = \int_t^s w(\tau)\, d\tau \quad (0 \le t \le s).$$

Atunci $z \in W^{1,\infty}(0, s; V)$, $z(s) = 0$ şi $\dot{z} = -w$. Prin aproximarea în timp a lui z cu funcţii netede cu valori în V, este legitim să folosim z ca test integrat. Obţinem

$$\int_0^s \langle (\mathcal{M}\dot{w})', z\rangle\, dt + \int_0^s a(w, z)\, dt = 0.$$

Integrarea prin părţi în primul termen, folosind $z(s) = 0$ şi $\dot{w}(0) = 0$, dă

$$\begin{aligned}\int_0^s \langle (\mathcal{M}\dot{w})', z\rangle\, dt &= -\int_0^s \langle \dot{w}, \dot{z}\rangle_\rho\, dt \\ &= \int_0^s \langle \dot{w}, w\rangle_\rho\, dt = \frac{1}{2}\left\|w(s)\right\|_\rho^2,\end{aligned}$$

unde $w(0) = 0$. Pentru termenul elastic,

$$\begin{aligned}\int_0^s a(w, z)\, dt &= -\int_0^s a(\dot{z}, z)\, dt \\ &= -\frac{1}{2}\int_0^s \frac{d}{dt} a(z, z)\, dt = \frac{1}{2} a(z(0), z(0)).\end{aligned}$$

Prin urmare

$$\frac{1}{2}\left\|w(s)\right\|_\rho^2 + \frac{1}{2} a(z(0), z(0)) = 0.$$

Ambii termeni sunt nenegativi, deci $w(s) = 0$. Cum s este arbitrar, $w \equiv 0$.

Teorema 8.2.3 (existenţă şi unicitate pentru elastodinamica liniară)**.** *Fie $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ mărginit, conex, cu frontieră Lipschitz, $\Gamma_D \subset \partial\Omega$ de măsură pozitivă şi $0 < T < \infty$. Presupunem*

$$u_0 \in V, \qquad v_0 \in H, \qquad F \in L^1(0, T; H),$$

$0 < \rho_* \le \rho \le \rho^* < \infty$, iar $\mathbb{C}$ este mărginit, are simetriile elastice şi este uniform pozitiv pe

Sym(3). *Atunci există o unică soluţie slabă în sensul Definiţiei 8.2.1, cu*

$$u \in L^\infty(0,T;V) \cap C_w([0,T];V), \qquad \dot{u} \in L^\infty(0,T;H) \cap C_w([0,T];H),$$

$$(\mathcal{M}\dot{u})' \in L^1(0,T;V^*), \qquad u(0) = u_0, \quad \dot{u}(0) = v_0.$$

În plus,

$$\sup_{0\le t\le T} \left(\|u(t)\|_V + \|\dot{u}(t)\|_H\right) \le C\left(\|u_0\|_V + \|v_0\|_H + \|F\|_{L^1(0,T;H)}\right),$$

unde C depinde de ρ_*, ρ^*, de constantele de elasticitate, de Korn şi de Ω, dar nu de aproximaţia Galerkin.

8.3 Bilanţul energiei

Presupunem mai întâi că soluţia este suficient de regulată pentru ca $\dot{u}$ să poată fi folosită drept funcţie-test. Pornim de la forma slabă

$$\int_\Omega \rho\,\langle \ddot{u}, v\rangle\,dx + \int_\Omega \langle \mathbb{C}e(u), e(v)\rangle\,dx = \int_\Omega \langle f, v\rangle\,dx + \int_{\Gamma_N} \langle g, v\rangle\,da.$$

Alegem $v = \dot{u}$. Primul termen se scrie

$$\int_\Omega \rho\,\langle \ddot{u}, \dot{u}\rangle\,dx = \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}\int_\Omega \rho\,\|\dot{u}\|^2\,dx\right),$$

deoarece $\partial_t \|\dot{u}\|^2 = 2\langle \ddot{u}, \dot{u}\rangle$. Pentru termenul elastic folosim $e(\dot{u}) = \partial_t e(u)$ şi simetria formei elastice:

$$\int_\Omega \langle \mathbb{C}e(u), e(\dot{u})\rangle\,dx = \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}\int_\Omega \langle \mathbb{C}e(u), e(u)\rangle\,dx\right).$$

Prin urmare, dacă

$$\mathcal{E}(t) := \frac{1}{2}\int_\Omega \rho\,\|\dot{u}(t)\|^2\,dx + \frac{1}{2}\int_\Omega \langle \mathbb{C}e(u(t)), e(u(t))\rangle\,dx,$$

atunci

$$\boxed{\frac{d}{dt}\mathcal{E}(t) = \int_\Omega \langle f, \dot{u}\rangle\,dx + \int_{\Gamma_N} \langle g, \dot{u}\rangle\,da.} \tag{8.9}$$

Membrul drept este puterea instantanee a forţelor exterioare. Dacă $f = 0$ şi $g = 0$, rezultă $\mathcal{E}(t) = \mathcal{E}(0)$.

8.3.1 Forma locală a bilanţului energiei

Aceeaşi relaţie poate fi văzută local. Ecuaţia tare este

$$\rho\ddot{u} - \operatorname{div}\sigma = f, \qquad \sigma = \mathbb{C}e(u).$$

Luăm produsul scalar cu $\dot{u}$:

$$\rho\langle \ddot{u}, \dot{u}\rangle - \langle \operatorname{div}\sigma, \dot{u}\rangle = \langle f, \dot{u}\rangle.$$

Pentru termenul cu tensiunea folosim, componentă cu componentă,

$$\begin{aligned}\operatorname{div}(\sigma^T \dot{u}) &= \partial_j(\sigma_{ij}\dot{u}_i)\\ &= (\partial_j\sigma_{ij})\dot{u}_i + \sigma_{ij}\partial_j\dot{u}_i\\ &= \langle \operatorname{div}\sigma, \dot{u}\rangle + \langle \sigma, \nabla\dot{u}\rangle.\end{aligned}$$

Cum σ este simetrică, partea antisimetrică a lui $\nabla\dot{u}$ nu contribuie, deci

$$\langle \sigma, \nabla\dot{u}\rangle = \langle \sigma, e(\dot{u})\rangle = \partial_t\left(\frac{1}{2}\langle \mathbb{C}e(u), e(u)\rangle\right).$$

De asemenea,

$$\rho\langle \ddot{u}, \dot{u}\rangle = \partial_t\left(\frac{\rho}{2}\|\dot{u}\|^2\right).$$

Rezultă

$$\boxed{\partial_t\left[\frac{\rho}{2}\|\dot{u}\|^2 + \frac{1}{2}\langle \mathbb{C}e(u), e(u)\rangle\right] - \operatorname{div}(\sigma^T\dot{u}) = \langle f, \dot{u}\rangle.} \tag{8.10}$$

Dacă integrăm această identitate pe Ω şi aplicăm teorema divergenţei, termenul de frontieră devine

$$\int_{\partial\Omega}\langle \sigma n, \dot{u}\rangle\, da.$$

Pe Γ_N avem $\sigma n = g$, iar pe partea Dirichlet omogenă avem $\dot{u} = 0$. Se recuperează exact (8.9). Astfel forma locală şi cea globală nu sunt două principii diferite, ci aceeaşi relaţie scrisă punctual, respectiv integrat.

Unicitatea. Pentru soluţia slabă, unicitatea a fost demonstrată deja în Teorema 8.2.3 cu o funcţie-test integrată în timp. Identitatea de energie de mai sus este folosită direct numai la regularitatea la care testul $v = \dot{u}$ este admisibil.

8.4 Unde plane, tensorul acustic şi modurile P/S

Pentru un material izotrop omogen,

$$\sigma(u) = 2\mu e(u) + \lambda\, \operatorname{div} u\, I.$$

Coeficienţii sunt constanţi, iar

$$\begin{aligned}(\operatorname{div}(2\mu e(u)))_i &= \partial_j(\mu(\partial_j u_i + \partial_i u_j))\\ &= \mu\Delta u_i + \mu\partial_i(\operatorname{div} u).\end{aligned}$$

Prin urmare, în absenţa forţelor de volum,

$$\boxed{\rho u_{tt} = \mu\Delta u + (\lambda+\mu)\nabla \operatorname{div} u.} \tag{8.11}$$

Căutăm o undă plană sub forma părţii reale a câmpului complex

$$u(x,t) = a\, e^{i(\kappa\langle n,x\rangle - \omega t)}, \qquad \|n\| = 1, \quad \kappa > 0.$$

Vectorul n dă direcţia de propagare, iar a polarizarea. Calculăm separat cei trei termeni din (8.11). Avem

$$\nabla u = i\kappa\, a \otimes n\, e^{i(\cdots)}, \qquad \operatorname{div} u = i\kappa\langle a, n\rangle e^{i(\cdots)},$$

$$\Delta u = -\kappa^2 a\, e^{i(\cdots)}, \qquad \nabla \operatorname{div} u = -\kappa^2\langle a, n\rangle n\, e^{i(\cdots)}, \qquad u_{tt} = -\omega^2 a\, e^{i(\cdots)}.$$

După substituţie, factorul exponenţial nenul se simplifică. Dacă notăm $c = \omega/\kappa$, rămâne

$$\rho c^2 a = \mu a + (\lambda + \mu)\langle a, n\rangle n.$$

Definim

$$\boxed{Q(n) = \mu I + (\lambda + \mu) n \otimes n}.$$

Ecuaţia undei plane este deci problema proprie

$$Q(n)a = \rho c^2 a.$$

Descompunem polarizarea în partea paralelă şi partea ortogonală pe n:

$$a = a_\parallel + a_\perp, \qquad a_\parallel = \langle a, n\rangle n, \qquad \langle a_\perp, n\rangle = 0.$$

Pentru $a_\parallel$,

$$Q(n)a_\parallel = (\lambda + 2\mu)a_\parallel,$$

şi obţinem viteza longitudinală

$$\boxed{c_P = \sqrt{\frac{\lambda + 2\mu}{\rho}}}.$$

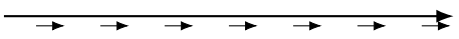
Pentru orice $a_\perp \in n^\perp$,

$$Q(n)a_\perp = \mu a_\perp,$$

deci

$$\boxed{c_S = \sqrt{\frac{\mu}{\rho}}}.$$

Subspaţiul $n^\perp$ este bidimensional, de aceea există două polarizări transversale independente cu aceeaşi viteză c_S.



direcţia de propagare

undă P: deplasare paralelă cu propagarea



undă S: deplasare transversală

8.4.1 Separarea longitudinală şi transversală pentru câmpuri generale

Calculul cu unda plană descrie modurile elementare. Pentru un câmp general, separarea longitudinală–transversală se obţine aplicând operatorii care selectează cele două componente. Aplicând mai întâi divergenţa în (8.11) obţinem

$$\rho\,\partial_{tt}(\operatorname{div} u) = (\lambda + 2\mu)\Delta(\operatorname{div} u).$$

Aşadar dilatarea $\operatorname{div} u$ satisface o ecuaţie scalară a undei cu viteza c_P. Aplicând rotorul şi folosind $\operatorname{curl}\nabla q = 0$,

$$\rho\,\partial_{tt}(\operatorname{curl} u) = \mu\Delta(\operatorname{curl} u),$$

deci partea de rotaţie locală se propagă cu viteza c_S.

Pe $\mathbb{R}^3$, pentru câmpuri suficient de regulate şi cu decădere adecvată la infinit, descompunerea Helmholtz scrie

$$u = \nabla\phi + \operatorname{curl}\Psi, \qquad \operatorname{div}\Psi = 0.$$

Prima parte are rotor nul, iar a doua are divergenţă nulă. Dacă introducem $u_P = \nabla\phi$ în (8.11), rezultă

$$\nabla\Big(\ddot{\phi} - c_P^2\Delta\phi\Big) = 0.$$

De aici nu rezultă imediat că paranteza este zero: rezultă numai că ea nu depinde de x. Există deci o funcţie $a(t)$ astfel încât

$$\ddot{\phi} - c_P^2\Delta\phi = a(t).$$

Alegem h cu $h''(t) = a(t)$ şi definim $\widetilde{\phi} = \phi - h(t)$. Cum $\nabla h(t) = 0$, avem $\nabla\widetilde{\phi} = \nabla\phi$, deci deplasarea nu se schimbă, iar

$$\ddot{\widetilde{\phi}} - c_P^2\Delta\widetilde{\phi} = 0.$$

Pentru partea solenoidală $u_S = \operatorname{curl}\Psi$, relaţia $\operatorname{div} u_S = 0$ reduce direct (8.11) la

$$\ddot{u}_S - c_S^2\Delta u_S = 0.$$

Aceste două ecuaţii sunt versiunea în spaţiul fizic a celor două spaţii proprii ale tensorului acustic: direcţia $\operatorname{span}\{n\}$ şi planul $n^{\perp}$.

Exemplul 8.4.1 (estimarea modulelor din vitezele undelor)**.** Dacă densitatea ρ şi vitezele c_P, c_S sunt cunoscute, atunci formulele de mai sus pot fi inversate:

$$\mu = \rho c_S^2, \qquad \lambda = \rho(c_P^2 - 2c_S^2).$$

Astfel măsurarea timpilor de sosire ai undelor longitudinale şi transversale oferă, în modelul izotrop omogen, informaţie despre constantele elastice.

8.5 Problema unidimensională a barei şi formula lui d'Alembert

Pentru o bară omogenă subţire considerăm numai deplasarea longitudinală $u = u(x,t)$. Modelul unidimensional conduce la

$$\rho u_{tt} = E_Y u_{xx}.$$

Punem

$$c = \sqrt{\frac{E_Y}{\rho}},$$

şi obţinem ecuaţia undei

$$u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0.$$

Pentru a o integra introducem coordonatele caracteristice

$$\xi = x - ct, \qquad \eta = x + ct.$$

Dacă privim u ca funcţie de (ξ, η), regula lanţului dă

$$\partial_t = -c\partial_\xi + c\partial_\eta, \qquad \partial_x = \partial_\xi + \partial_\eta.$$

Aplicând de două ori aceşti operatori,

$$u_{tt} = c^2 u_{\xi\xi} - 2c^2 u_{\xi\eta} + c^2 u_{\eta\eta},$$

$$c^2 u_{xx} = c^2 u_{\xi\xi} + 2c^2 u_{\xi\eta} + c^2 u_{\eta\eta}.$$

Prin scădere,

$$u_{tt} - c^2 u_{xx} = -4c^2 u_{\xi\eta}.$$

Ecuaţia devine deci

$$u_{\xi\eta} = 0.$$

Integrăm mai întâi în raport cu η:

$$u_\xi(\xi, \eta) = A(\xi).$$

O a doua integrare dă

$$u(\xi, \eta) = f(\xi) + g(\eta),$$

adică

$$u(x,t) = f(x - ct) + g(x + ct).$$

Presupunem acum date iniţiale

$$u(x,0) = u_0(x), \qquad u_t(x,0) = v_0(x).$$

La $t = 0$,

$$f(x) + g(x) = u_0(x).$$

Derivând soluţia generală în timp,

$$u_t(x,t) = -cf'(x - ct) + cg'(x + ct),$$

de unde

$$-cf'(x) + cg'(x) = v_0(x).$$

Derivâm şi prima relaţie:

$$f'(x) + g'(x) = u_0'(x).$$

Rezolvând sistemul pentru f' şi g',

$$f' = \frac{1}{2}u_0' - \frac{1}{2c}v_0, \qquad g' = \frac{1}{2}u_0' + \frac{1}{2c}v_0.$$

După integrare, constantele se combină într-o singură constantă care se anulează în suma $f(x - ct) + g(x + ct)$. Rezultă formula lui d'Alembert:

$$\boxed{u(x,t) = \frac{1}{2}\Big[u_0(x - ct) + u_0(x + ct)\Big] + \frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct} v_0(s)\,ds.}$$

Verificăm separat cele două date iniţiale. Pentru $t = 0$, capetele integralei coincid, deci

$$u(x,0) = \frac{1}{2}[u_0(x) + u_0(x)] = u_0(x).$$

Pentru viteza iniţială derivăm întreaga formulă. Regula lanţului şi regula Leibniz dau

$$\begin{aligned} u_t(x,t) = {} & \frac{c}{2}\Big[-u_0'(x - ct) + u_0'(x + ct)\Big] \\ & + \frac{1}{2c}\Big[c\,v_0(x + ct) + c\,v_0(x - ct)\Big]. \end{aligned}$$

Punând $t = 0$, primul termen se anulează, iar al doilea devine

$$\frac{1}{2}[v_0(x) + v_0(x)] = v_0(x).$$

Prin urmare $u_t(x,0) = v_0(x)$.

Formula arată şi propagarea cu viteză finită: valoarea $u(x,t)$ depinde numai de datele iniţiale din intervalul

$$[x - ct, x + ct].$$

Pentru teoria clasică a ecuaţiei undei vezi [15].

8.6 Vibraţiile proprii ale unei bare finite

Considerăm ecuaţia

$$u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0$$

pe intervalul $(0, L)$, cu capetele fixate,

$$u(0,t) = u(L,t) = 0.$$

Căutăm mai întâi soluţii separate

$$u(x,t) = X(x)T(t).$$

Prin substituţie,

$$X(x)T''(t) - c^2 X''(x)T(t) = 0.$$

Pentru o soluţie separată nenulă, pe intervalele pe care X şi T nu se anulează, putem împărţi prin c^2XT şi obţinem

$$\frac{T''(t)}{c^2 T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)}.$$

Membrul stâng depinde numai de t, iar cel drept numai de x; egalitatea pentru toate x, t este posibilă numai dacă ambele sunt egale cu o constantă. Pentru modurile oscilante scriem această constantă sub forma $-\kappa^2$, cu $\kappa > 0$. Rezultă

$$X'' + \kappa^2 X = 0, \qquad T'' + c^2\kappa^2 T = 0.$$

Condiţiile la capete devin

$$X(0) = X(L) = 0.$$

Soluţia generală a ecuaţiei spaţiale este

$$X(x) = A\sin(\kappa x) + B\cos(\kappa x).$$

Din $X(0) = 0$ rezultă $B = 0$. Pentru o soluţie nenulă avem $A \neq 0$, iar a doua condiţie impune

$$\sin(\kappa L) = 0.$$

Prin urmare

$$\kappa_n = \frac{n\pi}{L}, \qquad n = 1, 2, \ldots,$$

şi putem lua

$$X_n(x) = \sin\frac{n\pi x}{L}.$$

Ecuaţia temporală devine

$$T_n'' + \omega_n^2 T_n = 0, \qquad \omega_n = c\kappa_n = \frac{n\pi c}{L},$$

cu soluţia

$$T_n(t) = A_n \cos(\omega_n t) + B_n \sin(\omega_n t).$$

Astfel fiecare mod propriu are forma

$$u_n(x,t) = (A_n \cos \omega_n t + B_n \sin \omega_n t) \sin \frac{n\pi x}{L}.$$

Pentru date suficient de regulate, soluţia se dezvoltă în seria

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} (A_n \cos \omega_n t + B_n \sin \omega_n t) \sin \frac{n\pi x}{L}.$$

La $t = 0$ avem

$$u_0(x) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin \frac{n\pi x}{L},$$

iar derivarea în timp dă

$$v_0(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \omega_n B_n \sin \frac{n\pi x}{L}.$$

Ortogonalitatea funcţiilor sinus pe $(0, L)$ furnizează

$$A_n = \frac{2}{L} \int_0^L u_0(x) \sin \frac{n\pi x}{L}\, dx, \qquad B_n = \frac{2}{L\omega_n} \int_0^L v_0(x) \sin \frac{n\pi x}{L}\, dx.$$

Completitudinea sistemului $\{\sin(n\pi x/L)\}_{n\geq 1}$ în $L^2(0, L)$ justifică dezvoltarea datelor iniţiale. Ortogonalitatea explică şi de ce, în acest model liniar, energia totală se descompune în suma energiilor modale, fiecare mod evoluând independent.

8.7 Frecvenţele proprii ale unei bare fixate-liber

Păstrăm ecuaţia axială

$$\rho u_{tt} = E_Y u_{xx}, \qquad c^2 = \frac{E_Y}{\rho},$$

dar schimbăm condiţiile la capete. Capătul $x = 0$ este fixat, iar la $x = L$ efortul axial este nul:

$$u(0,t) = 0, \qquad E_Y u_x(L,t) = 0.$$

A doua condiţie rezultă din relaţia unidimensională $\sigma = E_Y u_x$: o secţiune terminală liberă nu transmite forţă axială, deci $\sigma(L,t) = 0$.

Separarea variabilelor $u(x,t) = X(x)T(t)$ este aceeaşi ca pentru bara fixată la ambele capete. Partea spaţială satisface

$$X'' + \kappa^2 X = 0,$$

iar partea temporală este un oscilator cu frecvenţa $\omega = c\kappa$. Diferenţa apare numai în condiţiile pentru X:

$$X(0) = 0, \qquad X'(L) = 0.$$

Din forma generală a soluţiei spaţiale, calculată în secţiunea precedentă, condiţia $X(0) = 0$

elimină termenul cosinus. Putem scrie direct

$$X(x) = A\sin(\kappa x), \qquad X'(x) = A\kappa\cos(\kappa x).$$

Pentru un mod nenul, $A \neq 0$ şi $\kappa > 0$. Condiţia $X'(L) = 0$ devine

$$\cos(\kappa L) = 0.$$

Rădăcinile pozitive sunt

$$\kappa_n L = \frac{(2n-1)\pi}{2}, \qquad n = 1, 2, \ldots,$$

deci

$$\boxed{\kappa_n = \frac{(2n-1)\pi}{2L}}, \qquad \boxed{\omega_n = \frac{(2n-1)\pi}{2L}\sqrt{\frac{E_Y}{\rho}}}.$$

Modurile proprii pot fi alese sub forma

$$X_n(x) = \sin(\kappa_n x).$$

Pentru bara fixată la ambele capete am obţinut $\kappa_n = n\pi/L$; aici multiplii impari ai lui $\pi/(2L)$ provin din condiţia Neumann de la capătul liber.

8.8 Dispersia într-un model cu gradient de deformare

În elasticitatea clasică omogenă, viteza undelor plane nu depinde de lungimea de undă. Pentru a vedea cum apare dispersia, considerăm în 1D energia

$$\mathcal{E}(u) = \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}} \left(C u_x^2 + H u_{xx}^2 \right) dx, \qquad C > 0,\ H > 0,$$

şi energia cinetică

$$\mathcal{K}(\dot u) = \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}} \rho u_t^2 \, dx.$$

Acţiunea este

$$\mathcal{S}(u) = \int_{t_0}^{t_1} [\mathcal{K}(\dot u) - \mathcal{E}(u)] dt.$$

Pentru o variaţie $u + \varepsilon\eta$, cu variaţiile necesare nule la capetele intervalului temporal şi la frontiera spaţială,

$$\begin{aligned} \delta\mathcal{S}(u)[\eta] &= \iint \left(\rho u_t \eta_t - C u_x \eta_x - H u_{xx}\eta_{xx} \right) dx dt \\ &= \iint \left(-\rho u_{tt} + C u_{xx} - H u_{xxxx} \right)\eta \, dx dt. \end{aligned}$$

În termenul cu C am integrat o dată prin părţi în spaţiu, iar în termenul cu H de două ori. Principiul lui Hamilton dă

$$\boxed{\rho u_{tt} - C u_{xx} + H u_{xxxx} = 0.}$$

Pe un interval finit, ordinul patru în spaţiu cere două condiţii la limită la fiecare capăt; forma lor depinde de modul în care se prescriu deplasarea, panta sau eforturile generalizate.

Pentru ansatz-ul

$$u = e^{i(\kappa x - \omega t)}, \qquad \kappa \in \mathbb{R},$$

obţinem

$$\rho\omega^2 = C\kappa^2 + H\kappa^4, \qquad \omega(\kappa) = |\kappa| \sqrt{\frac{C + H\kappa^2}{\rho}}.$$

Pentru $\kappa > 0$, viteza de fază este

$$c_{\mathrm{ph}}(\kappa) = \frac{\omega(\kappa)}{\kappa} = \sqrt{\frac{C + H\kappa^2}{\rho}},$$

iar viteza de grup este

$$c_g(\kappa) = \frac{d\omega}{d\kappa} = \frac{C + 2H\kappa^2}{\sqrt{\rho(C + H\kappa^2)}}.$$

În general $c_g \neq c_{\mathrm{ph}}$: pachetul de unde şi fazele sale nu se deplasează cu aceeaşi viteză. Modelul ales este rigidizant, iar $c_{\mathrm{ph}}(\kappa) \to \infty$ când $|\kappa| \to \infty$; prin urmare modelul nu trebuie extrapolat fără rezerve la lungimi de undă arbitrar de mici.

8.9 Probleme pentru seminar

1. Deduceţi identitatea de energie pentru condiţii Dirichlet omogene.
2. Arătaţi unicitatea folosind energia diferenţei a două soluţii.
3. Derivaţi ecuaţia algebrică pentru unda plană şi identificaţi polarizările P şi S.
4. Calculaţi c_P/c_S în funcţie de coeficientul Poisson ν.
5. Pentru o bară cu capete fixe determinaţi frecvenţele proprii.
6. Explicaţi de ce pozitivitatea tensorului acustic este legată de realitatea vitezelor de undă.

8.10 Exerciţii rezolvate

Problema 8.10.1 (energia unei unde unidimensionale)**.** Pentru ecuaţia barei $\rho u_{tt} - E u_{xx} = 0$, definiţi energia

$$\mathcal{E}(t) = \frac{1}{2} \int_0^L \left(\rho u_t^2 + E u_x^2 \right) dx.$$

Arătaţi formal că $\mathcal{E}'(t) = 0$ pentru condiţii care anulează fluxul la capete.

Rezolvare. Derivăm sub integrală:

$$\mathcal{E}'(t) = \int_0^L (\rho u_t u_{tt} + E u_x u_{xt}) dx.$$

Din ecuaţie, $\rho u_{tt} = E u_{xx}$. Atunci

$$\mathcal{E}'(t) = E \int_0^L (u_t u_{xx} + u_x u_{xt}) dx.$$

Integrăm primul termen prin părţi:

$$\int_0^L u_t u_{xx} dx = [u_t u_x]_0^L - \int_0^L u_{tx} u_x dx.$$

Termenii integrali se anulează, deci

$$\mathcal{E}'(t) = E[u_t u_x]_0^L.$$

Dacă $u = 0$ la capete, atunci $u_t = 0$ acolo; dacă capătul este liber, $u_x = 0$. În ambele situaţii fluxul este zero şi energia se conservă.

Problema 8.10.2 (vitezele undelor P şi S)**.** Pentru material izotrop liniar cu densitate ρ, scrieţi vitezele undelor longitudinale şi transversale.

Rezolvare. Din ecuaţia Navier dinamică,

$$\rho u_{tt} = \mu \Delta u + (\lambda + \mu) \nabla \operatorname{div} u,$$

rezultă

$$\boxed{c_P = \sqrt{\frac{\lambda + 2\mu}{\rho}}}, \qquad \boxed{c_S = \sqrt{\frac{\mu}{\rho}}}.$$

Unda P este asociată componentei longitudinale, iar unda S componentei solenoidale.

Problema 8.10.3 (undă plană longitudinală)**.** Fie $u(x,t) = a\, f(\langle n, x\rangle - ct)$ cu $a \parallel n$. Arătaţi că ecuaţia elastodinamică impune $c = c_P$.

Rezolvare. Notăm $s = \langle n, x\rangle - ct$. Atunci

$$u_{tt} = c^2 a f''(s), \qquad \Delta u = a f''(s),$$

iar

$$\operatorname{div} u = (\langle a, n\rangle) f'(s), \qquad \nabla \operatorname{div} u = (\langle a, n\rangle) n f''(s).$$

Cum $a = \alpha n$, membrul drept devine

$$[\mu + (\lambda + \mu)] a f'' = (\lambda + 2\mu) a f''.$$

Prin urmare

$$\rho c^2 = \lambda + 2\mu,$$

deci $c = c_P$.

Problema 8.10.4 (identificarea constantelor Lamé din vitezele undelor)**.** Într-un material izotrop omogen de densitate ρ, se măsoară vitezele c_P şi c_S ale undelor longitudinale şi

transversale. Determinaţi μ şi λ şi formulaţi condiţia pe c_P, c_S corespunzătoare lui $\lambda + 2\mu > 0$ şi $\mu > 0$.

Rezolvare. Din

$$c_S^2 = \frac{\mu}{\rho}, \qquad c_P^2 = \frac{\lambda + 2\mu}{\rho}$$

rezultă direct

$$\boxed{\mu = \rho c_S^2}, \qquad \boxed{\lambda = \rho(c_P^2 - 2c_S^2)}.$$

Condiţia $\mu > 0$ este echivalentă cu $c_S > 0$, iar $\lambda + 2\mu > 0$ este echivalentă cu $c_P > 0$. Dacă cerem în plus pozitivitatea energiei pe toate deformaţiile simetrice, $3\lambda + 2\mu > 0$, obţinem

$$3\rho(c_P^2 - 2c_S^2) + 2\rho c_S^2 > 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \boxed{3c_P^2 > 4c_S^2.}$$

Exerciţiul arată că măsurarea celor două viteze determină cele două constante Lamé ale modelului izotrop.

Problema 8.10.5 (formula lui d'Alembert)**.** Verificaţi că

$$u(x,t) = f(x - ct) + g(x + ct)$$

rezolvă ecuaţia $u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0$.

Rezolvare. Derivăm:

$$u_t = -cf'(x - ct) + cg'(x + ct),$$
$$u_{tt} = c^2 f''(x - ct) + c^2 g''(x + ct),$$

şi

$$u_{xx} = f''(x - ct) + g''(x + ct).$$

Prin urmare $u_{tt} = c^2 u_{xx}$.

Problema 8.10.6 (coeficienţi modali pentru o bară fixată la ambele capete)**.** Pentru bara $0 < x < L$ cu capete fixe, luaţi

$$u_0(x) = x(L - x), \qquad v_0(x) = 0.$$

Determinaţi coeficienţii modali A_n, B_n din dezvoltarea în sinusuri.

Rezolvare. Pentru capete fixe,

$$u(x,t) = \sum_{n \geq 1} \Big(A_n \cos \omega_n t + B_n \sin \omega_n t \Big) \sin \frac{n\pi x}{L}.$$

Cum $v_0 = 0$, avem imediat $B_n = 0$. Pentru deplasarea iniţială,

$$A_n = \frac{2}{L} \int_0^L x(L - x) \sin \frac{n\pi x}{L}\, dx$$
$$= \frac{4L^2}{\pi^3 n^3} \Big(1 - (-1)^n \Big).$$

Prin urmare

$$A_n = \begin{cases} \dfrac{8L^2}{\pi^3 n^3}, & n \text{ impar}, \\ 0, & n \text{ par}, \end{cases} \qquad B_n = 0.$$

Simetria datelor iniţiale faţă de $x = L/2$ explică dispariţia modurilor pare.

Problema 8.10.7 (bară cu ambele capete libere)**.** Determinaţi frecvenţele proprii pentru o bară omogenă pe $(0, L)$ cu condiţii de efort axial nul

$$u_x(0,t) = u_x(L,t) = 0.$$

Identificaţi modul rigid.

Rezolvare. Căutăm $u = XT$. Ecuaţia spaţială este

$$X'' + \kappa^2 X = 0, \qquad X'(0) = X'(L) = 0.$$

Soluţia generală $X = A\cos\kappa x + B\sin\kappa x$ dă din $X'(0) = 0$ relaţia $B = 0$. Apoi

$$X'(L) = -A\kappa\sin(\kappa L) = 0.$$

Pentru $\kappa > 0$, rezultă $\kappa_n = n\pi/L$, $n = 1, 2, \ldots$, şi

$$X_n(x) = \cos\frac{n\pi x}{L}, \qquad \omega_n = \frac{n\pi c}{L}.$$

Există însă şi soluţia $\kappa_0 = 0$, pentru care X_0 este constantă şi $\omega_0 = 0$. Acesta este modul rigid de translaţie al barei: nu produce deformaţie şi, prin urmare, nu are energie elastică.

Problema 8.10.8 (aproximaţie Galerkin cu un singur mod şi rezonanţă)**.** Fie $w_1 \in V$ normalizat în produsul de masă, $\langle w_1, w_1\rangle_\rho = 1$, şi presupuneţi că

$$a(w_1, v) = \omega_1^2 \langle w_1, v\rangle_\rho \qquad \forall v \in V.$$

Pentru o încărcare armonică $F(t) = F_0\cos(\Omega t)\,\mathcal{M}w_1$, căutaţi aproximaţia $u_1(t) = q(t)w_1$ şi determinaţi ecuaţia scalară pentru q.

Rezolvare. Introducem $u_1 = qw_1$ în formularea slabă şi testăm cu w_1. Termenul de inerţie este

$$\langle \ddot{u}_1, w_1\rangle_\rho = \ddot{q}\,\langle w_1, w_1\rangle_\rho = \ddot{q}.$$

Termenul elastic este

$$a(u_1, w_1) = q\,a(w_1, w_1) = \omega_1^2 q.$$

Iar încărcarea dă

$$\langle F(t), w_1\rangle = F_0\cos(\Omega t)\langle w_1, w_1\rangle_\rho = F_0\cos(\Omega t).$$

Prin urmare

$$\boxed{\ddot{q} + \omega_1^2 q = F_0\cos(\Omega t).}$$

Pentru condiţii iniţiale nule şi $\Omega \neq \omega_1$,

$$q(t) = \frac{F_0}{\omega_1^2 - \Omega^2}\Big(\cos(\Omega t) - \cos(\omega_1 t)\Big).$$

Când $\Omega = \omega_1$, trecerea la limită sau metoda rezonanţei dă un termen proporţional cu $t\sin(\omega_1 t)$: amplitudinea nu mai rămâne uniform mărginită în modelul nedisipativ.

Problema 8.10.9 (unicitatea soluţiei slabe)**.** Fie u_1, u_2 două soluţii slabe ale problemei elastodinamice, cu aceleaşi date iniţiale şi aceeaşi încărcare. Arătaţi că $u_1 = u_2$ fără a folosi testul nejustificat $v = \dot{w}$.

Rezolvare. Punem $w = u_1 - u_2$. Atunci

$$(\mathcal{M}\dot{w})' + Aw = 0, \qquad w(0) = 0, \quad \dot{w}(0) = 0.$$

Fixăm $s \in (0, T]$ şi alegem funcţia auxiliară admisibilă

$$z(t) = \int_t^s w(\tau)\, d\tau, \qquad z(s) = 0, \qquad \dot{z} = -w.$$

Testarea formei integrate cu z şi integrarea prin părţi în timp dau

$$\frac{1}{2}\,\|w(s)\|_\rho^2 + \frac{1}{2}a(z(0), z(0)) = 0.$$

Ambii termeni sunt nenegativi, deci $w(s) = 0$. Cum s este arbitrar, $w \equiv 0$ pe $[0, T]$. Testul integrat în timp evită folosirea lui $\dot{w}$ ca funcţie-test, lucru care nu este justificat la regularitatea slabă disponibilă, deoarece $\dot{w}$ aparţine a priori numai lui H.

Problema 8.10.10 (model dispersiv cu gradient)**.** Pentru

$$\rho u_{tt} - C u_{xx} + H u_{xxxx} = 0, \qquad H > 0,$$

căutaţi soluţii armonice $u = e^{i(\kappa x - \omega t)}$ şi determinaţi relaţia de dispersie.

Rezolvare. Derivatele sunt

$$u_{tt} = -\omega^2 u, \qquad u_{xx} = -\kappa^2 u, \qquad u_{xxxx} = \kappa^4 u.$$

Înlocuind,

$$-\rho\omega^2 u + C\kappa^2 u + H\kappa^4 u = 0.$$

Pentru $u \neq 0$,

$$\boxed{\omega^2 = \frac{C}{\rho}\kappa^2 + \frac{H}{\rho}\kappa^4.}$$

Prin urmare

$$c_{\mathrm{ph}}(\kappa) = \frac{\omega(\kappa)}{|\kappa|} = \sqrt{\frac{C + H\kappa^2}{\rho}},$$

care depinde de numărul de undă. Modelul este deci dispersiv.

8.11 Exerciţii propuse suplimentare

Nivelul A

8.A.1 *(vitezele undelor P şi S)* Un mediu elastic izotrop omogen are $\lambda = 16$ GPa, $\mu = 8$ GPa şi $\rho = 2000\,\mathrm{kg/m^3}$. (i) Calculaţi c_P şi c_S. (ii) Calculaţi ν şi verificaţi

$$\frac{c_P}{c_S} = \sqrt{\frac{2-2\nu}{1-2\nu}}.$$

(iii) Precizaţi polarizarea fiecărei unde şi multiplicitatea valorii proprii corespunzătoare a tensorului acustic.
Indicaţie. Folosiţi

$$c_P = \sqrt{\frac{\lambda+2\mu}{\rho}}, \qquad c_S = \sqrt{\frac{\mu}{\rho}}, \qquad Q(n) = \mu I + (\lambda+\mu) n \otimes n.$$

Răspuns.

$$c_S = 2000\,\mathrm{m/s}, \qquad c_P = 4000\,\mathrm{m/s}, \qquad \frac{c_P}{c_S} = 2.$$

De asemenea,

$$\nu = \frac{\lambda}{2(\lambda+\mu)} = \frac{1}{3},$$

şi identitatea cerută este verificată. Pentru unda P, $a \parallel n$ şi valoarea proprie $\lambda + 2\mu$ este simplă; pentru unda S, $a \perp n$ şi valoarea proprie μ este dublă.

8.A.2 *(bară liberă–liberă: moduri proprii)* Pentru bara omogenă

$$\rho u_{tt} = E_Y u_{xx}, \qquad x \in (0, L),$$

cu $u_x(0,t) = u_x(L,t) = 0$: (i) determinaţi funcţiile proprii X_n şi pulsaţiile ω_n; (ii) identificaţi modul de pulsaţie nulă şi interpretaţi-l mecanic; (iii) pentru $L = 2$ m, $E_Y = 200$ GPa, $\rho = 8000\,\mathrm{kg/m^3}$ calculaţi c, ω_1 şi $f_1 = \omega_1/(2\pi)$.
Indicaţie. Separarea variabilelor conduce la $X'' + k^2 X = 0$; condiţiile Neumann selectează funcţiile cosinus.
Răspuns.

$$X_n(x) = \cos\frac{n\pi x}{L}, \qquad \omega_n = \frac{n\pi c}{L}, \qquad c = \sqrt{\frac{E_Y}{\rho}}, \qquad n = 0, 1, 2, \ldots$$

Modul $n = 0$ este translaţia rigidă a barei. Numeric,

$$c = 5000\,\mathrm{m/s}, \qquad \omega_1 = 2500\pi\,\mathrm{rad/s} \approx 7854\,\mathrm{rad/s}, \qquad f_1 = 1250\,\mathrm{Hz}.$$

8.A.3 *(formula lui d'Alembert cu date discontinue)* Pe $\mathbb{R}$ se consideră

$$u_{tt} - u_{xx} = 0, \qquad u(x,0) = 0, \qquad u_t(x,0) = v_0(x),$$

unde

$$v_0(x) = \begin{cases} 1, & |x| < 1, \\ 0, & |x| \geq 1. \end{cases}$$

(i) Scrieţi soluţia d'Alembert. (ii) Calculaţi $u(0,t)$ pentru $t > 0$. (iii) Calculaţi $u(3,1)$ şi interpretaţi rezultatul prin propagarea cu viteză finită.
Indicaţie.

$$u(x,t) = \frac{1}{2}\big[u_0(x-t) + u_0(x+t)\big] + \frac{1}{2}\int_{x-t}^{x+t} v_0(s)\,ds.$$

Răspuns.

$$u(x,t) = \frac{1}{2}\int_{x-t}^{x+t} v_0(s)\,ds, \qquad u(0,t) = \frac{1}{2}\,|[-t,t] \cap (-1,1)| = \min\{t,1\}.$$

Pentru $(x,t) = (3,1)$, intervalul de dependenţă este $[2,4]$, disjunct de suportul lui v_0; prin urmare $u(3,1) = 0$.

Nivelul B

8.B.1 *(echipartiţia energiei şi fluxul pentru o undă plană)* Fie

$$u(x,t) = a\,f(\langle n, x\rangle - ct), \qquad \|n\| = 1,$$

într-un mediu izotrop omogen, fără forţe de volum. (i) Pentru $a = \alpha n$, calculaţi densităţile de energie cinetică şi elastică şi arătaţi că sunt egale. (ii) Repetaţi pentru $a \perp n$. (iii) Calculaţi fluxul $-\sigma\dot{u}$ şi arătaţi că este $c\mathcal{E}n$, unde $\mathcal{E}$ este densitatea totală de energie.
Indicaţie. Folosiţi $e(u) = \operatorname{sym}(a \otimes n)f'$ şi relaţia tensorului acustic

$$\rho c^2 a = \mu a + (\lambda + \mu)(\langle a, n\rangle)n.$$

Răspuns. Pentru unda longitudinală,

$$\frac{\rho}{2}\,\|\dot{u}\|^2 = \frac{(\lambda + 2\mu)\alpha^2}{2}(f')^2 = \frac{1}{2}\langle \sigma, e(u)\rangle.$$

Pentru unda transversală,

$$\frac{\rho}{2}\,\|\dot{u}\|^2 = \frac{\mu\,\|a\|^2}{2}(f')^2 = \frac{1}{2}\langle \sigma, e(u)\rangle.$$

În ambele cazuri,

$$\mathcal{E} = \rho c^2\,\|a\|^2\,(f')^2, \qquad -\sigma\dot{u} = c\mathcal{E}n.$$

8.B.2 *(viteza de fază şi viteza de grup în modelul cu gradient)* Pentru

$$\rho u_{tt} - C u_{xx} + H u_{xxxx} = 0, \qquad C > 0, \quad H > 0,$$

(i) scrieţi relaţia de dispersie şi viteza de fază $c_{\mathrm{ph}}(k)$; (ii) calculaţi $c_g = d\omega/dk$ şi arătaţi

$$\frac{c_g(k)}{c_{\mathrm{ph}}(k)} = \frac{C + 2Hk^2}{C + Hk^2} > 1 \qquad (k \neq 0);$$

(iii) cu $\ell = \sqrt{H/C}$, dezvoltaţi c_{ph} pentru $k\ell \ll 1$.
Răspuns.

$$\rho\omega^2 = Ck^2 + Hk^4, \qquad c_{\mathrm{ph}}(k) = \sqrt{\frac{C + Hk^2}{\rho}}.$$

Pentru $k > 0$,

$$c_g(k) = \frac{C + 2Hk^2}{\sqrt{\rho(C + Hk^2)}}.$$

Prin urmare raportul cerut este mai mare decât 1 dacă $k \neq 0$. Mai mult,

$$c_{\mathrm{ph}}(k) = c_0\sqrt{1 + (k\ell)^2} = c_0\left[1 + \frac{1}{2}(k\ell)^2 + O((k\ell)^4)\right], \qquad c_0 = \sqrt{\frac{C}{\rho}}.$$

8.B.3 *(reflexia unui puls la un capăt fix şi la un capăt liber)* Se consideră semibara $x > 0$, $u_{tt} - c^2u_{xx} = 0$, cu $u(x,0) = u_0(x)$, $u_t(x,0) = 0$, unde u_0 are suport compact în $(0,\infty)$. (i) Arătaţi că pentru $u(0,t) = 0$ se foloseşte prelungirea impară a lui u_0, iar pentru $u_x(0,t) = 0$ prelungirea pară. (ii) Descrieţi schimbarea de semn a pulsului reflectat pentru deplasare şi deformaţie. (iii) Verificaţi că fluxul de energie prin $x = 0$ este nul.
Răspuns. Dacă $\widetilde{u}_0$ este prelungirea impară, respectiv pară, atunci

$$u(x,t) = \frac{1}{2}\big[\widetilde{u}_0(x - ct) + \widetilde{u}_0(x + ct)\big], \qquad x > 0.$$

La capăt fix, deplasarea se reflectă cu schimbare de semn, iar u_x fără schimbare de semn. La capăt liber, deplasarea se reflectă fără schimbare de semn, iar u_x îşi schimbă semnul. Fluxul este

$$-E_Y u_t u_x\big|_{x=0} = 0$$

în ambele cazuri.

Nivelul C

8.C.1 *(Galerkin spectral pe bară: matricile M şi K)* Fie

$$\rho u_{tt} - E_Y u_{xx} = F(x,t), \qquad u(0,t) = u(L,t) = 0,$$

şi $V_2 = \operatorname{span}\{w_1, w_2\}$, $w_j(x) = \sin(j\pi x/L)$. (a) Calculaţi

$$M_{ij} = \int_0^L \rho w_i w_j\,dx, \qquad K_{ij} = \int_0^L E_Y w_i' w_j'\,dx$$

şi scrieţi sistemul Galerkin. (b) Pentru $F = 0$ şi viteză iniţială nulă, rezolvaţi sistemul. (c) Scrieţi identitatea de energie discretă şi explicaţi de ce cele două moduri sunt reproduse exact.

