Calcul diferential pentru functii de mai multe variabile

Ionut Munteaanu

CAPITOLUL 1

Şiruri. Convergenţă în $\mathbb{R}^N$

Noţiunea de şir convergent de numere reale este cunoscută din liceu.

Definiţia 1. *Spunem că* $(x_n)_n \subset \mathbb{R}$ *este convergent la* $x \in \mathbb{R}$ *dacă şi numai dacă oricare ar fi* $\varepsilon > 0$*, există* $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ *astfel încât oricare ar fi* $n \geq N_\varepsilon$*, să avem* $|x_n - x| < \varepsilon$.

Pentru a putea discuta despre convergenţa unui şir într-o altfel de mulţime, mai generală, introducem noţiunea de distanţă.

Definiţia 2. *Fie* M *o mulţime oarecare. Funcţia* $d : M \times M \to \mathbb{R}$ *se numeşte distanţă (metrică) dacă şi numai dacă au loc următoarele proprietăţi:*

(d1) $d(x, y) \geq 0,\ \forall\, x, y \in M; \quad d(x, x) = 0,\ \forall x \in M.$
(d2) $d(x, y) = d(y, x),\ \forall\, x, y \in M.$
(d3) $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y),\ \forall\, x, y, z \in M.$

În acest caz spunem că $(M,\, d)$ *este spaţiu metric.*

Exemple:

1. pentru $M = \mathbb{R}$, $d(x, y) = |x - y|$.
2. pentru $M = \mathbb{R}^2$, $x = (x_1, x_2)$, $y = (y_1, y_2)$, iar

$$d(x, y) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2}.$$

3. pentru $M = \mathbb{R}^3$, $x = (x_1, x_2, x_3)$, $y = (y_1, y_2, y_3)$, iar

$$d(x, y) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + (x_3 - y_3)^2}.$$

Observaţie. *Toate acestea sunt cazuri particulare ale cazului general în care* $M = \mathbb{R}^N$*, deci* $x, y \in M$ *sunt de forma* $x = (x_1, x_2, \ldots x_N)$*,* $y = (y_1, y_2, \ldots y_N)$*, iar*

$$d(x, y) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + \cdots + (x_N - y_N)^2}.$$

Metrica d din aceste exemple se numeşte ***metrică (distanţă) Euclidiană****.*

Exemple:

1. Fie $x, y \in \mathbb{R}^2$, $x = (1, 2)$, $y = (3, 8)$. Atunci distanţa Euclidiană de la x la y este $d(x, y) = \sqrt{(1-3)^2 + (2-8)^2} = \sqrt{4+36} = 2\sqrt{10}$.
2. Fie $x, y \in \mathbb{R}^3$, $x = (0, -3, 2)$, $y = (5, 1, 4)$. Atunci distanţa Euclidiană de la x la y este $d(x, y) = \sqrt{(0-5)^2 + (-3-1)^2 + (2-4)^2} = \sqrt{25+16+4} = 3\sqrt{5}$.

Există şi alte tipuri de distanţe, de exemplu, oricărei mulţimi de elemente M i se poate asocia aşa numita metrică trivială,

$$d(x, y) = \begin{cases} 0, & \text{dacă } x = y \\ 1, & \text{dacă } x \neq y. \end{cases}$$

Însă noi suntem interesaţi doar de spaţiile $\mathbb{R}^N$ (de obicei $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}^2$ sau $\mathbb{R}^3$) înzestrate cu metrica Euclidiană.

Exerciţiu: Arătaţi că metrica Euclidiană şi metrica trivială satisfac proprietăţile (d1)-(d3) descrise în Definiţia 2.

Revenind la discuţia iniţială, cea referitoare la convergenţa şirurilor, putem introduce următoarea definiţie.

Definiţia 3. *Spunem că $(x_n)_n \subset \mathbb{R}^N$ este convergent la $x \in \mathbb{R}^N$ dacă şi numai dacă oricare ar fi $\varepsilon > 0$, există $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ astfel încât oricare ar fi $n \geq N_\varepsilon$, să avem $d(x_n, x) < \varepsilon$.*

Proprietatea 1. *Proprietatea de convergenţă din $\mathbb{R}^N$ poate fi gândită pe componente, adică, pentru orice şir $(x_n)_n \subset \mathbb{R}^N$ cu $x_n = (x_n^1, x_n^2, \ldots x_n^N)$, $n \geq 1$, avem*

$$\lim_{n\to\infty} (x_n^1, x_n^2, \ldots x_n^N) = \left(\lim_{n\to\infty} x_n^1, \lim_{n\to\infty} x_n^2, \ldots \lim_{n\to\infty} x_n^N \right).$$