Răspuns.

$$M_{ij} = \frac{\rho L}{2}\delta_{ij}, \qquad K_{ij} = \frac{E_Y L}{2}\left(\frac{j\pi}{L}\right)^2 \delta_{ij}.$$

Astfel,

$$\ddot{d}_j + \omega_j^2 d_j = \frac{2}{\rho L} f_j(t), \qquad \omega_j = \frac{j\pi}{L}\sqrt{\frac{E_Y}{\rho}}, \qquad j = 1, 2.$$

Pentru $F = 0$,

$$d_j(t) = d_j(0)\cos(\omega_j t), \qquad d_j(0) = \frac{2}{L}\int_0^L u_0(x)\sin\frac{j\pi x}{L}\,dx,$$

$$u_2(x,t) = \sum_{j=1}^{2} d_j(0)\cos(\omega_j t)\sin\frac{j\pi x}{L}.$$

Energia discretă este

$$E_2(t) = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{2}\left[\frac{\rho L}{2}\dot{d}_j^2 + \frac{E_Y L}{2}\left(\frac{j\pi}{L}\right)^2 d_j^2\right],$$

şi fiecare termen se conservă separat. Exactitatea apare deoarece w_j sunt chiar funcţiile proprii ale operatorului.

8.C.2 *(de la echilibrul dinamic la problema inversă seismică)* Se consideră un mediu elastic izotrop omogen infinit, fără forţe de volum. (a) Din

$$\rho\ddot{u} = \mu\Delta u + (\lambda + \mu)\nabla \operatorname{div} u$$

deduceţi ecuaţiile de undă pentru $\operatorname{div} u$ şi $\operatorname{curl} u$. (b) Pentru $\lambda = 16$ GPa, $\mu = 8$ GPa, $\rho = 2000\,\mathrm{kg/m^3}$, un seismograf înregistrează unda P cu 5 s înaintea undei S. Determinaţi distanţa până la focar. (c) Din $c_P = 4000$ m/s, $c_S = 2000$ m/s şi $\rho = 2000\,\mathrm{kg/m^3}$ recuperaţi λ, μ, E_Y, ν.

Răspuns.

$$\rho\partial_{tt}(\operatorname{div} u) = (\lambda + 2\mu)\Delta(\operatorname{div} u), \qquad \rho\partial_{tt}(\operatorname{curl} u) = \mu\Delta(\operatorname{curl} u).$$

Aşadar $c_P = 4000$ m/s şi $c_S = 2000$ m/s. Din

$$5 = d\left(\frac{1}{c_S} - \frac{1}{c_P}\right)$$

rezultă $d = 20000$ m $= 20$ km. Invers,

$$\mu = \rho c_S^2 = 8\,\mathrm{GPa}, \qquad \lambda = \rho(c_P^2 - 2c_S^2) = 16\,\mathrm{GPa},$$

$$E_Y = \mu\frac{3\lambda + 2\mu}{\lambda + \mu} = \frac{64}{3}\,\mathrm{GPa} \approx 21.3\,\mathrm{GPa}, \qquad \nu = \frac{1}{3}.$$

Limita $c_P/c_S \to \infty$ corespunde lui $\nu \to 1/2^-$.

8.C.3 *(model cu gradient: de la energie la dispersie)* Se consideră

$$E[u] = \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}}\left(Cu_x^2 + Hu_{xx}^2\right)dx, \qquad C, H > 0,$$

şi energia cinetică $\frac{\rho}{2}\int_{\mathbb{R}} u_t^2 dx$. (a) Calculaţi prima variaţie pentru $\eta \in C_c^\infty(\mathbb{R})$ şi deduceţi ecuaţia de mişcare. (b) Demonstraţi conservarea energiei. (c) Determinaţi relaţia de dispersie pentru $u = e^{i(kx-\omega t)}$ şi discutaţi cazul $H < 0$.

Răspuns.

$$\delta E[u](\eta) = \int_{\mathbb{R}} (Cu_x\eta_x + Hu_{xx}\eta_{xx})dx = \int_{\mathbb{R}} (-Cu_{xx} + Hu_{xxxx})\eta\, dx,$$

deci

$$\rho u_{tt} - Cu_{xx} + Hu_{xxxx} = 0.$$

Pentru soluţii netede cu decădere suficientă la infinit,

$$\frac{d}{dt}\left[\frac{\rho}{2}\int u_t^2 dx + \frac{1}{2}\int (Cu_x^2 + Hu_{xx}^2)dx\right] = 0.$$

Relaţia de dispersie este

$$\rho\omega^2 = Ck^2 + Hk^4 = k^2(C + Hk^2).$$

Dacă $C, H > 0$, atunci $\omega^2 \geq 0$ pentru orice $k \in \mathbb{R}$. Dacă $H < 0$, atunci pentru $k^2 > C/|H|$ avem $\omega^2 < 0$, ceea ce produce moduri cu creştere exponenţială.

Capitolul 9

Echilibrul neliniar şi formularea variaţională

Surse şi orientare. Pentru formularea variaţională a elasticităţii finite şi calculul primei şi celei de-a doua variaţii folosim [3, 14, 10].

9.1 Energia totală şi clasa admisibilă

Pentru un material hiperelastic necunoscuta este deformarea $\varphi : \Omega \to \mathbb{R}^3$, iar energia internă depinde de $\nabla\varphi$. Pornim de la energia totală; ecuaţia de echilibru şi condiţia de tracţiune vor rezulta din prima variaţie.

Fixăm $p > 1$ şi o descompunere a frontierei

$$\partial\Omega = \overline{\Gamma_D} \cup \overline{\Gamma_N}, \qquad \Gamma_D \cap \Gamma_N = \varnothing$$

în sensul interioarelor relative, cu Γ_D de măsură superficială pozitivă. Pentru o dată Dirichlet φ_D definim

$$\mathcal{M} := \left\{ \varphi \in W^{1,p}(\Omega;\mathbb{R}^3) : \operatorname{Tr}\varphi = \varphi_D \text{ pe } \Gamma_D,\ \det\nabla\varphi > 0 \text{ a.p.t.} \right\}.$$

Dacă se doreşte excluderea interpenetrării globale, această clasă trebuie restrânsă suplimentar printr-o condiţie globală, de exemplu de tip Ciarlet–Nečas; nu o introducem încă în clasa de bază.

Pentru încărcări moarte conservatoare definim

$$\mathcal{I}(\varphi) = \int_\Omega W(X,\nabla\varphi)\,dX - \int_\Omega \langle f_0,\varphi\rangle\,dX - \int_{\Gamma_N} \langle t_0,\varphi\rangle\,dA, \qquad \varphi \in \mathcal{M},$$

atunci când toate integralele sunt finite. Este util să separăm

$$\mathcal{I}(\varphi) = \mathcal{I}_{\text{int}}(\varphi) - L(\varphi), \qquad \mathcal{I}_{\text{int}}(\varphi) := \int_\Omega W(X,\nabla\varphi)\,dX,$$

unde L este funcţionalul liniar al încărcărilor.

Observaţia 9.1.1 (despre încărcările folosite aici). Scrierea $\mathcal{I} = \mathcal{I}_{\text{int}} - L$ presupune că forţele exterioare admit un potenţial. Pentru o densitate de forţă de referinţă prescrisă $f_0(X)$ şi o tracţiune nominală prescrisă $t_0(X)$, funcţionalul L este liniar în φ. O presiune care urmăreşte normala configuraţiei deformate depinde de deformare şi nu poate fi introdusă automat prin acelaşi termen liniar; un asemenea caz cere un potenţial separat sau o formulare de alt tip.

9.2 Prima variaţie şi ecuaţiile de echilibru

Pornim de la funcţionala $\mathcal{I}$ definită în secţiunea precedentă. Calculăm separat variaţia energiei interne şi variaţia potenţialului forţelor exterioare.

9.2.1 Variaţii admisibile

Fixăm o deformare φ şi o funcţie η care se anulează pe Γ_D. Pentru un parametru scalar s definim

$$\varphi_s = \varphi + s\eta.$$

Deoarece gradientul este liniar,

$$\nabla\varphi_s = \nabla\varphi + s\nabla\eta. \tag{9.1}$$

Condiţia Dirichlet este păstrată automat:

$$\varphi_s = \varphi_D + s\,0 = \varphi_D \qquad \text{pe } \Gamma_D.$$

Mai trebuie verificată restricţia $\det\nabla\varphi_s > 0$. Acest punct nu este doar o formalitate, deoarece energia este definită pe $GL^+(3)$ şi poate lua valoarea $+\infty$ pentru $\det F \le 0$. Să presupunem mai întâi că φ şi η sunt suficient de netede pe $\overline{\Omega}$, iar

$$\det\nabla\varphi(X) \ge \delta > 0 \qquad \forall X \in \overline{\Omega}.$$

Funcţia

$$(X, s) \longmapsto \det\Big(\nabla\varphi(X) + s\nabla\eta(X)\Big)$$

este continuă. La $s = 0$ ea este cel puţin δ. Cum $\overline{\Omega}$ este compact, continuitatea este uniformă pe un interval suficient de mic în jurul lui 0. Există deci $s_0 > 0$ astfel încât

$$\det\Big(\nabla\varphi(X) + s\nabla\eta(X)\Big) \ge \frac{\delta}{2} > 0$$

pentru toate $X \in \overline{\Omega}$ şi $|s| < s_0$. În acest caz variaţiile φ_s rămân păstrătoare a orientării pentru s suficient de mic.

Într-un cadru Sobolev general, unde nu avem neapărat continuitate punctuală sau o separare uniformă a determinantului de zero, această concluzie nu urmează automat. Pentru deducerea Euler–Lagrange de mai jos presupunem că variaţia considerată este admisibilă pentru $s \in (-s_0, s_0)$ şi că sunt satisfăcute ipotezele necesare pentru diferenţierea sub integrală. Astfel separăm calculul variaţional de problema, mai dificilă, a stabilităţii globale a clasei admisibile.

9.2.2 Derivata energiei interne

Notăm $F(X) = \nabla\varphi(X)$ şi $H(X) = \nabla\eta(X)$. Din (9.1), integrandul elastic este

$$W(X, F + sH).$$

Pentru fiecare X fix, aplicaţia matricială $F \mapsto W(X,F)$ este presupusă Fréchet-diferenţiabilă. Legătura demonstrată în Capitolul 1 dintre derivata Fréchet şi derivata direcţională se aplică aici cu direcţia H: dacă

$$W(X, F+K) = W(X,F) + \langle D_F W(X,F), K\rangle + o(\|K\|),$$

atunci, punând $K = sH$ şi împărţind prin s,

$$\frac{W(X,F+sH)-W(X,F)}{s} = \langle D_F W(X,F), H\rangle + \frac{o(|s|\,\|H\|)}{s}.$$

Pentru H fix, ultimul termen tinde la zero. Prin urmare derivata funcţiei scalare $s \mapsto W(X,F+sH)$ în $s=0$ este exact $\langle D_F W(X,F), H\rangle$. Echivalent, putem scrie

$$W(X,F+sH) = W(X,F) + s\,\langle D_F W(X,F), H\rangle + r(X,s),$$

unde

$$\frac{r(X,s)}{s} \to 0 \qquad \text{când } s \to 0.$$

Pentru a trece limita sub integrală avem nevoie atât de integrabilitatea energiei pe variaţiile considerate, cât şi de o ipoteză de dominare. Presupunem că există $s_0 > 0$ astfel încât

$$W(\cdot, F+sH) \in L^1(\Omega) \qquad \text{pentru } |s| < s_0,$$

şi o funcţie $G \in L^1(\Omega)$ pentru care

$$\|D_F W(X,F+sH)\|\,\|H\| \le G(X) \qquad \text{pentru a.p.t. } X \in \Omega, \quad |s| < s_0.$$

Într-adevăr, prin teorema valorii medii pe segmentul matricial,

$$\frac{W(X,F+sH)-W(X,F)}{s} = \langle D_F W(X, F+\theta_s sH), H\rangle$$

pentru un anumit $\theta_s \in (0,1)$, iar modulul membrului drept este controlat de G. Teorema convergenţei dominate permite atunci derivarea sub integrală:

$$\frac{d}{ds}\bigg|_{s=0} \int_\Omega W(X, \nabla\varphi_s)\,dX = \int_\Omega \langle D_F W(X,\nabla\varphi), \nabla\eta\rangle\,dX.$$

Definim tensorul întâi Piola–Kirchhoff prin

$$P(X) = D_F W(X, \nabla\varphi(X)).$$

Prin urmare variaţia energiei interne este

$$\delta\mathcal{E}(\varphi)[\eta] = \int_\Omega \langle P, \nabla\eta\rangle\,dX. \tag{9.2}$$

9.2.3 Derivata potenţialului forţelor exterioare

Termenii de sarcină din $\mathcal{I}$ sunt liniari în φ. Pentru forţele de volum,

$$-\int_\Omega \langle f_0, \varphi + s\eta\rangle\, dX + \int_\Omega \langle f_0, \varphi\rangle\, dX = -s\int_\Omega \langle f_0, \eta\rangle\, dX,$$

deci

$$\left.\frac{d}{ds}\right|_{s=0}\left[-\int_\Omega \langle f_0, \varphi + s\eta\rangle\, dX\right] = -\int_\Omega \langle f_0, \eta\rangle\, dX.$$

Analog,

$$\left.\frac{d}{ds}\right|_{s=0}\left[-\int_{\Gamma_N} \langle t_0, \varphi + s\eta\rangle\, dA\right] = -\int_{\Gamma_N} \langle t_0, \eta\rangle\, dA.$$

Adunând cele trei contribuţii, obţinem

$$\delta\mathcal{I}(\varphi)[\eta] = \int_\Omega \langle P, \nabla\eta\rangle\, dX - \int_\Omega \langle f_0, \eta\rangle\, dX - \int_{\Gamma_N} \langle t_0, \eta\rangle\, dA. \tag{9.3}$$

Dacă φ este un minim local interior faţă de variaţiile $\pm\eta$, funcţia scalară

$$\psi(s) = \mathcal{I}(\varphi + s\eta)$$

are un minim local în $s = 0$. Din calculul diferenţial de o variabilă rezultă $\psi'(0) = 0$. Prin urmare

$$\int_\Omega \langle P, \nabla\eta\rangle\, dX = \int_\Omega \langle f_0, \eta\rangle\, dX + \int_{\Gamma_N} \langle t_0, \eta\rangle\, dA \qquad \forall\eta \text{ admisibilă}. \tag{9.4}$$

Aceasta este forma slabă a echilibrului neliniar.

9.2.4 De la forma slabă la forma tare: calcul componentă cu componentă

Presupunem acum $P \in C^1(\overline{\Omega}; \mathbb{R}^{3\times 3})$ şi alegem mai întâi $\eta \in C_c^\infty(\Omega; \mathbb{R}^3)$. Scriem

$$\langle P, \nabla\eta\rangle = \sum_{i=1}^{3}\sum_{J=1}^{3} P_{iJ}\eta_{i,J}.$$

Pentru fiecare pereche (i, J),

$$\partial_J(P_{iJ}\eta_i) = (\partial_J P_{iJ})\eta_i + P_{iJ}\eta_{i,J}.$$

De aici

$$P_{iJ}\eta_{i,J} = \partial_J(P_{iJ}\eta_i) - (\partial_J P_{iJ})\eta_i.$$

Sumăm după i, J şi integrăm:

$$\int_\Omega \langle P, \nabla\eta\rangle\, dX = \int_\Omega \mathrm{Div}(P^T\eta)\, dX - \int_\Omega \langle \mathrm{Div}\, P, \eta\rangle\, dX$$

$$= \int_{\partial\Omega} \langle PN, \eta \rangle \, dA - \int_{\Omega} \langle \operatorname{Div} P, \eta \rangle \, dX.$$

În prima alegere, η are suport compact, deci termenul de frontieră este zero. Formula slabă devine

$$\int_{\Omega} \langle -\operatorname{Div} P - f_0, \eta \rangle \, dX = 0 \qquad \forall \eta \in C_c^{\infty}(\Omega; \mathbb{R}^3).$$

Aplicăm lema fundamentală a calculului variaţional fiecărei componente şi obţinem

$$-\operatorname{Div} P = f_0 \qquad \text{în } \Omega. \tag{9.5}$$

Revenim la variaţii care pot fi nenule pe Γ_N. Folosind (9.5) în formula integrată prin părţi, termenii volumici se anulează şi rămâne

$$\int_{\Gamma_N} \langle PN - t_0, \eta \rangle \, dA = 0.$$

Pentru o frontieră Lipschitz, teorema urmei şi existenţa unui operator de extensie permit alegerea unor variaţii cu urmă prescrisă pe Γ_N şi urmă nulă pe Γ_D, în spaţiul de urmă corespunzător. De aceea identitatea de frontieră pentru toate variaţiile admisibile implică, în sensul urmelor,

$$PN = t_0 \qquad \text{pe } \Gamma_N. \tag{9.6}$$

Observăm astfel că ecuaţia de echilibru şi condiţia Neumann sunt două consecinţe ale aceleiaşi identităţi variaţionale.

Concluzia primei variaţii. Calculul precedent produce simultan ecuaţia Euler–Lagrange $-\operatorname{Div} P = f_0$ şi condiţia naturală $PN = t_0$ pe Γ_N, obţinute prin integrarea prin părţi de mai sus.

9.3 A doua variaţie şi stabilitatea locală

Presupunem acum că W este de clasă C^2 în F. Pornim din nou de la

$$\psi(s) = \mathcal{I}(\varphi + s\eta).$$

Pentru încărcări moarte, al căror potenţial este liniar în φ, derivata a doua a termenului exterior este zero. Pentru energia internă, cu $F = \nabla\varphi$ şi $H = \nabla\eta$,

$$\psi''_{\mathrm{int}}(s) = \int_{\Omega} \langle D_F W(X, F + sH), H \rangle \, dX.$$

Derivând integrandul scalar faţă de s şi folosind din nou regula lanţului,

$$\frac{d}{ds} \langle D_F W(X, F + sH), H \rangle = D_F^2 W(X, F + sH)[H, H].$$

Pentru a justifica derivarea sub integrală presupunem explicit că există $G_2 \in L^1(\Omega)$ şi $s_0 > 0$ astfel încât

$$\left|D_F^2 W(X, F + sH)[H, H]\right| \leq G_2(X) \qquad \text{pentru a.p.t. } X, \quad |s| < s_0.$$

Teorema convergenţei dominate justifică atunci derivarea a doua sub integrală şi obţinem

$$\delta^2 \mathcal{I}(\varphi)[\eta, \eta] = \int_\Omega D_F^2 W(X, F)[H, H]\, dX. \tag{9.7}$$

În componente, dacă

$$\mathbb{C}_{iJkL}(X, F) := \frac{\partial^2 W}{\partial F_{iJ} \partial F_{kL}}(X, F),$$

atunci

$$D_F^2 W(F)[H, H] = \sum_{i,J,k,L} \mathbb{C}_{iJkL} H_{iJ} H_{kL}.$$

Cu $H = \nabla\eta$, $H_{iJ} = \eta_{i,J}$, astfel încât

$$\delta^2 \mathcal{I}(\varphi)[\eta, \eta] = \int_\Omega \mathbb{C}_{iJkL}(X, \nabla\varphi)\eta_{i,J}\eta_{k,L}\, dX. \tag{9.8}$$

Dacă φ este minim local şi variaţia η poate fi luată pentru s pozitiv şi negativ suficient de mic, atunci $s = 0$ este minim local al funcţiei scalare $\psi(s) = \mathcal{I}(\varphi + s\eta)$. Pentru o funcţie C^2 de o variabilă, dezvoltarea Taylor este

$$\psi(s) = \psi(0) + s\psi'(0) + \frac{s^2}{2}\psi''(0) + o(s^2).$$

Minimalitatea pentru ambele semne ale lui s impune mai întâi $\psi'(0) = 0$. După anularea termenului liniar,

$$\psi(s) - \psi(0) = \frac{s^2}{2}\psi''(0) + o(s^2) \geq 0.$$

Împărţind la $s^2 > 0$ şi lăsând $s \to 0$, obţinem

$$\psi''(0) \geq 0.$$

Prin urmare

$$\delta^2 \mathcal{I}(\varphi)[\eta, \eta] \geq 0 \qquad \text{pentru orice variaţie admisibilă } \eta. \tag{9.9}$$

Aceasta este o condiţie globală asupra funcţiei η. În capitolul următor vom localiza această condiţie şi vom obţine, prin variaţii speciale, condiţia punctuală Legendre–Hadamard.

9.3.1 Staţionaritate şi minimalitate locală

Exemplul scalar $f(s) = s^4 - s^2$ este instructiv. Avem

$$f'(s) = 4s^3 - 2s, \qquad f'(0) = 0,$$

dar

$$f''(s) = 12s^2 - 2, \qquad f''(0) = -2 < 0.$$

Aşadar $s = 0$ este punct staţionar, dar nu este minim. În elasticitate, o deformare care satisface ecuaţiile Euler–Lagrange poate fi în mod analog instabilă. De aceea, ecuaţia de echilibru nu rezolvă singură problema de minimizare. Mai mult, nici condiţia de ordinul doi $f''(0) \geq 0$ nu este suficientă în general: pentru $g(s) = -s^4$ avem $g'(0) = g''(0) = 0$, dar $s = 0$ este un maxim local. În consecinţă, nenegativitatea celei de-a doua variaţii este o condiţie necesară, nu un criteriu general de minimalitate.

9.4 Liniarizarea operatorului neliniar în jurul stării naturale

Legătura cu elasticitatea liniară se obţine prin derivarea operatorului în starea de referinţă. Scriem

$$\varphi(X) = X + u(X), \qquad F = I + \nabla u.$$

Presupunem că $P(I) = 0$, adică starea de referinţă este naturală. Pentru ∇u mic, dezvoltarea Taylor dă

$$P(I + \nabla u) = P(I) + DP(I)[\nabla u] + R(\nabla u) = DP(I)[\nabla u] + R(\nabla u),$$

unde $\|R(H)\| \,/\, \|H\| \to 0$ când $H \to 0$. Rămâne să identificăm operatorul liniar $DP(I)$. Calculul din Capitolul 6 a arătat mai întâi, folosind obiectivitatea, că partea antisimetrică a incrementului nu contribuie la ordinul întâi; de aceea

$$DP(I)[H] = DP(I)[\operatorname{sym} H].$$

Pentru un material izotrop, teorema de reprezentare a operatorilor liniari izotropi pe Sym(3) dă

$$DP(I)[E] = 2\mu E + \lambda \operatorname{tr}(E) I \qquad (E \in \operatorname{Sym}(3)).$$

Punând $E = \operatorname{sym} \nabla u$ şi folosind $\operatorname{tr}(\operatorname{sym} \nabla u) = \operatorname{tr}(\nabla u)$, obţinem

$$DP(I)[\nabla u] = 2\mu \operatorname{sym} \nabla u + \lambda \operatorname{tr}(\nabla u) I.$$

Aplicând $-\operatorname{Div}$,

$$\begin{aligned} -\operatorname{Div}\left(2\mu \operatorname{sym} \nabla u\right) &= -\mu \operatorname{Div}(\nabla u + \nabla u^T) \\ &= -\mu \Delta u - \mu \nabla \operatorname{div} u, \end{aligned}$$

iar

$$-\operatorname{Div}\left(\lambda \operatorname{tr}(\nabla u) I\right) = -\lambda \nabla \operatorname{div} u.$$

Prin urmare operatorul liniarizat este

$$D\mathcal{A}(0)u = -\mu\Delta u - (\lambda+\mu)\nabla \operatorname{div} u,$$

operatorul Navier–Lamé studiat în Capitolul 6. Această identitate explică matematic de ce teoria liniară este derivata la starea naturală a problemei neliniare, în sensul subliniat de Ciarlet [3].

9.5 Convexitatea obişnuită şi condiţia $\det F > 0$

Presupunem proprietăţile fizice uzuale

$$W(F) \geq 0, \qquad W(R) = 0 \text{ pentru } R \in SO(3), \qquad W(F) \to +\infty \text{ când } \det F \downarrow 0.$$

Chiar convexitatea obişnuită, nu numai convexitatea strictă, este incompatibilă cu aceste cerinţe. Dacă W ar fi convexă pe un domeniu convex care conţine $SO(3)$, din $W = 0$ pe rotaţii şi $W \geq 0$ ar rezulta $W = 0$ pe învelişul lor convex. Dar

$$R_1 = I, \qquad R_2 = \operatorname{diag}(1,-1,-1)$$

sunt ambele rotaţii proprii, iar

$$\frac{1}{2}(R_1 + R_2) = \operatorname{diag}(1,0,0)$$

este singulară. Convexitatea ar forţa energia acestei matrici singulare să fie zero, în contradicţie cu bariera la $\det F \downarrow 0$. În plus, $GL^+(3)$ însuşi nu este convex. De aceea teoria de existenţă recurge la noţiuni adaptate minorilor şi liniilor de rang unu, nu la convexitatea globală în F.

Condiţia $W(F) \to +\infty$ pentru $\det F \downarrow 0$ a fost discutată, din punct de vedere constitutiv, în Capitolul 5. Aici reţinem numai că aceeaşi barieră va fi folosită în Capitolul 14 pentru a exclude un determinant nul pe o mulţime de măsură pozitivă la limita unui şir de minimizare.

9.6 Injectivitate şi condiţia Ciarlet–Nečas

Condiţia

$$\det \nabla\varphi > 0 \quad \text{a.p.t.}$$

este o condiţie diferenţială aproape peste tot: ea exprimă păstrarea orientării în sens diferenţial. Pentru o deformare de clasă C^1, condiţia $\det \nabla\varphi > 0$ punct cu punct implică, prin teorema funcţiei inverse, invertibilitate locală. Pentru o deformare Sobolev, condiţia $\det \nabla\varphi > 0$ a.p.t. nu implică singură injectivitate locală şi nici nu împiedică două regiuni îndepărtate ale corpului să aibă imagini care se suprapun. Injectivitatea globală este o cerinţă distinctă.

Pentru deformări Sobolev suficient de regulate, o condiţie globală folosită pentru excluderea

interpenetrării este condiţia Ciarlet–Nečas [17]

$$\int_\Omega \det \nabla\varphi \, dX \le \mathcal{L}^3(\varphi(\Omega)). \tag{9.10}$$

Formula de schimbare de variabilă cu multiplicitate arată intuiţia acestei inegalităţi. Dacă $N(y, \varphi, \Omega)$ notează numărul de preimagini ale lui y, atunci, în regimul în care formula de arie este aplicabilă,

$$\int_\Omega \det \nabla\varphi \, dX = \int_{\mathbb{R}^3} N(y, \varphi, \Omega) \, dy.$$

Pe de altă parte,

$$\mathcal{L}^3(\varphi(\Omega)) = \int_{\mathbb{R}^3} \mathbf{1}_{\varphi(\Omega)}(y) \, dy.$$

Cum $N \ge 1$ pe imagine, inegalitatea (9.10) forţează $N = 1$ aproape peste tot. Din această relaţie rezultă excluderea suprapunerii de volum pozitiv. În acest sens se obţine injectivitate aproape peste tot, nu însă injectivitate topologică pe $\overline{\Omega}$; auto-contactul frontierei sau alte fenomene pe mulţimi de măsură nulă necesită ipoteze suplimentare. Nu dezvoltăm aici toate ipotezele fine ale teoremelor globale de invertibilitate; vom folosi condiţia numai ca reper conceptual.

Trebuie distinse aşadar trei niveluri:

1. $\det \nabla\varphi > 0$ a.p.t.: orientare pozitivă aproape peste tot, în sens diferenţial;
2. injectivitate aproape peste tot: absenţa suprapunerii de volum pozitiv;
3. injectivitate pe $\overline{\Omega}$: exclude şi auto-contactul frontierei.

Teorema de existenţă a lui Ball din Capitolul 14 va controla direct primul nivel; al doilea şi al treilea necesită ipoteze globale suplimentare.

9.7 Existenţă locală pentru încărcări mici prin teorema funcţiei inverse

Material de aprofundare. Această secţiune este opţională pentru un prim curs de anul II. Ea foloseşte regularitate eliptică $W^{2,p}$, scufundarea Morrey şi teorema funcţiei inverse în spaţii Banach. Definiţia derivatei Fréchet este aceeaşi ca în Capitolul 1, cu normele spaţiilor X şi Y în locul normei Frobenius. Vom demonstra că, dacă operatorul liniarizat este un izomorfism, atunci pentru încărcări suficient de mici problema neliniară are o unică soluţie într-o vecinătate a stării de referinţă. Concluzia este locală: ea nu exclude existenţa altor soluţii în afara acestei vecinătăţi.

9.7.1 Teorema funcţiei inverse în spaţii Banach

Teorema 9.7.1 (teorema funcţiei inverse)**.** *Fie X, Y spaţii Banach, $U \subset X$ deschis, $0 \in U$, şi $\mathcal{A} \in C^1(U; Y)$. Presupunem*

$$\mathcal{A}(0) = 0$$

şi că derivata

$$\mathcal{A}'(0) : X \to Y$$

este un izomorfism liniar continuu, cu inversă continuă. Atunci există vecinătăţi deschise $U_0 \subset X$ *şi* $V_0 \subset Y$ *ale lui* 0 *astfel încât*

$$\mathcal{A} : U_0 \to V_0$$

este bijectivă, iar inversa $\mathcal{A}^{-1} : V_0 \to U_0$ *este de clasă* C^1.

Teorema nu spune că ecuaţia $\mathcal{A}(u) = f$ este echivalentă cu ecuaţia liniarizată $\mathcal{A}'(0)u = f$. Termenii neliniari nu sunt eliminaţi; teorema de mai sus arată că ei pot fi controlaţi într-o vecinătate a originii.

9.7.2 Spaţiile şi operatorul neliniar

Presupunem $p > 3$ şi, pentru această secţiune, o frontieră $\partial\Omega$ suficient de regulată, de exemplu de clasă C^2. Considerăm, pentru simplitate, condiţii Dirichlet omogene şi definim

$$X = W^{2,p}(\Omega;\mathbb{R}^3) \cap W_0^{1,p}(\Omega;\mathbb{R}^3), \qquad Y = L^p(\Omega;\mathbb{R}^3).$$

În dimensiunea trei, $p > 3$ implică

$$W^{2,p}(\Omega) \hookrightarrow C^{1,\alpha}(\overline{\Omega}), \qquad \alpha = 1 - \frac{3}{p} > 0,$$

şi $W^{1,p}$ este o algebră pentru produsul punctual. Aceste două proprietăţi permit definirea şi diferenţierea termenilor neliniari.

Pentru energia Saint Venant–Kirchhoff scriem

$$F(u) = I + \nabla u, \qquad E(u) = \frac{1}{2}(F(u)^T F(u) - I) = e(u) + \frac{1}{2}\nabla u^T \nabla u,$$

$$\Sigma(u) = \lambda \operatorname{tr} E(u) I + 2\mu E(u), \qquad P(u) = F(u)\Sigma(u).$$

Operatorul de echilibru este

$$\mathcal{A}(u) := -\operatorname{Div} P(u) \in Y.$$

Pentru u mic în X, scufundarea în C^1 asigură $\|\nabla u\|_{L^\infty} < 1$ şi deci $I + \nabla u \in GL^+(3)$ punct cu punct.

9.7.3 Calculul derivatei în origine

Avem exact

$$\begin{aligned}\Sigma(u) = {} & \lambda \operatorname{tr}(e(u)) I + 2\mu e(u) \\ & + \frac{\lambda}{2} \operatorname{tr}(\nabla u^T \nabla u) I + \mu \nabla u^T \nabla u.\end{aligned}$$

Punând $u = \varepsilon v$,

$$\Sigma(\varepsilon v) = \varepsilon\Big[\lambda \operatorname{tr}(e(v))I + 2\mu e(v)\Big] + \varepsilon^2 \left[\frac{\lambda}{2}\operatorname{tr}(\nabla v^T \nabla v)I + \mu \nabla v^T \nabla v\right].$$

Termenul de ordin doi este exact $O(\varepsilon^2)$; nu este justificat să-l numim $o(\varepsilon^2)$. Cum $F(\varepsilon v) = I + \varepsilon \nabla v$, termenul de ordin întâi din $P(\varepsilon v)$ este

$$\varepsilon\Big[\lambda \operatorname{tr}(e(v))I + 2\mu e(v)\Big].$$

Prin urmare

$$\boxed{\mathcal{A}'(0)v = -\operatorname{Div}\Big(2\mu e(v) + \lambda \operatorname{tr}(e(v))I\Big) = -\mu\Delta v - (\lambda+\mu)\nabla \operatorname{div} v.} \tag{9.11}$$

9.7.4 Izomorfismul operatorului liniarizat

Acest pas nu rezultă numai din Lax–Milgram. Îl separăm în cele trei verigi necesare.

Injectivitate. Dacă $\mathcal{A}'(0)v = 0$ şi $v \in X \subset H_0^1$, atunci formularea slabă a problemei Lamé şi testarea cu v dau

$$\int_\Omega \Big(2\mu \left\|e(v)\right\|^2 + \lambda(\operatorname{div} v)^2\Big)dx = 0.$$

Sub condiţiile elastice $\mu > 0$, $3\lambda + 2\mu > 0$, coercivitatea şi Korn implică $v = 0$.

Surjectivitate. Pentru $f \in L^p(\Omega;\mathbb{R}^3)$, Lax–Milgram furnizează mai întâi o soluţie slabă $v \in H_0^1$. Teoria de regularitate L^p pentru sistemul Lamé, pe un domeniu cu frontieră suficient de regulată, furnizează apoi

$$v \in W^{2,p}(\Omega;\mathbb{R}^3) \cap W_0^{1,p}(\Omega;\mathbb{R}^3) = X$$

şi estimarea

$$\|v\|_{W^{2,p}} \le C \left\|f\right\|_{L^p}. \tag{9.12}$$

Prin urmare orice $f \in Y$ are o preimagine în X.

Continuitatea inversei. Estimarea (9.12) spune exact că

$$\left\|(\mathcal{A}'(0))^{-1} f\right\|_X \le C \left\|f\right\|_Y.$$

Deci inversa este continuă. Aceasta este veriga de regularitate eliptică care nu trebuie atribuită teoremei Lax–Milgram; vezi [3, 6].

9.7.5 Aplicarea teoremei funcţiei inverse

Deoarece $p > 3$, produsele care apar în $E(u)$, $\Sigma(u)$ şi $P(u)$ definesc aplicaţii C^1 între spaţiile de mai sus; derivarea spaţială trimite $W^{1,p}$ continuu în L^p. Astfel

$$\mathcal{A} : X \supset U \to Y$$

este C^1 într-o vecinătate U a lui 0. Avem $\mathcal{A}(0) = 0$, iar paragraful anterior arată că $\mathcal{A}'(0)$ este izomorfism. Teorema funcţiei inverse furnizează vecinătăţi $U_0 \subset X$, $V_0 \subset Y$ astfel încât, pentru fiecare $f \in V_0$, există un unic

$$u \in U_0$$

cu

$$\mathcal{A}(u) = f.$$

Unicitatea este *locală*: teorema nu exclude existenţa altor soluţii în afara lui U_0, iar fenomene precum bifurcaţia sau flambajul sunt perfect compatibile cu acest rezultat. Soluţia locală depinde C^1 de încărcarea f.

9.7.6 Exemplu unidimensional pentru teorema funcţiei inverse

Pentru a vedea aceeaşi idee fără regularitate eliptică vectorială, considerăm

$$-(\sigma(u'))' = f \quad \text{în } (0,1), \qquad u(0) = u(1) = 0,$$

unde $\sigma \in C^2(\mathbb{R})$, $\sigma(0) = 0$ şi $\sigma'(0) = c_0 > 0$. Definim

$$\mathcal{B}(u) = -(\sigma(u'))',$$

pe un spaţiu de funcţii suficient de regulate cu condiţii Dirichlet. Liniarizarea în $u = 0$ este

$$\mathcal{B}'(0)v = -c_0 v''.$$

Operatorul $v \mapsto -c_0 v''$, cu $v(0) = v(1) = 0$, este inversabil: pentru fiecare f continuu, soluţia se obţine prin două integrări şi determinarea celor două constante din condiţiile de frontieră. Teorema funcţiei inverse spune atunci că, pentru f suficient de mic, problema neliniară are o unică soluţie mică. Exemplul separă clar cele două idei: *liniarizarea* furnizează operatorul inversabil, iar *teorema funcţiei inverse* controlează termenii neliniari; problema neliniară nu este echivalentă cu cea liniarizată.

9.8 Probleme pentru seminar

1. Calculaţi prima variaţie a funcţionalei $\int_\Omega W(\nabla\varphi)$.
2. Deduceţi condiţia naturală de frontieră din forma variaţională.
3. Arătaţi că $GL^+(n)$ nu este convex pentru $n \geq 2$.
4. Pentru $W(F) = \frac{1}{2}\left\|F^TF - I\right\|^2$ calculaţi $DW(F)$.
5. Verificaţi că obiectivitatea lui W implică simetria lui $DW(F)F^T$.
6. Daţi un exemplu de aplicaţie cu determinant pozitiv local care nu este global injectivă.

9.9 Exerciţii rezolvate

Problema 9.9.1 (prima variaţie pentru o energie de gradient)**.** Fie

$$\mathcal{I}(\varphi) = \int_\Omega W(\nabla\varphi)\, dX.$$

Pentru $\varphi_\varepsilon = \varphi + \varepsilon\eta$, calculaţi formal prima variaţie.

Rezolvare. Avem

$$\nabla\varphi_\varepsilon = \nabla\varphi + \varepsilon\nabla\eta.$$

Prin regula lanţului,

$$\frac{d}{d\varepsilon}W(\nabla\varphi_\varepsilon) = \langle DW(\nabla\varphi_\varepsilon), \nabla\eta\rangle.$$

Evaluând la $\varepsilon = 0$,

$$\boxed{\delta\mathcal{I}(\varphi)[\eta] = \int_\Omega \langle P(\nabla\varphi), \nabla\eta\rangle\, dX,}$$

unde $P = DW$.

Problema 9.9.2 (ecuaţia Euler–Lagrange)**.** Dacă η are suport compact în Ω şi $\delta\mathcal{I}(\varphi)[\eta] = 0$ pentru toate aceste variaţii, deduceţi ecuaţia de echilibru fără forţe de volum.

Rezolvare. Integrarea prin părţi dă

$$\int_\Omega \langle P, \nabla\eta\rangle\, dX = -\int_\Omega \langle \operatorname{Div} P, \eta\rangle\, dX,$$

termenul de frontieră fiind zero. Cum aceasta este zero pentru orice $\eta \in C_c^\infty$, lema fundamentală a calculului variaţional implică

$$\boxed{\operatorname{Div} P = 0.}$$

Problema 9.9.3 (forţe de volum)**.** Pentru

$$\mathcal{I}(\varphi) = \int_\Omega W(\nabla\varphi)dX - \int_\Omega \langle f_0, \varphi\rangle\, dX,$$

deduceţi ecuaţia Euler–Lagrange.

Rezolvare. Prima variaţie este

$$\delta\mathcal{I}(\varphi)[\eta] = \int_\Omega \langle P, \nabla\eta\rangle\, dX - \int_\Omega \langle f_0, \eta\rangle\, dX.$$

Pentru variaţii compacte,

$$0 = -\int_\Omega \langle \operatorname{Div} P + f, \eta\rangle\, dX.$$

Prin localizare,

$$\boxed{\operatorname{Div} P + f_0 = 0.}$$

Problema 9.9.4 (condiţia naturală de frontieră)**.** Presupuneţi o porţiune liberă Γ_N şi termenul de încărcare

$$-\int_{\Gamma_N} \langle t_0, \varphi\rangle\, dA.$$

Deduceţi condiţia naturală.

Rezolvare. Integrarea prin părţi a termenului intern produce

$$\int_{\partial\Omega} \langle PN, \eta \rangle \, dA.$$

Pe porţiunea Dirichlet variaţia este zero. Pe Γ_N rămâne

$$\int_{\Gamma_N} \langle PN - t_0, \eta \rangle \, dA = 0$$

pentru variaţii arbitrare. Prin urmare

$$\boxed{PN = g \quad \text{pe } \Gamma_N.}$$

Problema 9.9.5 (a doua variaţie)**.** Presupuneţi $W \in C^2$. Calculaţi a doua variaţie a energiei interne.

Rezolvare. Derivăm încă o dată expresia primei variaţii:

$$\frac{d}{d\varepsilon} \langle DW(\nabla\varphi + \varepsilon\nabla\eta), \nabla\eta \rangle = D^2W(\nabla\varphi)[\nabla\eta, \nabla\eta].$$

Deci

$$\boxed{\delta^2\mathcal{I}(\varphi)[\eta, \eta] = \int_\Omega D^2W(\nabla\varphi)[\nabla\eta, \nabla\eta] dX.}$$

Problema 9.9.6 (echilibru omogen)**.** Fie $\varphi_F(X) = FX$ şi presupuneţi că W nu depinde explicit de X. Arătaţi că $P(F)$ este constant şi satisface $\operatorname{Div} P(F) = 0$.

Rezolvare. Pentru o deformare afină, $\nabla\varphi_F = F$ este constant. Deoarece $P = DW(F)$ depinde numai de F, şi $P(F)$ este constant în X. Prin urmare fiecare derivată spaţială a componentelor lui $P(F)$ este zero şi

$$\operatorname{Div} P(F) = 0.$$

Aceasta nu înseamnă că orice deformare afină satisface orice condiţie la frontieră, ci doar ecuaţia locală de echilibru fără forţe de volum.

Problema 9.9.7 (energia unei întinderi uniaxiale)**.** Pentru o energie obiectivă $W(F)$ şi familia

$$F(\lambda) = \operatorname{diag}(\lambda, 1, 1),$$

definiţi $w(\lambda) = W(F(\lambda))$. Arătaţi că

$$w'(\lambda) = \langle P(F(\lambda)), e_1 \otimes e_1 \rangle = P_{11}(F(\lambda)).$$

Rezolvare. Derivata matricei este

$$F'(\lambda) = e_1 \otimes e_1.$$

Prin regula lanţului,

$$w'(\lambda) = DW(F(\lambda))[F'(\lambda)] = \langle P(F(\lambda)), e_1 \otimes e_1 \rangle.$$

Produsul Frobenius cu $e_1 \otimes e_1$ extrage componenta $(1,1)$, deci rezultă formula.

Problema 9.9.8 (stabilitate locală într-o direcţie)**.** Pentru familia precedentă, explicaţi semnificaţia condiţiei $w''(\lambda_0) > 0$.

Rezolvare. Dezvoltarea Taylor este

$$w(\lambda_0 + h) = w(\lambda_0) + w'(\lambda_0)h + \frac{1}{2}w''(\lambda_0)h^2 + o(h^2).$$

Dacă $w'(\lambda_0) = 0$ şi $w''(\lambda_0) > 0$, atunci pentru h suficient de mic termenul pătratic este pozitiv şi domină restul. Astfel λ_0 este un minim local strict pe această familie unidimensională de deformaţii. Condiţia nu garantează încă stabilitatea faţă de toate variaţiile matriciale.

Problema 9.9.9 (a doua variaţie pentru Saint Venant–Kirchhoff la identitate)**.** Consideraţi energia

$$W(F) = \mu \, \|E\|^2 + \frac{\lambda}{2}(\operatorname{tr} E)^2, \qquad E = \frac{1}{2}(F^T F - I).$$

Calculaţi partea pătratică a lui $W(I + \varepsilon H)$.

Rezolvare. Din capitolul 2,

$$E(I + \varepsilon H) = \varepsilon \operatorname{sym} H + O(\varepsilon^2).$$

Prin urmare

$$\|E\|^2 = \varepsilon^2 \, \|\operatorname{sym} H\|^2 + O(\varepsilon^3),$$

şi

$$(\operatorname{tr} E)^2 = \varepsilon^2 (\operatorname{tr} H)^2 + O(\varepsilon^3).$$

Deci

$$W(I + \varepsilon H) = \varepsilon^2 \left[\mu \, \|\operatorname{sym} H\|^2 + \frac{\lambda}{2}(\operatorname{tr} H)^2 \right] + O(\varepsilon^3).$$

Aceasta recuperează energia elasticităţii liniarizate.

Problema 9.9.10 (de ce convexitatea globală este prea puternică)**.** Explicaţi de ce o energie elastică obiectivă, cu $W(R) = 0$ pentru orice $R \in SO(3)$, nu poate fi strict convexă pe întreg spaţiul matricilor.

Rezolvare. Dacă W ar fi strict convexă şi ar avea aceeaşi valoare minimă zero în două rotaţii distincte $R_1 \neq R_2$, atunci pentru $0 < t < 1$ stricta convexitate ar da

$$W(tR_1 + (1-t)R_2) < tW(R_1) + (1-t)W(R_2) = 0.$$

Dar energia este presupusă nenegativă. De fapt, incompatibilitatea priveşte chiar convexitatea globală obişnuită, nu numai stricta convexitate, dacă impunem simultan $W \geq 0$, $W = 0$ pe

$SO(3)$ şi bariera $W(F) \to +\infty$ la $\det F \downarrow 0$. Convexitatea şi anularea pe $SO(3)$ ar obliga $W = 0$ pe învelişul convex $\operatorname{co} SO(3)$; acesta conţine matrice singulare (de exemplu 0), ceea ce contrazice bariera de determinant. De aceea elasticitatea neliniară foloseşte noţiuni de convexitate adaptate minorilor şi direcţiilor de rang unu.

9.10 Exerciţii propuse suplimentare

Nivelul A

9.A.1 *(tensorul Piola–Kirchhoff pentru un material neo-Hookean compresibil)* Fie

$$W(F) = \frac{\mu}{2}(\|F\|^2 - 3) - \mu \log\det F + \frac{\lambda}{2}(\log\det F)^2, \qquad F \in GL^+(3).$$

(i) Calculaţi $P = D_F W(F)$. (ii) Verificaţi $P(I) = 0$. (iii) Verificaţi că $W(F) \to +\infty$ când $\det F \to 0^+$, cu $\|F\|$ mărginită.
Răspuns.

$$P(F) = \mu(F - F^{-T}) + \lambda(\log\det F)F^{-T}.$$

Prin urmare $P(I) = 0$. Dacă $J = \det F \to 0^+$, termenii $-\mu \log J + \frac{\lambda}{2}(\log J)^2$ tind la $+\infty$, iar primul termen rămâne mărginit dacă $\|F\|$ este mărginită.

9.A.2 *(Saint Venant–Kirchhoff: întinderea pură nu este tensiune uniaxială)* Pentru

$$W(F) = \mu\,\|E\|^2 + \frac{\lambda}{2}(\operatorname{tr} E)^2, \qquad E = \frac{1}{2}(F^TF - I),$$

consideraţi $F(t) = \operatorname{diag}(t, 1, 1)$, $t > 0$. (i) Calculaţi E, $\operatorname{tr} E$ şi $S = 2\mu E + \lambda(\operatorname{tr} E)I$. (ii) Calculaţi $P = FS$. (iii) Arătaţi că $P_{22} = P_{33} \neq 0$ pentru $t \neq 1$ dacă $\lambda \neq 0$.
Răspuns.

$$E = \frac{1}{2}\operatorname{diag}(t^2 - 1, 0, 0), \qquad \operatorname{tr} E = \frac{t^2 - 1}{2},$$

$$S = \frac{t^2 - 1}{2}\operatorname{diag}(2\mu + \lambda, \lambda, \lambda),$$

$$P = \frac{t^2 - 1}{2}\operatorname{diag}\Big(t(2\mu + \lambda), \lambda, \lambda\Big).$$

Aşadar, menţinerea laturilor transversale nedeformate necesită tracţiuni laterale nenule.

9.A.3 *(energie pur volumetrică)* Fie

$$W(F) = h(\det F), \qquad h(J) = c\left(J + \frac{1}{J} - 2\right), \quad c > 0, \quad J > 0.$$

(i) Calculaţi $P = D_F W(F)$. (ii) Verificaţi $h(1) = 0$ şi $P(I) = 0$. (iii) Verificaţi comportarea la $J \to 0^+$ şi convexitatea lui h.
Răspuns.

$$P(F) = h'(J)\operatorname{Cof} F = c\left(1 - \frac{1}{J^2}\right)\operatorname{Cof} F.$$

Avem $h(1) = h'(1) = 0$, deci $P(I) = 0$. Mai mult,

$$h(J) \to +\infty \quad (J \downarrow 0), \qquad h''(J) = \frac{2c}{J^3} > 0.$$

Nivelul B

9.B.1 *(a doua variaţie în starea naturală şi rolul inegalităţii lui Korn)* Fie $W \in C^2$ cu $D_F W(I) = 0$ şi

$$D_F^2 W(I)[H,H] = 2\mu \left\|\operatorname{sym} H\right\|^2 + \lambda(\operatorname{tr} H)^2, \qquad \mu > 0, \quad 3\lambda + 2\mu > 0.$$

Pentru

$$I(\varphi) = \int_\Omega W(\nabla\varphi)\, dX - L(\varphi), \qquad \varphi_0 = \mathrm{id},$$

(i) calculaţi $\delta^2 I(\varphi_0)[\eta,\eta]$; (ii) arătaţi că forma matriceală nu este pozitiv definită pe toate matricele; (iii) explicaţi de ce forma devine coercivă pe spaţiul de deplasări cu condiţii Dirichlet.
Răspuns.

$$\delta^2 I(\varphi_0)[\eta,\eta] = \int_\Omega \left[2\mu \left\|e(\eta)\right\|^2 + \lambda(\operatorname{div}\eta)^2\right] dX = a(\eta,\eta).$$

Orice matrice antisimetrică nenulă are $\operatorname{sym} H = 0$ şi $\operatorname{tr} H = 0$, deci forma se anulează; acest lucru reflectă invarianta la rotaţii. Pe V, pozitivitatea pe $\operatorname{Sym}(3)$ şi Korn dau

$$\delta^2 I(\varphi_0)[\eta,\eta] \geq c_0 \left\|e(\eta)\right\|_{L^2}^2 \geq \frac{c_0}{C_K^2} \left\|\eta\right\|_{H^1}^2, \qquad c_0 = \min\{2\mu, 3\lambda + 2\mu\}.$$

9.B.2 *(neconvexitatea lui $GL^+(3)$ şi incompatibilitatea cu bariera la determinant)* Fie $R_\theta \in SO(3)$ rotaţia de unghi θ în jurul axei e_3. (i) Calculaţi

$$\det \frac{I + R_\theta}{2}$$

şi determinaţi valorile lui θ pentru care media este singulară. (ii) Scrieţi cazul singular explicit. (iii) Explicaţi de ce o energie obiectivă, nulă pe $SO(3)$ şi cu barieră la $\det F \downarrow 0$ nu poate fi convexă pe un domeniu care conţine segmentul respectiv.
Răspuns.

$$R_\theta = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \det \frac{I + R_\theta}{2} = \frac{1 + \cos\theta}{2}.$$

Determinantul se anulează exact pentru $\theta = \pi$. Atunci

$$R_\pi = \operatorname{diag}(-1,-1,1), \qquad \frac{I + R_\pi}{2} = \operatorname{diag}(0,0,1).$$

Convexitatea ar impune o valoare finită şi cel mult nulă în punctul median, ceea ce contrazice bariera la determinant nul.

9.B.3 *(presiunea urmăritoare ca încărcare conservativă)* Fie $\varphi \in C^2(\Omega;\mathbb{R}^3)$, $\det\nabla\varphi > 0$, şi

$$L_p(\varphi) = -p \int_\Omega \det\nabla\varphi\, dX, \qquad p \in \mathbb{R}.$$

(i) Calculaţi prima variaţie. (ii) Integraţi prin părţi şi folosiţi identitatea lui Piola. (iii)

Identificaţi tracţiunea nominală rezultată.
Răspuns.

$$\delta L_p(\varphi)[\eta] = -p \int_\Omega \langle \operatorname{Cof} \nabla\varphi, \nabla\eta \rangle \, dX.$$

Cum $\operatorname{Div}(\operatorname{Cof} \nabla\varphi) = 0$,

$$\delta L_p(\varphi)[\eta] = -p \int_{\partial\Omega} \langle (\operatorname{Cof} \nabla\varphi)N, \eta \rangle \, dA.$$

Prin urmare

$$g(\varphi) = -p(\operatorname{Cof} \nabla\varphi)N.$$

Formula lui Nanson arată că aceasta corespunde tracţiunii Cauchy $-pn$ pe suprafaţa deformată. Încărcarea depinde de deformare, dar derivă dintr-un potenţial.

Nivelul C

9.C.1 *(întindere uniaxială neliniară şi recuperarea coeficientului Poisson)* Pentru energia din 9.A.1, cu $\lambda = 60$ GPa, $\mu = 30$ GPa, consideraţi

$$F = \operatorname{diag}(a, b, b), \qquad a, b > 0.$$

(a) Scrieţi $P(F)$. (b) Impuneţi $P_{22} = P_{33} = 0$ şi obţineţi

$$\mu(b^2 - 1) + \lambda \log(ab^2) = 0.$$

Arătaţi că b este funcţie netedă de a lângă $(1, 1)$. (c) Pentru $a = 1 + \varepsilon$, $b = 1 + \delta$, liniarizaţi relaţia şi calculaţi ν şi E_Y.
Răspuns. Cu $J = ab^2$,

$$P = \operatorname{diag}\left(\mu\left(a - \frac{1}{a}\right) + \frac{\lambda \log J}{a}, \mu\left(b - \frac{1}{b}\right) + \frac{\lambda \log J}{b}, \mu\left(b - \frac{1}{b}\right) + \frac{\lambda \log J}{b} \right).$$

Condiţia transversală produce ecuaţia cerută. Derivata ei faţă de b la $(1, 1)$ este $2(\lambda + \mu) \neq 0$, deci se aplică teorema funcţiei implicite. La ordinul întâi,

$$2\mu\delta + \lambda(\varepsilon + 2\delta) = 0, \qquad \delta = -\frac{\lambda}{2(\lambda + \mu)}\varepsilon = -\nu\varepsilon.$$

Astfel

$$\nu = \frac{1}{3}, \qquad E_Y = \mu\frac{3\lambda + 2\mu}{\lambda + \mu} = 80\,\text{GPa},$$

şi $P_{11} = E_Y\varepsilon + O(\varepsilon^2)$.

9.C.2 *(existenţă locală prin teorema funcţiei inverse)* Se consideră problema

$$\mathcal{A}(u) := -\operatorname{Div} P(I + \nabla u) = f \quad \text{în } \Omega, \qquad u = 0 \quad \text{pe } \partial\Omega,$$

unde $P(I) = 0$ şi

$$D_F P(I)[H] = 2\mu \operatorname{sym} H + \lambda(\operatorname{tr} H) I.$$

Lucrăm cu

$$X = W^{2,p}(\Omega;\mathbb{R}^3) \cap W_0^{1,p}(\Omega;\mathbb{R}^3), \qquad Y = L^p(\Omega;\mathbb{R}^3), \qquad p > 3,$$

şi $\partial\Omega$ de clasă C^2. (a) Calculaţi $D\mathcal{A}(0)$. (b) Explicaţi de ce este izomorfism $X \to Y$. (c) Formulaţi concluzia locală şi limitele ei.
Răspuns.

$$D\mathcal{A}(0)[u] = -\operatorname{Div}\Big(2\mu e(u) + \lambda(\operatorname{div} u) I\Big) = -\mu\Delta u - (\lambda+\mu)\nabla \operatorname{div} u.$$

Unicitatea slabă şi regularitatea eliptică $W^{2,p}$ pentru problema Dirichlet arată că acest operator este un izomorfism $X \to Y$. Pentru $p > 3$, scufundarea $W^{2,p} \hookrightarrow C^1$ permite controlul uniform al lui ∇u şi menţinerea lui $\det(I + \nabla u) > 0$ pentru u mic. Rezultă existenţa unei raze $\rho > 0$ astfel încât, pentru $\|f\|_{L^p} < \rho$, există o unică soluţie mică $u(f)$, dependentă neted de f. Rezultatul este local şi nu garantează injectivitatea globală; pentru aceasta este necesară o condiţie globală, de tip Ciarlet–Nečas.

9.C.3 *(orientare locală versus injectivitate globală)* Fie coroana plană

$$\Omega = \{X \in \mathbb{R}^2 : 1 < |X| < 2\}$$

şi, în coordonate polare,

$$\varphi(r,\theta) = (r, 2\theta).$$

(a) Arătaţi că $\det \nabla\varphi = 2 > 0$. (b) Arătaţi că φ nu este injectivă şi determinaţi imaginea. (c) Verificaţi condiţia Ciarlet–Nečas.
Răspuns. În baza ortonormată locală (e_r, e_θ),

$$\nabla\varphi = \operatorname{diag}(1,2), \qquad \det\nabla\varphi = 2.$$

Punctele (r,θ) şi $(r,\theta+\pi)$ au aceeaşi imagine, iar $\varphi(\Omega) = \Omega$. Cum $|\Omega| = 3\pi$,

$$\int_\Omega \det\nabla\varphi \, dX = 6\pi, \qquad |\varphi(\Omega)| = 3\pi.$$

Aşadar condiţia

$$\int_\Omega \det\nabla\varphi \, dX \le |\varphi(\Omega)|$$

este încălcată. Raportul $6\pi/(3\pi) = 2$ este multiplicitatea aplicaţiei.

Capitolul 10

Elipticitate Legendre–Hadamard şi rank-one convexitate

Surse şi orientare. Pentru condiţia Legendre–Hadamard, compatibilitatea Hadamard şi rank-one convexitate folosim [2, 5, 8, 9].

10.1 Compatibilitatea Hadamard şi direcţiile de rang unu

Direcţiile de rang unu apar din condiţia ca două gradiente constante să poată fi lipite fără salt al deformării pe o suprafaţă. Considerăm, pentru simplitate, planul

$$\Sigma = \{X \in \mathbb{R}^3 : \langle n, X\rangle = 0\}, \qquad \|n\| = 1,$$

şi două aplicaţii afine

$$\varphi^+(X) = F^+X + c^+, \qquad \varphi^-(X) = F^-X + c^-.$$

Presupunem că ele coincid pe Σ. Alegem două puncte $X, Y \in \Sigma$. Din

$$\varphi^+(X) = \varphi^-(X), \qquad \varphi^+(Y) = \varphi^-(Y)$$

scădem cele două egalităţi şi obţinem

$$(F^+ - F^-)(X - Y) = 0.$$

Vectorii $X - Y$ parcurg planul tangent $n^\perp$. Aşadar

$$(F^+ - F^-)\tau = 0 \qquad \text{pentru orice } \tau \in n^\perp.$$

Punem $A := F^+ - F^-$. Orice vector $x \in \mathbb{R}^3$ se descompune unic sub forma

$$x = x_T + \langle x, n\rangle n, \qquad x_T \in n^\perp.$$

Cum $Ax_T = 0$, rezultă

$$Ax = \langle x, n\rangle An.$$

Dacă notăm $a := An$, atunci

$$Ax = a\,\langle n, x\rangle = (a \otimes n)x \qquad \forall x \in \mathbb{R}^3.$$

Prin urmare

$$\boxed{F^+ - F^- = a \otimes n.} \tag{10.1}$$

Aceasta este condiţia de compatibilitate Hadamard. Ea spune că saltul gradientului unei deformări continue, netede de fiecare parte a unei interfeţe, are rang cel mult unu. De aici provin direcţiile $a \otimes n$ folosite atât în rank-one convexitate, cât şi în condiţia Legendre–Hadamard.

10.2 Tensorul tangent şi condiţia Legendre–Hadamard

Pentru $W \in C^2$, derivata a doua $D^2W(F)$ este o formă biliniară pe $\mathbb{R}^{3\times3}\times\mathbb{R}^{3\times3}$. În componente vom folosi o singură notaţie pentru tensorul tangent,

$$\mathbb{C}_{iJkL}(F) = \frac{\partial^2 W}{\partial F_{iJ}\partial F_{kL}}(F),$$

astfel încât $D^2W(F)[H,K] = \mathbb{C}_{iJkL}H_{iJ}K_{kL}$. Indicii i,k sunt spaţiali, iar J,L sunt referenţiali.

Condiţia de mai jos priveşte restricţia formei $D^2W(F)$ la matricile de rang unu. Legătura cu a doua variaţie va fi demonstrată, cu funcţii-test localizate, în secţiunea dedicată deducerii condiţiei Legendre–Hadamard.

Definiţia 10.2.1 (Legendre–Hadamard)**.** O energie $W \in C^2$ este Legendre–Hadamard eliptică în F dacă

$$D^2W(F)[a\otimes b, a\otimes b] \geq 0 \qquad \forall a,b \in \mathbb{R}^3.$$

Dacă există $c>0$ astfel încât membrul stâng satisface $D^2W(F)[a\otimes b, a\otimes b] \geq c\,\|a\|^2\,\|b\|^2$ pentru orice a,b, spunem că energia este puternic eliptică în F.

10.3 Rank-one convexitate

Prin definiţie, W este rank-one convexă dacă pentru orice F şi orice a,b pentru care segmentul rămâne în domeniu, funcţia scalară $t \mapsto W(F+ta\otimes b)$ este convexă. Dacă $W\in C^2$, o funcţie scalară de clasă C^2 este convexă exact când derivata a doua este nenegativă. Aplicând regula lanţului de două ori,

$$\frac{d^2}{dt^2}W(F+ta\otimes b) = D^2W(F+ta\otimes b)[a\otimes b, a\otimes b].$$

Pe un segment admisibil $F + t\,a\otimes b$, convexitatea restricţiei este echivalentă, pentru o energie de clasă C^2, cu nenegativitatea acestei derivate a doua în fiecare punct al segmentului. Prin urmare, dacă inegalitatea Legendre–Hadamard este satisfăcută pentru toate punctele domeniului şi pentru toate direcţiile de rang unu, atunci restricţia lui W la orice asemenea segment este convexă. Invers, rank-one convexitatea implică inegalitatea punctuală Legendre–Hadamard oriunde W este de clasă C^2. Într-un punct fix, condiţia Legendre–Hadamard este deci condiţia diferenţială punctuală; rank-one convexitatea priveşte întregul segment. În lipsa regularităţii C^2, folosim definiţia prin segmente.

Un exemplu elementar: rank-one convexă, dar neconvexă. Funcţia $W(F) = \det F$ este afină pe orice linie de rang unu, prin lema următoare; este deci simultan rank-one convexă

şi rank-one concavă pe orice segment admisibil. Totuşi nu este convexă în F. De exemplu,

$$F_1 = \operatorname{diag}(2,1,1), \qquad F_2 = \operatorname{diag}(1,2,1)$$

aparţin lui $GL^+(3)$ şi satisfac $\det F_1 = \det F_2 = 2$, în timp ce

$$\det\Big(\frac{F_1+F_2}{2}\Big) = \det \operatorname{diag}\Big(\frac{3}{2},\frac{3}{2},1\Big) = \frac{9}{4} > 2.$$

Aceasta contrazice inegalitatea de convexitate la mijloc. Exemplul separă concret noţiunile înainte de a introduce criteriile mai subtile.

Lema 10.3.1 (determinantul pe o linie de rang unu)**.** *Pentru orice $F \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ şi orice $a, b \in \mathbb{R}^3$,*

$$\det(F + t\, a\otimes b) = \det F + t\,\langle \operatorname{Cof} F, a\otimes b\rangle.$$

În particular, determinantul este o funcţie afină de t pe orice linie de rang unu.

Demonstraţie. Notăm coloanele lui F prin $F = (f_1 \mid f_2 \mid f_3)$ şi scriem $b = (b_1,b_2,b_3)^T$. Deoarece

$$(a\otimes b)e_j = b_j a,$$

coloanele lui $F + t\,a\otimes b$ sunt $f_j + t b_j a$. Multilinearitatea determinantului arată că dezvoltarea în t conţine termenul constant $\det F$, trei termeni liniari şi termeni de ordin cel puţin doi. Orice termen de ordin t^2 sau t^3 conţine cel puţin două coloane proporţionale cu acelaşi vector a; determinantul său este deci zero. Rămâne

$$\det(F + t\,a\otimes b) = \det F + t\Big[b_1 \det(a,f_2,f_3) + b_2\det(f_1,a,f_3) + b_3\det(f_1,f_2,a)\Big].$$

Coeficientul lui t este derivata direcţională a determinantului în direcţia $a\otimes b$. În Capitolul 1 am demonstrat deja, pornind de la diferenţiabilitatea Fréchet, că

$$D(\det)(F)[H] = \langle \operatorname{Cof} F, H\rangle.$$

Punând $H = a\otimes b$ identificăm coeficientul liniar şi obţinem formula din enunţ. Calculul foloseşte numai particularitatea direcţiei de rang unu; formula generală pentru derivata determinantului este cea din Capitolul 1.

Dacă $F \in GL^+(3)$, relaţia poate fi scrisă şi sub forma

$$\det(F + t\,a\otimes b) = \det F\Big(1 + t\,\langle b, F^{-1}a\rangle\Big).$$

Într-adevăr, $\operatorname{Cof} F = (\det F)F^{-T}$ şi

$$\langle F^{-T}, a\otimes b\rangle = \langle b, F^{-1}a\rangle.$$

□

Corolarul 10.3.2 (segmentul admisibil în $GL^+(3)$)**.** *Dacă $F \in GL^+(3)$ şi $H = a\otimes b$, atunci*

mulţimea

$$I_{F,H} := \{t \in \mathbb{R} : \det(F + tH) > 0\}$$

este un interval deschis (eventual întreaga dreaptă).

Demonstraţie. Din lema precedentă,

$$\det(F + tH) = \alpha + \beta t, \qquad \alpha = \det F > 0.$$

Dacă $\beta = 0$, determinantul este constant şi pozitiv, deci $I_{F,H} = \mathbb{R}$. Dacă $\beta > 0$, condiţia $\alpha + \beta t > 0$ este echivalentă cu

$$t > -\frac{\alpha}{\beta},$$

prin urmare $I_{F,H} = (-\alpha/\beta, \infty)$. Dacă $\beta < 0$, aceeaşi inegalitate dă

$$t < -\frac{\alpha}{\beta},$$

deci $I_{F,H} = (-\infty, -\alpha/\beta)$. În toate cazurile, mulţimea valorilor lui t pentru care $F + tH \in GL^+(3)$ este un interval deschis care conţine 0. Pe acest interval se verifică convexitatea funcţiei $t \mapsto W(F + tH)$. □

10.4 Deducerea condiţiei Legendre–Hadamard din a doua variaţie

Pentru a deduce condiţia Legendre–Hadamard din a doua variaţie alegem funcţii-test oscilante al căror gradient are, la ordin dominant, direcţia $a \otimes b$. Mai întâi formulăm rezultatul de mediere folosit la trecerea la limită.

Lema 10.4.1 (mediere periodică)**.** *Fie $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continuă şi periodică, de perioadă 1, şi $b \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$. Pentru orice $\zeta \in C_c(\Omega)$,*

$$\int_\Omega \zeta(X) g(k\langle b, X\rangle)\, dX \longrightarrow \left(\int_0^1 g(s)\, ds\right)\left(\int_\Omega \zeta(X)\, dX\right).$$

Demonstraţie. Scriem $g = \bar{g} + g_0$, unde $\bar{g} = \int_0^1 g(s)\, ds$ şi g_0 are medie zero. Prin teorema de aproximare trigonometrică, pentru orice $\varepsilon > 0$ există un polinom trigonometric fără termen constant

$$p_\varepsilon(s) = \sum_{0<|m|\le M} c_m e^{2\pi i m s}$$

astfel încât $\|g_0 - p_\varepsilon\|_{L^\infty(0,1)} < \varepsilon$. Pentru fiecare mod $m \neq 0$,

$$\int_\Omega \zeta(X) e^{2\pi i m k\langle b, X\rangle}\, dX \longrightarrow 0$$

prin lema Riemann–Lebesgue, deoarece ζ extinsă prin zero aparţine lui $L^1(\mathbb{R}^3)$ şi $2\pi m k b \to \infty$. Rezultă

$$\int_\Omega \zeta(X) p_\varepsilon(k\langle b, X\rangle)\, dX \longrightarrow 0.$$

În plus, uniform în k,

$$\left| \int_\Omega \zeta(X)[g_0(k\langle b, X\rangle) - p_\varepsilon(k\langle b, X\rangle)]\, dX \right| \le \varepsilon \, \|\zeta\|_{L^1(\Omega)} .$$

Lăsând mai întâi $k \to \infty$ şi apoi $\varepsilon \downarrow 0$, obţinem că partea de medie zero tinde la zero. Termenul constant $\bar{g}$ produce exact $\bar{g} \int_\Omega \zeta$, ceea ce demonstrează formula. □

Observaţia 10.4.2. În aplicaţie luăm $g = (\psi')^2$. Pentru ψ periodică neconstantă, $\int_0^1 (\psi')^2 > 0$, ceea ce va permite împărţirea la factorul de medie şi izolarea formei $D^2W(F)[a \otimes b, a \otimes b]$.

10.4.1 De la a doua variaţie la condiţia Legendre–Hadamard: calcul localizat

Pornim de la pozitivitatea celei de-a doua variaţii pentru toate funcţiile-test şi deducem inegalitatea punctuală pe matricile de rang unu. Considerăm mai întâi o deformare omogenă, cu gradient constant F_0. Atunci tensorul tangent

$$\mathbb{C} = D^2W(F_0)$$

este constant în regiunea analizată. Condiţia necesară de stabilitate este

$$\int_\Omega \mathbb{C}[\nabla\eta, \nabla\eta]\, dX \ge 0 \qquad \forall \eta \in C_c^\infty(\Omega; \mathbb{R}^3). \tag{10.2}$$

Fixăm $a \in \mathbb{R}^3$ şi $b \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ şi vrem să izolăm direcţia matricială $a \otimes b$. Alegem un punct $X_0 \in \Omega$ şi o funcţie de tăiere $\chi \in C_c^\infty(\Omega)$ care este egală cu 1 într-o bilă $B_r(X_0)$. Alegem de asemenea o funcţie scalară periodică netedă ψ şi definim

$$\eta_k(X) = \frac{1}{k}\, a\, \chi(X)\, \psi(k\langle b, X\rangle), \qquad k \in \mathbb{N}.$$

Factorul $1/k$ este ales astfel încât gradientul oscilaţiei să rămână de ordin unu. Calculăm gradientul folosind regula produsului. Pentru componente,

$$(\eta_k)_i = \frac{1}{k} a_i \chi(X) \psi(k\langle b, X\rangle).$$

Derivând după X_J,

$$\begin{aligned} \partial_J (\eta_k)_i &= \frac{1}{k} a_i (\partial_J \chi) \psi(k\langle b, X\rangle) + \frac{1}{k} a_i \chi\, \psi'(k\langle b, X\rangle)\, k b_J \\ &= a_i b_J \chi\, \psi'(k\langle b, X\rangle) + \frac{1}{k} a_i (\partial_J \chi) \psi(k\langle b, X\rangle). \end{aligned}$$

Prin urmare

$$\nabla \eta_k = \chi\, \psi'(k\langle b, X\rangle)\, a \otimes b + \frac{1}{k}\, a \otimes \nabla\chi\, \psi(k\langle b, X\rangle). \tag{10.3}$$

Alegem ψ neconstantă şi notăm

$$m_\psi := \int_0^1 (\psi'(s))^2\, ds > 0.$$

Aplicând Lema 10.4.1 lui $g = (\psi')^2$ şi $\zeta = \chi^2$, obţinem

$$\int_\Omega \chi^2(X)(\psi'(k\langle b, X\rangle))^2\,dX \longrightarrow m_\psi \int_\Omega \chi^2(X)\,dX > 0.$$

Termenii care conţin factorul $1/k$ tind la zero prin mărginirea lui ψ, ψ' şi suportul compact al lui χ. Astfel, după introducerea gradientului în a doua variaţie şi trecerea la limită,

$$D^2W(F_0)[a\otimes b, a\otimes b]\, m_\psi \int_\Omega \chi^2\,dX \geq 0.$$

Factorul scalar este strict pozitiv, deci

$$D^2W(F_0)[a\otimes b, a\otimes b] \geq 0.$$

Prin acest calcul este justificată trecerea la limită în termenul oscilant.

10.4.2 Legătura cu tensorul acustic

Condiţia Legendre–Hadamard a fost deja identificată mai sus cu derivata a doua a restricţiei $t \mapsto W(F + t\,a\otimes n)$. O rescriem acum ca pozitivitate a unei matrici 3×3, pentru a face legătura cu undele incrementale.

Scriem $\mathbb{C}(F) = D^2W(F)$, cu componente $\mathbb{C}_{iJkL}$. Atunci

$$D^2W(F)[a\otimes n, a\otimes n] = \mathbb{C}_{iJkL}a_i n_J a_k n_L = \langle a, Q_F(n)a\rangle,$$

unde

$$Q_F(n)_{ik} = \mathbb{C}_{iJkL}n_J n_L.$$

Prin urmare, condiţia Legendre–Hadamard este echivalentă cu

$$\langle a, Q_F(n)a\rangle \geq 0 \qquad \forall a \in \mathbb{R}^3,$$

adică $Q_F(n)$ este pozitiv semidefinit pentru fiecare $n \neq 0$. Elipticitatea puternică

$$D^2W(F)[a\otimes n, a\otimes n] \geq c\,\|a\|^2\,\|n\|^2$$

este echivalentă cu pozitivitatea definită uniformă a lui $Q_F(n)$ pe sfera unitate. Într-adevăr, continuitatea lui $(a,n)\mapsto \langle a, Q_F(n)a\rangle$ pe compactul $S^2\times S^2$ arată că pozitivitatea strictă pentru toate perechile unitare este echivalentă cu existenţa unei constante uniforme $c>0$. Acesta este acelaşi obiect care apare în ecuaţia de dispersie a undelor plane.

10.4.3 Energii care depind numai de determinant

Lema determinantului pe o linie de rang unu, demonstrată la începutul capitolului, arată că $J(t) = \det(F + ta\otimes b)$ este afin în t. Cum restricţia energiei la această linie este $t\mapsto h(J(t))$, derivata a doua depinde numai de h'' şi de panta funcţiei afine $J(t)$. Rezultă următoarea caracterizare.

Propoziţia 10.4.3 (dependenţa numai de determinant)**.** *Pentru $W(F) = h(\det F)$, $h \in C^2(0,\infty)$, condiţia Legendre–Hadamard în punctul F este echivalentă cu $h''(\det F) \geq 0$. Mai mult, W este rank-one convexă pe $GL^+(3)$ dacă şi numai dacă h este convexă pe $(0,\infty)$.*

Demonstraţie. Pe linia $F + ta \otimes b$, determinantul este

$$J(t) = J(1 + t\alpha), \qquad J = \det F, \quad \alpha = \langle b, F^{-1}a \rangle.$$

Prin urmare

$$\frac{d^2}{dt^2} W(F + ta \otimes b)\Big|_{t=0} = h''(J)J^2\alpha^2.$$

Dacă $h''(J) \geq 0$, condiţia Legendre–Hadamard este satisfăcută. Reciproc, dacă condiţia este satisfăcută, alegem orice $b \neq 0$ şi $a = Fb$. Atunci

$$\alpha = \langle b, F^{-1}a \rangle = \|b\|^2 > 0,$$

deci inegalitatea Legendre–Hadamard forţează $h''(J) \geq 0$. Aceasta demonstrează echivalenţa punctuală.

Dacă h este convexă, compunerea cu funcţia afină $J(t)$ arată imediat că W este rank-one convexă. Pentru sensul invers fixăm $J_0, J_1 > 0$ şi alegem

$$F_0 = \operatorname{diag}(J_0, 1, 1), \qquad F_1 = \operatorname{diag}(J_1, 1, 1).$$

Diferenţa $F_1 - F_0 = (J_1 - J_0)e_1 \otimes e_1$ are rang unu, iar pentru $t \in [0,1]$

$$F_t = (1-t)F_0 + tF_1 = \operatorname{diag}((1-t)J_0 + tJ_1, 1, 1) \in GL^+(3).$$

Rank-one convexitatea lui W dă

$$h((1-t)J_0 + tJ_1) \leq (1-t)h(J_0) + th(J_1),$$

pentru orice $J_0, J_1 > 0$ şi $t \in [0,1]$. Prin urmare h este convexă pe $(0,\infty)$. □

Interpretarea în unde incrementale. Pentru o undă incrementală plană în jurul unei stări omogene, ecuaţia proprie este

$$Q_F(n)a = \rho_0 c^2 a.$$

Aşadar semidefinitivitatea lui $Q_F(n)$ exclude valori proprii negative, iar elipticitatea puternică dă viteze reale strict pozitive pentru toate polarizările nenule.

10.5 Exemplu: energia pătratică în F

Pentru $W(F) = \frac{1}{2}\|F\|^2$,

$$D^2W(F)[a \otimes b, a \otimes b] = \|a\|^2 \|b\|^2 > 0.$$

Energia este convexă, rank-one convexă, obiectivă şi izotropă, deoarece pentru $Q_1, Q_2 \in SO(3)$ avem $\|Q_1 F Q_2\| = \|F\|$. Ea nu este însă un model elastic cu stare naturală $SO(3)$: $W(R) = 3/2$ pentru orice rotaţie R, deci energia nu se anulează pe stările rigide, şi nici nu conţine o barieră la $\det F \downarrow 0$. Dacă am încerca să reparăm starea naturală prin $\frac{1}{2}\|F - I\|^2$, am pierde obiectivitatea. Exemplul separă astfel trei proprietăţi diferite: convexitate, obiectivitate şi alegerea fizică a stării naturale.

10.6 Probleme pentru seminar

1. Arătaţi direct că $F \mapsto \det F$ este rank-one afină şi deci simultan rank-one convexă şi rank-one concavă. Verificaţi pe două matrice că determinantul nu este convex pe $\mathbb{R}^{3\times 3}$. Acest exemplu separă rank-one convexitatea de convexitatea obişnuită.

2. Pentru $F \in GL^+(3)$ şi $H = a \otimes b$, determinaţi explicit intervalul maxim de valori t pentru care $F + tH \in GL^+(3)$.

3. Pentru energia pătratică izotropă din Exerciţiul 7, demonstraţi atât necesitatea, cât şi suficienţa condiţiilor $\mu \geq 0$, $\lambda + 2\mu \geq 0$.

4. Pentru $W(F) = h(\det F)$, construiţi linii de rang unu care realizează local orice pantă nenulă a determinantului şi deduceţi sensul invers al caracterizării prin convexitatea lui h.

5. Refaceţi deducerea Legendre–Hadamard pentru un tensor tangent constant folosind $\psi(s) = \sin(2\pi s)$ şi calculaţi explicit media m_ψ.

6. Verificaţi că $W(F) = \frac{1}{2}\|F\|^2$ este obiectivă, dar $W(F) = \frac{1}{2}\|F - I\|^2$ nu este obiectivă.

7. Reamintiţi energia Saint Venant–Kirchhoff şi determinaţi o direcţie de rang unu pe care convexitatea se pierde sub compresie suficientă.

10.7 Exerciţii rezolvate

Problema 10.7.1 (matrice de rang unu)**.** Fie $a, b \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$. Arătaţi că matricea $a \otimes b$ are rang unu.

Rezolvare. Pentru orice $x \in \mathbb{R}^3$,

$$(a \otimes b)x = a(\langle b, x\rangle).$$

Imaginea este deci inclusă în dreapta generată de a. Cum $b \neq 0$, putem alege x cu $\langle b, x\rangle \neq 0$, deci imaginea nu este nulă. Prin urmare dimensiunea imaginii este exact unu.

Problema 10.7.2 (linia de rang unu)**.** Pentru $F_t = F + t\, a \otimes b$, calculaţi $\frac{d}{dt}W(F_t)$ şi $\frac{d^2}{dt^2}W(F_t)$ pentru $W \in C^2$.

Rezolvare. Prin regula lanţului,

$$\frac{d}{dt}W(F_t) = \langle DW(F_t), a \otimes b\rangle.$$

Derivând încă o dată,

$$\frac{d^2}{dt^2}W(F_t) = D^2W(F_t)[a \otimes b, a \otimes b].$$

Astfel convexitatea lui $t \mapsto W(F + ta \otimes b)$ este echivalentă cu nenegativitatea acestei expresii când W este C^2.

Problema 10.7.3 (Legendre–Hadamard)**.** Formulaţi condiţia Legendre–Hadamard la un punct F.

Rezolvare. Condiţia este

$$\boxed{D^2W(F)[a \otimes b, a \otimes b] \geq 0 \quad \forall a, b \in \mathbb{R}^3.}$$

Ea testează Hessianul numai pe direcţiile matriciale de rang unu, nu pe toate direcţiile din $\mathbb{R}^{3\times 3}$.

Problema 10.7.4 (intervalul admisibil pe o linie de rang unu)**.** Fie $F \in GL^+(3)$ şi $H = a \otimes b$. Determinaţi intervalul maximal care conţine 0 şi pentru care

$$F + tH \in GL^+(3).$$

Rezolvare. Lema determinantului pe linii de rang unu dă

$$\det(F + ta \otimes b) = J + t\beta, \qquad J := \det F > 0, \qquad \beta := \langle \operatorname{Cof} F, a \otimes b\rangle.$$

Condiţia de admisibilitate este $J + t\beta > 0$. Dacă $\beta = 0$, determinantul rămâne egal cu J şi intervalul este toată dreapta. Dacă $\beta > 0$,

$$t > -\frac{J}{\beta},$$

deci intervalul maximal care conţine 0 este $(-J/\beta, \infty)$. Dacă $\beta < 0$,

$$t < -\frac{J}{\beta},$$

deci intervalul este $(-\infty, -J/\beta)$. În toate cazurile mulţimea valorilor admisibile ale lui t este un interval, ceea ce justifică definiţia rank-one convexităţii pe domeniul neconvex $GL^+(3)$.

Problema 10.7.5 (rank-one convexă, dar nu convexă)**.** Arătaţi că funcţia $W(F) = \det F$ este rank-one afină şi deci rank-one convexă, dar nu este convexă pe $\mathbb{R}^{3\times 3}$.

Rezolvare. Pentru orice F, a, b, formula determinantului pe o linie de rang unu este

$$W(F + ta \otimes b) = \det F + t \,\langle \operatorname{Cof} F, a \otimes b \rangle,$$

deci dependenţa de t este afină. Prin urmare W este simultan rank-one convexă şi rank-one concavă.

Pentru a vedea că W nu este convexă pe întregul spaţiu matricial, restrângem funcţia la dreapta scalară $F = tI$. Atunci

$$W(tI) = t^3.$$

Funcţia scalară $t \mapsto t^3$ nu este convexă pe $\mathbb{R}$. De exemplu, pentru

$$A = -2I, \qquad B = 0,$$

avem

$$W\Big(\frac{A+B}{2}\Big) = \det(-I) = -1,$$

în timp ce

$$\frac{W(A) + W(B)}{2} = \frac{-8 + 0}{2} = -4.$$

Inegalitatea de convexitate ar cere $-1 \le -4$, ceea ce este fals. Acest exemplu arată concret că rank-one convexitatea este strict mai slabă decât convexitatea obişnuită.

Problema 10.7.6 (tensorul acustic)**.** Definiţi

$$\mathbb{C}_{iJkL}(F) = \frac{\partial^2 W}{\partial F_{iJ} \partial F_{kL}}(F)$$

şi arătaţi că

$$D^2W(F)[a \otimes n, a \otimes n] = \langle a, Q_F(n) a \rangle,$$

unde $Q_F(n)_{ik} = \mathbb{C}_{iJkL} n_J n_L$.

Rezolvare. Prin definiţia formei bilineare asociate Hessianului,

$$D^2W(F)[H, H] = \mathbb{C}_{iJkL} H_{iJ} H_{kL}.$$

Pentru $H = a \otimes n$, $H_{iJ} = a_i n_J$, deci

$$D^2W(F)[a \otimes n, a \otimes n] = \mathbb{C}_{iJkL} a_i n_J a_k n_L = a_i Q_F(n)_{ik} a_k.$$

Aceasta este $\langle a, Q_F(n)a\rangle$.

Problema 10.7.7 (rank-one convexitatea energiei pătratice liniare)**.** Fie

$$Q(H) = \mu \|\operatorname{sym} H\|^2 + \frac{\lambda}{2}(\operatorname{tr} H)^2.$$

Calculaţi $Q(a \otimes b)$ şi deduceţi condiţiile de pozitivitate pe direcţii de rang unu.

Rezolvare. Avem

$$\operatorname{sym}(a \otimes b) = \frac{1}{2}(a \otimes b + b \otimes a).$$

O identitate directă dă

$$\|\operatorname{sym}(a \otimes b)\|^2 = \frac{1}{2}\|a\|^2 \|b\|^2 + \frac{1}{2}(\langle a, b\rangle)^2,$$

iar

$$\operatorname{tr}(a \otimes b) = \langle a, b\rangle.$$

Deci

$$Q(a \otimes b) = \frac{\mu}{2}\|a\|^2 \|b\|^2 + \frac{\lambda+\mu}{2}(\langle a, b\rangle)^2.$$

Pentru $a \perp b$ rezultă necesar $\mu \geq 0$, iar pentru $a \parallel b$ rezultă $\lambda + 2\mu \geq 0$. Sunt şi suficiente. Dacă $a, b \neq 0$, notăm

$$t = \frac{(\langle a, b\rangle)^2}{\|a\|^2 \|b\|^2} \in [0, 1].$$

Atunci

$$\frac{2Q(a \otimes b)}{\|a\|^2 \|b\|^2} = \mu + (\lambda + \mu)t.$$

Dacă $\lambda + \mu \geq 0$, minimul pe $[0, 1]$ este μ; dacă $\lambda + \mu < 0$, minimul este $\lambda + 2\mu$. Prin urmare

$$\boxed{Q(a \otimes b) \geq 0 \ \forall a, b \quad \Longleftrightarrow \quad \mu \geq 0,\ \lambda + 2\mu \geq 0.}$$

Problema 10.7.8 (pierderea elipticităţii pentru Saint Venant–Kirchhoff)**.** Consideraţi $F(t) = \operatorname{diag}(t, 1, 1)$ şi energia Saint Venant–Kirchhoff. Arătaţi că

$$\frac{d^2}{dt^2} W(F(t)) = \frac{2\mu + \lambda}{2}(3t^2 - 1).$$

Ce concluzie obţineţi pentru $0 < t < 1/\sqrt{3}$?

Rezolvare. Pentru această familie,

$$E = \frac{1}{2}\operatorname{diag}(t^2 - 1, 0, 0).$$

Atunci

$$\|E\|^2 = \frac{1}{4}(t^2 - 1)^2, \qquad (\operatorname{tr} E)^2 = \frac{1}{4}(t^2 - 1)^2.$$

Deci

$$W(F(t)) = \frac{2\mu + \lambda}{8}(t^2 - 1)^2.$$

Derivând,

$$W'(t) = \frac{2\mu+\lambda}{2} t(t^2-1),$$

$$W''(t) = \frac{2\mu+\lambda}{2} (3t^2-1).$$

Dacă $2\mu+\lambda > 0$ şi $t < 1/\sqrt{3}$, atunci $W''(t) < 0$. Observăm că

$$F(t) = I + (t-1) e_1 \otimes e_1,$$

deci $t \mapsto F(t)$ parcurge o linie de rang unu. Cum $W''(t) < 0$ pentru $0 < t < 1/\sqrt{3}$, restricţia $t \mapsto W(F(t))$ nu este convexă pe acest interval; prin urmare energia Saint Venant–Kirchhoff nu este rank-one convexă global pe $GL^+(3)$.

Problema 10.7.9 (unde incrementale)**.** Consideraţi o stare de bază omogenă F_0 şi presupuneţi că nu există forţe masice incrementale. Liniarizaţi ecuaţia de mişcare şi introduceţi ansatz-ul complex

$$u(X,t) = a\, e^{i(\kappa\langle n, X\rangle - \omega t)}, \qquad \kappa > 0.$$

Deplasarea fizică este partea reală a acestui câmp. Arătaţi că se obţine o problemă proprie pentru tensorul acustic.

Rezolvare. Liniarizarea tensiunii este

$$\delta P_{iJ} = \mathbb{C}_{iJkL}(F_0) u_{k,L}.$$

Deoarece F_0 este omogen, tensorul tangent $\mathbb{C}(F_0)$ este constant în spaţiu, iar ecuaţia incrementală este

$$\rho_0 u_{i,tt} = \mathbb{C}_{iJkL} u_{k,LJ}.$$

Pentru ansatz,

$$u_{i,tt} = -\omega^2 a_i e^{i(\kappa\langle n,X\rangle - \omega t)}, \qquad u_{k,LJ} = -\kappa^2 n_L n_J a_k e^{i(\kappa\langle n,X\rangle - \omega t)}.$$

Substituţia dă direct

$$-\rho_0\omega^2 a_i e^{i(\kappa\langle n,X\rangle-\omega t)} = -\kappa^2 \mathbb{C}_{iJkL} n_J n_L a_k e^{i(\kappa\langle n,X\rangle-\omega t)}.$$

Simplificând factorul exponenţial nenul şi semnul minus,

$$\rho_0\omega^2 a_i = \kappa^2 \mathbb{C}_{iJkL} n_J n_L a_k.$$

Cu

$$Q_{F_0}(n)_{ik} = \mathbb{C}_{iJkL} n_J n_L, \qquad c = \omega/\kappa,$$

rezultă

$$\boxed{Q_{F_0}(n) a = \rho_0 c^2 a.}$$

Problema 10.7.10 (strong ellipticity şi viteze reale)**.** Explicaţi de ce pozitivitatea strictă

$$\langle a, Q_F(n)a\rangle > 0 \quad \forall a, n \neq 0$$

garantează valori proprii pozitive pentru tensorul acustic şi, în consecinţă, viteze reale nenule ale undelor incrementale.

Rezolvare. Pentru $W \in C^2$, teorema lui Schwarz dă simetria majoră

$$\mathbb{C}_{iJkL} = \mathbb{C}_{kLiJ}.$$

Prin urmare

$$Q_F(n)_{ik} = \mathbb{C}_{iJkL} n_J n_L = \mathbb{C}_{kLiJ} n_L n_J = Q_F(n)_{ki},$$

deci $Q_F(n)$ este simetric. Strong ellipticity spune că forma pătratică asociată este pozitiv definită pentru $n \neq 0$. Prin teorema spectrală, toate valorile proprii $\lambda_\alpha(n)$ sunt strict pozitive. Din exerciţiul precedent,

$$\lambda_\alpha(n) = \rho_0 c_\alpha^2.$$

Cum $\rho_0 > 0$, avem $c_\alpha = \pm\sqrt{\lambda_\alpha/\rho_0}$. Pentru viteza de propagare se alege convenţional ramura pozitivă, astfel încât $c_\alpha > 0$.