Demonstraţie:
Fie $\varepsilon > 0$ arbitrar fixat. Atunci

$$d(x_n, x) < \varepsilon \quad \Leftrightarrow \quad \sqrt{(x_n^1 - x^1)^2 + (x_n^2 - x^2)^2 + \cdots + (x_n^N - x^N)^2} < \varepsilon \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad (x_n^1 - x^1)^2 + (x_n^2 - x^2)^2 + \cdots + (x_n^N - x^N)^2 < \varepsilon^2 \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad \begin{cases} |x_n^1 - x^1| < \varepsilon; \\ |x_n^2 - x^2| < \varepsilon; \\ . \\ . \\ . \\ |x_n^N - x^N| < \varepsilon. \end{cases} \tag{1}$$

Reciproc, dacă (1) are loc, atunci parcurgând drumul invers deducem că $d(x_n, x) < \varepsilon\sqrt{N}$. □

Exemplu: $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{1}{n}, \frac{-3n+4}{5n+9}\right) = \left(\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n}, \lim\limits_{n\to\infty} \frac{-3n+4}{5n+9}\right) = \left(0, -\frac{3}{5}\right)$.

O altă modalitate de a-l privi pe $\mathbb{R}^N$ este ca spaţiu vectorial normat, dat fiind că $\left(\mathbb{R}^N, +, \cdot\right)$ are structură de spaţiu vectorial.

Definiţia 4. *Fie $(X, +, \cdot)$ un spaţiu vectorial peste $\mathbb{R}$. Aplicaţia $\|\cdot\| : X \to \mathbb{R}$ se numeşte normă dacă şi numai dacă au loc proprietăţile*

(n1) $\|x\| \geq 0,\ \forall\, x \in X;\quad \|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0,\ \forall x \in M.$
(n2) $\|\alpha x\| = |\alpha|\|x\|,\ \forall\, \alpha \in \mathbb{R},\ \forall\, x \in X.$
(n3) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|,\ \forall\, x, y \in X.$

În acest caz spunem că $(X, \|\cdot\|)$ este spaţiu normat.

Pe $\left(\mathbb{R}^N, +, \cdot\right)$ definim **norma Euclidiană** astfel:

$$\|x\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_N^2}, \quad \text{pentru } x = (x_1, x_2, \ldots x_N).$$

Exemplu: Fie $x \in \mathbb{R}^3$, $x = (1, 2 {-} 5)$. Atunci $\|x\| = \sqrt{1^2 + 2^2 + (-5)^2} = \sqrt{30}$.

Exerciţiu: Arătaţi că norma Euclidiană satisface proprietăţile (n1)-(n3) descrise în Definiţia 4.

De remarcat faptul că orice spaţiu normat este spaţiu metric deoarece putem defini $d(x, y) = \|x - y\|$. Reciproc nu, deoarece pentru a fi spaţiu normat trebuie să fie în primul rând spaţiu vectorial, în timp ce pentru a avea un spaţiu metric nu avem nicio restricţie de acest tip, orice mulţime poate fi spaţiu metric (dacă este înzestrată cu o distanţă).

Rescriem acum definiţia convergenţei în $\mathbb{R}^N$ cu ajutorul noţiunii de normă.

Definiţia 5. *Spunem că $(x_n)_n \subset \mathbb{R}^N$ este convergent la $x \in \mathbb{R}^N$ dacă şi numai dacă oricare ar fi $\varepsilon > 0$, există $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ astfel încât oricare ar fi $n \geq N_\varepsilon$, să avem $\|x_n - x\| < \varepsilon$.*

OBSERVAŢIE. *La fel cum s-a învăţat în liceu, dacă un şir nu este convergent, atunci el se numeşte şir divergent.*

Exerciţii pentru fixarea noţiunilor nou introduse

1. Fie $x, y, z, v \in \mathbb{R}^2$, $x = (-1, 2)$, $y = (0, 3)$, $z = (4, 2)$, $v = (-3, -2)$. Determinaţi: $\|x\|$, $\|y\|$, $\|z\|$, $\|v\|$, $\|x - y\|$, $\|y - x\|$, $\|x - z\|$, $d(x, z)$, $d(x, v)$, $d(y, z)$, $d(z, y)$, $d(v, z)$, $d(y, v)$.
2. Fie $x, y, z \in \mathbb{R}^3$, $x = (-1, 0, 2)$, $y = (0, -3, 1)$, $z = (-1, 1, 2)$. Determinaţi: $\|x\|$, $\|y\|$, $\|z\|$, $\|x - y\|$, $d(x, z)$, $d(y, z)$.
3. Calculaţi $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$, unde:

   a) $x_n = \left(\dfrac{n^2 + 5n - 4}{2n^2 + 7n + 111}, \dfrac{n^2 + 59}{-8n^3 + 6n^2 + 8n + 8} \right)$;

   b) $x_n = \left(\dfrac{-8n^5 + 5n^3 - 41}{n^6 + n + 1}, \dfrac{-3n^4 - 9}{-6n^4 + 8n^2}, \dfrac{-n^3 + n^2 - 3}{n^3 + 2n + 4} \right)$;

   c) $x_n = \left(\dfrac{(-1)^n}{n^6 + n^3 - n^2}, \dfrac{2n^2 + 12n}{4n^2 - 10n - 13} \right)$;

   d) $x_n = \left(\dfrac{\cos(n^2 + 3n)}{n^2 - n + 2}, \dfrac{-n^2 + n - 19}{n^4 + n^2 + 2}, \dfrac{n - 1}{7n + 2} \right)$;

   e) $x_n = \left(\dfrac{\sin(25n - 14)}{-4n^3 + n^2 - 5n}, n \sin\left(\dfrac{1}{n}\right) \right)$.