10.8 Exerciţii propuse suplimentare

Nivelul A

10.A.1 *(Legendre–Hadamard este mai slabă decât pozitivitatea energiei)* Fie

$$Q(H) = \mu \,\|\operatorname{sym} H\|^2 + \frac{\lambda}{2}(\operatorname{tr} H)^2, \qquad \mu = 2\,\mathrm{GPa}, \quad \lambda = -3\,\mathrm{GPa}.$$

(i) Calculaţi $Q(a \otimes b)$ şi verificaţi condiţia Legendre–Hadamard. (ii) Verificaţi pozitivitatea lui Q pe $\operatorname{Sym}(3)$ folosind $Q(I)$. (iii) Comparaţi condiţiile obţinute.
Răspuns.

$$Q(a \otimes b) = \frac{\mu}{2}\,\|a\|^2\,\|b\|^2 + \frac{\lambda+\mu}{2}(\langle a, b\rangle)^2.$$

Pentru valorile date, minimul pe $\|a\| = \|b\| = 1$ este $(\lambda + 2\mu)/2 = 1/2 > 0$, deci LH strictă este satisfăcută. Dar

$$Q(I) = 3\mu + \frac{9}{2}\lambda = -7.5\,\mathrm{GPa} < 0.$$

Aşadar LH cere $\mu > 0$, $\lambda + 2\mu > 0$, pe când pozitivitatea energiei cere $\mu > 0$, $3\lambda + 2\mu > 0$.

10.A.2 *(determinantul pe o linie de rang unu)* Fie

$$F = \operatorname{diag}(2, 1, 1), \qquad a = (1, 1, 0)^T, \qquad b = (0, 1, 0)^T.$$

(i) Calculaţi $\operatorname{Cof} F$ şi $\langle \operatorname{Cof} F, a \otimes b\rangle$. (ii) Calculaţi direct $\det(F + ta \otimes b)$. (iii) Verificaţi formula determinantului pentru o perturbaţie de rang unu.
Răspuns.

$$\operatorname{Cof} F = \operatorname{diag}(1, 2, 2), \qquad \langle \operatorname{Cof} F, a \otimes b\rangle = 2.$$

$$F + ta \otimes b = \begin{pmatrix} 2 & t & 0 \\ 0 & 1+t & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \det(F + ta \otimes b) = 2 + 2t.$$

De asemenea, $F^{-1}a = (1/2, 1, 0)^T$ şi $\langle b, F^{-1}a\rangle = 1$, astfel

$$\det(F + ta \otimes b) = \det F\,(1 + t\langle b, F^{-1}a\rangle) = 2(1 + t).$$

10.A.3 *(rank-one convexitatea energiilor pur volumetrice)* Fie

$$W(F) = (\det F)^\alpha, \qquad F \in GL^+(3), \quad \alpha \in \mathbb{R}.$$

(i) Reduceţi condiţia Legendre–Hadamard la convexitatea funcţiei $h(J) = J^\alpha$. (ii) Determinaţi valorile lui α pentru care W este rank-one convexă. (iii) Discutaţi $\alpha = -1,\ 1,\ 1/2$.
Răspuns.

$$h''(J) = \alpha(\alpha - 1)J^{\alpha-2}.$$

Prin urmare

$$W \text{ este rank-one convexă} \quad \Longleftrightarrow \quad \alpha \le 0 \text{ sau } \alpha \ge 1.$$

Pentru $\alpha = 1$, determinantul este afin pe linii de rang unu. Pentru $\alpha = 1/2$, $h'' < 0$; de exemplu, pentru $F = I$ şi $a = b = e_1$, funcţia $t \mapsto \sqrt{1+t}$ este strict concavă.

Nivelul B

10.B.1 *(compatibilitate Hadamard la o interfaţă plană)* Fie

$$F^- = I, \qquad F^+ = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

(i) Calculaţi $F^+ - F^-$ şi rangul său. (ii) Scrieţi $F^+ - F^- = a \otimes n$ cu $\|n\| = 1$. (iii) Construiţi deformarea continuă, afină pe cele două semispaţii, şi verificaţi $\det F^\pm > 0$.
Răspuns.

$$F^+ - F^- = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = e_1 \otimes (1,1,0)^T = (\sqrt{2}e_1) \otimes \frac{(1,1,0)^T}{\sqrt{2}}.$$

Putem lua

$$n = \frac{(1,1,0)^T}{\sqrt{2}}, \qquad a = \sqrt{2}e_1.$$

Pe interfaţa $\langle n, X\rangle = 0$, $(F^+ - F^-)X = 0$, deci

$$\varphi(X) = \begin{cases} F^- X, & \langle n, X\rangle \le 0, \\ F^+ X, & \langle n, X\rangle > 0, \end{cases}$$

este continuă. Avem $\det F^- = 1$, $\det F^+ = 2$.

10.B.2 *(tensorul acustic izotrop şi legătura cu undele)* Pentru

$$Q(H) = \mu \,\|\operatorname{sym} H\|^2 + \frac{\lambda}{2}(\operatorname{tr} H)^2,$$

(i) arătaţi că tensorul acustic este

$$Q(n) = \mu I + (\lambda + \mu) n \otimes n, \qquad \|n\| = 1;$$

(ii) determinaţi spectrul său; (iii) pentru $\mu = 2$ GPa, $\lambda = -3$ GPa şi $\rho = 2000\,\mathrm{kg/m^3}$ calculaţi c_P, c_S.
Răspuns. Valorile proprii sunt $\lambda + 2\mu$ pe direcţia n şi μ, de multiplicitate doi, pe $n^\perp$. Aşadar LH strictă este echivalentă cu

$$\mu > 0, \qquad \lambda + 2\mu > 0.$$

Numeric,

$$c_P = \sqrt{\frac{10^9}{2000}} \approx 707\,\mathrm{m/s}, \qquad c_S = \sqrt{\frac{2\cdot 10^9}{2000}} = 1000\,\mathrm{m/s}.$$

Exemplul are viteze reale, deşi $3\lambda + 2\mu < 0$, deci energia statică nu este pozitivă.

10.B.3 *(convexitate şi rank-one convexitate)* (i) Arătaţi că orice funcţie convexă $W : \mathbb{R}^{n\times n} \to \mathbb{R}$ este rank-one convexă. (ii) Pentru $n = 2$, arătaţi că $W(F) = \det F$ este rank-one convexă. (iii) Arătaţi că determinantul nu este convex pe $\mathbb{R}^{2\times 2}$.
Răspuns. Restricţia unei funcţii convexe la orice dreaptă este convexă. Pentru determinant,

$$\det(F + ta \otimes b) = \det F + t\langle \operatorname{Cof} F, a \otimes b\rangle,$$

deci restricţia la o linie de rang unu este afină. Totuşi, pentru

$$F_1 = \operatorname{diag}(1, 0), \qquad F_2 = \operatorname{diag}(0, 1),$$

avem $\det F_1 = \det F_2 = 0$, dar

$$\det \frac{F_1 + F_2}{2} = \frac{1}{4} > 0.$$

Prin urmare determinantul nu este convex.

Nivelul C

10.C.1 *(de la Legendre–Hadamard la vitezele de undă)* Pentru elasticitatea liniară izotropă: (a) explicaţi pe variaţii oscilante de forma

$$\eta_k(X) = \frac{1}{k} a\, \chi(X)\psi(k\langle n, X\rangle)$$

cum se obţine condiţia punctuală $D^2W[a \otimes n, a \otimes n] \geq 0$; (b) calculaţi forma pentru energia izotropă şi identificaţi tensorul acustic; (c) comparaţi LH cu pozitivitatea energiei şi cu coercivitatea problemei statice.
Răspuns. Avem

$$\nabla\eta_k = \chi\psi'(k\langle n, X\rangle)a \otimes n + \frac{1}{k} a \otimes \nabla\chi\, \psi(k\langle n, X\rangle).$$

Primul termen rămâne de ordin unu, al doilea dispare când $k \to \infty$. Pentru energia liniară,

$$D^2W[a \otimes n, a \otimes n] = \mu \|a\|^2 \|n\|^2 + (\lambda + \mu)(\langle a, n\rangle)^2.$$

Astfel

$$Q(n) = \mu I + (\lambda + \mu)n \otimes n,$$

cu valorile proprii $\lambda + 2\mu$ şi μ. Pozitivitatea energiei, $\mu > 0$, $3\lambda + 2\mu > 0$, implică LH, dar reciproca este falsă. Pentru problema statică, Korn şi Lax–Milgram cer pozitivitatea energiei, nu doar LH.

10.C.2 *(LH pentru o energie neo-Hookean compresibilă)* Fie

$$W(F) = \frac{\mu}{2} \|F\|^2 + h(\det F), \qquad F \in GL^+(3), \quad \mu > 0, \quad h \in C^2(0, \infty).$$

(a) Calculaţi $D^2W(F)[a \otimes b, a \otimes b]$. (b) Formulaţi condiţia LH la F şi condiţia globală de

rank-one convexitate. (c) Aplicaţi pentru

$$h(J) = \frac{\kappa}{2}(J-1)^2 - \mu \log J.$$

Răspuns. Cum determinantul este afin pe linia de rang unu,

$$\det(F + ta \otimes b) = J + t\beta, \qquad \beta = \langle \operatorname{Cof} F, a \otimes b \rangle,$$

rezultă

$$D^2W(F)[a \otimes b, a \otimes b] = \mu \|a\|^2 \|b\|^2 + h''(J)\beta^2.$$

Dacă $h''(J) < 0$, cazul cel mai nefavorabil foloseşte

$$\max_{\|a\|=\|b\|=1} \beta^2 = \sigma_{\max}(\operatorname{Cof} F)^2,$$

deci la un F fix LH este echivalentă cu

$$\mu \geq 0, \qquad \mu + h''(J)\sigma_{\max}(\operatorname{Cof} F)^2 \geq 0$$

(atunci când $h'' < 0$). Pe tot $GL^+(3)$, rank-one convexitatea cere şi este asigurată de $\mu \geq 0$, $h'' \geq 0$. Pentru funcţia dată,

$$h''(J) = \kappa + \frac{\mu}{J^2} > 0,$$

deci energia este rank-one convexă. La $F = I$,

$$D^2W(I)[a \otimes b, a \otimes b] = \mu \|a\|^2 \|b\|^2 + (\kappa + \mu)(\langle a, b \rangle)^2,$$

ceea ce corespunde constantelor Lamé $\lambda = \kappa$, $\mu = \mu$ ale liniarizării.

10.C.3 *(laminate de rang unu şi scăderea energiei)* Fie $W(F) = h(\det F)$ pe $GL^+(2)$ şi două gradiente compatibile Hadamard

$$F^+ - F^- = a \otimes n.$$

Pentru $\theta \in (0,1)$ notăm

$$\overline{F} = \theta F^+ + (1-\theta)F^-.$$

(a) Arătaţi că

$$\det \overline{F} = \theta \det F^+ + (1-\theta) \det F^-.$$

(b) Comparaţi energia laminatei cu energia deformării afine cu gradient $\overline{F}$. (c) Luaţi $F^- = I$, $a = n = e_1$, $F^+ = \operatorname{diag}(4,1)$, $\theta = 1/2$, $h(J) = \sqrt{J}$.
Răspuns. Afinitatea determinantului pe linia de rang unu dă relaţia din (a). Energia mediată este

$$\theta h(J^+) + (1-\theta)h(J^-),$$

iar energia gradientului mediu este

$$h(\theta J^+ + (1-\theta)J^-).$$

Dacă h este convexă, Jensen arată că laminarea nu reduce energia; dacă h este strict concavă, o reduce. Pentru datele numerice,

$$J^- = 1, \qquad J^+ = 4, \qquad \overline{J} = \frac{5}{2},$$

$$E_{\mathrm{lam}} = \frac{1}{2}(1+2) = 1.5, \qquad E_{\mathrm{af}} = \sqrt{2.5} \approx 1.5811.$$

Aşadar laminata are energie mai mică; aceasta este compatibilă cu $h'' < 0$ şi cu pierderea rank-one convexităţii.

Capitolul 11

Materiale izotrope şi criterii în valori singulare

Surse şi orientare. Criteriile spectrale pentru materiale izotrope sunt motivate de analiza clasică Knowles–Sternberg [8, 9] şi de tratările din [14, 5].

11.1 Energii izotrope şi valorile singulare

Fie $F \in GL^+(3)$ şi folosim convenţia unică

$$F = Q_1 D Q_2^T, \qquad Q_1, Q_2 \in SO(3), \qquad D = \operatorname{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3), \quad \lambda_i > 0.$$

Dacă W este obiectivă şi izotropă,

$$W(QF) = W(F), \qquad W(FQ) = W(F) \quad (Q \in SO(3)),$$

atunci

$$W(F) = W(D) =: g(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3).$$

Funcţia g este simetrică. Justificăm şi acest punct, care este adesea lăsat implicit. Fie P matricea unei permutări a axelor. Dacă $\det P = 1$, atunci $P \in SO(3)$ şi

$$PDP^T = \operatorname{diag}(\lambda_{\pi(1)}, \lambda_{\pi(2)}, \lambda_{\pi(3)}).$$

Dacă $\det P = -1$, alegem o matrice diagonală de semne S cu $\det S = -1$, de exemplu $S = \operatorname{diag}(-1, 1, 1)$. Deoarece D este diagonală, $SDS = D$. Matricea $Q := PS$ are determinantul $+1$, deci $Q \in SO(3)$, iar

$$QDQ^T = PSDSP^T = PDP^T.$$

Aşadar orice permutare a valorilor singulare poate fi realizată prin rotaţii proprii, fără a schimba W. Prin urmare

$$g(\lambda_{\pi(1)}, \lambda_{\pi(2)}, \lambda_{\pi(3)}) = g(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$$

pentru orice permutare π.

11.2 Formule de variaţie folosite în criteriile spectrale

Vom folosi două tipuri de variaţii. Prima este variaţia determinantului pe o linie de rang unu. Formula a fost demonstrată în Capitolul 10:

$$\det(F + ta \otimes b) = \det F \, [1 + t \, \langle b, F^{-1} a \rangle], \qquad F \in GL^+(3). \tag{11.1}$$

Folosim consecinţa formulei pentru derivata determinantului din Capitolul 1: dacă $W(F) = h(\det F)$, atunci, notând

$$J(t) = \det(F + ta \otimes b),$$

avem $J''(t) = 0$ şi

$$J'(t) = \det F \, \langle b, F^{-1}a \rangle.$$

Regula lanţului dă

$$\frac{d^2}{dt^2} h(J(t)) = h''(J(t))[J'(t)]^2.$$

Acesta este calculul volumetric folosit mai jos; formula determinantului nu va fi redemonstrată în exemple.

Pentru variaţiile care modifică valorile singulare avem nevoie de formule de perturbare spectrală. Fie $C(t) = C(t)^T$ şi presupunem că $c_i(t)$ este o valoare proprie simplă, cu vector propriu normalizat $q_i(t)$:

$$C(t)q_i(t) = c_i(t)q_i(t), \qquad \|q_i(t)\| = 1.$$

Derivând relaţia de vector propriu,

$$C'q_i + Cq_i' = c_i'q_i + c_iq_i'.$$

Luăm produsul scalar cu q_i. Deoarece C este simetrică,

$$\langle q_i, Cq_i' \rangle = \langle Cq_i, q_i' \rangle = c_i \langle q_i, q_i' \rangle,$$

astfel termenii care conţin q_i' se anulează. Rămâne

$$\boxed{c_i' = \langle q_i, C'q_i \rangle.}$$

Pentru $j \neq i$ luăm produsul scalar al aceleiaşi relaţii cu q_j. Cum $\langle q_j, q_i \rangle = 0$,

$$\langle q_j, C'q_i \rangle + c_j \langle q_j, q_i' \rangle = c_i \langle q_j, q_i' \rangle,$$

de unde

$$\langle q_j, q_i' \rangle = \frac{\langle q_j, C'q_i \rangle}{c_i - c_j}.$$

Derivăm acum $c_i' = \langle q_i, C'q_i \rangle$:

$$c_i'' = \langle q_i', C'q_i \rangle + \langle q_i, C''q_i \rangle + \langle q_i, C'q_i' \rangle.$$

Matricea C' este simetrică, deci primul şi al treilea termen sunt egali. Din $\|q_i\| = 1$ rezultă $\langle q_i, q_i' \rangle = 0$, astfel q_i' are numai componente pe direcţiile q_j, $j \neq i$:

$$q_i' = \sum_{j \neq i} \langle q_j, q_i' \rangle q_j.$$

Introducând formula precedentă pentru coeficienţii acestei dezvoltări obţinem

$$\boxed{c_i'' = \langle q_i, C''q_i\rangle + 2\sum_{j\neq i} \frac{|\langle q_j, C'q_i\rangle|^2}{c_i - c_j}.}$$

În aplicaţia elastică, $C(t) = F(t)^T F(t)$ şi $\lambda_i(t) = \sqrt{c_i(t)}$. Regula lanţului dă

$$\lambda_i' = \frac{c_i'}{2\lambda_i}, \qquad \lambda_i'' = \frac{c_i''}{2\lambda_i} - \frac{(c_i')^2}{4\lambda_i^3}.$$

Aceste formule vor fi folosite în secţiunea următoare. Ele au fost deduse pentru valori proprii simple; cazurile cu valori proprii multiple se tratează separat prin analiza subspaţiilor proprii sau prin trecere la limită. Pentru forma completă a criteriilor vezi [8, 9, 25].

11.3 Convexitate separată şi Baker–Ericksen

Derivăm mai jos două condiţii direct din condiţia Legendre–Hadamard: convexitatea separată şi inegalitatea Baker–Ericksen. Formulele de perturbare spectrală necesare au fost stabilite în secţiunea precedentă.

Fie, în două dimensiuni,

$$F = \operatorname{diag}(\lambda_1, \lambda_2), \qquad W(F) = g(\lambda_1, \lambda_2), \qquad \lambda_1, \lambda_2 > 0,$$

unde g este simetrică.

1. Convexitatea separată. Alegem direcţia de rang unu $H = e_1 \otimes e_1$. Atunci

$$F + tH = \operatorname{diag}(\lambda_1 + t, \lambda_2)$$

pentru $|t|$ suficient de mic şi

$$\frac{d^2}{dt^2} W(F + tH)\Big|_{t=0} = g_{11}(\lambda_1, \lambda_2).$$

Condiţia Legendre–Hadamard impune $g_{11} \geq 0$. Alegând $H = e_2 \otimes e_2$ obţinem $g_{22} \geq 0$. Aşadar rank-one convexitatea implică convexitatea lui g în fiecare variabilă separat.

2. O variaţie de forfecare şi Baker–Ericksen. Presupunem $\lambda_1 \neq \lambda_2$ şi alegem $H = e_1 \otimes e_2$. Avem

$$F(t) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & t \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}, \qquad C(t) = F(t)^T F(t) = \begin{pmatrix} \lambda_1^2 & \lambda_1 t \\ \lambda_1 t & \lambda_2^2 + t^2 \end{pmatrix}.$$

Notăm cu $c_i(t) = \lambda_i(t)^2$ valorile proprii ale lui $C(t)$, numerotate astfel încât $\lambda_i(0) = \lambda_i$. Deoarece

$$C'(0) = \begin{pmatrix} 0 & \lambda_1 \\ \lambda_1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad C''(0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix},$$

formula perturbativă pentru o valoare proprie simplă a unei matrice simetrice dă

$$c_1'(0) = c_2'(0) = 0,$$

şi, dacă $\lambda_1^2 \neq \lambda_2^2$,

$$c_1''(0) = \frac{2\lambda_1^2}{\lambda_1^2 - \lambda_2^2}, \qquad c_2''(0) = -\frac{2\lambda_2^2}{\lambda_1^2 - \lambda_2^2}.$$

Cum $\lambda_i(t) = \sqrt{c_i(t)}$ şi $c_i'(0) = 0$, rezultă

$$\lambda_1''(0) = \frac{\lambda_1}{\lambda_1^2 - \lambda_2^2}, \qquad \lambda_2''(0) = -\frac{\lambda_2}{\lambda_1^2 - \lambda_2^2}.$$

Mai explicăm şi trecerea de la derivatele întinderilor la derivata energiei. Definim

$$\psi(t) = W(F(t)) = g(\lambda_1(t), \lambda_2(t)).$$

Regula lanţului dă

$$\psi'(t) = g_1(\lambda_1(t), \lambda_2(t))\lambda_1'(t) + g_2(\lambda_1(t), \lambda_2(t))\lambda_2'(t).$$

La $t = 0$, am demonstrat că $\lambda_1'(0) = \lambda_2'(0) = 0$, deci $\psi'(0) = 0$. Derivând încă o dată,

$$\begin{aligned}\psi''(t) = {} & g_{11}(\lambda_1')^2 + 2g_{12}\lambda_1'\lambda_2' + g_{22}(\lambda_2')^2 \\ & + g_1\lambda_1'' + g_2\lambda_2''.\end{aligned}$$

La $t = 0$, primii trei termeni se anulează şi rămâne

$$\psi''(0) = g_1\lambda_1''(0) + g_2\lambda_2''(0).$$

Înlocuind formulele calculate mai sus,

$$\begin{aligned}\psi''(0) &= g_1\frac{\lambda_1}{\lambda_1^2 - \lambda_2^2} - g_2\frac{\lambda_2}{\lambda_1^2 - \lambda_2^2} \\ &= \frac{\lambda_1 g_1 - \lambda_2 g_2}{\lambda_1^2 - \lambda_2^2}.\end{aligned}$$

Prin urmare, condiţia Legendre–Hadamard aplicată direcţiei de rang unu $e_1 \otimes e_2$ impune ca această cantitate să fie nenegativă.

Legendre–Hadamard impune deci

$$\frac{\lambda_1 g_1 - \lambda_2 g_2}{\lambda_1^2 - \lambda_2^2} \geq 0.$$

Deoarece $\lambda_1 + \lambda_2 > 0$, aceasta este echivalentă cu

$$\boxed{\frac{\lambda_1 g_1 - \lambda_2 g_2}{\lambda_1 - \lambda_2} \geq 0}. \tag{11.BE}$$

Aceasta este inegalitatea Baker–Ericksen în reprezentarea prin întinderile principale.

Interpretarea mecanică. Pentru o energie izotropă, tensiunile principale Cauchy satisfac, până la un factor pozitiv comun, $\sigma_i \sim \lambda_i g_i$. Relaţia (11.BE) spune că o întindere principală mai mare nu poate corespunde unei tensiuni principale mai mici. Astfel o condiţie analitică provenită din elipticitate capătă o interpretare mecanică directă.

Cazul $\lambda_1 = \lambda_2$. Forma cu cât nu poate fi evaluată prin substituţie directă, deoarece numărătorul şi numitorul se anulează simultan. Fixăm $\lambda_1 = \lambda$ şi punem $\mu = \lambda_2$. Considerăm

$$R(\mu) = \frac{\lambda g_1(\lambda,\mu) - \mu g_2(\lambda,\mu)}{\lambda - \mu}.$$

Simetria lui g implică, pe diagonală,

$$g_1(\lambda,\lambda) = g_2(\lambda,\lambda), \qquad g_{11}(\lambda,\lambda) = g_{22}(\lambda,\lambda).$$

Prin urmare R este de tipul $0/0$ când $\mu \to \lambda$. Derivând numărătorul şi numitorul faţă de μ,

$$\frac{d}{d\mu}\Big[\lambda g_1(\lambda,\mu) - \mu g_2(\lambda,\mu)\Big] = \lambda g_{12} - g_2 - \mu g_{22},$$

$$\frac{d}{d\mu}(\lambda - \mu) = -1.$$

Regula lui l'Hospital dă

$$\begin{aligned}\lim_{\mu\to\lambda} R(\mu) &= -\Big[\lambda g_{12} - g_2 - \lambda g_{22}\Big]_{(\lambda,\lambda)} \\ &= g_1 + \lambda(g_{11} - g_{12}).\end{aligned}$$

Deoarece $\lambda > 0$, condiţia de nenegativitate se poate împărţi la λ şi devine

$$\boxed{g_{11} - g_{12} + \frac{g_1}{\lambda} \geq 0.}$$

Aceasta este valoarea-limită a expresiei Baker–Ericksen pe diagonala $\lambda_1 = \lambda_2$.

11.3.1 De la variaţiile plane la criteriul complet Knowles–Sternberg

Cele două condiţii deduse mai sus — convexitatea separată şi Baker–Ericksen — sunt numai o parte din criteriul complet. Pentru ultimele două inegalităţi apare o problemă elementară de copozitivitate.

Lema 11.3.1 (copozitivitatea unei matrice simetrice 2×2)**.** *Fie*

$$M = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}.$$

Atunci $z^T M z \geq 0$ pentru orice $z = (x, y)$ cu $x, y \geq 0$ dacă şi numai dacă

$$a \geq 0, \qquad c \geq 0, \qquad b + \sqrt{ac} \geq 0.$$

Demonstraţie. Necesitatea lui $a, c \geq 0$ rezultă testând $z = (1, 0)$ şi $z = (0, 1)$. Presupunem aceste două inegalităţi. Dacă $x = 0$, afirmaţia este deja clară. Pentru $x > 0$ punem $t = y/x \geq 0$ şi scriem

$$\frac{z^T M z}{x^2} = a + 2bt + ct^2.$$

Dacă $b \geq 0$, toate cele trei termene sunt nenegative. Dacă $b < 0$ şi $c > 0$, minimul pe $t \geq 0$ este atins la $t = -b/c$ şi are valoarea $a - b^2/c$. Aceasta este nenegativă exact când $b^2 \leq ac$, adică $b + \sqrt{ac} \geq 0$. Dacă $c = 0$, condiţia $b + \sqrt{ac} \geq 0$ impune $b \geq 0$, revenind la primul caz. Schimbând rolurile lui a şi c acoperim şi cazul-limită $a = 0$. □

Lema explică apariţia termenului $\sqrt{g_{11} g_{22}}$: după eliminarea amplitudinilor unei variaţii de rang unu, forma pătratică relevantă trebuie să fie nenegativă numai pentru anumite variabile nenegative, nu pe întregul $\mathbb{R}^2$.

Pentru criteriul complet folosim teorema clasică Knowles–Sternberg [8, 9, 5]. Calculele de mai sus explică apariţia condiţiilor separate şi a termenilor de tip Baker–Ericksen; caracterizarea completă mai cere analiza celor două forme copozitive corespunzătoare tiparelor de semne.

Teorema 11.3.2 (Knowles–Sternberg, cazul plan)**.** *Fie $W : GL^+(2) \to \mathbb{R}$ obiectivă şi izotropă, de clasă C^2, cu $W(F) = g(\lambda_1, \lambda_2)$ şi g simetrică. Pentru $\lambda_1 \neq \lambda_2$, energia este rank-one convexă dacă şi numai dacă*

$$g_{11} \geq 0, \qquad g_{22} \geq 0,$$

$$\frac{\lambda_1 g_1 - \lambda_2 g_2}{\lambda_1 - \lambda_2} \geq 0,$$

şi

$$\sqrt{g_{11} g_{22}} + g_{12} + \frac{g_1 - g_2}{\lambda_1 - \lambda_2} \geq 0,$$

$$\sqrt{g_{11} g_{22}} - g_{12} + \frac{g_1 + g_2}{\lambda_1 + \lambda_2} \geq 0.$$

Pentru $\lambda_1 = \lambda_2$, condiţiile se înţeleg prin extensie continuă.

Observaţia 11.3.3. Primele trei condiţii au fost motivate şi derivate explicit în secţiunea precedentă. Cele două condiţii finale sunt exact condiţiile de copozitivitate ale formelor care amestecă cele două direcţii principale. În acest curs folosim echivalenţa completă drept rezultat clasic admis, nu pretindem că am reprodus demonstraţia integrală din literatura de specialitate.

11.4 Criterii spectrale în trei dimensiuni

În trei dimensiuni o variaţie de rang unu poate cupla simultan toate cele trei direcţii principale. De aceea, pe lângă convexitatea separată şi inegalităţile Baker–Ericksen, apar condiţii de

copozitivitate pentru matrici 3×3. Calculul bidimensional a fost făcut explicit mai sus; criteriul complet tridimensional va fi folosit ca rezultat admis, cu trimitere la [5, 25].

Fie

$$W(F) = g(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3),$$

cu g simetrică şi de clasă C^2. Notăm

$$g_i = \frac{\partial g}{\partial \lambda_i}, \qquad g_{ij} = \frac{\partial^2 g}{\partial \lambda_i \partial \lambda_j}.$$

Pentru $i \neq j$ şi $\varepsilon_i \in \{\pm 1\}$ definim

$$m_{ij}^{\varepsilon} = \varepsilon_i \varepsilon_j g_{ij} + \frac{g_i - \varepsilon_i \varepsilon_j g_j}{\lambda_i - \varepsilon_i \varepsilon_j \lambda_j},$$

în punctele unde numitorul este nenul, cu extensia continuă în punctele de coincidenţă. Pe diagonală punem

$$m_{ii}^{\varepsilon} = g_{ii}.$$

Caracterizarea tridimensională este folosită ca rezultat admis. Demonstraţia completă cere eliminarea parametrilor unei variaţii de rang unu şi folosirea criteriului de copozitivitate pentru matrici 3×3; aceste calcule depăşesc nivelul urmărit aici. Folosim forma necesară şi suficientă a criteriului şi indicăm termenii care apar în el. Pentru demonstraţie vezi [5, 25].

Teorema 11.4.1 (criteriu tridimensional de tip Dacorogna)**.** *Energia izotropă W este rank-one convexă dacă şi numai dacă, pentru orice $\lambda_i > 0$ şi orice alegere de semne ε_i, sunt satisfăcute:*

1. *$g_{ii} \geq 0$ pentru $i = 1, 2, 3$;*
2. *inegalităţile Baker–Ericksen*

$$\frac{\lambda_i g_i - \lambda_j g_j}{\lambda_i - \lambda_j} \geq 0, \qquad i \neq j;$$

3. *matricea simetrică $M^{\varepsilon} = (m_{ij}^{\varepsilon})$ este copozitivă, adică*

$$z^T M^{\varepsilon} z \geq 0 \qquad \forall z \in [0, \infty)^3.$$

Pentru o matrice simetrică 3×3, copozitivitatea poate fi verificată printr-un set finit de inegalităţi în elementele diagonale, în combinaţiile $m_{ij} + \sqrt{m_{ii} m_{jj}}$ şi într-o condiţie cubică finală. Formula este mai lungă decât în 2D, dar structura este aceeaşi: convexitate separată, Baker–Ericksen şi controlul variaţiilor care amestecă direcţiile principale.

11.4.1 Exemplu pentru criteriul 3D: $g = \lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2$

Considerăm

$$g(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = \lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2.$$

Aceasta corespunde energiei $W(F) = \|F\|^2$, despre care ştim deja că este convexă în F. Verificăm acum criteriul spectral numai pentru a vedea concret cum funcţionează matricele M^ε. Avem

$$g_i = 2\lambda_i, \qquad g_{ii} = 2, \qquad g_{ij} = 0 \quad (i \neq j).$$

Baker–Ericksen devine

$$\frac{\lambda_i g_i - \lambda_j g_j}{\lambda_i - \lambda_j} = 2\frac{\lambda_i^2 - \lambda_j^2}{\lambda_i - \lambda_j} = 2(\lambda_i + \lambda_j) > 0.$$

Pentru $i \neq j$ şi $\eta_{ij} := \varepsilon_i \varepsilon_j \in \{\pm 1\}$,

$$m_{ij}^\varepsilon = \frac{2\lambda_i - 2\eta_{ij}\lambda_j}{\lambda_i - \eta_{ij}\lambda_j} = 2,$$

ori de câte ori numitorul este nenul; prin continuitate aceeaşi valoare rămâne şi la coincidenţă. Pe diagonală, $m_{ii}^\varepsilon = 2$. Prin urmare

$$M^\varepsilon = 2\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

independent de alegerea semnelor. Pentru $z \in [0, \infty)^3$,

$$z^T M^\varepsilon z = 2(z_1 + z_2 + z_3)^2 \geq 0.$$

Toate condiţiile criteriului sunt deci satisfăcute. Exemplul arată direct cum se verifică criteriul tridimensional într-un caz în care matricele M^ε au o formă simplă.

11.4.2 Diferenţe între criteriul 2D şi criteriul 3D

Atât în 2D, cât şi în 3D, reducerea spectrală conduce la condiţii de *copozitivitate*, nu la pozitivitate definită pe întregul spaţiu. În 2D, copozitivitatea unei matrice simetrice 2×2 are criteriul elementar

$$m_{11} \geq 0, \qquad m_{22} \geq 0, \qquad m_{12} + \sqrt{m_{11} m_{22}} \geq 0,$$

iar cele două tipare de semne conduc la ultimele două inegalităţi Knowles–Sternberg. În 3D problema este mai dificilă din trei motive: copozitivitatea unei matrice 3×3 necesită o condiţie suplimentară de tip cubic, există patru tipare distincte de semne (deoarece $M^\varepsilon = M^{-\varepsilon}$), iar o variaţie de rang unu cuplează simultan cele trei direcţii principale. Acestea, nu pozitivitatea definită în 2D, explică complexitatea criteriului tridimensional.

11.5 Criteriul pentru medii incompresibile izotrope

Material de aprofundare. Criteriul complet de tip Zubov de mai jos este inclus pentru consultare şi pentru a arăta cum se modifică analiza spectrală sub constrângerea $\det F = 1$. Nu cerem memorarea mărimilor auxiliare; pentru cursul de bază reţinem condiţia tangentă $\langle b, F^{-1}a\rangle = 0$ şi ideea că elipticitatea se verifică numai pe direcţiile compatibile cu incompresibilitatea.

Pentru un material incompresibil, energia este definită pe varietatea $SL(3)$ (sau este extinsă cu $+\infty$ în afara ei), iar tensiunea totală conţine un multiplicator Lagrange de presiune $-pI$. Criteriul de elipticitate se referă la partea elastică tangentă restrânsă la direcţiile compatibile cu constrângerea. Pentru $F \in SL(3)$, valorile singulare satisfac

$$\lambda_1\lambda_2\lambda_3 = 1.$$

Direcţiile de rang unu admisibile se obţin prin liniarizarea constrângerii $\det F = 1$. Pentru

$$F_t = F + t\, a \otimes b$$

formula determinantului pe o linie de rang unu, demonstrată în Capitolul 10, dă

$$\det F_t = \det F\Big(1 + t\,\langle b, F^{-1}a\rangle\Big).$$

Cum $F \in SL(3)$, avem $\det F = 1$. Pentru ca direcţia $a \otimes b$ să fie tangentă la constrângere trebuie ca derivata lui $\det F_t$ în $t = 0$ să fie zero, adică

$$\left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} \det F_t = \langle b, F^{-1}a\rangle = 0.$$

Deoarece determinantul este chiar afin în t pe o linie de rang unu, aceeaşi condiţie implică de fapt $\det F_t = 1$ pentru toate valorile lui t pentru care considerăm linia. Aşadar, în cazul incompresibil, condiţia Legendre–Hadamard se verifică numai pentru perechile (a, b) care satisfac

$$\boxed{\langle b, F^{-1}a\rangle = 0.}$$

Aceasta explică de ce testul de elipticitate este restrâns la un subansamblu al direcţiilor de rang unu folosite în cazul compresibil.

În termeni spectrali se pot defini, pentru o permutare (i, j, k),

$$\alpha_k = \frac{\lambda_i g_i - \lambda_j g_j}{\lambda_i - \lambda_j}, \qquad \beta_i = g_{ii},$$

şi

$$\gamma_k^{\pm} = \pm g_{ij} + \frac{g_i \mp g_j}{\lambda_i \mp \lambda_j}.$$

Un criteriu complet de tip Zubov cere, pe lângă $\alpha_k > 0$, pozitivitatea expresiilor

$$\delta_k = \beta_i\lambda_i^2 + \beta_j\lambda_j^2 + 2\gamma_k^{-}\lambda_i\lambda_j$$

şi

$$\epsilon_k + \sqrt{\delta_i \delta_j} > 0,$$

unde

$$\epsilon_k = \beta_k \lambda_k^2 + \gamma_k^+ \lambda_i \lambda_j + \gamma_i^- \lambda_k \lambda_j + \gamma_j^- \lambda_k \lambda_i.$$

Pentru versiunea nestrictă asociată rank-one convexităţii, semnele $>$ se înlocuiesc cu $\geq$ în condiţiile corespunzătoare, cu atenţie la cazurile degenerat-limită. Acest rezultat este util mai ales în analiza modelelor incompresibile în care g se reduce la două variabile independente prin $\lambda_3 = (\lambda_1 \lambda_2)^{-1}$.

11.6 Unde incrementale şi tensorul acustic

Deducem, în ordinea logică, ecuaţia incrementală, tensorul acustic şi interpretarea valorilor sale proprii ca viteze pătrate. Folosim densitatea de referinţă ρ_0 şi notaţia unică

$$\mathbb{C}_{iJkL}(F_0) = \frac{\partial^2 W}{\partial F_{iJ} \partial F_{kL}}(F_0)$$

pentru tensorul tangent.

Considerăm o stare de bază omogenă

$$\varphi_0(X) = F_0 X$$

şi o perturbaţie mică

$$\varphi_\varepsilon(X,t) = F_0 X + \varepsilon u(X,t).$$

Atunci $F_\varepsilon = F_0 + \varepsilon \nabla u$. Pentru un material hiperelastic, $P(F) = D_F W(F)$ şi

$$P(F_\varepsilon) = P(F_0) + \varepsilon\, D^2 W(F_0)[\nabla u] + o(\varepsilon).$$

În componente,

$$\Big(D^2 W(F_0)[\nabla u]\Big)_{iJ} = \mathbb{C}_{iJkL}(F_0) u_{k,L}.$$

Presupunem că starea omogenă este în echilibru şi că nu există forţe masice incrementale. Deoarece F_0 este constant, şi $\mathbb{C}(F_0)$ este constant în spaţiu. Liniarizarea ecuaţiei materiale de mişcare conduce la

$$\rho_0 \ddot{u}_i = \partial_J \Big(\mathbb{C}_{iJkL} u_{k,L}\Big) = \mathbb{C}_{iJkL} u_{k,LJ}.$$

Căutăm un mod plan complex

$$u(X,t) = a\, e^{\mathrm{i}(\kappa \langle n, X\rangle - \omega t)}, \qquad \kappa > 0,$$

unde a este polarizarea, n direcţia de propagare şi ω pulsaţia. Câmpul fizic real se obţine luând partea reală. Derivarea dă

$$\ddot{u}_i = -\omega^2 a_i e^{\mathrm{i}(\kappa \langle n, X\rangle - \omega t)}, \qquad u_{k,LJ} = -\kappa^2 n_L n_J a_k e^{\mathrm{i}(\kappa \langle n, X\rangle - \omega t)}.$$

Substituind şi simplificând factorul exponenţial nenul,

$$\rho_0 \omega^2 a_i = \kappa^2 \mathbb{C}_{iJkL} n_J n_L a_k.$$

Definim tensorul acustic

$$Q_{F_0}(n)_{ik} = \mathbb{C}_{iJkL}(F_0) n_J n_L.$$

Cu viteza de fază $c = \omega/\kappa$,

$$\boxed{Q_{F_0}(n)a = \rho_0 c^2 a.}$$

Din simetria majoră a Hessianului,

$$\mathbb{C}_{iJkL} = \mathbb{C}_{kLiJ},$$

rezultă $Q_{F_0}(n)^T = Q_{F_0}(n)$. Problema de propagare este deci o problemă spectrală pentru o matrice simetrică. Mai mult,

$$\langle a, Q_{F_0}(n)a \rangle = \mathbb{C}_{iJkL} a_i n_J a_k n_L = D^2 W(F_0)[a \otimes n, a \otimes n].$$

Prin urmare elipticitatea puternică este echivalentă cu pozitivitatea strictă uniformă a energiei incrementale pe toate modurile $a \otimes n$ şi conduce la viteze de fază reale strict pozitive.

11.7 Interpretarea spectrală a exemplului Saint Venant–Kirchhoff

În Capitolul 10 am verificat pierderea rank-one convexităţii pentru energia Saint Venant–Kirchhoff pe familia

$$F(t) = \operatorname{diag}(t, 1, 1).$$

Calculul de acolo conduce la

$$\frac{d^2}{dt^2} W_{SVK}(F(t)) = \frac{2\mu + \lambda_{\mathrm{L}}}{2}(3t^2 - 1).$$

Pe această familie, direcţia de variaţie este $e_1 \otimes e_1$, iar semnul derivatei a doua calculate în Capitolul 10 este semnul formei Legendre–Hadamard pe această direcţie. Dacă $2\mu + \lambda_{\mathrm{L}} > 0$, ea devine negativă pentru $0 < t < 1/\sqrt{3}$, ceea ce arată pierderea elipticităţii pe familia considerată.

Pragul $1/\sqrt{3}$ aparţine acestui test unidirecţional. Criteriile spectrale din secţiunile precedente verifică simultan toate direcţiile de rang unu şi pot detecta pierderea elipticităţii pe o altă direcţie. Exemplul leagă astfel calculul pe familia unidirecţională de criteriul spectral, care verifică simultan toate direcţiile de rang unu.

11.8 Exemplu: energia neo-Hooke compresibilă

Considerăm

$$W(F) = \frac{\mu}{2}(\|F\|^2 - 3) - \mu \log J + \frac{\lambda_{\mathrm{L}}}{2}(\log J)^2, \qquad J = \det F.$$

Pentru o variaţie de rang unu $H = a \otimes b$,

$$D^2\left(\frac{\mu}{2}\|F\|^2\right)[H,H] = \mu \|a\|^2 \|b\|^2 .$$

Deoarece $D \log J[H] = \langle F^{-T}, H\rangle = \langle b, F^{-1}a\rangle$ şi determinantul este afin pe linii de rang unu,

$$D^2(-\mu \log J)[H,H] = \mu(\langle b, F^{-1}a\rangle)^2.$$

Pentru termenul volumetric,

$$D^2\left(\frac{\lambda}{2}(\log J)^2\right)[H,H] = \lambda_{\mathrm{L}}(1 - \log J)(\langle b, F^{-1}a\rangle)^2.$$

Prin urmare

$$D^2W(F)[H,H] = \mu \|a\|^2 \|b\|^2 + \Big[\mu + \lambda_{\mathrm{L}}(1 - \log J)\Big](\langle b, F^{-1}a\rangle)^2.$$

Punem

$$c(F) := \mu + \lambda_{\mathrm{L}}(1 - \log J), \qquad \lambda_{\min}(F) := \min_i \lambda_i(F).$$

Pentru $a, b \neq 0$,

$$\frac{|\langle b, F^{-1}a\rangle|^2}{\|a\|^2 \|b\|^2} \leq \left\|F^{-1}\right\|_{\mathrm{op}}^2 = \frac{1}{\lambda_{\min}(F)^2},$$

şi egalitatea poate fi atinsă alegând a, b pe direcţiile singulare corespunzătoare lui $\lambda_{\min}$. Dacă $c(F) \geq 0$, termenul suplimentar este nenegativ şi strong ellipticity cere numai $\mu > 0$. Dacă $c(F) < 0$, cazul cel mai nefavorabil este cel de egalitate de mai sus. Prin urmare condiţia necesară şi suficientă pentru strong ellipticity este

$$\boxed{\mu > 0, \qquad \mu + \frac{\min\{c(F), 0\}}{\lambda_{\min}(F)^2} > 0.}$$

Echivalent, când $c(F) < 0$, trebuie verificat $\mu + c(F)/\lambda_{\min}(F)^2 > 0$. Astfel proprietatea depinde explicit de compresia volumetrică şi de cea mai mică întindere principală.

11.9 Energie separabilă de tip Valanis–Landel

În dimensiune generală n considerăm

$$W(F) = \sum_{i=1}^{n} \phi(\lambda_i).$$

În particular, pentru criteriul Knowles–Sternberg plan vom lua $n = 2$, iar pentru exemplele tridimensionale $n = 3$. Atunci

$$g_i = \phi'(\lambda_i), \qquad g_{ii} = \phi''(\lambda_i), \qquad g_{ij} = 0 \quad (i \neq j).$$

Convexitatea separată cere $\phi'' \geq 0$. Baker–Ericksen devine

$$\frac{\lambda_i \phi'(\lambda_i) - \lambda_j \phi'(\lambda_j)}{\lambda_i - \lambda_j} \geq 0,$$

ceea ce este echivalent cu faptul că funcţia

$$s \mapsto s\phi'(s)$$

este nedescrescătoare pe $(0, \infty)$. În 2D, ultimele condiţii Knowles–Sternberg devin

$$\sqrt{\phi''(\lambda_1)\phi''(\lambda_2)} + \frac{\phi'(\lambda_1) - \phi'(\lambda_2)}{\lambda_1 - \lambda_2} \geq 0,$$

$$\sqrt{\phi''(\lambda_1)\phi''(\lambda_2)} + \frac{\phi'(\lambda_1) + \phi'(\lambda_2)}{\lambda_1 + \lambda_2} \geq 0.$$

Aceste formule reduc problema matricială la inegalităţi unidimensionale pentru ϕ.

11.10 De ce rank-one convexitatea nu garantează existenţa

Rank-one convexitatea controlează energia numai pe linii matriciale $F + t\, a \otimes b$. Într-o problemă de minimizare integrală, un şir de gradiente poate oscila în mai multe direcţii, iar acest control nu este suficient pentru semicontinuitatea necesară metodei directe. Capitolul următor introduce quasiconvexitatea şi policonvexitatea, precum şi rolul minorilor gradientului. Vom preciza acolo implicaţiile dintre aceste noţiuni şi motivul pentru care rank-one convexitatea este, în general, o condiţie necesară, nu o teoremă de existenţă.

11.11 Probleme pentru seminar

1. Pentru $g(\lambda_1, \lambda_2) = \lambda_1^p + \lambda_2^p$, $p \geq 1$, verificaţi toate cele patru inegalităţi Knowles–Sternberg şi comparaţi calculul cu faptul că $F \mapsto \|F\|_p^p$ este convex pentru norma Schatten corespunzătoare.

2. Pentru matricea simetrică
$$M = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix},$$
arătaţi că M este copozitivă, dar nu pozitiv semidefinită. Explicaţi de ce acest exemplu clarifică diferenţa dintre criteriul copozitiv şi criteriul spectral obişnuit.

3. Pentru energia Saint Venant–Kirchhoff, restricţionată la $F = \operatorname{diag}(t, 1)$, folosiţi criteriul Knowles–Sternberg pentru a determina, în cazul $\lambda_{\mathrm{L}} = \mu$, pragul la care se pierde elipticitatea şi comparaţi-l cu $1/\sqrt{3}$.

4. Calculaţi condiţia Legendre–Hadamard pentru energia elastică liniară şi identificaţi condiţiile pe constantele Lamé.

5. Pentru o energie Valanis–Landel în 2D, $g(\lambda_1, \lambda_2) = \phi(\lambda_1) + \phi(\lambda_2)$, rescrieţi toate condiţiile Knowles–Sternberg numai în termeni de ϕ', ϕ''.

6. În cazul incompresibil, arătaţi că adăugarea la g a termenului $c \log(\lambda_1\lambda_2\lambda_3)$ nu modifică energia pe $SL(3)$ şi discutaţi efectul asupra derivatelor spectrale care apar în criteriul restricţionat.

11.12 Exerciţii rezolvate

Problema 11.12.1 (reprezentarea în valori singulare)**.** Pentru o energie obiectivă şi izotropă W, explicaţi de ce putem scrie

$$W(F) = g(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$$

cu g simetrică la permutări.

Rezolvare. Din descompunerea polară $F = RU$ şi obiectivitate,

$$W(F) = W(RU) = W(U).$$

Diagonalizăm $U = QDQ^T$, cu $D = \operatorname{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ şi $Q \in SO(3)$ după ajustarea semnelor vectorilor proprii dacă este necesar. Izotropia dă

$$W(U) = W(QDQ^T) = W(D).$$

Prin urmare W depinde numai de valorile singulare. Dacă P este o permutare a axelor, argumentul cu o matrice diagonală de semne S astfel încât $PS \in SO(3)$ arată că PDP^T are aceeaşi energie ca D. Rezultă că

$$g(\lambda_{\pi(1)}, \lambda_{\pi(2)}, \lambda_{\pi(3)}) = g(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$$

pentru orice permutare π; deci g este simetrică.

Problema 11.12.2 (copozitivitate fără pozitivitate semidefinită)**.** Consideraţi

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Arătaţi că M este copozitivă, deşi nu este pozitiv semidefinită.

Rezolvare. Pentru $z = (x, y)$ cu $x, y \geq 0$,

$$z^T M z = x^2 + 4xy + y^2 \geq 0,$$

deci M este copozitivă. Pe de altă parte, vectorul $v = (1, -1)$ dă

$$v^T M v = 1 - 4 + 1 = -2 < 0,$$

aşadar M nu este pozitiv semidefinită. Echivalent, valorile proprii sunt 3 şi -1. Exemplul arată concret de ce criteriile spectrale de rank-one convexitate conduc la copozitivitate: forma trebuie controlată numai pe un con de amplitudini admisibile, nu pe întregul spaţiu.

Problema 11.12.3 (limita Baker–Ericksen pe diagonala spectrală)**.** Fie $g \in C^2((0,\infty)^2)$ simetrică. Calculaţi limita

$$\lim_{\lambda_2 \to \lambda_1 = \lambda} \frac{\lambda_1 g_1 - \lambda_2 g_2}{\lambda_1 - \lambda_2}.$$

Rezolvare. Fixăm $\lambda_1 = \lambda$ şi considerăm funcţia

$$N(t) = \lambda g_1(\lambda, t) - t g_2(\lambda, t).$$

Prin simetria lui g, la $t = \lambda$ avem $g_1(\lambda, \lambda) = g_2(\lambda, \lambda)$, deci $N(\lambda) = 0$. Raportul cerut este

$$\frac{N(\lambda_2)}{\lambda - \lambda_2}.$$

Aplicăm regula lui l'Hospital:

$$\lim_{t \to \lambda} \frac{N(t)}{\lambda - t} = -N'(\lambda).$$

Dar

$$N'(t) = \lambda g_{12}(\lambda, t) - g_2(\lambda, t) - t g_{22}(\lambda, t).$$

Pe diagonală, simetria dă $g_{22} = g_{11}$ şi $g_2 = g_1$, astfel

$$-N'(\lambda) = \lambda(g_{11} - g_{12}) + g_1.$$

Prin urmare

$$\boxed{\lim_{\lambda_2 \to \lambda} \frac{\lambda g_1 - \lambda_2 g_2}{\lambda - \lambda_2} = \lambda(g_{11} - g_{12}) + g_1.}$$

Împărţind prin factorul pozitiv λ se recuperează forma uzuală $g_{11} - g_{12} + g_1/\lambda \geq 0$.

Problema 11.12.4 (verificarea Baker–Ericksen pentru o energie de putere)**.** Fie $g(\lambda_1, \lambda_2) = \lambda_1^p + \lambda_2^p$, $p \geq 1$. Verificaţi inegalitatea Baker–Ericksen.

Rezolvare. Avem

$$g_i = p \lambda_i^{p-1}.$$

Atunci

$$\lambda_i g_i = p \lambda_i^p.$$

Deci raportul BE este

$$p \frac{\lambda_i^p - \lambda_j^p}{\lambda_i - \lambda_j}.$$

Funcţia $h(s) = ps^p$ este strict crescătoare pe $(0, \infty)$ pentru orice $p > 0$. Prin urmare condiţia Baker–Ericksen are loc deja pentru orice $p > 0$. Ipoteza $p \geq 1$ devine relevantă separat, pentru convexitatea $s \mapsto s^p$ şi pentru condiţiile de convexitate separată.

Problema 11.12.5 (tensorul acustic pentru neo-Hooke într-o dilatare sferică)**.** Pentru energia neo-Hooke compresibilă din secţiunea anterioară şi starea $F = \alpha I$, $\alpha > 0$, calculaţi forma Legendre–Hadamard şi condiţia de strong ellipticity.

Rezolvare. Avem $J = \alpha^3$, $F^{-1} = \alpha^{-1} I$ şi

$$c(F) = \mu + \lambda_{\mathrm{L}}(1 - \log J) = \mu + \lambda_{\mathrm{L}}(1 - 3\log \alpha).$$

Formula deja dedusă în capitol este

$$D^2 W(F)[a \otimes b, a \otimes b] = \mu \, \|a\|^2 \, \|b\|^2 + c(F)(\langle b, F^{-1} a \rangle)^2.$$

Cum $\langle b, F^{-1} a \rangle = \alpha^{-1} \langle a, b \rangle$,

$$D^2 W(F)[a \otimes b, a \otimes b] = \mu \, \|a\|^2 \, \|b\|^2 + \frac{c(F)}{\alpha^2} (\langle a, b \rangle)^2.$$

Pentru $c(F) \geq 0$, minimul în unghiul dintre a, b apare la $a \perp b$ şi este controlat de μ. Pentru $c(F) < 0$, minimul apare la $a \parallel b$. Prin urmare strong ellipticity este echivalentă cu

$$\boxed{\mu > 0, \qquad \mu + \frac{\min\{c(F), 0\}}{\alpha^2} > 0.}$$

Exerciţiul arată explicit cum starea de deformare influenţează tensorul tangent chiar pentru un material izotrop.

Problema 11.12.6 (perturbarea unei valori proprii simple)**.** Fie $C(t)$ simetric şi $C(0) q_i = c_i q_i$, cu $\|q_i\| = 1$ şi c_i simplă. Demonstraţi

$$c_i'(0) = \langle q_i, C'(0) q_i \rangle.$$

Rezolvare. Derivăm

$$C(t) q_i(t) = c_i(t) q_i(t)$$

la $t = 0$:

$$C' q_i + C q_i' = c_i' q_i + c_i q_i'.$$

Înmulţim scalar cu q_i. Cum C este simetric şi $C q_i = c_i q_i$,

$$\langle q_i, C q_i' \rangle = c_i \langle q_i, q_i' \rangle.$$

Aceşti termeni se anulează din cele două părţi, iar $\|q_i\| = 1$ dă $\langle q_i, q_i \rangle = 1$. Rămâne

$$c_i' = \langle q_i, C' q_i \rangle.$$

Problema 11.12.7 (forfecare spectrală în 2D)**.** Fie $F = \mathrm{diag}(\lambda_1, \lambda_2)$ şi $H = e_1 \otimes e_2$. Pentru $F(t) = F + tH$, calculaţi $C'(0)$.

Rezolvare. Avem

$$C(t) = F(t)^T F(t).$$

Derivând,

$$C'(0) = H^T F + F^T H.$$

Cum

$$F = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}, \qquad H = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

obţinem

$$H^T F = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \lambda_1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad F^T H = \begin{pmatrix} 0 & \lambda_1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

deci

$$\boxed{C'(0) = \begin{pmatrix} 0 & \lambda_1 \\ \lambda_1 & 0 \end{pmatrix}.}$$

Problema 11.12.8 (apariţia condiţiei Baker–Ericksen)**.** În situaţia exerciţiului precedent, explicaţi de ce calculul celei de-a doua derivate a lui $W(F(t)) = g(\lambda_1(t), \lambda_2(t))$ conduce la termenul

$$\frac{\lambda_1 g_1 - \lambda_2 g_2}{\lambda_1^2 - \lambda_2^2}.$$

Rezolvare. Pentru forfecarea aleasă, primele derivate ale valorilor proprii ale lui C sunt zero deoarece diagonala lui $C'(0)$ este zero. Aşadar prima variaţie a întinderilor principale este nulă. A doua variaţie provine din amestecul vectorilor proprii şi are numitorul diferenţei valorilor proprii ale lui C, adică $\lambda_1^2 - \lambda_2^2$. După trecerea de la $c_i = \lambda_i^2$ la $\lambda_i = \sqrt{c_i}$ şi aplicarea regulii lanţului, coeficientul relevant se reduce la

$$\frac{\lambda_1 g_1 - \lambda_2 g_2}{\lambda_1^2 - \lambda_2^2}.$$

Cum $\lambda_1 + \lambda_2 > 0$, semnul este acelaşi cu al raportului Baker–Ericksen

$$\frac{\lambda_1 g_1 - \lambda_2 g_2}{\lambda_1 - \lambda_2}.$$

Problema 11.12.9 (criteriul Knowles–Sternberg în 2D: utilizare)**.** Presupuneţi că $g \in C^2((0,\infty)^2)$ este simetrică. Enumeraţi tipurile de condiţii care trebuie verificate pentru rank-one convexitate în criteriul 2D prezentat în capitol.

Rezolvare. Criteriul se organizează în patru ingrediente: (i) convexitatea separată,

$$g_{11} \geq 0, \qquad g_{22} \geq 0;$$

(ii) inegalitatea Baker–Ericksen; (iii) o inegalitate care conţine

$$\sqrt{g_{11}g_{22}} + g_{12}$$

şi un raport de diferenţe al derivatelor prime; (iv) o a doua inegalitate în care apare

$$\sqrt{g_{11}g_{22}} - g_{12}$$

şi combinaţia corespunzătoare cu $\lambda_1 + \lambda_2$. Importanţa criteriului este că reduce o condiţie matricială asupra lui D^2W la inegalităţi scalare în variabilele spectrale.

Problema 11.12.10 (energie Valanis–Landel)**.** Consideraţi în 2D

$$g(\lambda_1, \lambda_2) = f(\lambda_1) + f(\lambda_2).$$

Arătaţi cum se simplifică primele două familii de condiţii spectrale.

Rezolvare. Avem

$$g_{11} = f''(\lambda_1), \qquad g_{22} = f''(\lambda_2), \qquad g_{12} = 0.$$

Convexitatea separată devine pur şi simplu

$$f''(s) \geq 0 \quad \forall s > 0.$$

Baker–Ericksen devine

$$\frac{\lambda_1 f'(\lambda_1) - \lambda_2 f'(\lambda_2)}{\lambda_1 - \lambda_2} \geq 0.$$

Aşadar funcţia scalară $s \mapsto sf'(s)$ trebuie să fie monotonă nedescrescătoare. Aceste două verificări reduc considerabil analiza înainte de a aborda inegalităţile cuplate rămase.

11.13 Exerciţii propuse suplimentare

Nivelul A

11.A.1 *(determinantul pe o linie de rang unu)* Fie

$$F = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad a = (1,0,1)^T.$$

(i) Calculaţi F^{-1} şi $F^{-1}a$. (ii) Pentru $b = e_1$, calculaţi $\det(F + ta \otimes b)$ şi determinaţi valoarea lui t pentru care determinantul se anulează. (iii) Pentru $b = e_2$, arătaţi că determinantul este constant.
Răspuns.

$$F^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad F^{-1}a = (1,0,1)^T, \qquad \det F = 2.$$

Pentru $b = e_1$, $\langle b, F^{-1}a\rangle = 1$, deci

$$\det(F + ta \otimes e_1) = 2(1+t),$$

care se anulează pentru $t = -1$. Pentru $b = e_2$, produsul este zero şi determinantul rămâne egal cu 2. Aceasta este o direcţie tangentă la mulţimea de nivel a determinantului.

11.A.2 *(Baker–Ericksen pentru o energie Valanis–Landel)* Fie

$$W(F) = \sum_{i=1}^{3} \varphi(\lambda_i), \qquad \varphi(s) = s - \log s, \quad s > 0.$$

(i) Calculaţi g_i, g_{ii} şi g_{ij} pentru $i \neq j$. (ii) Verificaţi convexitatea separată. (iii) Calculaţi raportul Baker–Ericksen. (iv) Scrieţi tensiunile principale Cauchy.
Răspuns.

$$g_i = 1 - \frac{1}{\lambda_i}, \qquad g_{ii} = \frac{1}{\lambda_i^2} > 0, \qquad g_{ij} = 0 \quad (i \neq j).$$

Cum $\lambda_i g_i = \lambda_i - 1$,

$$\frac{\lambda_i g_i - \lambda_j g_j}{\lambda_i - \lambda_j} = 1 > 0.$$

Prin urmare condiţia Baker–Ericksen este strict satisfăcută. Tensiunile principale sunt

$$\sigma_i = \frac{\lambda_i g_i}{J} = \frac{\lambda_i - 1}{J}, \qquad J = \lambda_1\lambda_2\lambda_3.$$

11.A.3 *(tensor acustic în starea nedeformată)* Fie

$$W(F) = \frac{\mu}{2}\,\|F\|^2 + \frac{\lambda_L}{2}(\det F - 1)^2, \qquad \mu > 0, \quad \lambda_L > 0.$$

(i) Calculaţi $D^2W(I)[H,H]$. (ii) Pentru $H = a \otimes n$, $\|n\| = 1$, determinaţi $Q_I(n)$. (iii) Determinaţi spectrul şi vitezele incrementale.
Răspuns.

$$D^2W(I)[H,H] = \mu \|H\|^2 + \lambda_L (\operatorname{tr} H)^2,$$

$$Q_I(n) = \mu I + \lambda_L n \otimes n.$$

Valorile proprii sunt $\mu + \lambda_L$ pe direcţia n şi μ, de multiplicitate doi, pe $n^\perp$. Vitezele sunt

$$c_L = \sqrt{\frac{\mu + \lambda_L}{\rho}}, \qquad c_T = \sqrt{\frac{\mu}{\rho}}.$$

Nivelul B

11.B.1 *(Baker–Ericksen pentru Saint Venant–Kirchhoff)* Fie

$$W_{SVK}(F) = \mu \|E\|^2 + \frac{\lambda_L}{2} (\operatorname{tr} E)^2, \qquad E = \frac{1}{2}(F^T F - I), \quad \mu, \lambda_L > 0.$$

(i) Scrieţi reprezentarea spectrală şi calculaţi g_i. (ii) Deduceţi raportul Baker–Ericksen pentru $\lambda_1 \neq \lambda_2$. (iii) Pentru $\mu = \lambda_L = 1$, $\lambda_3 = 1$, determinaţi regiunea de violare.
Răspuns. Cu

$$S = \sum_{i=1}^{3} (\lambda_i^2 - 1),$$

avem

$$g(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = \frac{\mu}{4} \sum_i (\lambda_i^2 - 1)^2 + \frac{\lambda_L}{8} S^2,$$

$$g_i = \mu \lambda_i (\lambda_i^2 - 1) + \frac{\lambda_L}{2} S \lambda_i.$$

Prin urmare

$$\frac{\lambda_1 g_1 - \lambda_2 g_2}{\lambda_1 - \lambda_2} = (\lambda_1 + \lambda_2) \left[\mu(\lambda_1^2 + \lambda_2^2 - 1) + \frac{\lambda_L}{2} S \right].$$

Pentru $\mu = \lambda_L = 1$, $\lambda_3 = 1$, condiţia este violată exact când

$$\lambda_1^2 + \lambda_2^2 < \frac{4}{3}.$$

11.B.2 *(criteriul Knowles–Sternberg complet în 2D)* Fie

$$g(\lambda_1, \lambda_2) = \varphi(\lambda_1) + \varphi(\lambda_2), \qquad \varphi(s) = s - \log s.$$

Verificaţi condiţiile criteriului Knowles–Sternberg pe $(0, \infty)^2$.
Răspuns.

$$g_{11} = \lambda_1^{-2} > 0, \qquad g_{22} = \lambda_2^{-2} > 0, \qquad g_{12} = 0,$$

iar raportul Baker–Ericksen este 1. Cele două expresii mixte devin

$$\sqrt{g_{11} g_{22}} + g_{12} + \frac{g_1 - g_2}{\lambda_1 - \lambda_2} = \frac{2}{\lambda_1 \lambda_2} > 0,$$

$$\sqrt{g_{11}g_{22}} - g_{12} + \frac{g_1 + g_2}{\lambda_1 + \lambda_2} = \frac{2}{\lambda_1 + \lambda_2} > 0.$$

Toate condiţiile sunt strict satisfăcute.

11.B.3 *(tensor acustic neo-Hookean într-o stare deformată)* Fie

$$W(F) = \frac{\mu}{2}(\|F\|^2 - 3) - \mu \log J + \frac{\lambda_L}{2}(\log J)^2, \qquad J = \det F,$$

şi $F_0 = \mathrm{diag}(2, 1, 1)$, cu $\mu = \lambda_L = 1$. (i) Arătaţi că

$$Q_{F_0}(n) = \mu \|n\|^2 I + \kappa m \otimes m, \qquad m = F_0^{-T} n, \qquad \kappa = \mu + \lambda_L(1 - \log J).$$

(ii) Calculaţi spectrul pentru $n = e_1$ şi $n = e_2$. (iii) Discutaţi pozitivitatea.
Răspuns. Aici $J = 2$ şi

$$\kappa = 2 - \log 2 \approx 1.306853.$$

Pentru $n = e_1$, $m = e_1/2$, deci valorile proprii sunt

$$1 + \frac{\kappa}{4} \approx 1.326713, \qquad 1, \qquad 1.$$

Pentru $n = e_2$, $m = e_2$, deci valorile sunt

$$1 + \kappa \approx 2.306853, \qquad 1, \qquad 1.$$

O condiţie suficientă pentru pozitivitate pentru orice $n \neq 0$ este $\kappa \geq 0$.

Nivelul C

11.C.1 *(Saint Venant–Kirchhoff: două praguri de pierdere a elipticităţii)* Pentru W_{SVK} din 11.B.1 consideraţi calea $\lambda = (t, 1, 1)$, $t > 0$. (a) Determinaţi pragul t_{cs} la care se pierde convexitatea separată în λ_1. (b) Determinaţi pragul t_{BE} pentru condiţia Baker–Ericksen. (c) Comparaţi pragurile.
Răspuns.

$$g_{11}(t, 1, 1) = \frac{2\mu + \lambda_L}{2}(3t^2 - 1),$$

deci

$$t_{cs} = \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

Condiţia Baker–Ericksen se anulează pentru

$$t_{BE} = \sqrt{\frac{\lambda_L}{2\mu + \lambda_L}}.$$

Prin urmare

$$t_{BE} > t_{cs} \quad \Longleftrightarrow \quad \lambda_L > \mu.$$

11.C.2 *(energia* $\operatorname{tr} U - \log\det F$*)* Fie

$$W(F) = \sum_{i=1}^{3} (\lambda_i - \log \lambda_i), \qquad F \in GL^+(3).$$

(a) Arătaţi că $W = \operatorname{tr} U - \log\det F$ şi că este obiectivă şi izotropă. (b) Arătaţi $W(F) \geq 3$, cu egalitate exact pe $SO(3)$. (c) Verificaţi bariera la determinant nul şi condiţiile spectrale discutate anterior.
Răspuns. Deoarece valorile proprii ale lui U sunt λ_i,

$$\operatorname{tr} U = \sum_i \lambda_i, \qquad \det U = \det F = \prod_i \lambda_i.$$

Funcţia scalară $s - \log s$ are minimul 1 la $s = 1$, deci

$$W(F) \geq 3,$$

cu egalitate exact când toate valorile singulare sunt 1, adică $F \in SO(3)$. Dacă $\det F \to 0^+$ cu $\|F\|$ mărginită, atunci $-\log\det F \to +\infty$. Mai mult,

$$g_{ii} = \lambda_i^{-2} > 0,$$

şi condiţia Baker–Ericksen este strict satisfăcută; în 2D criteriul Knowles–Sternberg este complet satisfăcut.

11.C.3 *(cazul incompresibil: direcţii admisibile şi o linie în* $SL(3)$*)* Fie

$$F = \operatorname{diag}(2, 1, 1/2) \in SL(3).$$

(a) Scrieţi condiţia $\langle b, F^{-1}a\rangle = 0$. (b) Verificaţi că $a = e_1$, $b = e_2$ este admisibilă şi studiaţi $F(t) = F + t e_1 \otimes e_2$. (c) Pentru

$$W(F) = \frac{\mu}{2}(\|F\|^2 - 3), \qquad F \in SL(3),$$

verificaţi convexitatea restricţiei la această linie şi condiţia LH incompresibilă.
Răspuns. Cum

$$F^{-1} = \operatorname{diag}(1/2, 1, 2),$$

condiţia este

$$\frac{1}{2}a_1 b_1 + a_2 b_2 + 2a_3 b_3 = 0.$$

Pentru $a = e_1$, $b = e_2$, condiţia este verificată, iar

$$\det F(t) = 1 \qquad \text{pentru orice } t.$$

Blocul $(1,2)$ al lui $C(t) = F(t)^T F(t)$ este

$$\begin{pmatrix} 4 & 2t \\ 2t & t^2+1 \end{pmatrix},$$

cu determinant 4, iar $\lambda_3 = 1/2$, deci produsul celor trei valori singulare rămâne 1. Pentru energia neo-Hookeană incompresibilă,

$$W(F(t)) = \frac{\mu}{2}\left(\frac{9}{4} + t^2\right), \qquad \frac{d^2}{dt^2} W(F(t)) = \mu > 0.$$

Mai general,

$$D^2 W(F)[a \otimes b, a \otimes b] = \mu \|a\|^2 \|b\|^2 > 0$$

pentru $a, b \neq 0$, deci LH este satisfăcută pe toate direcţiile admisibile.

Capitolul 12

Quasiconvexitate, policonvexitate şi minorii gradientului

Surse şi orientare. Noţiunile de quasiconvexitate şi policonvexitate şi ierarhia lor sunt prezentate după Ball [2] şi Dacorogna [5].

12.1 Quasiconvexitatea şi limitele rank-one convexităţii

Rank-one convexitatea controlează energia numai pe segmente matriciale $F + ta \otimes b$. Pentru minimizarea funcţionalelor integrale, un şir de gradiente poate oscila simultan în mai multe direcţii, iar controlul pe linii de rang unu nu este în general suficient pentru semicontinuitatea slabă. Morrey a introdus quasiconvexitatea pentru a surprinde exact această problemă variaţională.

Înainte de definiţie fixăm clasa de teste astfel încât să nu folosim un spaţiu Sobolev înainte de a-l introduce. Fie $D \subset \mathbb{R}^3$ un domeniu mărginit cu frontieră Lipschitz.

Definiţia 12.1.1 (quasiconvexitate)**.** Fie $W : \mathbb{R}^{3\times 3} \to \mathbb{R}$ Borel-măsurabilă şi local mărginită. Spunem că W este quasiconvexă dacă pentru orice $F \in \mathbb{R}^{3\times 3}$, orice asemenea domeniu D şi orice $\vartheta \in C_c^\infty(D;\mathbb{R}^3)$,

$$W(F)\,\mathcal{L}^3(D) \le \int_D W(F + \nabla\vartheta(x))\,dx. \tag{12.1}$$

Ipotezele de măsurabilitate şi mărginire locală asigură că integrala este bine definită pentru variaţiile netede folosite aici. Pentru energii elastice cu valori extinse, de exemplu $W = +\infty$ când $\det F \le 0$, definiţia se formulează pe domeniul efectiv al energiei şi se admit numai variaţiile pentru care membrul drept este bine definit. Pentru integranzi continui cu ipoteze standard de creştere, aceeaşi condiţie poate fi formulată cu teste din $W_0^{1,\infty}$ prin aproximare; nu avem nevoie de această extensie în demonstraţiile elementare din capitol.

12.2 Lagrangieni nuli şi identităţile de medie ale minorilor

Rolul Lagrangienilor nuli este să arate că, pentru o variaţie cu urmă zero, nu numai media gradientului, ci şi mediile minorilor sunt cele ale matricei medii. Acest fapt va fi combinat cu Jensen în demonstraţia policonvexitate $\Rightarrow$ quasiconvexitate.

Definiţia 12.2.1 (Lagrangian nul, la nivelul de regularitate folosit aici)**.** Un integrand $L : \mathbb{R}^{3\times 3} \to \mathbb{R}$ este numit Lagrangian nul dacă, pentru aplicaţii suficient de netede, valoarea lui

$$\int_D L(\nabla u)\,dx$$

depinde numai de urma lui u pe ∂D. Minorii gradientului sunt exemplele folosite aici.

Observaţia 12.2.2 (caracterizarea clasică). Pentru integranzi suficient de regulaţi care depind numai de gradient, rezultatul clasic Ball–Currie–Olver afirmă că Lagrangienii nuli de ordin întâi sunt exact combinaţiile afine ale minorilor lui F. În dimensiunea trei, acestea sunt combinaţii liniare ale lui 1, ale componentelor lui F, ale componentelor lui $\operatorname{Cof} F$ şi ale lui $\det F$. Folosim numai direcţia elementară de care avem nevoie: fiecare dintre aceşti minori are integrală determinată de datele la frontieră. Caracterizarea completă este menţionată ca rezultat admis; vezi [5].

12.2.1 Identitatea lui Piola

Lema 12.2.3 (identitatea lui Piola). *Dacă $u \in C^2(D;\mathbb{R}^3)$, atunci*

$$\operatorname{Div}(\operatorname{Cof}\nabla u) = 0, \qquad \partial_J(\operatorname{Cof}\nabla u)_{iJ} = 0.$$

Demonstraţie. Aceasta este identitatea Piola demonstrată în Propoziţia 4.4.1, aplicată aici aplicaţiei u. Consecinţa folosită în acest capitol este variaţională: componentele cofactorului se comportă ca Lagrangieni nuli. □

12.2.2 Determinantul ca divergenţă în trei dimensiuni

Folosim identitatea algebrică

$$\langle \operatorname{Cof} F, F\rangle = 3\det F,$$

care rezultă din $F^T \operatorname{Cof} F = (\det F)I$ prin luarea urmei. Aplicând regula produsului şi Lema 12.2.3,

$$\begin{aligned}\operatorname{div}\Big((\operatorname{Cof}\nabla u)^T u\Big) &= \partial_J\Big((\operatorname{Cof}\nabla u)_{iJ}u_i\Big)\\ &= \underbrace{\partial_J(\operatorname{Cof}\nabla u)_{iJ}}_{0}\,u_i + (\operatorname{Cof}\nabla u)_{iJ}u_{i,J}\\ &= \langle \operatorname{Cof}\nabla u, \nabla u\rangle = 3\det\nabla u.\end{aligned}$$

Prin urmare

$$\boxed{\det\nabla u = \frac{1}{3}\operatorname{div}\Big((\operatorname{Cof}\nabla u)^T u\Big).} \tag{12.2}$$

12.2.3 Determinantul în două dimensiuni

Pentru $u = (u_1, u_2)$,

$$\det\nabla u = u_{1,1}u_{2,2} - u_{1,2}u_{2,1}.$$

Regula produsului dă

$$\begin{aligned}\partial_1(u_1u_{2,2}) - \partial_2(u_1u_{2,1}) &= u_{1,1}u_{2,2} + u_1u_{2,21} - u_{1,2}u_{2,1} - u_1u_{2,12}\\ &= \det\nabla u,\end{aligned}$$

fiindcă derivatele mixte coincid, $u_{2,21} = u_{2,12}$. Astfel, dacă $u(x) = Fx + \vartheta(x)$ şi $\vartheta = 0$ pe ∂D,

$$\int_D \det(F + \nabla\vartheta)\, dx = \mathcal{L}^2(D) \det F.$$

Observaţi că măsura este $\mathcal{L}^2(D)$ în problema bidimensională.

În $2D$, cofactorul este liniar în F:

$$\operatorname{Cof} F = \begin{pmatrix} F_{22} & -F_{21} \\ -F_{12} & F_{11} \end{pmatrix}, \qquad \langle \operatorname{Cof} F, F \rangle = 2 \det F.$$

Prin acelaşi calcul de produs, pentru $u \in C^2(D; \mathbb{R}^2)$,

$$\boxed{\det \nabla u = \frac{1}{2} \operatorname{div}\Big((\operatorname{Cof} \nabla u)^T u \Big).}$$

Această formulă este analogul bidimensional exact al relaţiei tridimensionale (12.2).

12.2.4 Componentele cofactorului sunt divergenţe

De exemplu,

$$(\operatorname{Cof} \nabla u)_{11} = u_{2,2} u_{3,3} - u_{2,3} u_{3,2}.$$

Calculăm

$$\begin{aligned} \partial_2(u_2 u_{3,3}) - \partial_3(u_2 u_{3,2}) = {} & u_{2,2} u_{3,3} - u_{2,3} u_{3,2} \\ & + u_2(u_{3,32} - u_{3,23}). \end{aligned}$$

Pentru $u \in C^2$, teorema lui Schwarz dă $u_{3,32} = u_{3,23}$; derivatele mixte nu sunt zero, ci se anulează reciproc în diferenţă. Rezultă

$$(\operatorname{Cof} \nabla u)_{11} = \partial_2(u_2 u_{3,3}) - \partial_3(u_2 u_{3,2}).$$

Celelalte componente se obţin prin permutarea indicilor.

12.2.5 Identităţile de medie

Fie $u(x) = Fx + \vartheta(x)$, cu $\vartheta \in C_c^\infty(D; \mathbb{R}^3)$. Prin integrarea derivatelor totale şi prin formulele precedente,

$$\int_D \nabla u\, dx = \mathcal{L}^3(D)\, F, \qquad \int_D \operatorname{Cof} \nabla u\, dx = \mathcal{L}^3(D) \operatorname{Cof} F, \qquad \int_D \det \nabla u\, dx = \mathcal{L}^3(D) \det F. \tag{12.3}$$

Aceste formule nu spun că minorii sunt egali punctual cu cei ai lui F; ele sunt identităţi integrale determinate de datele la frontieră.

Observaţia 12.2.4 (praguri Sobolev). La regularitate Sobolev, identităţile se obţin prin aproximare. În dimensiunea trei, pentru identitatea cofactorului presupunem $u - Fx \in W_0^{1,p}$ cu

$p \geq 2$, deoarece $\operatorname{Cof} \nabla u$ este pătratic în gradient; pentru determinant, $p \geq 3$ asigură integrabilitatea cubică directă. În Capitolul 13 vom vedea că, dacă avem estimări independente pentru cofactor şi determinant, identificarea limitelor poate fi făcută sub ipoteze mai flexibile.

12.3 Policonvexitatea şi minorii ca variabile independente

În trei dimensiuni notăm

$$\mathcal{M}(F) = (F, \operatorname{Cof} F, \det F).$$

Definiţia 12.3.1 (policonvexitate)**.** O funcţie $W : \mathbb{R}^{3\times 3} \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ este policonvexă dacă există o funcţie convexă

$$G : \mathbb{R}^{3\times 3} \times \mathbb{R}^{3\times 3} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$$

astfel încât

$$W(F) = G(F, \operatorname{Cof} F, \det F).$$

Convexitatea este cerută în variabilele independente (F, H, J) ale lui G, nu în F după substituţia neliniară $H = \operatorname{Cof} F,\ J = \det F$.

12.3.1 Cazul bidimensional

În două dimensiuni nu există cofactori de ordin doi independenţi de gradient: vectorul complet al minorilor este pur şi simplu

$$\mathcal{M}_2(F) = (F, \det F) \in \mathbb{R}^5.$$

Astfel $W : \mathbb{R}^{2\times 2} \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ este policonvexă dacă poate fi scrisă

$$W(F) = G(F, \det F)$$

cu G convexă în cele cinci variabile scalare. Acesta este un model bun pentru a înţelege definiţia tridimensională: în 3D apar în plus cele nouă componente ale cofactorului.

12.3.2 Minorii sunt afini pe linii de rang unu

Fie $H = a \otimes b$. Orice minor al lui $F + tH$ este afin în t. Motivul este multilinearitatea determinantului: un termen de ordin cel puţin doi în t conţine în cel puţin două coloane vectori proporţionali cu a şi se anulează. În particular,

$$\det(F + ta \otimes b) = \det F + t \,\langle \operatorname{Cof} F, a \otimes b \rangle,$$

iar fiecare componentă a cofactorului are aceeaşi proprietate de afinitate.

Propoziţia 12.3.2 (policonvexitate $\Rightarrow$ rank-one convexitate)**.** *Dacă $W(F) = G(\mathcal{M}(F))$ cu G convexă, atunci W este rank-one convexă.*

Demonstraţie. Notăm cu $\mathcal{M}(F)$ vectorul minorilor care apar în reprezentarea policonvexă şi considerăm

$$F_t = F + t\, a \otimes b.$$

Minorii de ordin unu sunt chiar componentele lui F_t, deci depind afin de t. Determinantul de ordin trei este afin de t pe o linie de rang unu, conform calculului din Capitolul 10.

Considerăm acum un minor de ordin doi. Alegerea celor două linii şi a celor două coloane transformă F_t într-o submatrice de forma

$$A + t\, \alpha \otimes \beta,$$

unde $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$, iar $\alpha, \beta \in \mathbb{R}^2$ sunt restricţiile vectorilor a, b la indicii selectaţi. Perturbaţia are rang cel mult unu. Multilinearitatea determinantului arată că termenul de ordin doi în t conţine determinantul unei matrice cu două coloane proporţionale şi este zero. Prin urmare şi fiecare minor de ordin doi este afin în t.

Rezultă că toate componentele lui $\mathcal{M}(F_t)$ depind afin de t. Dacă $W(F) = G(\mathcal{M}(F))$ cu G convexă, atunci compunerea $t \mapsto G(\mathcal{M}(F_t))$ este convexă. Aceasta este rank-one convexitatea lui W. □

12.4 Policonvexitate ⇒ quasiconvexitate: Jensen şi Lagrangienii nuli

Reamintim inegalitatea Jensen în forma folosită. Dacă $G : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ este convexă şi $Z \in L^1(D; \mathbb{R}^N)$, atunci

$$G\left(\frac{1}{\mathcal{L}^3(D)} \int_D Z\, dx\right) \le \frac{1}{\mathcal{L}^3(D)} \int_D G(Z)\, dx.$$

Fie $\vartheta \in C_c^\infty(D; \mathbb{R}^3)$ şi punem

$$Z(x) = \mathcal{M}(F + \nabla\vartheta(x)).$$

Dacă $W = G \circ \mathcal{M}$, Jensen dă

$$\frac{1}{\mathcal{L}^3(D)} \int_D W(F + \nabla\vartheta)\, dx \ge G\left(\frac{1}{\mathcal{L}^3(D)} \int_D Z\, dx\right).$$

Folosim acum identităţile de Lagrangian nul: ele identifică media lui Z cu vectorul minorilor lui F. Din (12.3),

$$\frac{1}{\mathcal{L}^3(D)} \int_D Z\, dx = (F, \operatorname{Cof} F, \det F) = \mathcal{M}(F).$$

Prin urmare

$$\frac{1}{\mathcal{L}^3(D)} \int_D W(F + \nabla\vartheta)\, dx \ge G(\mathcal{M}(F)) = W(F),$$

care este inegalitatea de quasiconvexitate. Jensen nu este consecinţa identităţilor de medie; Jensen vine din convexitatea lui G, iar identităţile de medie permit evaluarea argumentului

lui G după aplicarea lui Jensen.

Trecerea la criterii spectrale. Pentru energii obiective şi izotrope, criteriile policonvexe pot fi exprimate în valorile singulare ale lui F şi ale lui $\operatorname{Cof} F$. Formulăm mai întâi criteriul suficient de tip Ball, apoi corolarul în invarianţii lui U; ambele sunt condiţii suficiente, nu caracterizări necesare.

12.5 Criteriul lui Ball pentru policonvexitatea energiilor izotrope

În trei dimensiuni, valorile singulare ale cofactorului sunt

$$\lambda_2\lambda_3, \qquad \lambda_1\lambda_3, \qquad \lambda_1\lambda_2.$$

Pe baza acestei proprietăţi obţinem următorul criteriu suficient.

Teorema 12.5.1 (criteriu suficient de tip Ball)**.** *Presupunem*

$$W(F) = \Phi(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_2\lambda_3, \lambda_1\lambda_3, \lambda_1\lambda_2, J),$$

unde $J = \lambda_1\lambda_2\lambda_3$. Dacă Φ admite o extensie convexă pe $(0,\infty)^7$, este simetrică separat în primele trei şi în următoarele trei variabile şi este ne-descrescătoare în primele şase variabile, atunci W este policonvexă.

Pentru demonstraţia criteriului folosim rezultatul lui Ball [2]; o prezentare detaliată se găseşte şi în [5]. Ipoteza de monotonie în valorile singulare intervine în teorema de convexitate pentru funcţii spectrale şi nu poate fi dedusă numai din simetria lui Φ.

Rolul ipotezei de monotonie. Chiar în cazul unei singure valori singulare, o funcţie scalară convexă poate pierde convexitatea după compunerea cu modulul dacă este descrescătoare: $\phi(s) = -s$ este afină (deci convexă) pe $(0,\infty)$, dar aplicaţia $x \mapsto \phi(|x|) = -|x|$ nu este convexă pe $\mathbb{R}$. Teorema spectrală folosită în criteriul lui Ball trebuie să controleze această trecere de la valori singulare la matrice; ipoteza de monotonie exclude această pierdere a convexităţii. Exemplul ilustrează numai rolul ipotezei la nivel scalar; nu este o demonstraţie a criteriului matricial.

12.6 Criteriul Steigmann prin invarianţii lui U

Definim

$$i_1 = \operatorname{tr} U = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3,$$

$$i_2 = \operatorname{tr}(\operatorname{Cof} U) = \lambda_1\lambda_2 + \lambda_1\lambda_3 + \lambda_2\lambda_3,$$

$$i_3 = \det U = J.$$

Propoziţia 12.6.1. *Dacă*

$$W(F) = \psi(i_1, i_2, i_3),$$

unde ψ este convexă în cele trei variabile şi ne-descrescătoare în i_1, i_2, atunci W este policonvexă.

Demonstraţie. Definim

$$\Phi(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \eta_1, \eta_2, \eta_3, J) = \psi(\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3, \eta_1 + \eta_2 + \eta_3, J).$$

Aplicaţia care trimite $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \eta_1, \eta_2, \eta_3, J)$ în $(\sum_i \lambda_i, \sum_i \eta_i, J)$ este liniară, deci compunerea ei cu funcţia convexă ψ este convexă; pentru acest pas nu este necesară monotonia. Ipoteza că ψ este ne-descrescătoare în primele două argumente este folosită separat pentru a verifica cerinţa de monotonie din criteriul lui Ball. Astfel Φ este simetrică separat în (λ_i) şi (η_i) şi ne-descrescătoare în aceste variabile. Aplicăm criteriul lui Ball cu

$$(\eta_1, \eta_2, \eta_3) = (\lambda_2\lambda_3, \lambda_1\lambda_3, \lambda_1\lambda_2).$$

□

Observaţia 12.6.2. Condiţia Steigmann este suficientă, nu necesară. De exemplu, $W(F) = \|\operatorname{Cof} F\|^2$ este policonvexă, deoarece poate fi scrisă sub forma $G(F, H, J) = \|H\|^2$ cu $H = \operatorname{Cof} F$, iar G este convexă în argumentele sale. Reprezentarea aceleiaşi energii în (i_1, i_2, i_3) poate să nu fie convexă.

12.7 Exponenţierea şi policonvexitatea

Dacă $W(F) = G(F, \operatorname{Cof} F, \det F)$ este policonvexă şi G este cu valori reale, atunci

$$\widetilde{W}(F) = e^{W(F)}$$

este de asemenea policonvexă. Într-adevăr, exponenţiala este convexă şi crescătoare, iar compunerea unei funcţii convexe cu o funcţie convexă crescătoare rămâne convexă:

$$\widetilde{W}(F) = e^{G(F, \operatorname{Cof} F, \det F)}.$$

Prin urmare se pot construi energii cu creştere mai rapidă fără a pierde policonvexitatea.

12.8 Quasiconvexitatea implică rank-one convexitatea

Pentru demonstraţia constructivă presupunem că W este finită şi continuă local, astfel încât contribuţia stratului de tăiere să poată fi estimată. Construim o variaţie al cărei gradient alternează între două matrice ce diferă printr-o matrice de rang unu; zona interioară şi stratul de lângă frontieră sunt tratate separat.

Fixăm două matrice $F_0, F_1 \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ astfel încât

$$F_1 - F_0 = a \otimes n,$$

cu $a, n \in \mathbb{R}^3$, $n \neq 0$. Pentru $\theta \in (0,1)$ definim matricea medie

$$F_\theta = (1-\theta)F_0 + \theta F_1.$$

Din relaţia de rang unu avem

$$F_0 - F_\theta = -\theta a \otimes n, \qquad F_1 - F_\theta = (1-\theta)a \otimes n.$$

Dorim să construim o variaţie al cărei gradient ia, alternativ, aceste două valori.

Fără pierderea generalităţii normalizăm $\|n\| = 1$. Alegem o funcţie periodică $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de perioadă 1, liniară pe bucăţi, cu derivata

$$h'(s) = \begin{cases} 1-\theta, & 0 < s < \theta, \\ -\theta, & \theta < s < 1, \end{cases}$$

şi extinsă periodic. Media lui h' pe o perioadă este zero:

$$\int_0^1 h'(s)\, ds = \theta(1-\theta) + (1-\theta)(-\theta) = 0,$$

deci putem alege h periodică. Definim, pentru un întreg k mare,

$$\psi_k(x) = \frac{1}{k} a\, h(k\, \langle n, x\rangle).$$

Prin regula lanţului,

$$\nabla\psi_k(x) = a \otimes n\, h'(k\, \langle n, x\rangle).$$

Aşadar, în benzile în care $h' = 1-\theta$,

$$F_\theta + \nabla\psi_k = F_\theta + (1-\theta)a \otimes n = F_1,$$

iar în benzile în care $h' = -\theta$,

$$F_\theta + \nabla\psi_k = F_\theta - \theta a \otimes n = F_0.$$

Proporţia unei perioade în care apare F_1 este θ, iar proporţia în care apare F_0 este $1-\theta$.

Funcţia ψ_k nu are, în general, urmă zero pe frontiera unui domeniu finit. Pentru a o transforma într-o variaţie admisibilă, alegem un cub Q şi o funcţie de tăiere $\eta_k \in C_c^\infty(Q)$ cu

$$0 \leq \eta_k \leq 1,$$

care este egală cu 1 în interiorul cubului, cu excepţia unui strat de grosime $\delta_k \downarrow 0$ de lângă

frontieră. Punem

$$\vartheta_k = \eta_k \psi_k.$$

Atunci $\vartheta_k = 0$ pe ∂Q şi

$$\nabla \vartheta_k = \eta_k \nabla \psi_k + \psi_k \otimes \nabla \eta_k.$$

În regiunea unde $\eta_k = 1$, gradientul este exact $\nabla \psi_k$ şi, prin urmare, $F_\theta + \nabla \vartheta_k$ ia numai valorile F_0, F_1. În stratul de frontieră apare termenul de corecţie. Deoarece h este mărginită,

$$|\psi_k| \leq \frac{C}{k}.$$

Alegând, de exemplu, $\delta_k = k^{-1/2}$, putem construi η_k astfel încât

$$\|\nabla \eta_k\| \leq C \delta_k^{-1} = C k^{1/2}.$$

Prin urmare

$$\|\psi_k \otimes \nabla \eta_k\| \leq C k^{-1/2} \to 0,$$

iar măsura stratului de frontieră tinde la zero.

Aplicăm quasiconvexitatea în F_θ:

$$W(F_\theta) \mathcal{L}^3(Q) \leq \int_Q W(F_\theta + \nabla \vartheta_k)\, dx.$$

În interiorul principal al cubului, integrala este suma contribuţiilor celor două faze. Cum fracţiile de volum tind la $1 - \theta$, respectiv θ, toate matricile care apar în strat rămân într-o mulţime compactă independentă de k: termenul $\eta_k \nabla \psi_k$ este uniform mărginit, iar $\psi_k \otimes \nabla \eta_k \to 0$ uniform. Continuitatea locală a lui W implică o bornă uniformă pentru integrand pe strat, în timp ce măsura stratului tinde la zero. Contribuţia stratului dispare şi obţinem

$$W(F_\theta) \mathcal{L}^3(Q) \leq \mathcal{L}^3(Q) \Big[(1-\theta) W(F_0) + \theta W(F_1) \Big].$$

Împărţind prin $\mathcal{L}^3(Q) > 0$,

$$\boxed{W(F_\theta) \leq (1-\theta) W(F_0) + \theta W(F_1).}$$

Aceasta este exact convexitatea lui W pe segmentul de rang unu dintre F_0 şi F_1. Prin urmare, quasiconvexitatea implică rank-one convexitatea.

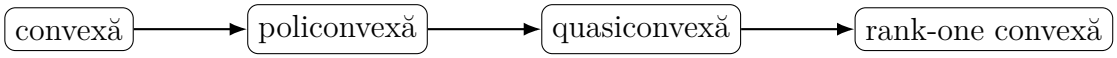
12.9 Ierarhia noţiunilor de convexitate

În cadrul definiţiilor şi al regularităţilor precizate mai sus,

$$\boxed{\text{convexitate} \Longrightarrow \text{policonvexitate} \Longrightarrow \text{quasiconvexitate} \Longrightarrow \text{rank-one convexitate.}}$$

Implicaţiile inverse nu trebuie tratate ca echivalenţe. În particular, rank-one convexitatea nu implică quasiconvexitatea în general: Šverák a construit un contraexemplu pentru integranzi

matriceali în dimensiuni vectoriale suficient de mari [22]. În particular, problema clasică a lui Morrey dacă orice integrand rank-one convex $W : \mathbb{R}^{2\times 2} \to \mathbb{R}$ este quasiconvex rămâne deschisă. Nu avem nevoie de rezolvarea ei în acest curs. Pentru metoda directă, rank-one convexitatea este numai o condiţie locală necesară, în timp ce policonvexitatea oferă o condiţie suficientă care poate fi folosită în argumentele de semicontinuitate.



12.10 Exemple şi teste de policonvexitate

12.10.1 O familie de energii

Fie

$$W(F) = a\,\|F\|^p + b\,\|\mathrm{Cof}\,F\|^q + h(\det F), \qquad a, b > 0, \quad p, q \geq 1,$$

unde $h : (0,\infty) \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ este convexă. Definim

$$G(F, H, J) = a\,\|F\|^p + b\,\|H\|^q + h(J).$$

Funcţia G este convexă în variabilele independente (F, H, J) şi $W(F) = G(F, \mathrm{Cof}\,F, \det F)$; deci W este policonvexă. Dacă

$$h(J) = cJ^r + dJ^{-s}, \qquad c, d > 0,\ r \geq 1,\ s > 0,$$

atunci

$$h''(J) = cr(r-1)J^{r-2} + ds(s+1)J^{-s-2} \geq 0,$$

iar termenul dJ^{-s} produce $W(F) \to +\infty$ când $J \downarrow 0$.

12.10.2 Policonvexă, dar nu convexă în F

Funcţia

$$W(F) = \|\mathrm{Cof}\,F\|^2$$

este policonvexă, deoarece corespunde funcţiei convexe $G(F, H, J) = \|H\|^2$. Nu este însă convexă în F, chiar dacă ne restrângem la matrici din $GL^+(3)$. Luăm

$$F_1 = \mathrm{diag}\Big(\frac{1}{2}, 1, 3\Big), \qquad F_2 = \mathrm{diag}\Big(\frac{1}{2}, 3, 1\Big).$$

Ambele au determinant pozitiv. Pentru $F = \mathrm{diag}(x, y, z)$,

$$\mathrm{Cof}\,F = \mathrm{diag}(yz, xz, xy), \qquad \|\mathrm{Cof}\,F\|^2 = y^2z^2 + x^2z^2 + x^2y^2.$$

Astfel

$$W(F_1) = W(F_2) = 9 + \frac{9}{4} + \frac{1}{4} = \frac{23}{2}.$$

În schimb,

$$\frac{F_1+F_2}{2}=\operatorname{diag}\Big(\frac{1}{2},2,2\Big)$$

şi

$$W\Big(\frac{F_1+F_2}{2}\Big)=16+1+1=18>\frac{1}{2}W(F_1)+\frac{1}{2}W(F_2)=\frac{23}{2}.$$

Prin urmare convexitatea în F eşuează. Policonvexitatea rămâne valabilă, deoarece $W(F)=G(F,\operatorname{Cof}F,\det F)$ pentru funcţia convexă $G(F,H,J)=\|H\|^2$.

12.10.3 Un model explicit

Pentru

$$W(F)=\|F\|^4+\|\operatorname{Cof}F\|^2+(\det F)^2+(\det F)^{-2},\qquad \det F>0,$$

luăm

$$G(F,H,J)=\|F\|^4+\|H\|^2+J^2+J^{-2}.$$

Toţi termenii sunt convexi, iar

$$\frac{d^2}{dJ^2}(J^2+J^{-2})=2+6J^{-4}>0.$$

Prin urmare W este policonvexă şi satisface blow-up-ul la $J\downarrow 0$.

Observaţia 12.10.1. Incompatibilitatea dintre convexitatea globală în F, obiectivitate şi o stare naturală pe $SO(3)$ a fost demonstrată în Capitolul 9. Aici folosim policonvexitatea pentru a evita cerinţa prea puternică de convexitate în F.

12.11 Probleme pentru seminar

1. Arătaţi că determinantul este policonvex, deşi nu este convex pentru $n\geq 2$.
2. Demonstraţi că $F\mapsto\|\operatorname{Cof}F\|^q$ este policonvex pentru $q\geq 1$.
3. Verificaţi identitatea integrală pentru determinant când $\varphi=Fx$ pe frontieră, mai întâi în două dimensiuni.
4. Demonstraţi implicaţia policonvexitate $\Rightarrow$ rank-one convexitate.
5. Formulaţi quasiconvexitatea cu restricţia $\det(F+\nabla\psi)>0$ şi explicaţi de ce este folosită în elasticitate.
6. Construiţi o funcţie $h(J)$ convexă pe $(0,\infty)$ cu $h(J)\to\infty$ atât la $J\to 0^+$, cât şi la $J\to\infty$.

12.12 Exerciţii rezolvate

Problema 12.12.1 (convexitate versus rank-one convexitate)**.** Arătaţi că orice funcţie convexă $W:\mathbb{R}^{3\times 3}\to\mathbb{R}$ este rank-one convexă.

Rezolvare. Pentru orice F şi orice direcţie matricială H, convexitatea lui W implică convexitatea funcţiei unidimensionale $t \mapsto W(F + tH)$. În particular aceasta este adevărată pentru $H = a \otimes b$, deci W este rank-one convexă.

Problema 12.12.2 (definiţia policonvexităţii în 3D)**.** Formulaţi definiţia policonvexităţii.

Rezolvare. O energie $W : GL^+(3) \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ este policonvexă dacă există o funcţie convexă

$$G : \mathbb{R}^{3\times 3} \times \mathbb{R}^{3\times 3} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$$

astfel încât

$$\boxed{W(F) = G(F, \operatorname{Cof} F, \det F).}$$

Convexitatea este cerută în variabilele independente (F, H, J) ale lui G, nu în F singur.

Problema 12.12.3 (un exemplu policonvex)**.** Arătaţi că

$$W(F) = \|F\|^p + \|\operatorname{Cof} F\|^q + (\det F)^r$$

este policonvexă pentru $p, q, r \geq 1$ pe $\det F \geq 0$.

Rezolvare. Definim

$$G(F, H, J) = \|F\|^p + \|H\|^q + J^r.$$

Pentru exponenţi cel puţin unu, fiecare termen este convex în propria variabilă. Suma este convexă, iar

$$W(F) = G(F, \operatorname{Cof} F, \det F).$$

Deci W este policonvexă.

Problema 12.12.4 (determinantul ca Lagrangian nul)**.** Fie $u \in C^2(\Omega; \mathbb{R}^3)$. Verificaţi identitatea

$$\operatorname{div}\left((\operatorname{Cof} \nabla u)^T u\right) = 3 \det \nabla u.$$

Rezolvare. În componente,

$$\partial_J[(\operatorname{Cof} \nabla u)_{iJ} u_i] = \partial_J (\operatorname{Cof} \nabla u)_{iJ}\, u_i + (\operatorname{Cof} \nabla u)_{iJ} u_{i,J}.$$

Primul termen este zero prin identitatea lui Piola. Al doilea este

$$\langle \operatorname{Cof}(\nabla u), \nabla u \rangle = 3 \det \nabla u,$$

prin formula Euler pentru determinantul omogen de grad trei. Rezultă identitatea.

Problema 12.12.5 (media determinantului sub variaţii cu urmă zero)**.** Pentru $\vartheta \in C_c^\infty(D; \mathbb{R}^3)$, explicaţi de ce

$$\int_D \det(F + \nabla \vartheta) dx = \mathcal{L}^3(D) \det F.$$

Rezolvare. Determinantul este un Lagrangian nul. Diferenţa

$$\det(F + \nabla \vartheta) - \det F$$

se poate scrie ca divergenţa unui câmp care conţine ϑ şi derivatele sale. Deoarece ϑ are suport compact sau urmă zero, integrala termenului de divergenţă se reduce la o integrală de frontieră nulă. Prin urmare media determinantului rămâne aceeaşi ca pentru gradientul constant F.

Problema 12.12.6 (policonvexitate implică quasiconvexitate)**.** Demonstraţi schema principală a implicaţiei folosind Jensen şi caracterul de Lagrangieni nuli al minorilor.

Rezolvare. Fie

$$W(F) = G(F, \operatorname{Cof} F, \det F),$$

cu G convexă. Pentru $\vartheta \in C_c^\infty(D;\mathbb{R}^3)$ definim

$$Z(x) = \Big(F + \nabla\vartheta, \operatorname{Cof}(F + \nabla\vartheta), \det(F + \nabla\vartheta)\Big).$$

Jensen dă

$$\frac{1}{\mathcal{L}^3(D)} \int_D G(Z(x))dx \geq G\left(\frac{1}{\mathcal{L}^3(D)} \int_D Z(x)dx\right).$$

Media gradientului este F deoarece integrala lui $\nabla\vartheta$ este zero. Caracterul de Lagrangieni nuli arată că mediile cofactorului şi determinantului sunt $\operatorname{Cof} F$ şi $\det F$. Astfel

$$\frac{1}{\mathcal{L}^3(D)} \int_D W(F + \nabla\vartheta)dx \geq W(F),$$

care este exact quasiconvexitatea.

Problema 12.12.7 (quasiconvexitate implică rank-one convexitate: ideea laminatului)**.** Explicaţi construcţia de bază pentru două matrici F_0, F_1 cu $F_1 - F_0 = a \otimes n$.

Rezolvare. Alegem o funcţie scalară periodică h a cărei derivată ia două valori constante pe proporţii prescrise şi definim o variaţie rapid oscilantă de forma

$$\vartheta_k(x) = \frac{1}{k} a\, h(k\langle n, x\rangle).$$

Atunci

$$\nabla\vartheta_k = a \otimes n\, h'(k\langle n, x\rangle),$$

deci gradientul total alternează între două stări care diferă prin $a \otimes n$. Pentru a impune condiţia de frontieră se multiplică cu o funcţie de tăiere, iar stratul de corecţie are volum relativ mic când frecvenţa creşte. Aplicarea quasiconvexităţii şi trecerea la limită conduc la convexitatea lui $t \mapsto W((1-t)F_0 + tF_1)$.

Problema 12.12.8 (barieră de determinant policonvexă)**.** Fie

$$W(F) = \|F\|^p + h(\det F),$$

unde $p \geq 1$ şi $h : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ este convexă. Arătaţi că W este policonvexă.

Rezolvare. Definim

$$G(F, H, J) = \|F\|^p + h(J),$$

independent de H. Funcţia $F \mapsto \|F\|^p$ este convexă pentru $p \geq 1$, iar $J \mapsto h(J)$ este convexă prin ipoteză. Suma este convexă în variabilele (F, H, J). Cum

$$W(F) = G(F, \operatorname{Cof} F, \det F),$$

rezultă policonvexitatea.

Problema 12.12.9 (de ce policonvexitatea nu înseamnă convexitate în F)**.** Explicaţi pe exemplul $W(F) = \|\operatorname{Cof} F\|^2$.

Rezolvare. Energia este policonvexă deoarece putem lua

$$G(F, H, J) = \|H\|^2,$$

care este convexă în (F, H, J). Totuşi dependenţa $F \mapsto \operatorname{Cof} F$ este pătratică în 3D, iar compunerea unei funcţii convexe cu o aplicaţie neliniară nu este, în general, convexă. Policonvexitatea permite această dependenţă neliniară prin minori, tratând minorii ca variabile independente în funcţia convexă G.

Problema 12.12.10 (ierarhia noţiunilor)**.** Scrieţi implicaţiile dintre convexitate, policonvexitate, quasiconvexitate şi rank-one convexitate discutate în capitol.

Rezolvare. În cadrul standard,

$$\boxed{\text{convexitate} \Rightarrow \text{policonvexitate} \Rightarrow \text{quasiconvexitate} \Rightarrow \text{rank-one convexitate.}}$$

Prima implicaţie se obţine alegând $G(F, H, J) = W(F)$. A doua a fost demonstrată prin Jensen şi Lagrangieni nuli. A treia se obţine prin construcţii laminate. Conversele nu sunt valabile în general. De exemplu, policonvexitatea nu implică convexitatea, iar Šverák a arătat că rank-one convexitatea nu implică quasiconvexitatea în general. În cazul matricelor 2×2, implicaţia rank-one convexitate $\Rightarrow$ quasiconvexitate rămâne problema clasică deschisă a lui Morrey.

12.13 Exerciţii propuse suplimentare

Nivelul A

12.A.1 *(minorii unei matrice explicite)* Fie

$$F = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

(i) Calculaţi $\det F$ şi $\operatorname{Cof} F$. (ii) Verificaţi $F^T \operatorname{Cof} F = (\det F)I$. (iii) Verificaţi identitatea lui Euler $\langle \operatorname{Cof} F, F\rangle = 3 \det F$.
Răspuns.

$$\det F = 3, \qquad \operatorname{Cof} F = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & 2 \end{pmatrix}.$$

Se verifică direct

$$F^T \operatorname{Cof} F = 3I, \qquad \langle \operatorname{Cof} F, F\rangle = 9 = 3 \det F.$$

12.A.2 *(minorii pe linii de rang unu)* Fie

$$F = \operatorname{diag}(2,1,3), \qquad a = (1,1,0)^T, \qquad b = e_1.$$

(i) Calculaţi $\operatorname{Cof} F$ şi $\det F$. (ii) Calculaţi $\operatorname{Cof}(F + ta \otimes b)$ şi verificaţi afinitatea componentelor. (iii) Calculaţi determinantul.
Răspuns.

$$\operatorname{Cof} F = \operatorname{diag}(3,6,2), \qquad \det F = 6,$$

$$\operatorname{Cof}(F + ta \otimes e_1) = \begin{pmatrix} 3 & -3t & 0 \\ 0 & 6+3t & 0 \\ 0 & 0 & 2+t \end{pmatrix}, \qquad \det(F + ta \otimes e_1) = 6 + 3t.$$

12.A.3 *(policonvexă, dar neconvexă: $W = -\det$)* Fie $W(F) = -\det F$ pe $\mathbb{R}^{3\times 3}$. (i) Arătaţi că este policonvexă. (ii) Arătaţi că este rank-one convexă. (iii) Arătaţi că nu este convexă folosind $F_0 = I$ şi $F_1 = \operatorname{diag}(1,-1,-1)$.
Răspuns. Reprezentarea

$$G(F,H,J) = -J$$

este afină, deci convexă, ceea ce dă policonvexitatea. Pe orice linie de rang unu determinantul este afin, deci W este rank-one convexă. Dar

$$\frac{F_0 + F_1}{2} = \operatorname{diag}(1,0,0),$$

$$W\left(\frac{F_0 + F_1}{2}\right) = 0 > -1 = \frac{1}{2}W(F_0) + \frac{1}{2}W(F_1),$$

deci W nu este convexă.

Nivelul B

12.B.1 *(criteriul Steigmann şi coercivitatea)* Pentru $F \in GL^+(3)$ fie

$$W(F) = i_1^2 + i_2^2 + i_3^2 + \frac{1}{i_3}, \qquad i_1 = \operatorname{tr} U, \quad i_2 = \operatorname{tr}(\operatorname{Cof} U), \quad i_3 = \det U.$$

(i) Verificaţi ipotezele criteriului Steigmann. (ii) Demonstraţi

$$W(F) \geq \|F\|^2 + \|\operatorname{Cof} F\|^2 + (\det F)^2.$$

(iii) Verificaţi bariera la determinant nul.
Răspuns. Funcţia

$$\psi(i_1, i_2, i_3) = i_1^2 + i_2^2 + i_3^2 + i_3^{-1}$$

este convexă pe domeniul fizic şi este crescătoare în $i_1, i_2 > 0$, deci W este policonvexă. Dacă λ_i sunt valorile singulare,

$$i_1^2 = \left(\sum_i \lambda_i\right)^2 \geq \sum_i \lambda_i^2 = \|F\|^2,$$

$$i_2^2 = \left(\sum_{i<j} \lambda_i \lambda_j\right)^2 \geq \sum_{i<j} (\lambda_i \lambda_j)^2 = \|\operatorname{Cof} F\|^2,$$

şi $i_3^2 = (\det F)^2$. De asemenea $i_3^{-1} = (\det F)^{-1} \to +\infty$ când $\det F \downarrow 0$.

12.B.2 *(Lagrangieni nuli pe un exemplu explicit)* Fie $D = (0,1)^2$, $F = \operatorname{diag}(\alpha, \beta)$, $\alpha, \beta > 0$, şi

$$u(x) = Fx + \vartheta(x), \qquad \vartheta(x) = \sin(\pi x_1) \sin(\pi x_2)(1,1)^T.$$

(i) Verificaţi că $\vartheta = 0$ pe ∂D. (ii) Calculaţi determinantul gradientului. (iii) Comparaţi integrala determinantului cu $|D| \det F$. (iv) Explicaţi de ce egalitatea integrală nu este una punctuală.
Răspuns. Punând

$$p = \pi \cos(\pi x_1) \sin(\pi x_2), \qquad q = \pi \sin(\pi x_1) \cos(\pi x_2),$$

avem

$$\nabla u = \begin{pmatrix} \alpha + p & q \\ p & \beta + q \end{pmatrix},$$

$$\det \nabla u = \alpha\beta + \alpha q + \beta p.$$

Cum integralele lui p şi q pe D sunt nule,

$$\int_D \det \nabla u \, dx = \alpha\beta = |D| \det F.$$

Determinantul oscilează punctual; numai integrala este fixată de urma pe frontieră.

12.B.3 *(incompatibilitatea convexităţii cu obiectivitatea în 2D)* Fie $W : \mathbb{R}^{2\times 2} \to [0,\infty)$ obiectivă, cu $W^{-1}(0) = SO(2)$. Pentru o rotaţie R_θ, $\theta \in (0,\pi)$, notaţi

$$M_\theta = \frac{1}{2}(I + R_\theta).$$

(i) Calculaţi valorile singulare şi determinantul lui M_θ. (ii) Arătaţi că $M_\theta \notin SO(2)$. (iii) Deduceţi contradicţia cu convexitatea lui W.
Răspuns.

$$M_\theta = \cos(\theta/2) R_{\theta/2}.$$

Ambele valori singulare sunt $\cos(\theta/2)$, iar

$$\det M_\theta = \cos^2(\theta/2).$$

Pentru $\theta \in (0,\pi)$, M_θ nu este rotaţie. Convexitatea ar da

$$W(M_\theta) \le \frac{1}{2}W(I) + \frac{1}{2}W(R_\theta) = 0,$$

ceea ce ar implica $M_\theta \in SO(2)$, contradicţie.

Nivelul C

12.C.1 *($\|\operatorname{Cof} F\|^2$: policonvexitate, Baker–Ericksen şi neconvexitate)* Fie

$$W(F) = \|\operatorname{Cof} F\|^2, \qquad F \in GL^+(3).$$

(a) Arătaţi că W este policonvexă. (b) Calculaţi raportul Baker–Ericksen. (c) Arătaţi că W nu este convexă pe direcţia $H = \operatorname{diag}(1,-1,0)$ pornind din $F_0 = \operatorname{diag}(2,2,1)$.
Răspuns. Funcţia

$$G(F,H,J) = \|H\|^2$$

este convexă, deci W este policonvexă, prin urmare quasiconvexă şi rank-one convexă. Reprezentarea spectrală este

$$g = (\lambda_2\lambda_3)^2 + (\lambda_1\lambda_3)^2 + (\lambda_1\lambda_2)^2,$$

$$g_i = 2\lambda_i(\lambda_j^2 + \lambda_k^2),$$

şi

$$\frac{\lambda_1 g_1 - \lambda_2 g_2}{\lambda_1 - \lambda_2} = 2\lambda_3^2(\lambda_1 + \lambda_2) > 0.$$

Pe direcţia indicată,

$$f(t) = W(F_0 + tH) = 24 - 6t^2 + t^4, \qquad f''(0) = -12 < 0.$$

Nu există contradicţie, deoarece H are rangul doi.

12.C.2 *(criteriul Steigmann este numai suficient)* Fie $i_1 = \operatorname{tr} U$, $i_2 = \operatorname{tr}(\operatorname{Cof} U)$, $i_3 = \det U$.

(a) Arătaţi

$$\|\mathrm{Cof}\, F\|^2 = i_2^2 - 2i_1 i_3.$$

(b) Studiaţi convexitatea funcţiei $\psi(i_1, i_2, i_3) = i_2^2 - 2i_1 i_3$. (c) Explicaţi concluzia pentru criteriul Steigmann.

Răspuns. Identitatea rezultă din

$$\left(\sum_{i<j} \lambda_i \lambda_j\right)^2 = \sum_{i<j} (\lambda_i \lambda_j)^2 + 2\lambda_1\lambda_2\lambda_3 \sum_i \lambda_i.$$

Hessiana este

$$\nabla^2 \psi = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & 0 \\ -2 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

cu valorile proprii $-2, 2, 2$, deci ψ nu este convexă. Totuşi $\|\mathrm{Cof}\, F\|^2$ este policonvexă, după 12.C.1. Aşadar criteriul Steigmann este suficient, nu necesar.

12.C.3 *(Saint Venant–Kirchhoff nu este policonvexă)* Fie $\mu = \lambda_L = 1$ şi

$$W_{SVK}(F) = \mu\, \|E\|^2 + \frac{\lambda_L}{2} (\mathrm{tr}\, E)^2, \qquad E = \frac{1}{2}(F^T F - I).$$

(a) Pe calea $F = \mathrm{diag}(t, 1, 1)$ calculaţi energia. (b) Pentru $F_0 = \mathrm{diag}(0.1, 1, 1)$ şi $F_1 = \mathrm{diag}(0.5, 1, 1)$ verificaţi violarea rank-one convexităţii. (c) Deduceţi că energia nu este policonvexă.

Răspuns.

$$W_{SVK}(\mathrm{diag}(t, 1, 1)) = \frac{3}{8}(t^2 - 1)^2.$$

Diferenţa $F_1 - F_0 = 0.4 e_1 \otimes e_1$ are rangul unu. Numeric,

$$W(F_0) = 0.367537, \qquad W(F_1) = 0.210938,$$

$$W\left(\frac{F_0 + F_1}{2}\right) = 0.310538 > \frac{1}{2}\Big(W(F_0) + W(F_1)\Big) = 0.289237.$$

Deci W_{SVK} nu este rank-one convexă; prin ierarhia

$$\text{policonvexitate} \Rightarrow \text{quasiconvexitate} \Rightarrow \text{rank-one convexitate},$$

nu poate fi nici policonvexă, nici quasiconvexă.

Capitolul 13

Metoda directă a calculului variaţional

Surse şi orientare. Metoda directă, convergenţa slabă, semicontinuitatea şi continuitatea slabă a minorilor sunt prezentate în spiritul lucrărilor [5, 6, 1, 3]. Introducem fiecare instrument înainte de prima utilizare. Pentru aplicaţia din Capitolul 14 vom avea nevoie de trei tipuri distincte de informaţie: compactitate slabă pentru şirurile de minimizare, semicontinuitate pentru energie şi identificarea limitelor slabe ale cofactorului şi determinantului.

13.1 Schema metodei directe şi noţiunea de coercivitate

Considerăm problema

$$\inf_{u \in \mathcal{A}} \mathcal{F}(u),$$

unde $\mathcal{A}$ este mulţimea admisibilă dintr-un spaţiu Banach X şi $\mathcal{F} : X \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$.

Definiţia 13.1.1 (funcţional propriu)**.** Un funcţional $\mathcal{F} : X \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ se numeşte *propriu pe* $\mathcal{A}$ dacă nu ia valoarea $-\infty$ şi există cel puţin un $u_0 \in \mathcal{A}$ cu $\mathcal{F}(u_0) < +\infty$.

Definiţia 13.1.2 (funcţional coerciv)**.** Funcţionala $\mathcal{F}$ se numeşte *coercivă pe* $\mathcal{A}$ dacă

$$\mathcal{F}(v) \longrightarrow +\infty \qquad \text{ori de câte ori } v \in \mathcal{A},\ \|v\|_X \longrightarrow \infty.$$

Echivalent, pentru fiecare $M \in \mathbb{R}$, mulţimea de subnivel

$$\{v \in \mathcal{A} : \mathcal{F}(v) \leq M\}$$

este mărginită în X.

Demonstrăm pe scurt echivalenţa. Dacă un subnivel ar fi nemărginit, am putea alege v_k în acel subnivel cu $\|v_k\|_X \to \infty$, în contradicţie cu coercivitatea. Reciproc, dacă toate subnivelurile sunt mărginite şi există un şir $\|v_k\|_X \to \infty$ pentru care $\mathcal{F}(v_k)$ nu tinde la $+\infty$, atunci o subsecvenţă ar rămâne într-un subnivel fix, contradicţie.

O condiţie suficientă, foarte frecventă, este

$$\mathcal{F}(v) \geq c\,\|v\|_X^{\alpha} - C, \qquad c > 0,\ \alpha > 0.$$

Într-adevăr, dacă $\mathcal{F}(v_k) \leq M$, atunci $\|v_k\|_X^{\alpha} \leq (M + C)/c$.

Definiţiile de mai sus vor fi reunite în Teorema 13.4.1, după introducerea convergenţei slabe şi a semicontinuităţii inferioare.

13.2 Convergenţa slabă

13.2.1 Dualul şi topologia slabă

Fie X un spaţiu normat. Dualul său X^* este spaţiul funcţionalelor liniare continue $\ell : X \to \mathbb{R}$. Spunem că

$$u_k \rightharpoonup u \quad \text{în } X$$

dacă

$$\ell(u_k) \longrightarrow \ell(u) \qquad \forall \ell \in X^*.$$

Convergenţa în normă implică convergenţa slabă. Limita slabă este unică, deoarece dualul separă punctele unui spaţiu normat.

Pentru $1 < p < \infty$, teorema de reprezentare a dualului lui L^p identifică

$$(L^p(\Omega))^* \simeq L^{p'}(\Omega), \qquad \frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1.$$

Astfel

$$f_k \rightharpoonup f \text{ în } L^p \quad \Longleftrightarrow \quad \int_\Omega f_k g \, dx \to \int_\Omega f g \, dx \quad \forall g \in L^{p'}.$$

Pentru funcţii vectoriale sau matriceale se aplică aceeaşi afirmaţie componentă cu componentă.

Propoziţia 13.2.1 (proprietăţi elementare ale convergenţei slabe)**.** *Fie X un spaţiu Banach.*

(i) Dacă $u_k \rightharpoonup u$ în X, atunci (u_k) este mărginit şi

$$\|u\|_X \le \liminf_{k\to\infty} \|u_k\|_X .$$

(ii) Dacă $T : X \to Y$ este liniar continuu între spaţii Banach şi $u_k \rightharpoonup u$ în X, atunci $Tu_k \rightharpoonup Tu$ în Y.

(iii) Dacă $T : X \to Y$ este compact şi liniar, atunci $u_k \rightharpoonup u$ în X implică $Tu_k \to Tu$ tare în Y.

Demonstraţie. Pentru (i), pentru fiecare k definim $J_k \in X^{**}$ prin

$$J_k(\ell) = \ell(u_k), \qquad \ell \in X^*.$$

Convergenţa slabă spune că, pentru fiecare $\ell \in X^*$, şirul scalar $J_k(\ell) = \ell(u_k)$ converge şi este deci mărginit. Principiul mărginirii uniforme furnizează

$$\sup_k \|J_k\|_{X^{**}} < \infty.$$

Prin identificarea canonică a lui X cu imaginea sa în X^{**},

$$\|J_k\|_{X^{**}} = \|u_k\|_X ,$$

deci (u_k) este mărginit.

Pentru semicontinuitatea normei punem

$$L := \liminf_{k\to\infty} \|u_k\|_X .$$

Alegem o subsecvenţă (u_{k_j}) astfel încât

$$\left\|u_{k_j}\right\|_X \longrightarrow L.$$

Dacă $u \neq 0$, teorema Hahn–Banach furnizează $\ell \in X^*$ cu

$$\|\ell\|_{X^*} = 1, \qquad \ell(u) = \|u\|_X .$$

Atunci

$$\|u\|_X = \ell(u) = \lim_{j\to\infty} \ell(u_{k_j}) \leq \lim_{j\to\infty} \left\|u_{k_j}\right\|_X = L.$$

Pentru $u = 0$ inegalitatea este imediată. Rezultă

$$\|u\|_X \leq \liminf_{k} \|u_k\|_X .$$

Pentru (ii), fie $y^* \in Y^*$. Deoarece T este liniar continuu, compunerea

$$y^* \circ T \in X^*.$$

Din $u_k \rightharpoonup u$ rezultă

$$y^*(Tu_k) = (y^* \circ T)(u_k) \longrightarrow (y^* \circ T)(u) = y^*(Tu).$$

Aceasta este chiar convergenţa slabă $Tu_k \rightharpoonup Tu$ în Y.

Pentru (iii), din (i) şirul (u_k) este mărginit. Compactitatea lui T arată că orice subsecvenţă a lui (Tu_k) conţine la rândul ei o subsecvenţă convergentă tare în Y. Fie

$$Tu_{k_j} \to v \qquad \text{tare în } Y$$

pentru o asemenea subsecvenţă. Convergenţa tare implică convergenţa slabă spre v, iar punctul (ii) arată, pentru aceeaşi subsecvenţă, că

$$Tu_{k_j} \rightharpoonup Tu.$$

Unicitatea limitei slabe dă $v = Tu$. Aşadar orice subsecvenţă are o subsecvenţă care converge tare la Tu. Dacă întregul şir nu ar converge tare la Tu, ar exista $\varepsilon > 0$ şi o subsecvenţă cu

$$\left\|Tu_{k_j} - Tu\right\|_Y \geq \varepsilon$$

pentru orice j, în contradicţie cu proprietatea tocmai demonstrată. Prin urmare $Tu_k \to Tu$ tare în Y. □

Punctul (iii) va fi folosit împreună cu teorema Rellich–Kondrachov: un factor va converge

tare, iar altul numai slab.

13.2.2 Reflexivitate şi extracţia subsecvenţelor

Un spaţiu Banach X se numeşte reflexiv dacă aplicaţia canonică $X \to X^{**}$ este surjectivă. Rezultatul de compactitate necesar metodei directe este următorul.

Teorema 13.2.2 (compactitate slabă secvenţială; Eberlein–Šmulian)**.** *Dacă X este Banach reflexiv, orice şir mărginit din X conţine o subsecvenţă slab convergentă.*

Spaţiile $L^p(\Omega)$ şi $W^{1,p}(\Omega)$ sunt reflexive pentru $1 < p < \infty$. În particular, dacă (u_k) este mărginit în $W^{1,p}$, după extragerea unei subsecvenţe există $u \in W^{1,p}$ cu

$$u_k \rightharpoonup u \text{ în } W^{1,p}, \qquad u_k \rightharpoonup u \text{ în } L^p, \qquad \nabla u_k \rightharpoonup \nabla u \text{ în } L^p.$$

13.2.3 Teorema lui Mazur şi mulţimi convexe închise

Teorema 13.2.3 (Mazur)**.** *Dacă $u_k \rightharpoonup u$ într-un spaţiu normat X, există numere $N(k) \geq k$ şi coeficienţi $\lambda_m^k \geq 0$, $m = k, \ldots, N(k)$, cu*

$$\sum_{m=k}^{N(k)} \lambda_m^k = 1,$$

astfel încât

$$w_k := \sum_{m=k}^{N(k)} \lambda_m^k u_m \longrightarrow u \qquad \text{tare în } X.$$

Corolarul 13.2.4. *Dacă $C \subset X$ este convexă şi închisă în normă, atunci C este slab secvenţial închisă.*

Demonstraţie. Fie $u_k \in C$ şi $u_k \rightharpoonup u$. Teorema lui Mazur furnizează, pentru fiecare j, o combinaţie convexă a termenilor unei cozi a şirului,

$$v_j = \sum_{k=j}^{N_j} \alpha_k^{(j)} u_k, \qquad \alpha_k^{(j)} \geq 0, \qquad \sum_{k=j}^{N_j} \alpha_k^{(j)} = 1,$$

astfel încât $v_j \to u$ în normă. Fiecare u_k aparţine lui C, iar C este convexă; de aceea $v_j \in C$ pentru orice j. Cum C este închisă în normă şi $v_j \to u$ tare, rezultă $u \in C$. Prin urmare C este slab secvenţial închisă. □

Observaţia 13.2.5. Afirmaţia topologică mai puternică "convexă şi tare închisă ⇒ slab închisă" se obţine prin teorema de separare Hahn–Banach. Pentru metoda directă ne este suficientă varianta secvenţială de mai sus. Într-un spaţiu normat infinit dimensional topologia slabă nu este, în general, metrizabilă pe întregul spaţiu; acest fapt nu rezultă numai din aceea că este strict mai slabă decât topologia normei. Geometric, o vecinătate slabă de bază a lui 0 este definită prin finit de multe condiţii $|\ell_j(v)| < \varepsilon$ şi conţine intersecţia $\bigcap_j \ker \ell_j$, un subspaţiu de codimensiune finită şi deci nemărginit; aceasta arată de ce geometria vecinătăţilor slabe este radical diferită de cea a bilelor de normă.

13.3 Semicontinuitate inferioară

Definiţia 13.3.1. Fie X un spaţiu topologic. Funcţionala $\mathcal{F} : X \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ se numeşte *inferior semicontinuă* dacă toate mulţimile de subnivel

$$\{u \in X : \mathcal{F}(u) \leq \alpha\}$$

sunt închise. Se numeşte *secvenţial inferior semicontinuă* dacă

$$u_k \to u \quad \Longrightarrow \quad \mathcal{F}(u) \leq \liminf_{k\to\infty} \mathcal{F}(u_k).$$

Dacă topologia folosită este topologia slabă, vorbim despre semicontinuitate slabă, respectiv slab secvenţială.

Semicontinuitatea topologică implică întotdeauna semicontinuitatea secvenţială. În spaţii metrizabile reciproca este adevărată. Pentru topologia slabă a unui spaţiu infinit dimensional nu trebuie confundate cele două noţiuni; metoda directă de mai jos foloseşte numai varianta slab secvenţială.

Propoziţia 13.3.2 (norma este slab secvenţial inferior semicontinuă)**.** *Dacă $u_k \rightharpoonup u$ într-un spaţiu Banach, atunci*

$$\|u\| \leq \liminf_k \|u_k\| .$$

În particular $u \mapsto \|u\|^p$, $p \geq 1$, este slab secvenţial inferior semicontinuă.

13.3.1 Integrale cu integrand convex

Următorul rezultat va fi folosit direct pentru energia policonvexă. Pentru a-l demonstra fără a ascunde paşii de trecere la limită, reamintim două fapte elementare.

Lema 13.3.3 (subsecvenţă care realizează limita inferioară)**.** *Pentru orice şir $(a_k) \subset \mathbb{R}\cup\{+\infty\}$ există o subsecvenţă (a_{k_j}) astfel încât*

$$a_{k_j} \longrightarrow \liminf_{k\to\infty} a_k,$$

cu aceeaşi interpretare dacă limita inferioară este $+\infty$.

Demonstraţie. Dacă $\ell := \liminf a_k < +\infty$, atunci prin definiţia limitei inferioare, pentru fiecare j există $k_j > k_{j-1}$ cu

$$\ell - \frac{1}{j} \leq a_{k_j} \leq \ell + \frac{1}{j}.$$

Rezultă $a_{k_j} \to \ell$. Cazul $\ell = +\infty$ înseamnă chiar că orice subsecvenţă suficient de îndepărtată are valori arbitrar de mari. □

Lema 13.3.4 (Fatou, forma folosită aici)**.** *Dacă $f_j \geq 0$ sunt măsurabile, atunci*

$$\int_\Omega \liminf_{j\to\infty} f_j \, dx \leq \liminf_{j\to\infty} \int_\Omega f_j \, dx.$$

Dacă $f_j \geq \beta$ cu $\beta \in L^1(\Omega)$, aceeaşi concluzie se aplică lui $f_j - \beta$.

Teorema 13.3.5 (semicontinuitate pentru integrale convexe)**.** *Fie $1 < s_1, \ldots, s_N < \infty$ şi*

$$Y = L^{s_1}(\Omega; \mathbb{R}^{m_1}) \times \cdots \times L^{s_N}(\Omega; \mathbb{R}^{m_N}).$$

Fie $G : \Omega \times \mathbb{R}^{m_1+\cdots+m_N} \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ un integrand măsurabil în x, convex şi inferior semicontinuu în variabila z pentru a.p.t. x. Presupunem că există $\beta \in L^1(\Omega)$ cu

$$G(x, z) \geq \beta(x) \qquad \text{pentru a.p.t. } x \text{ şi orice } z.$$

Dacă $Z_k \rightharpoonup Z$ în Y, atunci

$$\int_\Omega G(x, Z(x))\, dx \leq \liminf_{k\to\infty} \int_\Omega G(x, Z_k(x))\, dx.$$

Demonstraţie. Notăm

$$\mathcal{J}(Z) := \int_\Omega G(x, Z(x))\, dx, \qquad L := \liminf_{k\to\infty} \mathcal{J}(Z_k).$$

Dacă $L = +\infty$, inegalitatea este imediată. Presupunem deci $L < +\infty$. Prin Lema 13.3.3, după alegerea unei subsecvenţe, pe care o notăm din nou (Z_k),

$$\mathcal{J}(Z_k) \longrightarrow L.$$

Subsecvenţa converge în continuare slab către Z în spaţiul produs Y.

Aplicăm Teorema lui Mazur în Y. Există combinaţii convexe de cozi

$$V_j = \sum_{k=j}^{N(j)} \lambda_k^j Z_k, \qquad \lambda_k^j \geq 0, \qquad \sum_{k=j}^{N(j)} \lambda_k^j = 1,$$

care satisfac

$$V_j \longrightarrow Z \qquad \text{tare în } Y.$$

Convergenţa tare în produs înseamnă convergenţă tare în fiecare componentă L^{s_i}. Deoarece numărul de componente este finit, putem extrage o singură subsecvenţă, notată tot (V_j), pentru care

$$V_j(x) \longrightarrow Z(x) \qquad \text{pentru a.p.t. } x \in \Omega.$$

Pentru aproape orice x, inferior semicontinuitatea lui $z \mapsto G(x, z)$ dă

$$G(x, Z(x)) \leq \liminf_{j\to\infty} G(x, V_j(x)).$$

Cum $G \geq \beta$, funcţiile $G(x, V_j(x)) - \beta(x)$ sunt nenegative. Lema lui Fatou furnizează

$$\int_\Omega [G(x, Z) - \beta] dx \leq \liminf_j \int_\Omega [G(x, V_j) - \beta] dx.$$

Adăugând $\int_\Omega \beta$, obţinem

$$\mathcal{J}(Z) \le \liminf_j \mathcal{J}(V_j).$$

Rămâne să controlăm energiile combinaţiilor Mazur. Prin convexitatea punctuală a lui G,

$$G(x, V_j(x)) \le \sum_{k=j}^{N(j)} \lambda_k^j G(x, Z_k(x)).$$

Integrând,

$$\mathcal{J}(V_j) \le \sum_{k=j}^{N(j)} \lambda_k^j \mathcal{J}(Z_k).$$

Dar şirul scalar $\mathcal{J}(Z_k)$ converge la L. O combinaţie convexă formată numai din termeni ai cozii are aceeaşi limită: pentru orice $\varepsilon > 0$, dacă j este suficient de mare atunci

$$|\mathcal{J}(Z_k) - L| < \varepsilon \qquad (k \ge j),$$

şi deci

$$\left| \sum_{k=j}^{N(j)} \lambda_k^j \mathcal{J}(Z_k) - L \right| < \varepsilon.$$

Prin urmare

$$\limsup_j \mathcal{J}(V_j) \le L.$$

Combinând estimările,

$$\mathcal{J}(Z) \le \liminf_j \mathcal{J}(V_j) \le \limsup_j \mathcal{J}(V_j) \le L = \liminf_k \mathcal{J}(Z_k).$$

Aceasta este afirmaţia dorită. □

13.4 Teorema abstractă a metodei directe

Teorema 13.4.1 (metoda directă)**.** *Fie X un spaţiu Banach reflexiv şi $\mathcal{A} \subset X$ nevidă, slab secvenţial închisă. Fie $\mathcal{F} : X \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ astfel încât:*

(i) $\mathcal{F}$ este proprie pe $\mathcal{A}$: există $u_0 \in \mathcal{A}$ cu $\mathcal{F}(u_0) < +\infty$;

(ii) $m := \inf_{\mathcal{A}} \mathcal{F} > -\infty$;

(iii) $\mathcal{F}$ este coercivă pe $\mathcal{A}$;

(iv) $\mathcal{F}$ este slab secvenţial inferior semicontinuă pe $\mathcal{A}$.

Atunci există $u \in \mathcal{A}$ cu

$$\mathcal{F}(u) = \min_{\mathcal{A}} \mathcal{F} = m.$$

Demonstraţie. Din (i) există $u_0 \in \mathcal{A}$ cu $\mathcal{F}(u_0) < +\infty$, deci

$$m := \inf_{\mathcal{A}} \mathcal{F} < +\infty.$$

Ipoteza (ii) exclude $m = -\infty$, astfel încât $m \in \mathbb{R}$. Alegem un şir de minimizare $u_k \in \mathcal{A}$ cu

$$\mathcal{F}(u_k) \longrightarrow m.$$

Valorile $\mathcal{F}(u_k)$ sunt mărginite superior. Arătăm că (u_k) este mărginit în X. Dacă nu ar fi, am putea extrage o subsecvenţă, notată din nou (u_k), pentru care $\|u_k\|_X \to \infty$. Coercivitatea ar implica atunci $\mathcal{F}(u_k) \to +\infty$, în contradicţie cu $\mathcal{F}(u_k) \to m \in \mathbb{R}$.

Prin reflexivitatea lui X, din şirul mărginit putem extrage o subsecvenţă şi un element $u \in X$ astfel încât

$$u_k \rightharpoonup u \qquad \text{în } X.$$

Deoarece $\mathcal{A}$ este slab secvenţial închisă, limita rămâne admisibilă: $u \in \mathcal{A}$. Subsecvenţa extrasă rămâne un şir de minimizare, astfel încât $\mathcal{F}(u_k) \to m$. Semicontinuitatea slab secvenţială inferioară dă

$$\mathcal{F}(u) \le \liminf_{k\to\infty} \mathcal{F}(u_k) = m.$$

Pe de altă parte, $u \in \mathcal{A}$ şi m este infimumul lui $\mathcal{F}$ pe $\mathcal{A}$, deci $\mathcal{F}(u) \ge m$. Rezultă $\mathcal{F}(u) = m$, adică infimumul este atins. □

13.5 Distribuţii şi compactitatea Rellich–Kondrachov

În demonstrarea continuităţii slabe a minorilor vom folosi două instrumente care trebuie fixate înainte de prima utilizare.

Spaţiul $C_c^\infty(\Omega)$ este spaţiul funcţiilor netede cu suport compact în Ω. O *distribuţie* este un funcţional liniar continuu pe $C_c^\infty(\Omega)$; spaţiul distribuţiilor se notează $\mathcal{D}'(\Omega)$. Orice $f \in L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ defineşte distribuţia

$$\langle f, \phi \rangle := \int_\Omega f\phi \, dx.$$

Spunem că $f_k \to f$ în $\mathcal{D}'(\Omega)$ dacă

$$\int_\Omega f_k\phi \, dx \longrightarrow \int_\Omega f\phi \, dx \qquad \forall \phi \in C_c^\infty(\Omega).$$

Dacă două funcţii local integrabile definesc aceeaşi distribuţie, ele coincid aproape peste tot. Echivalent, dacă $f \in L^1_{\mathrm{loc}}$ şi

$$\int_\Omega f\phi \, dx = 0 \qquad \forall \phi \in C_c^\infty(\Omega),$$

atunci $f = 0$ a.p.t.; aceasta este lema fundamentală a distribuţiilor.

Vom folosi şi teorema Rellich–Kondrachov. Pentru un domeniu mărginit Lipschitz din $\mathbb{R}^3$, dacă $1 \le p < 3$ şi $1 \le s < p^* = 3p/(3-p)$, scufundarea

$$W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^s(\Omega)$$

este compactă. Pentru $p = 3$ avem compactitate în orice L^s finit, iar pentru $p > 3$ putem folosi în particular orice exponent finit necesar mai jos. Această compactitate va furniza, după

extragerea unei subsecvenţe, convergenţa tare necesară pentru unul dintre factorii produsului.

13.6 Minorii gradientului şi dificultăţile trecerii la limită

Material de aprofundare. Teorema 13.6.1 va fi folosită în Capitolul 14. Demonstraţia poate fi omisă la prima lectură; ea arată de ce, după integrarea prin părţi, convergenţa tare a unui factor poate fi combinată cu convergenţa slabă a celuilalt.

Dacă $\nabla u_k \rightharpoonup \nabla u$ în L^p, nu putem în general trece la limită într-un produs de două sau trei componente ale gradientului. Cofactorul şi determinantul sunt însă minori şi satisfac identităţi de divergenţă. Aceste identităţi produc o compensare: după integrare prin părţi, unul dintre factorii de gradient este înlocuit de u_k, iar compactitatea Sobolev furnizează convergenţă tare pentru acel factor.

13.6.1 Estimarea algebrică pentru cofactor

În dimensiunea trei, componentele lui $\operatorname{Cof} A$ sunt polinoame omogene de gradul doi în componentele lui A. Există deci o constantă universală $C > 0$ astfel încât

$$\|\operatorname{Cof} A\| \leq C\,\|A\|^2\,, \qquad \|\operatorname{Cof} A - \operatorname{Cof} B\| \leq C(\|A\| + \|B\|)\,\|A - B\|\,.$$

Prin Hölder, dacă $\nabla u \in L^p$ şi $p \geq 2$, atunci

$$\operatorname{Cof} \nabla u \in L^{p/2}(\Omega).$$

Pentru $p = 2$ acest spaţiu este L^1, care nu este reflexiv; de aceea teorema lui Ball presupune un control suplimentar al cofactorului într-un L^q cu $q > 1$.

13.6.2 Identităţile de divergenţă folosite la trecerea la limită

În Capitolul 12 am demonstrat identitatea lui Piola, Lema 12.2.3, şi formula de divergenţă pentru determinant, (12.2). Nu reluăm aici calculele algebrice. Avem nevoie numai să extindem cele două identităţi de la aplicaţii netede la aplicaţii Sobolev, prin aproximare.

Pentru cofactor, estimarea

$$\|\operatorname{Cof} A - \operatorname{Cof} B\| \leq C(\|A\| + \|B\|)\,\|A - B\|$$

implică: dacă $u_j \to u$ tare în $W^{1,p}$ cu $p \geq 2$, atunci

$$\operatorname{Cof} \nabla u_j \to \operatorname{Cof} \nabla u \quad \text{tare în } L^{p/2}.$$

Alegem o aproximaţie netedă u_j a lui u. Identitatea lui Piola este adevărată pentru fiecare u_j; testând cu o funcţie netedă cu suport compact şi trecând la limită, obţinem aceeaşi identitate în sens distribuţional pentru u. Pentru determinant folosim separat formula (12.2). Dacă

$\theta \in C_c^\infty(\Omega)$, ea conduce la

$$\int_\Omega \det \nabla u\, \theta \, dx = -\frac{1}{3}\int_\Omega \langle (\operatorname{Cof} \nabla u)^T u, \nabla \theta \rangle \, dx,$$

atunci când produsul din membrul drept este integrabil. Tocmai această scriere va permite, în teorema următoare, combinarea convergenţei slabe a cofactorului cu convergenţa tare a lui u_k.

13.6.3 Identificarea simultană a cofactorului şi determinantului

Teorema 13.6.1 (continuitatea slabă a minorilor în regimul lui Ball)**.** *Fie $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ mărginit, cu frontieră Lipschitz. Fie*

$$2 \le p < \infty, \qquad p' = \frac{p}{p-1} \le q < \infty, \qquad 1 < r < \infty.$$

Presupunem

$$u_k \rightharpoonup u \quad \text{în } W^{1,p}(\Omega;\mathbb{R}^3),$$

$$\operatorname{Cof} \nabla u_k \rightharpoonup H \quad \text{în } L^q(\Omega;\mathbb{R}^{3\times 3}), \qquad \det \nabla u_k \rightharpoonup d \quad \text{în } L^r(\Omega).$$

Atunci

$$\boxed{H = \operatorname{Cof} \nabla u, \qquad d = \det \nabla u \quad \text{a.p.t. în } \Omega.}$$

Demonstraţie. Pasul 1: convergenţa tare necesară. Din $q \ge p'$ rezultă $q' \le p$. Prin Rellich–Kondrachov, după eventuala restrângere la subsecvenţa deja extrasă,

$$u_k \to u \quad \text{tare în } L^s(\Omega)$$

pentru orice s sub exponentul critic Sobolev. În particular putem alege atât $s = p'$ cât şi $s = q'$: pentru $p < 3$, avem $p', q' \le p < p^* = 3p/(3-p)$, iar pentru $p \ge 3$ orice exponent finit necesar aici este admis.

Pasul 2: identificarea cofactorului. Pentru o componentă a cofactorului, de exemplu

$$(\operatorname{Cof} \nabla u_k)_{11} = \partial_2 u_{k,2}\, \partial_3 u_{k,3} - \partial_3 u_{k,2}\, \partial_2 u_{k,3},$$

şi pentru $\theta \in C_c^\infty(\Omega)$ vrem să mutăm o derivată de pe $u_{k,2}$, astfel încât în fiecare produs să rămână un factor care converge tare şi unul care converge slab. Mai întâi, pentru funcţii netede,

$$\begin{aligned}
\int_\Omega \partial_2 u_{k,2}\, \partial_3 u_{k,3}\, \theta \, dx &= -\int_\Omega u_{k,2}\, \partial_{23} u_{k,3}\, \theta \, dx - \int_\Omega u_{k,2}\, \partial_3 u_{k,3}\, \partial_2 \theta \, dx, \\
-\int_\Omega \partial_3 u_{k,2}\, \partial_2 u_{k,3}\, \theta \, dx &= \int_\Omega u_{k,2}\, \partial_{32} u_{k,3}\, \theta \, dx + \int_\Omega u_{k,2}\, \partial_2 u_{k,3}\, \partial_3 \theta \, dx.
\end{aligned}$$

Termenii cu derivate mixte se anulează, deoarece $\partial_{23} u_{k,3} = \partial_{32} u_{k,3}$. Rămâne

$$\int_\Omega (\operatorname{Cof} \nabla u_k)_{11} \theta \, dx = -\int_\Omega u_{k,2}\, \partial_3 u_{k,3}\, \partial_2 \theta \, dx$$

$$+ \int_\Omega u_{k,2}\, \partial_2 u_{k,3}\, \partial_3 \theta \, dx.$$

Această identitate se extinde apoi la regularitatea Sobolev folosită aici prin aproximare/densitate; formula finală nu conţine derivate de ordinul doi ale lui u_k. Avem $u_{k,2} \to u_2$ tare în $L^{p'}$ şi derivatele lui $u_{k,3}$ converg slab în L^p. Prin urmare membrul drept converge la expresia identică pentru u. Obţinem convergenţa distribuţională

$$\operatorname{Cof} \nabla u_k \longrightarrow \operatorname{Cof} \nabla u \quad \text{în } \mathcal{D}'(\Omega).$$

Pe de altă parte, convergenţa slabă în L^q implică aceeaşi convergenţă distribuţională către H. Unicitatea limitei distribuţionale dă $H = \operatorname{Cof} \nabla u$.

Pasul 3: identificarea determinantului. Folosim (12.2). Pentru $\theta \in C_c^\infty(\Omega)$,

$$\int_\Omega \det \nabla u_k \, \theta \, dx = -\frac{1}{3} \int_\Omega \langle (\operatorname{Cof} \nabla u_k)^T u_k, \nabla \theta \rangle \, dx.$$

Aici $\operatorname{Cof} \nabla u_k \rightharpoonup \operatorname{Cof} \nabla u$ în L^q, iar $u_k \to u$ tare în $L^{q'}$. Rezultă

$$\int_\Omega \det \nabla u_k \, \theta \, dx \longrightarrow -\frac{1}{3} \int_\Omega \langle (\operatorname{Cof} \nabla u)^T u, \nabla \theta \rangle \, dx = \int_\Omega \det \nabla u \, \theta \, dx.$$

Deci determinantul converge distribuţional la $\det \nabla u$. Dar convergenţa slabă în L^r, $r > 1$, îl identifică distribuţional cu d. Din nou prin unicitate, $d = \det \nabla u$. □

Observaţia 13.6.2 (cazul $p > 2$ fără control suplimentar prescris). Dacă $p > 2$, mărginirea lui u_k în $W^{1,p}$ implică automat mărginirea lui $\operatorname{Cof} \nabla u_k$ în $L^{p/2}$, iar $p/2 > 1$ este reflexiv. Astfel se poate extrage o limită slabă pentru cofactor şi o identifica prin argumentul de mai sus. Această observaţie priveşte însă numai identificarea cofactorului. Pentru identificarea determinantului prin formula folosită în Pasul 3 trebuie să putem combina convergenţa slabă a cofactorului în L^q cu convergenţa tare a lui u_k în $L^{q'}$; în formularea teoremei aceasta este asigurată de condiţia $q \geq p'$. Dacă folosim numai controlul automat $q = p/2$, condiţia $p/2 \geq p'$ este echivalentă cu $p \geq 3$. Prin urmare, pentru $2 < p < 3$, controlul automat al cofactorului este suficient pentru identificarea lui, dar nu şi pentru argumentul de mai sus privind determinantul; pentru acesta este necesar un control suplimentar într-un L^q cu $q \geq p'$. Pentru $p = 2$, $p/2 = 1$ nu mai este reflexiv, astfel încât este necesar deja pentru cofactor un control suplimentar într-un L^q cu $q > 1$.

13.7 Coercivitatea specifică elasticităţii

Înainte de estimarea elastică fixăm forma de Poincaré–Friedrichs pe care o folosim.

Propoziţia 13.7.1 (Poincaré–Friedrichs cu condiţie pe o parte a frontierei)**.** *Fie $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ mărginit, conex, cu frontieră Lipschitz, şi fie $\Gamma_D \subset \partial\Omega$ de măsură superficială pozitivă. Pentru $1 < p < \infty$ există $C > 0$ astfel încât*

$$\|v\|_{L^p(\Omega)} \leq C \, \|\nabla v\|_{L^p(\Omega)}$$

pentru orice $v \in W^{1,p}(\Omega)$ cu urmă zero pe Γ_D.

Demonstraţie. Presupunem prin contradicţie că nu există o asemenea constantă. Atunci putem alege $v_k \in W^{1,p}(\Omega)$, cu urmă zero pe Γ_D, astfel încât

$$\|v_k\|_{L^p} > k \|\nabla v_k\|_{L^p}.$$

Înlocuind v_k cu $v_k / \|v_k\|_{L^p}$ putem presupune

$$\|v_k\|_{L^p} = 1, \qquad \|\nabla v_k\|_{L^p} < \frac{1}{k}.$$

Şirul este mărginit în $W^{1,p}(\Omega)$. Reflexivitatea şi Rellich–Kondrachov furnizează, după o subsecvenţă,

$$v_k \rightharpoonup v \quad \text{în } W^{1,p}(\Omega), \qquad v_k \to v \quad \text{tare în } L^p(\Omega).$$

Convergenţa tare păstrează norma, deci $\|v\|_{L^p} = 1$. Pe de altă parte, $\nabla v_k \to 0$ tare în L^p, iar unicitatea limitei slabe implică $\nabla v = 0$ în sens distribuţional. Cum Ω este conex, v este constantă aproape peste tot.

Operatorul urmă este liniar continuu pe un domeniu Lipschitz. Din $\operatorname{Tr} v_k = 0$ pe Γ_D şi convergenţa slabă în $W^{1,p}$ rezultă $\operatorname{Tr} v = 0$ pe Γ_D. Urma unei constante este aceeaşi constantă; deoarece Γ_D are măsură superficială pozitivă, constanta trebuie să fie zero. Obţinem $v = 0$, în contradicţie cu $\|v\|_{L^p} = 1$. Contradicţia demonstrează inegalitatea. Vezi şi [1, 6]. □

În aplicaţia tridimensională vom presupune, pentru F cu $\det F > 0$,

$$W(x,F) \geq \alpha\Big(\|F\|^p + \|\operatorname{Cof} F\|^q + (\det F)^r \Big) + \beta(x),$$

unde

$$\alpha > 0, \qquad 2 \leq p < \infty, \qquad p' \leq q < \infty, \qquad 1 < r < \infty, \qquad \beta \in L^1(\Omega).$$

Pentru $\det F \leq 0$ energia poate fi extinsă cu valoarea $+\infty$. Exponenţii nu sunt aleşi arbitrar: ei furnizează exact mărginirile în $W^{1,p}$, L^q şi L^r care apar în Teorema 13.6.1.

Aplicând Propoziţia 13.7.1 lui $u - u_D$, obţinem

$$\|u - u_D\|_{L^p} \leq C \|\nabla(u - u_D)\|_{L^p}.$$

Astfel controlul lui $\|\nabla u\|_{L^p}$ devine controlul lui $\|u\|_{W^{1,p}}$.

13.8 Păstrarea constrângerilor la limită

Condiţia Dirichlet poate fi tratată fără a introduce spaţii fracţionare de urmă. Mulţimea

$$\mathcal{A}_D = \{ u \in W^{1,p}(\Omega;\mathbb{R}^3) : \operatorname{Tr} u = \varphi_D \text{ pe } \Gamma_D \}$$

este afină, deci convexă, şi este închisă în normă deoarece operatorul urmă este liniar continuu. Prin Corolarul 13.2.4, $\mathcal{A}_D$ este slab secvenţial închisă. Aşadar $u_k \in \mathcal{A}_D$ şi $u_k \rightharpoonup u$ implică

$u \in \mathcal{A}_D$.

Pentru determinant separăm două afirmaţii. Dacă $d_k \geq 0$ a.p.t. şi $d_k \rightharpoonup d$ în L^r, $r > 1$, atunci $d \geq 0$ a.p.t.; conul pozitiv din L^r este convex şi închis în normă, deci slab secvenţial închis. Stricta pozitivitate nu urmează din convergenţa slabă. În Capitolul 14 ea va fi recuperată din bariera energetică: o energie finită va exclude o mulţime de măsură pozitivă pe care $\det \nabla u = 0$.

13.9 Probleme pentru seminar

1. Arătaţi că mulţimea $\{F \in \mathbb{R}^{3\times 3} : \det F > 0\}$ nu este convexă. Deduceţi de ce restricţia $\det \nabla u > 0$ nu poate fi păstrată la limită printr-un simplu argument de convexitate al clasei admisibile.

2. În $L^2(0, 2\pi)$ studiaţi şirul $u_k(x) = \sin(kx)$ şi comparaţi comportamentul funcţionalelor $u \mapsto \|u\|_{L^2}^2$ şi $u \mapsto -\|u\|_{L^2}^2$ la convergenţă slabă.

3. Pentru o matrice concretă F, calculaţi $\operatorname{Cof} F$ şi verificaţi identităţile $F^T \operatorname{Cof} F = (\det F) I$ şi $\langle \operatorname{Cof} F, F \rangle = 3 \det F$.

4. Presupuneţi $u_k \rightharpoonup u$ în $W^{1,p}$, $p > 2$. Explicaţi de ce $(\operatorname{Cof} \nabla u_k)$ este automat mărginit într-un spaţiu Lebesgue reflexiv şi identificaţi exponentul.

5. În cazul limită $p = 2$, explicaţi de ce controlul $\operatorname{Cof} \nabla u_k \in L^1$ care rezultă numai din $\nabla u_k \in L^2$ nu este suficient pentru extracţia unei subsecvenţe slab convergente prin reflexivitate şi de ce teorema lui Ball introduce un control separat în L^q, $q > 1$.

6. Fie $\mathcal{I}(u) = c\,\|u\|_X^p - C - \ell(u)$, cu $p > 1$ şi $\ell \in X^*$. Folosiţi inegalitatea Young pentru a arăta că termenul liniar nu distruge coercivitatea termenului principal.

13.10 Exerciţii rezolvate

Problema 13.10.1 (şir de minimizare)**.** Presupuneţi $\mathcal{A} \neq \varnothing$ şi

$$-\infty < I_* := \inf_{u \in \mathcal{A}} \mathcal{I}(u) < +\infty.$$

Arătaţi că există un şir $(u_k) \subset \mathcal{A}$ cu

$$\mathcal{I}(u_k) \to I_*.$$

Rezolvare. Prin definiţia infimumului, pentru fiecare k există $u_k \in \mathcal{A}$ astfel încât

$$I_* \leq \mathcal{I}(u_k) < I_* + \frac{1}{k}.$$

Prin teorema strivirii, $\mathcal{I}(u_k) \to I_*$. Acesta este şirul de minimizare.

Problema 13.10.2 (coercivitate şi mărginire)**.** Dacă

$$\mathcal{I}(u) \geq c \, \|u\|_X^p - C, \qquad c > 0, \quad p > 0,$$

şi (u_k) este un şir de minimizare pentru un infimum finit, arătaţi că (u_k) este mărginit în X.

Rezolvare. Există M astfel încât $\mathcal{I}(u_k) \leq M$. Atunci

$$c \, \|u_k\|_X^p - C \leq M,$$

deci

$$\|u_k\|_X^p \leq \frac{M + C}{c}.$$

Prin urmare

$$\|u_k\|_X \leq \left(\frac{M + C}{c} \right)^{1/p},$$

deci şirul este uniform mărginit.

Problema 13.10.3 (extracţie slabă)**.** Fie $1 < p < \infty$ şi (u_k) mărginit în $W^{1,p}(\Omega)$. Ce compactitate slabă putem folosi?

Rezolvare. Spaţiul $W^{1,p}$ este reflexiv pentru $1 < p < \infty$. Orice şir mărginit are o subsecvenţă, notată la fel, şi un $u \in W^{1,p}(\Omega)$ astfel încât

$$u_k \rightharpoonup u \quad \text{în } W^{1,p}(\Omega).$$

În particular,

$$u_k \rightharpoonup u \text{ în } L^p, \qquad \nabla u_k \rightharpoonup \nabla u \text{ în } L^p.$$

Problema 13.10.4 (păstrarea condiţiei Dirichlet)**.** Dacă $u_k \rightharpoonup u$ în $W^{1,p}(\Omega)$ şi $\operatorname{Tr} u_k = g$ pe Γ_D, explicaţi de ce $\operatorname{Tr} u = g$.

Rezolvare. Pentru un domeniu Lipschitz mărginit, operatorul de urmă este liniar continuu, în particular

$$\operatorname{Tr} : W^{1,p}(\Omega) \to L^p(\partial\Omega).$$

Compunerea cu restricţia la Γ_D este de asemenea liniară şi continuă. Orice operator liniar continuu este continuu slab–slab. Prin urmare

$$\operatorname{Tr} u_k \rightharpoonup \operatorname{Tr} u.$$

Dar şirul din stânga este constant egal cu g, deci limita este g. Astfel $\operatorname{Tr} u = g$.

Problema 13.10.5 (semicontinuitate slabă pentru o energie convexă)**.** Fie $1 < p < \infty$ şi $f : \mathbb{R}^{3\times 3} \to [0, +\infty]$ convexă şi inferior semicontinuă. Presupuneţi că integralele de mai jos sunt bine definite. Arătaţi, folosind Teorema 13.3.5, că pentru

$$\mathcal{I}(u) = \int_\Omega f(\nabla u)\, dx$$

avem $u_k \rightharpoonup u$ în $W^{1,p} \Rightarrow \mathcal{I}(u) \le \liminf_k \mathcal{I}(u_k)$.

Rezolvare. Convergenţa slabă în $W^{1,p}$ implică

$$\nabla u_k \rightharpoonup \nabla u \quad \text{în } L^p(\Omega; \mathbb{R}^{3\times 3}).$$

Aplicăm Teorema 13.3.5 cu $N = 1$, $Z_k = \nabla u_k$, $Z = \nabla u$ şi $G(x, Z) = f(Z)$. Ipoteza de minorare este satisfăcută cu $\beta = 0$. Rezultă

$$\boxed{\mathcal{I}(u) \le \liminf_{k\to\infty} \mathcal{I}(u_k).}$$

Nu avem nevoie de convergenţă tare a gradientului: convexitatea transformă convergenţa slabă în inegalitatea liminf.

Problema 13.10.6 (aplicaţie concretă a metodei directe)**.** Fie

$$\mathcal{I}(u) = \int_0^1 \left(\frac{1}{2} |u'|^2 + \frac{1}{4} |u|^4 - fu \right) dx, \qquad u \in H_0^1(0,1), \quad f \in L^2(0,1).$$

Arătaţi că $\mathcal{I}$ admite un minimizator.

Rezolvare. Prin Cauchy–Schwarz şi Poincaré,

$$\left| \int_0^1 fu\, dx \right| \le \|f\|_{L^2} \|u\|_{L^2} \le C_P \|f\|_{L^2} \|u'\|_{L^2}.$$

Young dă, pentru orice $\varepsilon > 0$,

$$C_P \|f\|_{L^2} \|u'\|_{L^2} \le \varepsilon \|u'\|_{L^2}^2 + C_\varepsilon \|f\|_{L^2}^2.$$

Alegând $\varepsilon < 1/2$, obţinem coercivitatea în H_0^1. Un şir de minimizare este deci mărginit şi, prin reflexivitate, admite o subsecvenţă $u_k \rightharpoonup u$ în H_0^1. În dimensiunea unu, Rellich–Kondrachov

dă $u_k \to u$ tare în $L^4(0,1)$, deci

$$\int_0^1 |u_k|^4\,dx \to \int_0^1 |u|^4\,dx, \qquad \int_0^1 f u_k dx \to \int_0^1 f u dx.$$

În plus, norma gradientului este slab inferior semicontinuă:

$$\int_0^1 |u'|^2\,dx \le \liminf_k \int_0^1 |u_k'|^2\,dx.$$

Prin urmare $\mathcal{I}(u) \le \liminf_k \mathcal{I}(u_k)$, iar u este minimizator.

Problema 13.10.7 (termen liniar de încărcare)**.** Fie

$$\mathcal{I}(u) = \int_\Omega f(\nabla u)dx - \ell(u),$$

unde $\ell \in X^*$. Arătaţi că termenul liniar este slab continuu.

Rezolvare. Prin definiţia convergenţei slabe în X,

$$u_k \rightharpoonup u$$

înseamnă exact că

$$\ell(u_k) \to \ell(u)$$

pentru orice funcţional liniar continuu $\ell \in X^*$. Prin urmare termenul $-\ell(u)$ nu afectează semicontinuitatea slabă inferioară a părţii integrale.

Problema 13.10.8 (de ce convergenţa slabă nu se comportă bine cu produsele)**.** Daţi un exemplu simplu de şiruri slab convergente ale căror produse nu converg la produsul limitelor.

Rezolvare. Pe $(0, 2\pi)$ luăm

$$a_k(x) = \sin(kx), \qquad b_k(x) = \sin(kx).$$

Ambele converg slab la zero în L^2 datorită oscilaţiilor. Totuşi

$$a_k b_k = \sin^2(kx) = \frac{1}{2}(1 - \cos(2kx)),$$

care converge slab la $1/2$, nu la zero. Acest fenomen explică de ce identificarea limitelor cofactorilor şi determinantelor necesită structură suplimentară.

Problema 13.10.9 (conul pozitiv este slab închis)**.** Fie $1 < p < \infty$ şi $f_k \rightharpoonup f$ în $L^p(\Omega)$. Presupuneţi $f_k \ge 0$ a.p.t. pentru orice k. Arătaţi că $f \ge 0$ a.p.t.

Rezolvare. Presupunem prin contradicţie că mulţimea

$$A_\varepsilon := \{x \in \Omega : f(x) \le -\varepsilon\}$$

are măsură pozitivă pentru un anumit $\varepsilon > 0$. Deoarece Ω este mărginită, $\chi_{A_\varepsilon} \in L^{p'}(\Omega)$. Convergenţa slabă permite testarea cu această funcţie fixată:

$$\int_{A_\varepsilon} f_k \, dx \longrightarrow \int_{A_\varepsilon} f \, dx.$$

Membrul stâng este nenegativ pentru orice k, pe când

$$\int_{A_\varepsilon} f \, dx \leq -\varepsilon \, \mathcal{L}^3(A_\varepsilon) < 0,$$

contradicţie. Aşadar $\mathcal{L}^3(A_\varepsilon) = 0$ pentru orice $\varepsilon > 0$, iar

$$\boxed{f \geq 0 \quad \text{a.p.t.}}$$

Acesta este argumentul elementar folosit ulterior pentru a păstra nenegativitatea determinantului la limita slabă.

Problema 13.10.10 (metoda directă pentru o energie policonvexă: ce mai trebuie identificat)**.** Presupuneţi

$$W(F) = G(F, \operatorname{Cof} F, \det F)$$

cu G convexă. De ce nu este suficientă doar convergenţa slabă $\nabla u_k \rightharpoonup \nabla u$?

Rezolvare. Semicontinuitatea convexă a lui G poate fi aplicată dacă tripletul

$$Z_k = (\nabla u_k, \operatorname{Cof} \nabla u_k, \det \nabla u_k)$$

converge slab către

$$Z = (\nabla u, \operatorname{Cof} \nabla u, \det \nabla u).$$

Convergenţa slabă a gradientului nu identifică automat produsele pătratice şi cubice care formează cofactorul şi determinantul. Sunt necesare teoremele de continuitate slabă a minorilor, împreună cu exponenţi de integrabilitate care permit aplicarea lor. Numai după această identificare convexitatea lui G produce estimarea liminf.

13.11 Exerciţii propuse suplimentare

Nivelul A

13.A.1 *(convergenţă slabă fără convergenţă tare)* Fie $f_k(x) = \cos(2\pi k x)$ în $L^2(0,1)$. (i) Arătaţi că $f_k \rightharpoonup 0$. (ii) Calculaţi $\|f_k\|_{L^2}$ şi verificaţi semicontinuitatea inferioară a normei. (iii) Deduceţi că convergenţa nu este tare.
Indicaţie. Folosiţi lema Riemann–Lebesgue pe funcţii regulate şi apoi densitatea lor în L^2.
Răspuns. Pentru orice $v \in L^2(0,1)$,

$$\int_0^1 f_k v \, dx \longrightarrow 0.$$

Pe de altă parte,

$$\|f_k\|_{L^2}^2 = \int_0^1 \cos^2(2\pi k x)\, dx = \frac{1}{2},$$

deci

$$0 = \|0\|_{L^2} < \liminf_k \|f_k\|_{L^2} = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Cum normele nu tind la zero, convergenţa nu este tare.

13.A.2 *(un minor de ordin doi ca divergenţă)* Fie

$$u(x_1, x_2) = (x_1 + x_2^2,\ x_2 + x_1^3).$$

(i) Calculaţi ∇u şi $\det \nabla u$. (ii) Verificaţi

$$\det \nabla u = \partial_1(u_1 \partial_2 u_2) - \partial_2(u_1 \partial_1 u_2).$$

(iii) Explicaţi rolul comutării derivatelor mixte.
Răspuns.

$$\nabla u = \begin{pmatrix} 1 & 2x_2 \\ 3x_1^2 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \det \nabla u = 1 - 6x_1^2 x_2.$$

Membrul drept dă aceeaşi expresie; anularea termenilor suplimentari foloseşte $\partial_{12} u_2 = \partial_{21} u_2$.

13.A.3 *(teorema lui Mazur pe un exemplu explicit)* Pentru $f_k(x) = \cos(2\pi k x)$ definiţi

$$w_m = \frac{1}{m+1} \sum_{k=m}^{2m} f_k.$$

(i) Verificaţi că w_m este o combinaţie convexă de elemente din coada şirului. (ii) Calculaţi $\|w_m\|_{L^2}^2$. (iii) Deduceţi convergenţa tare.
Răspuns. Ortogonalitatea funcţiilor cosinus dă

$$\|w_m\|_{L^2}^2 = \frac{1}{(m+1)^2}(m+1)\frac{1}{2} = \frac{1}{2(m+1)} \longrightarrow 0.$$

Astfel $w_m \to 0$ tare, deşi f_k converge numai slab la zero.

Nivelul B

13.B.1 *(continuitatea slabă a determinantului pe un şir explicit în 2D)* Fie $D = (0,1)^2$ şi

$$\varphi_k(x) = \left(x_1 + \frac{1}{k}\sin(kx_2),\, x_2 + \frac{1}{k}\sin(kx_1) \right).$$

(i) Calculaţi $\nabla\varphi_k$ şi arătaţi că $\varphi_k \rightharpoonup \mathrm{id}$ în $W^{1,p}$, $1 < p < \infty$. (ii) Calculaţi determinantul şi limita sa slabă. (iii) Comparaţi cu limita slabă a lui $(\partial_2\varphi_{k,1})^2$.
Răspuns. Punând $a = \cos(kx_2)$, $b = \cos(kx_1)$,

$$\nabla\varphi_k = \begin{pmatrix} 1 & a \\ b & 1 \end{pmatrix}, \qquad \det\nabla\varphi_k = 1 - ab.$$

Avem $\varphi_k \to \mathrm{id}$ uniform, iar $a, b \rightharpoonup 0$, deci $\varphi_k \rightharpoonup \mathrm{id}$ în $W^{1,p}$. Mai mult, $ab \rightharpoonup 0$, astfel

$$\det\nabla\varphi_k \rightharpoonup 1 = \det I.$$

În schimb,

$$(\partial_2\varphi_{k,1})^2 = a^2 = \frac{1}{2}(1 + \cos(2kx_2)) \rightharpoonup \frac{1}{2}.$$

Minorii au o structură de divergenţă care nu este prezentă pentru un produs pătratic arbitrar.

13.B.2 *(închiderea slabă a conului funcţiilor nenegative)* Fie $1 \le r < \infty$, $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ mărginit şi

$$C = \{v \in L^r(\Omega) : v \ge 0 \text{ a.p.t.}\}.$$

(i) Arătaţi că C este convex şi tare închis. (ii) Deduceţi închiderea slabă. (iii) Aplicaţi la un şir de determinanţi pozitivi care converge slab.
Răspuns. Convexitatea este imediată. Dacă $v_n \to v$ tare în L^r şi $v_n \ge 0$, un subşir converge a.p.t., de unde $v \ge 0$. Prin teorema lui Mazur, o mulţime convexă tare închisă este slab închisă. Aşadar, dacă

$$\det\nabla\varphi_k \rightharpoonup d \quad \text{în } L^r$$

şi $\det\nabla\varphi_k > 0$ a.p.t., atunci $d \ge 0$ a.p.t. Argumentul nu dă stricta pozitivitate; aceasta cere o informaţie suplimentară, de exemplu bariera energetică la determinant nul.

13.B.3 *(semicontinuitate slabă inferioară prin inegalitatea de susţinere)* Fie

$$I(u) = \int_\Omega \|\nabla u\|^2\, dx, \qquad u \in H^1(\Omega).$$

(i) Scrieţi inegalitatea de susţinere pentru $f(z) = \|z\|^2$. (ii) Integraţi cu $z = \nabla u$, $y = \nabla u_k$. (iii) Pentru $u_k \rightharpoonup u$ în H^1, deduceţi $I(u) \le \liminf I(u_k)$. (iv) Daţi un exemplu de inegalitate strictă.
Răspuns.

$$\|y\|^2 \ge \|z\|^2 + 2\langle z, y - z\rangle,$$

deci

$$I(u_k) \geq I(u) + 2\int_\Omega \langle \nabla u, \nabla u_k - \nabla u\rangle \, dx.$$

Ultimul termen tinde la zero prin convergenţa slabă. Pentru $\Omega = (0, 2\pi)$ şi $u_k(x) = k^{-1}\sin(kx)$,

$$u_k \rightharpoonup 0 \quad \text{în } H^1, \qquad I(u_k) = \int_0^{2\pi} \cos^2(kx)dx = \pi, \qquad I(0) = 0.$$

Nivelul C

13.C.1 *(metoda directă eşuează fără semicontinuitate)* Fie

$$I(u) = \int_0^1 \left[(u'(x)^2 - 1)^2 + u(x)^2\right] dx, \qquad u \in \mathcal{A} := W_0^{1,4}(0,1).$$

(a) Arătaţi că $I \geq 0$ şi că este coerciv. (b) Fie h funcţia triunghiulară 1-periodică

$$h(s) = \frac{1}{2} - \left|s \bmod 1 - \frac{1}{2}\right|, \qquad u_k(x) = \frac{1}{k}h(kx).$$

Arătaţi $|u_k'| = 1$ a.p.t. şi calculaţi $I(u_k)$. (c) Arătaţi că infimumul nu este atins şi identificaţi ipoteza metodei directe care lipseşte.
Răspuns. Din

$$(z^2 - 1)^2 \geq \frac{1}{2}z^4 - 1$$

şi inegalitatea Poincaré rezultă coercivitatea. Pentru u_k, primul termen al integrandului este nul a.p.t., iar

$$I(u_k) = \int_0^1 u_k^2 dx = \frac{1}{12k^2} \longrightarrow 0.$$

Prin urmare $\inf_{\mathcal{A}} I = 0$. Dacă ar exista u cu $I(u) = 0$, atunci simultan $u = 0$ a.p.t. şi $|u'| = 1$ a.p.t., contradicţie. Astfel infimumul nu este atins. Aici lipseşte semicontinuitatea slabă inferioară: avem $u_k \rightharpoonup 0$ în $W_0^{1,4}$, dar

$$I(0) = 1 > 0 = \lim_{k\to\infty} I(u_k).$$

Integrandul $z \mapsto (z^2 - 1)^2$ nu este convex.

13.C.2 *(continuitatea slabă a cofactorului pe un şir oscilant tridimensional)* Fie $\Omega = (0,1)^3$ şi

$$\varphi_k(x) = \left(x_1 + \frac{1}{k}\sin(kx_2),\, x_2 + \frac{1}{k}\sin(kx_3),\, x_3 + \frac{1}{k}\sin(kx_1)\right).$$

Punem $a = \cos(kx_2)$, $b = \cos(kx_3)$, $c = \cos(kx_1)$. (a) Calculaţi gradientul şi determinantul. (b) Calculaţi cofactorul şi limitele slabe. (c) Comparaţi cu limita lui a^2.
Răspuns.

$$\nabla\varphi_k = \begin{pmatrix} 1 & a & 0 \\ 0 & 1 & b \\ c & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \det \nabla\varphi_k = 1 + abc.$$

$$\operatorname{Cof}\nabla\varphi_k = \begin{pmatrix} 1 & bc & -c \\ -a & 1 & ac \\ ab & -b & 1 \end{pmatrix}.$$

Toate funcţiile a, b, c, ab, ac, bc, abc converg slab la zero, astfel

$$\operatorname{Cof}\nabla\varphi_k \rightharpoonup I, \qquad \det\nabla\varphi_k \rightharpoonup 1.$$

În schimb,

$$a^2 = \cos^2(kx_2) \rightharpoonup \frac{1}{2}.$$

Cofactorii beneficiază de identităţile de divergenţă ale minorilor, nu de o regulă generală pentru produse slab convergente.

13.C.3 *(metoda directă pentru o problemă model)* Fie $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ mărginit Lipschitz, $1 < p < \infty$, $p' = p/(p-1)$, $f \in L^{p'}(\Omega)$ şi

$$I(u) = \frac{1}{p}\int_\Omega \|\nabla u\|^p \, dx - \int_\Omega fu \, dx, \qquad u \in X := W_0^{1,p}(\Omega).$$

(a) Arătaţi coercivitatea. (b) Arătaţi semicontinuitatea slabă inferioară. (c) Deduceţi existenţa şi unicitatea minimizatorului şi scrieţi ecuaţia Euler–Lagrange.
Răspuns. Poincaré, Hölder şi Young dau, pentru $\varepsilon < 1/p$,

$$I(u) \geq \left(\frac{1}{p} - \varepsilon\right)\|\nabla u\|_{L^p}^p - C.$$

Funcţia $z \mapsto \|z\|^p/p$ este convexă, deci partea integrală este slab inferior semicontinuă, iar termenul cu f este slab continuu. Reflexivitatea lui $W_0^{1,p}$ şi metoda directă dau existenţa. Stricţa convexitate dă unicitatea. Minimizatorul satisface

$$\int_\Omega \|\nabla u\|^{p-2}\langle \nabla u, \nabla v\rangle \, dx = \int_\Omega fv \, dx \qquad \forall v \in W_0^{1,p}(\Omega),$$

adică, slab,

$$-\operatorname{div}\Big(\|\nabla u\|^{p-2}\nabla u\Big) = f.$$

Capitolul 14

Teorema de existenţă a lui John Ball în elasticitatea neliniară

Surse şi orientare. Folosim teorema de existenţă a lui Ball [2] într-o formă tridimensională adaptată notaţiilor din curs; vezi şi [3, 5, 10]. Ipotezele sunt scrise explicit pentru a putea aplica direct rezultatele din Capitolul 13.

14.1 Cadrul problemei

Fie $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ un domeniu *mărginit, conex, cu frontieră Lipschitz*. Fie $\Gamma_D \subset \partial\Omega$ o porţiune măsurabilă a frontierei cu măsură superficială strict pozitivă. Fixăm

$$2 \le p < \infty, \qquad p' = \frac{p}{p-1} \le q < \infty, \qquad 1 < r < \infty.$$

Pentru o dată Dirichlet φ_D considerăm clasa

$$\mathcal{A} = \left\{ \varphi \in W^{1,p}(\Omega;\mathbb{R}^3) : \begin{array}{ll} \operatorname{Tr}\varphi = \varphi_D \text{ pe } \Gamma_D, & \\ \operatorname{Cof}\nabla\varphi \in L^q(\Omega), & \\ \det\nabla\varphi \in L^r(\Omega), & \det\nabla\varphi > 0 \text{ a.p.t.} \end{array} \right\}.$$

Energia totală este

$$I(\varphi) = \int_\Omega W(X, \nabla\varphi(X))\, dX - L(\varphi),$$

unde $L \in (W^{1,p}(\Omega;\mathbb{R}^3))^*$ este un funcţional liniar continuu al încărcărilor.

Observaţia 14.1.1. Neviditatea lui $\mathcal{A}$ nu garantează singură existenţa unei deformări de energie finită. Vom presupune explicit că există $\varphi_0 \in \mathcal{A}$ cu $I(\varphi_0) < +\infty$. Aceasta este ipoteza de "proprietate" necesară metodei directe.

14.2 Policonvexitatea şi ipotezele structurale

Definiţia 14.2.1 (reprezentarea policonvexă dependentă de X)**.** Extindem definiţia din Capitolul 12 la energii care pot depinde de punctul material. Pentru a.p.t. $X \in \Omega$, cerem să existe

$$G(X,\cdot,\cdot,\cdot) : \mathbb{R}^{3\times3} \times \mathbb{R}^{3\times3} \times (0,\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$$

convexă în variabilele (F, H, J) astfel încât

$$W(X,F) = G(X, F, \operatorname{Cof}F, \det F) \qquad (\det F > 0).$$

Presupunem de asemenea că G este un integrand normal. Mai precis, aplicaţia

$$(X, F, H, J) \longmapsto G(X, F, H, J)$$

este măsurabilă, iar pentru a.p.t. X funcţia

$$(F, H, J) \longmapsto G(X, F, H, J)$$

este inferior semicontinuă şi convexă. Folosim rezultatul standard de măsurabilitate pentru integranzi normali: dacă $Z(X) = (F(X), H(X), J(X))$ este un câmp măsurabil, atunci compunerea $X \mapsto G(X, Z(X))$ este măsurabilă; vezi [5, 10]. Această proprietate justifică integralele de mai jos.

Pentru a include restricţia de orientare în semicontinuitate, folosim extensia convenţională cu valori extinse

$$\widetilde{G}(X, F, H, J) = \begin{cases} G(X, F, H, J), & J > 0, \\ +\infty, & J \le 0. \end{cases}$$

Această extensie nu schimbă domeniul fizic al energiei, pe care G rămâne finită şi reală pentru $J > 0$; valoarea $+\infty$ este doar dispozitivul standard prin care codificăm orientarea pozitivă într-un funcţional convex extins. Vom presupune că $\widetilde{G}(X, \cdot)$ este convexă şi inferior semicontinuă. În particular, această ipoteză include bariera la $J \downarrow 0$.

Presupunem în plus existenţa unor constante $c > 0$, $C \ge 0$ astfel încât, pentru $J > 0$,

$$W(X, F) \ge c\Big(\|F\|^p + \|\operatorname{Cof} F\|^q + J^r\Big) - C \qquad \text{pentru a.p.t. } X. \tag{14.1}$$

Pentru aplicarea directă a Teoremei 13.3.5 este util ca reprezentantul convex să fie mărginit inferior pe întregul spaţiu al variabilelor independente. Dacă reprezentantul iniţial G nu are această proprietate, îl înlocuim cu

$$G_0(X, F, H, J) := \max\{G(X, F, H, J), -C\}.$$

Maximul a două funcţii convexe este convex, iar pe tripletele de minori ale unui gradient avem $G = W \ge -C$, deci această modificare nu schimbă energia W. Astfel putem şi vom presupune

$$\widetilde{G}(X, F, H, J) \ge -C \tag{14.2}$$

ori de câte ori este finită.

14.3 Teorema de existenţă

Teorema 14.3.1 (Ball, formă suficientă pentru curs)**.** *Fie $\Omega, \Gamma_D, p, q, r$ ca mai sus. Presupunem:*

(i) W admite reprezentarea policonvexă prin integrandul normal G, iar extensia $\widetilde{G}$ este măsurabilă în (X, F, H, J) şi, pentru a.p.t. X, convexă şi inferior semicontinuă în (F, H, J);

(ii) are loc estimarea coercivă (14.1)*;*

(iii) $L \in (W^{1,p})^*$*;*

(iv) există $\varphi_0 \in \mathcal{A}$ *cu* $I(\varphi_0) < +\infty$*.*

Atunci există $\varphi_* \in \mathcal{A}$ *astfel încât*

$$I(\varphi_*) = \min_{\varphi \in \mathcal{A}} I(\varphi).$$

Rolul exponenţilor. Condiţia $p \geq 2$ permite definirea distribuţională a cofactorului prin aproximaţii Sobolev. Controlul separat în L^q, cu $q \geq p'$, furnizează reflexivitate şi integrabilitatea duală necesară formulei determinantului. Condiţia $1 < r < \infty$ face L^r reflexiv şi permite extragerea unei limite slabe a determinantelor; în mod analog avem nevoie de $q < \infty$ pentru reflexivitatea lui L^q. Acestea sunt ipotezele Teoremei 13.6.1.

14.4 Un model unidimensional înaintea demonstraţiei tridimensionale

Înainte de teorema tridimensională parcurgem metoda directă într-o problemă în care toate dificultăţile pot fi văzute fără cofactori şi determinanţi matriciali. Fie $p > 1$, $s > 0$, $f \in L^{p'}(0,1)$ şi

$$h(z) = \begin{cases} z^p + z^{-s}, & z > 0, \\ +\infty, & z \leq 0. \end{cases}$$

Considerăm

$$\mathcal{A}_{1D} = \{u \in W^{1,p}(0,1) : u(0) = 0\}$$

şi

$$I_{1D}(u) = \int_0^1 h(u'(x))\,dx - \int_0^1 f(x)u(x)\,dx.$$

Observaţi că valoarea $+\infty$ a lui h codifică automat constrângerea $u' > 0$ aproape peste tot pentru orice funcţie de energie finită.

Pasul 0: problema este proprie. Funcţia $u_0(x) = x$ aparţine lui $\mathcal{A}_{1D}$ şi are $u_0' = 1$. Prin urmare

$$I_{1D}(u_0) = \int_0^1 (1+1)\,dx - \int_0^1 xf(x)\,dx < \infty.$$

Deci infimumul nu este $+\infty$.

Pasul 1: convexitatea integrandului. Pentru $z > 0$,

$$h''(z) = p(p-1)z^{p-2} + s(s+1)z^{-s-2} > 0.$$

Aşadar h este strict convexă pe $(0,\infty)$. Extensia cu $+\infty$ pentru $z \leq 0$ este convexă şi inferior semicontinuă: domeniul efectiv $(0,\infty)$ este convex, iar $h(z) \to +\infty$ când $z \downarrow 0$.

Pasul 2: coercivitatea. Pentru $u \in \mathcal{A}_{1D}$, teorema fundamentală a calculului dă

$$u(x) = \int_0^x u'(t)\,dt.$$

Prin Hölder,

$$|u(x)| \le x^{1/p'} \|u'\|_{L^p(0,1)} \le \|u'\|_{L^p(0,1)},$$

şi deci $\|u\|_{L^p} \le \|u'\|_{L^p}$. Termenul de încărcare satisface

$$\left|\int_0^1 fu\,dx\right| \le \|f\|_{L^{p'}} \|u\|_{L^p} \le \|f\|_{L^{p'}} \|u'\|_{L^p}.$$

Cum $h(z) \ge z^p$ pentru $z > 0$,

$$I_{1D}(u) \ge \|u'\|_{L^p}^p - \|f\|_{L^{p'}} \|u'\|_{L^p}.$$

Young furnizează, pentru un $\varepsilon \in (0,1)$,

$$\|f\|_{L^{p'}} \|u'\|_{L^p} \le \varepsilon \|u'\|_{L^p}^p + C_\varepsilon \|f\|_{L^{p'}}^{p'},$$

şi astfel

$$I_{1D}(u) \ge (1-\varepsilon)\|u'\|_{L^p}^p - C.$$

Un şir de minimizare este deci mărginit în $W^{1,p}(0,1)$.

Pasul 3: compactitatea slabă şi condiţia la frontieră. Spaţiul $W^{1,p}(0,1)$ este reflexiv. Dintr-un şir de minimizare (u_k) extragem

$$u_k \rightharpoonup u \quad \text{în } W^{1,p}(0,1).$$

Evaluarea la capăt este un funcţional liniar continuu în dimensiunea unu; cum $u_k(0) = 0$, rezultă $u(0) = 0$. Deci $u \in \mathcal{A}_{1D}$.

Pasul 4: semicontinuitatea. Integrandul extins h este convex şi inferior semicontinuu. Teorema de semicontinuitate pentru integrale convexe dă

$$\int_0^1 h(u')\,dx \le \liminf_{k\to\infty} \int_0^1 h(u_k')\,dx.$$

În plus, funcţionalul $u \mapsto \int_0^1 fu\,dx$ este liniar continuu pe $W^{1,p}$, deci slab continuu. Prin urmare

$$I_{1D}(u) \le \liminf_{k\to\infty} I_{1D}(u_k) = \inf_{\mathcal{A}_{1D}} I_{1D}.$$

Aşadar u este minimizator.

Pasul 5: pozitivitatea strictă a derivatei. Ştim că $I_{1D}(u) < \infty$. Dacă mulţimea $A = \{x : u'(x) \le 0\}$ ar avea măsură pozitivă, atunci $h(u'(x)) = +\infty$ pe A şi integrala ar fi

infinită. Deci

$$\boxed{u'(x) > 0 \quad \text{pentru a.p.t. } x \in (0,1).}$$

Acesta este analogul unidimensional al păstrării orientării în teorema tridimensională. Termenul z^{-s} este bariera volumetrică, iar trecerea de la u' la tripletul $(\nabla\varphi, \operatorname{Cof}\nabla\varphi, \det\nabla\varphi)$ este diferenţa principală faţă de problema unidimensională.

14.5 Demonstraţia teoremei

Material de aprofundare. Demonstraţia foloseşte succesiv coercivitatea, compactitatea slabă, continuitatea slabă a minorilor şi semicontinuitatea integralelor convexe. La o primă lectură se pot urmări modelul unidimensional de mai sus şi enunţul teoremei; detaliile de compactitate folosesc rezultatele din Capitolul 13.

14.5.1 Pasul 1: şirul de minimizare şi estimarea coercivă

Existenţa lui φ_0 cu energie finită dă mai întâi numai

$$\inf_{\mathcal{A}} I < +\infty.$$

Arătăm acum că infimumul este şi mai mare decât $-\infty$ şi, simultan, obţinem coercivitatea. Pentru orice $\varphi \in \mathcal{A}$, diferenţa $w := \varphi - \varphi_0$ are urmă nulă pe Γ_D. Inegalitatea Poincaré–Friedrichs dă

$$\|w\|_{L^p} \le C_P \|\nabla w\|_{L^p},$$

deci, deoarece φ_0 este fixată,

$$\|\varphi\|_{W^{1,p}} \le C_1 + C_2 \|\nabla\varphi\|_{L^p}.$$

Continuitatea lui L implică

$$|L(\varphi)| \le C_3 + C_4 \|\nabla\varphi\|_{L^p}.$$

Prin inegalitatea Young, pentru orice $\varepsilon > 0$,

$$C_4 \|\nabla\varphi\|_{L^p} \le \varepsilon \|\nabla\varphi\|_{L^p}^p + C_\varepsilon.$$

Alegând $0 < \varepsilon < c$, din (14.1) rezultă

$$I(\varphi) \ge (c-\varepsilon)\|\nabla\varphi\|_{L^p}^p + c\|\operatorname{Cof}\nabla\varphi\|_{L^q}^q + c\|\det\nabla\varphi\|_{L^r}^r - C_5.$$

Prin urmare I este mărginit inferior pe $\mathcal{A}$, deci

$$-\infty < m := \inf_{\mathcal{A}} I < +\infty.$$

Alegem acum un şir de minimizare $\varphi_k \in \mathcal{A}$ cu $I(\varphi_k) \to m$. Cum valorile sale sunt uniform mărginite superior, estimarea precedentă produce

$$\sup_k \|\varphi_k\|_{W^{1,p}} < \infty, \qquad \sup_k \|\mathrm{Cof}\,\nabla\varphi_k\|_{L^q} < \infty, \qquad \sup_k \|\det\nabla\varphi_k\|_{L^r} < \infty.$$

14.5.2 Pasul 2: extracţia limitelor slabe

Estimările din Pasul 1 dau trei şiruri mărginite, în trei spaţii diferite. Deoarece $1 < p, q, r < \infty$, spaţiile $W^{1,p}$, L^q şi L^r sunt reflexive.

Mai întâi extragem o subsecvenţă pentru care

$$\varphi_k \rightharpoonup \varphi \quad \text{în } W^{1,p}.$$

Din această subsecvenţă extragem una pentru care cofactorii converg slab în L^q; apoi, din subsecvenţa obţinută, extragem una pentru determinanţi. Păstrăm aceeaşi notaţie k pentru subsecvenţa finală. Avem astfel simultan

$$\varphi_k \rightharpoonup \varphi \quad \text{în } W^{1,p},$$

$$\mathrm{Cof}\,\nabla\varphi_k \rightharpoonup H \quad \text{în } L^q, \qquad \det\nabla\varphi_k \rightharpoonup d \quad \text{în } L^r.$$

În acest moment H şi d sunt numai limite slabe; nu avem încă dreptul să afirmă că sunt cofactorul şi determinantul gradientului lui φ.

14.5.3 Pasul 3: identificarea cofactorului şi determinantului

Aici folosim rezultatul de continuitate slabă a minorilor din Capitolul 13. Ipotezele sale sunt tocmai cele obţinute mai sus: convergenţa slabă a lui φ_k în $W^{1,p}$, controlul separat al cofactorilor în L^q şi al determinanţilor în L^r, cu $q \geq p'$.

Teorema 13.6.1 spune că, pentru orice funcţie-test admisibilă, limita distribuţională a cofactorilor coincide cu $\mathrm{Cof}\,\nabla\varphi$, iar limita distribuţională a determinanţilor coincide cu $\det\nabla\varphi$. Dar limitele slabe H şi d din Pasul 2 determină aceleaşi limite distribuţionale. Unicitatea limitei distribuţionale dă

$$\boxed{H = \mathrm{Cof}\,\nabla\varphi, \qquad d = \det\nabla\varphi.}$$

Pentru $p = 2$ trebuie observat de ce estimarea separată a cofactorului nu poate fi omisă. Din $\nabla\varphi_k \in L^2$ rezultă numai $\mathrm{Cof}\,\nabla\varphi_k \in L^1$, deoarece cofactorul este pătratic în gradient. Spaţiul L^1 nu este reflexiv, deci această estimare nu furnizează singură o subsecvenţă slab convergentă. Ipoteza $\mathrm{Cof}\,\nabla\varphi_k$ mărginit în L^q, cu $q > 1$, rezolvă exact acest punct şi permite folosirea teoremei de continuitate slabă a minorilor.

14.5.4 Pasul 4: condiţia Dirichlet şi nenegativitatea determinantului

Aplicăm rezultatele de închidere slabă din Secţiunea 13.8. Deoarece toate funcţiile φ_k au urma φ_D pe Γ_D şi

$$\varphi_k \rightharpoonup \varphi \qquad \text{în } W^{1,p},$$

mulţimea afină a funcţiilor cu urma prescrisă fiind slab secvenţial închisă, rezultă

$$\operatorname{Tr}\varphi = \varphi_D \qquad \text{pe } \Gamma_D.$$

Pentru determinant punem $d_k = \det \nabla\varphi_k$. Avem $d_k > 0$ a.p.t. şi, din Pasul 2,

$$d_k \rightharpoonup d = \det \nabla\varphi \qquad \text{în } L^r.$$

Secţiunea 13.8 arată că limita slabă a unui şir nenegativ din L^r, $r > 1$, rămâne nenegativă. Prin urmare

$$\det \nabla\varphi \geq 0 \qquad \text{a.p.t.}$$

Din acest pas obţinem numai nenegativitatea determinantului, nu şi pozitivitatea strictă. Posibilitatea $\det \nabla\varphi = 0$ pe o mulţime de măsură pozitivă va fi exclusă în pasul următor cu ajutorul barierei energetice.

14.5.5 Pasul 5: semicontinuitatea policonvexă şi stricta pozitivitate

Punem

$$Z_k = (\nabla\varphi_k, \operatorname{Cof}\nabla\varphi_k, \det\nabla\varphi_k), \qquad Z = (\nabla\varphi, \operatorname{Cof}\nabla\varphi, \det\nabla\varphi).$$

Paşii precedenţi dau

$$Z_k \rightharpoonup Z \quad \text{în } L^p \times L^q \times L^r.$$

Prin Teorema 13.3.5, aplicată lui $\widetilde{G}$ şi minorantei (14.2),

$$\int_\Omega \widetilde{G}(X, Z(X))\,dX \leq \liminf_{k\to\infty} \int_\Omega \widetilde{G}(X, Z_k(X))\,dX.$$

Membrul drept este finit de-a lungul şirului de minimizare. Dacă mulţimea

$$A_0 := \{X : \det\nabla\varphi(X) = 0\}$$

ar avea măsură pozitivă, atunci $\widetilde{G}(X, Z(X)) = +\infty$ pe A_0, deci integrala din stânga ar fi $+\infty$, contradicţie. Rezultă

$$\boxed{\det\nabla\varphi > 0 \quad \text{a.p.t.}}$$

şi deci $\varphi \in \mathcal{A}$.

În plus,

$$\int_\Omega W(X, \nabla\varphi)\,dX \leq \liminf_{k} \int_\Omega W(X, \nabla\varphi_k)\,dX.$$

Cum L este liniar continuu, convergenţa slabă implică $L(\varphi_k) \to L(\varphi)$. Prin urmare

$$I(\varphi) \le \liminf_k I(\varphi_k) = m.$$

Dar $\varphi \in \mathcal{A}$, deci $I(\varphi) \ge m$ prin definiţia infimului. Aşadar

$$\boxed{I(\varphi) = m = \min_{\mathcal{A}} I.}$$

Demonstraţia este încheiată.

14.6 Verificarea ipotezelor pe un exemplu de energie

Considerăm

$$W(F) = a\,\|F\|^p + b\,\|\mathrm{Cof}\,F\|^q + c(\det F)^r + d(\det F)^{-s}, \qquad \det F > 0, \tag{14.3}$$

cu

$$a, b, c, d > 0, \qquad 2 \le p < \infty, \qquad p' \le q < \infty, \qquad 1 < r < \infty, \qquad s > 0.$$

Policonvexitatea acestei familii a fost verificată deja în Subsecţiunea 12.10.1: se ia

$$G(F, H, J) = a\,\|F\|^p + b\,\|H\|^q + cJ^r + dJ^{-s}, \qquad J > 0,$$

iar G este convexă în variabilele independente (F, H, J). Rămâne să verificăm ipotezele suplimentare care intervin în teorema de existenţă.

Mai întâi, deoarece $dJ^{-s} \ge 0$,

$$W(F) \ge \alpha\Big(\|F\|^p + \|\mathrm{Cof}\,F\|^q + (\det F)^r\Big), \qquad \alpha := \min\{a, b, c\} > 0.$$

Aceasta este exact estimarea coercivă cerută în teoremă. Exponenţii au fost aleşi astfel încât

$$p \ge 2, \qquad q \ge p', \qquad r > 1,$$

care sunt condiţiile folosite la compactitate şi la identificarea slabă a minorilor. Termenul volumetric singular satisface

$$dJ^{-s} \longrightarrow +\infty \qquad \text{când } J \downarrow 0,$$

deci extensia cu $+\infty$ la $J \le 0$ produce bariera care va exclude determinantul nul la limită.

Rămâne să verificăm că problema nu este vidă. Dacă, de exemplu, $\varphi_D(X) = X$ pe Γ_D, aplicaţia identitate este admisibilă, deoarece

$$\nabla \mathrm{id} = I, \qquad \mathrm{Cof}\,I = I, \qquad \det I = 1.$$

Cum Ω este mărginită, $W(I)$ este finit şi constant, astfel

$$\int_\Omega W(I)\,dX = W(I)\,\mathcal{L}^3(\Omega) < \infty.$$

De asemenea, $L(\mathrm{id})$ este finit pentru $L \in (W^{1,p})^*$. Prin urmare

$$I(\mathrm{id}) < \infty,$$

ceea ce verifică ipoteza existenţei unei deformări admisibile de energie finită.

Observaţia 14.6.1 (cazul limită $p = 2$). Dacă $p = 2$, atunci $p' = 2$. Alegerea $q = 2$ este cazul limită al condiţiei $q \geq p'$. Controlul $\nabla\varphi \in L^2$ singur ar furniza pentru cofactor numai un control de tip L^1, care nu dă reflexivitate. Termenul separat $b\,\|\mathrm{Cof}\,F\|^2$ furnizează tocmai controlul L^2 necesar extragerii unei subsecvenţe slab convergente pentru cofactor.

14.7 Limitele concluziei de existenţă

Teorema garantează existenţa unui minimizator Sobolev, dar nu garantează unicitate, regularitate clasică sau injectivitate globală. Mai mult, în cadrul general cu barieră $W(F) \to +\infty$ când $\det F \downarrow 0$, nu se ştie în general dacă minimizatorul satisface ecuaţiile Euler–Lagrange nici măcar în sensul slab uzual: obstacolul nu este numai regularitatea lui φ, ci şi lipsa unei condiţii de creştere asupra lui DW care să fie compatibilă cu bariera de determinant; vezi discuţiile clasice pornind de la [2].

Injectivitatea globală necesită o condiţie suplimentară. Condiţia Ciarlet–Nečas a fost introdusă în Capitolul 9; teorema de mai sus nu o conţine şi, prin urmare, nu exclude singură interpenetrarea globală.

14.8 Probleme pentru seminar

1. Verificaţi policonvexitatea energiei considerate mai sus.

2. Pentru $p = 3$ determinaţi exponentul conjugat p' şi cea mai mică valoare admisă a lui q. Pentru $p = 2$ faceţi acelaşi calcul şi explicaţi de ce alegerea $q = 1$ nu este suficientă pentru argumentul de compactitate slabă.

3. Consideraţi $p = 4$, $q = 4/3$ şi $r = 2$. Verificaţi explicit relaţiile $q \geq p'$ şi $1/p + 1/q \leq 1$ şi identificaţi în demonstraţia Teoremei 13.6.1 produsul pentru care această contabilitate a exponenţilor este necesară.

4. Arătaţi că $J^r + J^{-s}$ este coercivă volumetric şi calculaţi punctul ei de minim. Indicaţie: ecuaţia staţionară este $rJ^{r-1} = sJ^{-s-1}$, deci $J_* = (s/r)^{1/(r+s)}$.

5. Identificaţi o ipoteză a Teoremei 14.3.1 care eşuează pentru energia St. Venant–Kirchhoff: verificaţi pe $F_\delta = \mathrm{diag}(\delta, 1, 1)$ că energia rămâne finită când $\delta \downarrow 0$, deci lipseşte bariera la determinant nul. Această observaţie arată că modelul nu intră în teorema lui Ball în

forma de mai sus; faptul mai puternic că energia St. Venant–Kirchhoff nu este rank-one convexă global este un rezultat separat, pentru care vezi [3].

6. Formulaţi o condiţie suplimentară pentru a exclude interpenetrarea globală.

14.9 Exerciţii rezolvate

Problema 14.9.1 (barieră de determinant)**.** Fie $h(J) = J^2 + J^{-2}$ pentru $J > 0$. Arătaţi că $h(J) \to \infty$ când $J \to 0^+$.

Rezolvare. Când $J \to 0^+$, termenul $J^{-2} = 1/J^2$ tinde la $+\infty$, în timp ce $J^2 \to 0$. Prin urmare

$$\boxed{h(J) \to +\infty.}$$

Termenul exclude energetic apropierea de $J = 0$.

Problema 14.9.2 (policonvexitatea modelului)**.** Pentru

$$W(F) = a\,\|F\|^p + b\,\|\mathrm{Cof}\,F\|^q + cJ^r + dJ^{-s}, \qquad J = \det F > 0,$$

cu $p \geq 2$, $q \geq p/(p-1)$, $r > 1$, $s > 0$, construiţi funcţia convexă în minori. (Pentru simpla policonvexitate ar fi suficiente $p, q, r \geq 1$; exponenţii mai puternici sunt cei necesari teoremei de existenţă.)

Rezolvare. Definim

$$G(F, H, J) = a\,\|F\|^p + b\,\|H\|^q + cJ^r + dJ^{-s}$$

pentru $J > 0$; pentru verificarea convexă extinsă putem conveni $G = +\infty$ pentru $J \leq 0$. Funcţiile normă la puteri cel puţin unu sunt convexe, J^r este convex pentru $r \geq 1$, iar

$$\frac{d^2}{dJ^2} J^{-s} = s(s+1)J^{-s-2} > 0.$$

Deci G este convexă şi

$$W(F) = G(F, \mathrm{Cof}\,F, \det F).$$

Problema 14.9.3 (coercivitatea modelului)**.** Dacă

$$\sup_k \int_\Omega W(\nabla\varphi_k)dX < \infty,$$

ce estimări uniforme rezultă direct?

Rezolvare. Deoarece termenii sunt nenegativi,

$$\sup_k \|\nabla\varphi_k\|_{L^p} < \infty, \qquad \sup_k \|\mathrm{Cof}\,\nabla\varphi_k\|_{L^q} < \infty,$$

$$\sup_k \|\det\nabla\varphi_k\|_{L^r} < \infty, \qquad \sup_k \int_\Omega (\det\nabla\varphi_k)^{-s} dX < \infty.$$

Cu date Dirichlet, Poincaré transformă primul control într-o mărginire a lui φ_k în $W^{1,p}$.

Problema 14.9.4 (păstrarea condiţiei Dirichlet)**.** Explicaţi de ce limita slabă a unui şir admisibil cu aceeaşi urmă Dirichlet păstrează acea urmă.

Rezolvare. Operatorul de urmă este liniar şi continuu pe spaţiul Sobolev relevant. Prin urmare este slab continuu. Dacă

$$\varphi_k \rightharpoonup \varphi \quad \text{în } W^{1,p}$$

şi

$$\operatorname{Tr} \varphi_k = \varphi_D,$$

atunci

$$\operatorname{Tr} \varphi_k \rightharpoonup \operatorname{Tr} \varphi.$$

Dar şirul din stânga este constant, astfel $\operatorname{Tr} \varphi = \varphi_D$.

Problema 14.9.5 (pasul Fatou pentru determinant)**.** Presupuneţi $J_k > 0$, $J_k \to J$ aproape peste tot şi

$$\sup_k \int_\Omega J_k^{-s} dX < \infty.$$

Arătaţi că $J > 0$ aproape peste tot.

Rezolvare. Dacă mulţimea $A = \{J = 0\}$ ar avea măsură pozitivă, atunci pe A am avea $J_k^{-s} \to +\infty$. Lema lui Fatou ar da

$$\liminf_k \int_A J_k^{-s} dX \geq \int_A \liminf_k J_k^{-s} dX = +\infty,$$

contradicţie cu mărginirea uniformă. Deci $\mathcal{L}^3(A) = 0$.

Problema 14.9.6 (identificarea cofactorului în limită)**.** Descrieţi argumentul prin care se arată că limita slabă a cofactorilor este cofactorul limitei gradientului.

Rezolvare. Componentele cofactorului sunt minori de ordin doi. Fiecare astfel de minor se poate rescrie ca divergenţă a unei expresii în care apare o componentă a lui φ_k multiplicată cu o derivată a altei componente. După testare şi integrare prin părţi, derivata se mută pe funcţia test. Compactitatea Sobolev oferă convergenţă puternică pentru factorul nediferenţiat, în timp ce derivata converge slab. Produsul "puternic × slab" trece atunci la limită şi identifică minorul limită. Exponenţii sunt aleşi astfel încât aceste produse să fie integrabile.

Problema 14.9.7 (identificarea determinantului)**.** De ce determinantul necesită un pas suplimentar faţă de cofactor în 3D?

Rezolvare. Determinantul este minor de ordin trei şi este cubic în gradient. O reprezentare utilă este

$$\det \nabla \varphi_k = \frac{1}{3} \operatorname{div} \Big((\operatorname{Cof} \nabla \varphi_k)^T \varphi_k \Big).$$

După testare şi integrare prin părţi apare produsul dintre φ_k şi $\operatorname{Cof} \nabla \varphi_k$. Pentru trecerea la limită trebuie ca φ_k să convergă suficient de puternic într-un spaţiu dual compatibil cu integrabilitatea cofactorului. De aici apar relaţii între exponenţii p şi q.

Problema 14.9.8 (semicontinuitatea energiei policonvexe)**.** Presupuneţi

$$Z_k = (\nabla \varphi_k, \operatorname{Cof} \nabla \varphi_k, \det \nabla \varphi_k) \rightharpoonup Z$$

şi $W(F) = G(F, \operatorname{Cof} F, \det F)$ cu G convexă, inferior semicontinuă şi mărginită inferior de o funcţie integrabilă $\beta(X)$. Deduceţi inegalitatea liminf.

Rezolvare. Funcţionala

$$\mathcal{G}(Z) = \int_\Omega G(Z(X))dX$$

este slab inferior semicontinuă în produsul spaţiilor Lebesgue corespunzătoare. Prin urmare

$$\int_\Omega G(Z)dX \le \liminf_k \int_\Omega G(Z_k)dX.$$

După identificarea minorilor, punct cu punct avem

$$G(X, Z(X)) = W(X, \nabla\varphi(X)), \qquad G(X, Z_k(X)) = W(X, \nabla\varphi_k(X)),$$

şi obţinem

$$\boxed{\int W(\nabla\varphi) \le \liminf_k \int W(\nabla\varphi_k).}$$

Problema 14.9.9 (demonstraţia existenţei pentru modelul considerat)**.** Formulaţi paşii metodei directe pentru energia din exerciţiul 2, cu date Dirichlet şi exponenţi care permit continuitatea slabă a minorilor.

Rezolvare. Alegem un şir de minimizare φ_k. Estimarea de creştere pentru W, împreună cu Poincaré–Friedrichs şi Young, absoarbe termenul liniar de încărcare $L(\varphi_k)$ şi furnizează mărginire în $W^{1,p}$, precum şi controale separate pentru cofactor şi determinant. Reflexivitatea permite extragerea unei subsecvenţe slab convergente. Continuitatea urmei păstrează condiţia Dirichlet. Teoremele de continuitate slabă a minorilor identifică limitele cofactorului şi determinantului. Bariera la $J \downarrow 0$, inclusă în reprezentantul convex extins G, exclude $\det\nabla\varphi \le 0$ pe o mulţime de măsură pozitivă. Un argument Fatou separat este legitim numai dacă dispunem în plus de convergenţă aproape peste tot a determinantelor. În final, policonvexitatea produce semicontinuitatea slabă inferioară. Astfel

$$\mathcal{I}(\varphi) \le \liminf_k \mathcal{I}(\varphi_k) = \inf_{\mathcal{A}} \mathcal{I},$$

deci φ este minimizator.

Problema 14.9.10 (un exemplu afin şi condiţia Ciarlet–Nečas)**.** Fie $\Omega = (0,1)^3$ şi

$$\varphi(X) = FX, \qquad F = \operatorname{diag}(2, \tfrac{1}{2}, 1).$$

Verificaţi orientarea, injectivitatea şi relaţia Ciarlet–Nečas

$$\int_\Omega \det\nabla\varphi \, dX \le \mathcal{L}^3(\varphi(\Omega)).$$

Rezolvare. Avem $\nabla\varphi = F$ şi

$$\det F = 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot 1 = 1 > 0,$$

deci orientarea este păstrată. Matricea F este inversabilă, astfel încât aplicaţia afină $\varphi(X) = FX$ este injectivă. În plus,

$$\int_\Omega \det \nabla\varphi \, dX = \det F \, \mathcal{L}^3(\Omega) = 1.$$

Prin schimbarea de variabile,

$$\mathcal{L}^3(\varphi(\Omega)) = \det F \, \mathcal{L}^3(\Omega) = 1.$$

Prin urmare condiţia Ciarlet–Nečas este satisfăcută cu egalitate. Exemplul arată, într-un caz elementar, legătura dintre determinantul pozitiv, variaţia de volum şi injectivitatea globală; pentru deformări Sobolev neliniare această legătură este mult mai subtilă.

14.10 Exerciţii propuse suplimentare

Nivelul A

14.A.1 *(admisibilitatea exponenţilor în teorema lui Ball)* Pentru fiecare triplet

$$(p,q,r) \in \left\{(2,2,2), \left(3,\frac{3}{2},2\right), \left(2,\frac{3}{2},2\right), \left(4,\frac{6}{5},\frac{3}{2}\right), \left(\frac{3}{2},3,2\right), \left(4,\frac{4}{3},3\right), (2,3,1)\right\},$$

verificaţi condiţiile

$$p \geq 2, \qquad q \geq p' = \frac{p}{p-1}, \qquad r > 1.$$

Pentru cazurile neadmisibile precizaţi condiţia care nu este satisfăcută.
Răspuns. Sunt admisibile

$$(2,2,2), \qquad \left(3,\frac{3}{2},2\right), \qquad \left(4,\frac{4}{3},3\right).$$

Pentru $(2,3/2,2)$ şi $(4,6/5,3/2)$ exponentul q este prea mic; pentru $(3/2,3,2)$ avem $p<2$; pentru $(2,3,1)$ avem $r=1$, deci L^r nu este reflexiv.

14.A.2 *(un model cu coeficienţi numerici)* Fie

$$W(F) = \|F\|^2 + \|\mathrm{Cof}\, F\|^2 + (\det F)^2 - 8\log(\det F) + e, \qquad \det F > 0,$$

şi $W(F) = +\infty$ pentru $\det F \leq 0$. (i) Construiţi reprezentarea convexă în minori. (ii) Alegeţi e astfel încât $W(I) = 0$. (iii) Verificaţi o estimare coercivă cu exponenţii $p = q = r = 2$. (iv) Verificaţi bariera la determinant nul.
Răspuns.

$$G(F,H,J) = \|F\|^2 + \|H\|^2 + J^2 - 8\log J + e, \qquad J > 0,$$

este convexă, deoarece

$$\frac{d^2}{dJ^2}(J^2 - 8\log J) = 2 + \frac{8}{J^2} > 0.$$

Din $W(I) = 3+3+1+e = 0$ rezultă $e = -7$. Folosind

$$-\log J \geq 1 - J, \qquad 8J \leq \frac{1}{2}J^2 + 32,$$

obţinem, de exemplu,

$$W(F) \geq \frac{1}{2}\left(\|F\|^2 + \|\mathrm{Cof}\, F\|^2 + J^2\right) - 31.$$

În plus, $-8\log J \to +\infty$ când $J \downarrow 0$. Pentru $F = \mathrm{diag}(J,1,1)$ se obţin aproximativ valorile 14.4607, 51.2620, 106.5241 pentru $J = 10^{-1}, 10^{-3}, 10^{-6}$.

14.A.3 *(bariera şi excluderea colapsului de volum)* Pe $\Omega = (0,1)$ fie

$$J_k(x) = \begin{cases} 1/k, & 0 < x < 1/2, \\ 1, & 1/2 < x < 1, \end{cases} \qquad k \geq 2.$$

(i) Calculaţi $\int_0^1 J_k^{-s} dx$ pentru $s = 1, 2$. (ii) Determinaţi limita punctuală J şi mulţimea $\{J = 0\}$. (iii) Folosiţi lema lui Fatou pentru a explica de ce o margine uniformă a termenului de barieră exclude o mulţime de măsură pozitivă pe care limita determinantului este zero.
Răspuns.

$$\int_0^1 J_k^{-s} dx = \frac{1}{2} k^s + \frac{1}{2} \longrightarrow +\infty.$$

Limita este $J = 0$ pe $(0, 1/2)$ şi $J = 1$ pe $(1/2, 1)$. Pe mulţimea $A = (0, 1/2)$, $J_k^{-s} \to +\infty$, iar Fatou dă

$$\liminf_k \int_A J_k^{-s} dx \geq \int_A \liminf_k J_k^{-s} dx = +\infty.$$

Nivelul B

14.B.1 *(calibrarea unei energii de tip Ball în starea de referinţă)* Fie

$$W(F) = a \|F\|^2 + b \|\operatorname{Cof} F\|^2 + c(\det F)^2 - d \log(\det F) + e,$$

cu $a, b, c, d > 0$ şi $\det F > 0$. (i) Calculaţi $D_F W(F)$. (ii) Arătaţi că

$$D\Big(\|\operatorname{Cof} F\|^2\Big)(I) = 4I.$$

(iii) Deduceţi condiţia pentru $D_F W(I) = 0$. (iv) Verificaţi pentru câteva alegeri de coeficienţi.
Răspuns.

$$D_F W(F) = 2aF + bD_F\Big(\|\operatorname{Cof} F\|^2\Big) + 2c(\det F) \operatorname{Cof} F - dF^{-T}.$$

Din

$$\operatorname{Cof}(I + H) = I + (\operatorname{tr} H)I - H^T + O(\|H\|^2)$$

rezultă

$$\|\operatorname{Cof}(I + H)\|^2 = 3 + 4 \operatorname{tr} H + O(\|H\|^2),$$

deci derivata este $4I$. Aşadar

$$D_F W(I) = (2a + 4b + 2c - d)I,$$

şi starea de referinţă este fără tensiuni dacă şi numai dacă

$$d = 2a + 4b + 2c.$$

Pentru $(a, b, c) = (1, 1, 1)$, $(0.375, 0.125, 0.125)$ şi $(2, 0.3, 0.7)$ rezultă, respectiv, $d = 8$, 1.5, 6.6.

14.B.2 *(pragul $p = 3$ pentru controlul cofactorului)* Presupunem $\nabla\varphi \in L^p$, astfel încât, prin estimarea algebrică a cofactorului, $\operatorname{Cof} \nabla\varphi \in L^{p/2}$. Teorema lui Ball cere un exponent

$q \geq p' = p/(p-1)$. (i) Determinaţi valorile $p \geq 2$ pentru care $p/2 \geq p'$. (ii) Interpretaţi pragul. (iii) Verificaţi pentru $p = 2, 2.5, 3, 4, 6$. (iv) Explicaţi legătura cu $1/p + 1/q \leq 1$.
Răspuns.

$$\frac{p}{2} \geq \frac{p}{p-1} \quad \Longleftrightarrow \quad p \geq 3.$$

Pentru $p \geq 3$, controlul L^p al gradientului asigură automat cel puţin integrabilitatea cofactorului în $L^{p'}$ (şi în orice L^q cu $p' \leq q \leq p/2$ pe un domeniu mărginit). Pentru $2 \leq p < 3$, un control separat al cofactorului într-un exponent $q \geq p'$ este o ipoteză suplimentară. Numeric:

p	2	2.5	3	4	6
$p/2$	1	1.25	1.5	2	3
p'	2	5/3	1.5	4/3	6/5

Condiţia $1/p + 1/q \leq 1$ permite asocierea unui factor slab controlat în L^q cu un factor care converge tare în exponentul dual q'.

14.B.3 *(verificarea ipotezelor pe un model concret)* Fie

$$W(F) = \|F\|^3 + \|\operatorname{Cof} F\|^{3/2} + (\det F)^2 + (\det F)^{-1}, \qquad \det F > 0,$$

şi $W(F) = +\infty$ pentru $\det F \leq 0$. (i) Construiţi reprezentarea convexă în minori. (ii) Identificaţi (p, q, r) şi verificaţi coercivitatea. (iii) Verificaţi bariera. (iv) Formulaţi concluzia de existenţă, presupunând clasa admisibilă nevidă, cu un element de energie finită, şi termenul de încărcare continuu.
Răspuns.

$$G(F, H, J) = \|F\|^3 + \|H\|^{3/2} + J^2 + J^{-1}, \qquad J > 0,$$

extins cu $+\infty$ pentru $J \leq 0$, este convex. Exponenţii sunt

$$p = 3, \qquad q = \frac{3}{2} = p', \qquad r = 2.$$

Mai mult,

$$W(F) \geq \|F\|^3 + \|\operatorname{Cof} F\|^{3/2} + (\det F)^2,$$

şi $(\det F)^{-1} \to +\infty$ când $\det F \downarrow 0$. Prin teorema de existenţă rezultă un minimizator. Teorema nu dă, în general, unicitate, regularitate clasică sau injectivitate globală.

Nivelul C

14.C.1 *(construcţia unei energii cu constante Lamé prescrise)* Fie

$$W(F) = a\,\|F\|^2 + b\,\|\operatorname{Cof} F\|^2 + c(\det F)^2 - d\log(\det F) + e, \qquad a, b, c, d > 0.$$

(a) Impuneţi $D_F W(I) = 0$ şi dezvoltaţi $W(I + H)$ până la ordinul doi. (b) Identificaţi constantele Lamé ale formei pătratice. (c) Pentru $\lambda_L > 0$, $\mu > 0$, construiţi coeficienţii a, b, c, d, e astfel încât $W(I) = 0$, $D_F W(I) = 0$ şi liniarizarea să aibă constantele prescrise.

Indicaţie. Folosiţi

$$\det(I+H) = 1 + \operatorname{tr} H + \frac{1}{2}\Big[(\operatorname{tr} H)^2 - \operatorname{tr}(H^2)\Big] + O(\|H\|^3),$$

$$\log\det(I+H) = \operatorname{tr} H - \frac{1}{2}\operatorname{tr}(H^2) + O(\|H\|^3),$$

$$\|\operatorname{Cof}(I+H)\|^2 = 3 + 4\operatorname{tr} H + 2(\operatorname{tr} H)^2 - \operatorname{tr}(H^2) + \|H\|^2 + O(\|H\|^3).$$

Răspuns. Condiţia de tensiune nulă este

$$d = 2a + 4b + 2c.$$

Partea pătratică este

$$(a+b)\Big[\|H\|^2 + \operatorname{tr}(H^2)\Big] + 2(b+c)(\operatorname{tr} H)^2.$$

Cum

$$\|H\|^2 + \operatorname{tr}(H^2) = 2\,\|\operatorname{sym} H\|^2,$$

rezultă

$$W(I+H) - W(I) = \mu\,\|\varepsilon\|^2 + \frac{\lambda_L}{2}(\operatorname{tr}\varepsilon)^2 + O(\|H\|^3), \qquad \varepsilon = \operatorname{sym} H,$$

cu

$$\mu = 2(a+b), \qquad \lambda_L = 4(b+c).$$

Reciproc, alegeţi

$$0 < b < \min\left\{\frac{\mu}{2}, \frac{\lambda_L}{4}\right\},$$

$$a = \frac{\mu}{2} - b, \qquad c = \frac{\lambda_L}{4} - b, \qquad d = \mu + \frac{\lambda_L}{2},$$

$$e = -(3a + 3b + c).$$

Atunci $a, b, c, d > 0$, $W(I) = 0$ şi $D_F W(I) = 0$. Reprezentarea convexă în minori, creşterea pătratică şi bariera $-d\log J$ verifică ipotezele teoremei de existenţă cu $p = q = r = 2$.

14.C.2 *(energie policonvexă cu barieră, dar fără creşterea cerută)* Fie

$$W_0(F) = \operatorname{tr} U - \log\det F = \sum_{i=1}^{3}(\lambda_i - \log\lambda_i), \qquad F \in GL^+(3),$$

extins cu $+\infty$ pentru $\det F \le 0$. (a) Verificaţi policonvexitatea şi bariera. (b) Arătaţi că nu satisface o estimare coercivă cu $p \ge 2$. (c) Studiaţi energia modificată

$$W(F) = W_0(F) + \|F\|^2 + \|\operatorname{Cof} F\|^2 + (\det F)^2.$$

Răspuns. Criteriul Steigmann se aplică lui

$$\psi(i_1, i_2, i_3) = i_1 - \log i_3,$$

care este convexă, nedescrescătoare în i_1 şi independentă de i_2. Bariera rezultă din $-\log\det F$. Pentru $F = sI$,

$$W_0(sI) = 3s - 3\log s, \qquad \|sI\|^2 = 3s^2,$$
$$\frac{W_0(sI)}{\|sI\|^2} \longrightarrow 0,$$

deci nu poate exista o coercivitate cu putere $p \geq 2$. Energia modificată este policonvexă şi satisface

$$W(F) \geq \|F\|^2 + \|\mathrm{Cof}\, F\|^2 + (\det F)^2,$$

precum şi aceeaşi barieră. Astfel se pot lua $p = q = r = 2$.

14.C.3 *(orientare locală versus injectivitate globală)* Fie

$$\Omega = \{x \in \mathbb{R}^3 : 1 < \sqrt{x_1^2 + x_2^2} < 2,\ 0 < x_3 < 1\}$$

şi, în coordonate cilindrice,

$$\varphi(\varrho\cos\theta, \varrho\sin\theta, x_3) = (\varrho\cos 2\theta, \varrho\sin 2\theta, x_3).$$

(a) Calculaţi $\det\nabla\varphi$. (b) Arătaţi că φ nu este injectivă. (c) Verificaţi condiţia Ciarlet–Nečas şi enumeraţi câteva concluzii pe care teorema lui Ball le dă, respectiv nu le dă.
Răspuns. Aplicaţia $(\varrho, \theta, x_3) \mapsto (\varrho, 2\theta, x_3)$ are

$$\det\nabla\varphi = 2 > 0.$$

Punctele (ϱ, θ, x_3) şi $(\varrho, \theta + \pi, x_3)$ au aceeaşi imagine, deci aplicaţia este de multiplicitate doi. Cum

$$|\Omega| = \pi(2^2 - 1^2) = 3\pi,$$

avem

$$\int_\Omega \det\nabla\varphi\, dX = 6\pi, \qquad |\varphi(\Omega)| = 3\pi.$$

Prin urmare condiţia Ciarlet–Nečas este încălcată. Teorema de existenţă poate furniza un minimizator Sobolev cu condiţia Dirichlet şi $\det\nabla\varphi > 0$ a.p.t.; ea nu garantează, în general, unicitatea, injectivitatea globală sau regularitatea clasică a minimizatorului.

Bibliografie

[1] R. A. Adams and J. J. F. Fournier, *Sobolev Spaces*, 2nd ed., Academic Press, Amsterdam, 2003.

[2] J. M. Ball, Convexity conditions and existence theorems in nonlinear elasticity, *Archive for Rational Mechanics and Analysis* **63** (1977), 337–403.

[3] P. G. Ciarlet, *Mathematical Elasticity. Vol. I: Three-Dimensional Elasticity*, Studies in Mathematics and Its Applications, Vol. 20, North-Holland, Amsterdam, 1988.

[4] P. G. Ciarlet, *An Introduction to Differential Geometry with Applications to Elasticity*, Springer, Dordrecht, 2005 (book edition published 2006).

[5] B. Dacorogna, *Direct Methods in the Calculus of Variations*, 2nd ed., Applied Mathematical Sciences, Vol. 78, Springer, New York, 2008.

[6] L. C. Evans, *Partial Differential Equations*, 2nd ed., Graduate Studies in Mathematics, Vol. 19, American Mathematical Society, Providence, 2010.

[7] M. E. Gurtin, *An Introduction to Continuum Mechanics*, Mathematics in Science and Engineering, Vol. 158, Academic Press, New York, 1981.

[8] J. K. Knowles and E. Sternberg, On the failure of ellipticity of the equations for finite elastostatic plane strain, *Archive for Rational Mechanics and Analysis* **63** (1976), 321–336.

[9] J. K. Knowles and E. Sternberg, On the failure of ellipticity and the emergence of discontinuous deformation gradients in plane finite elastostatics, *Journal of Elasticity* **8** (1978), 329–379.

[10] M. Kružík and T. Roubíček, *Mathematical Methods in Continuum Mechanics of Solids*, Interaction of Mechanics and Mathematics, Springer, Cham, 2019.

[11] A. Morro and C. Giorgi, *Mathematical Modelling of Continuum Physics*, Modeling and Simulation in Science, Engineering and Technology, Birkhäuser, Cham, 2023.

[12] P. Neff, Y. Nakatsukasa and A. Fischle, A logarithmic minimization property of the unitary polar factor in the spectral and Frobenius norms, *SIAM Journal on Matrix Analysis and Applications* **35** (2014), 1132–1154.

[13] S. Neukamm, *Notes for the Course Nonlinear Elasticity*, preliminary lecture notes, Technische Universität Dresden, winter term 2019.

[14] R. W. Ogden, *Non-Linear Elastic Deformations*, Ellis Horwood, Chichester, 1984.

[15] G. B. Whitham, *Linear and Nonlinear Waves*, John Wiley & Sons, New York, 1974.

[16] S. S. Antman, *Nonlinear Problems of Elasticity*, 2nd ed., Applied Mathematical Sciences, Vol. 107, Springer, New York, 2005.

[17] P. G. Ciarlet and J. Nečas, Injectivity and self-contact in nonlinear elasticity, *Archive for Rational Mechanics and Analysis* **97** (1987), 171–188.

[18] G. Friesecke, R. D. James and S. Müller, A theorem on geometric rigidity and the derivation of nonlinear plate theory from three-dimensional elasticity, *Communications on Pure and Applied Mathematics* **55** (2002), 1461–1506.

[19] D. Ieşan, *Saint-Venant's Problem*, Lecture Notes in Mathematics, Vol. 1279, Springer-Verlag, Berlin, 1987.

[20] D. Ieşan, *Classical and Generalized Models of Elastic Rods*, Chapman & Hall/CRC Press, Boca Raton, 2009.

[21] J. E. Marsden and T. J. R. Hughes, *Mathematical Foundations of Elasticity*, Prentice-Hall, 1983; reprinted by Dover Publications, New York, 1994.

[22] V. Šverák, Rank-one convexity does not imply quasiconvexity, *Proceedings of the Royal Society of Edinburgh, Section A* **120** (1992), 185–189.

[23] C. B. Morrey, Jr., Quasi-convexity and the lower semicontinuity of multiple integrals, *Pacific Journal of Mathematics* **2** (1952), 25–53.

[24] R. S. Rivlin and J. L. Ericksen, Stress-deformation relations for isotropic materials, *Journal of Rational Mechanics and Analysis* **4** (1955), 323–425.

[25] M. Šilhavý, *The Mechanics and Thermodynamics of Continuous Media*, Springer, Berlin, 1997.

[26] D. J. Steigmann, On isotropic, frame-invariant, polyconvex strain-energy functions, *Quarterly Journal of Mechanics and Applied Mathematics* **56** (2003), 483–491.

[27] S. P. Timoshenko and J. N. Goodier, *Theory of Elasticity*, 3rd ed., McGraw-Hill, New York, 1970.