CAPITOLUL 3

Limite de funcţii. Continuitate

Definiţia 14. *Spunem că $B(x_0, r) \subset \mathbb{R}^N$ este o bilă deschisă centrată în x_0 şi de rază r dacă*

$$B(x_0, r) = \{x \in \mathbb{R}^N| \quad d(x, x_0) < r\}.$$

De asemenea,

$$\overline{B(x_0, r)} = \{x \in \mathbb{R}^N| \quad d(x, x_0) \leq r\}$$

se numeşte bilă închisă centrată în x_0 şi de rază r.

Reamintim definiţia distanţei Euclidiene:

$$d(x, y) = \|x - y\| = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + \cdots + (x_N - y_N)^2},$$

unde x, $y \in \mathbb{R}^N$, $x = (x_1, x_2, \ldots x_N)$, $y = (y_1, y_2, \ldots y_N)$.

Exemplu: dacă $x, y \in \mathbb{R}^3$, $x = (1, -2, 5)$, $y = (-2, -1, 3)$, norma diferenţei lor este

$$\|x - y\| = \sqrt{3^2 + 1^2 + 2^2} = \sqrt{14}.$$

Exemple de bile deschise:

1. În $\mathbb{R}$, bilele deschise centrate în x_0 sunt intervale deschise centrate în x_0, adică intervale de forma
$$(x_0 - r,\ x_0 + r).$$
2. În $\mathbb{R}^2$, bilele deschise centrate în x_0 sunt reprezentate de suprafaţa din interiorul cercurilor centrate în x_0, $\mathcal{C}(x_0, r)$ (sunt discuri de cerc fără frontieră, adică fără cercul propriu-zis).
3. În $\mathbb{R}^3$, bilele deschise centrate în x_0 sunt reprezentate de interiorul sferelor centrate în x_0, $\mathcal{S}(x_0, r)$.

Definiţia 15. *Fie $x_0 \in \mathbb{R}^N$. Spunem că $V \subseteq \mathbb{R}^N$ este o vecinătate a lui x_0 şi notăm $V \in \mathcal{V}(x_0)$ sau $V \in \mathcal{V}_{x_0}$ dacă există $B(x_0, r)$, o bilă deschisă centrată în x_0, astfel încât $B(x_0, r) \subseteq V$.*

Exemplu: O vecinătate a punctului $x_0 = (3,7) \in \mathbb{R}^2$ este suprafaţa dreptunghiulară $(1,5) \times (6,8)$.

În particular, orice bilă deschisă centrată în x_0 este o vecinătate a lui x_0, deci $B(x_0, r) \in \mathcal{V}(x_0)$.

DEFINIŢIA 16. *Spunem că $a \in \mathbb{R}^N$ este punct de acumulare pentru o mulţime $A \subseteq \mathbb{R}^N$ dacă şi numai dacă în orice vecinătate $V \in \mathcal{V}(a)$ există $x \in A$ astfel încât $a \neq x$ (cu alte cuvinte $A \cap (V \setminus \{a\}) \neq \emptyset$). Mulţimea tuturor punctelor de acumulare a unei mulţimi A se notează A' şi mai este numită şi mulţime derivată a lui A.*

Exemplu: $A = [1,3) \cup \{4,5,9\} \ \Rightarrow\ A' = [1,3]$.

Reamintim acum definiţia limitei unei funcţii definite pe axa reală, $f : A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

DEFINIŢIA 17. *Spunem că $f : A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ are limita $l \in \mathbb{R}$ în punctul $a \in A'$ dacă oricare ar fi $\varepsilon > 0$, există $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ astfel încât oricare ar fi $x \in A$ cu $|x - a| < \delta$ avem*

$$|f(x) - l| < \varepsilon.$$

Cu alte cuvinte, când x se apropie de a, valoarea lui f în x se apropie de l.

Trecem acum la definiţia generală, cea referitoare la orice funcţie $f : A \subseteq \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^p$. Deoarece trecerea de la functiile de pe axa reală, studiate în liceu, la această clasă de funcţii poate părea puţin inconfortabilă la început, pentru studenţii din anul I, dăm câteva exemple de funcţii $f : A \subseteq \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^p$.

Exemple:

1. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^4$, $f(x) = (x+1,\ 3x^2 - 2,\ \cos x,\ 4^{x-1})$.
2. $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x,y) = 7x^4y - 5xy + 10y^2 + 1$.
3. $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, $f(x,y,z) = \left(\dfrac{x+yz}{y^2+2},\ e^{x+2y-z}\right)$.

DEFINIŢIA 18. *Spunem că $f : A \subseteq \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^p$ are limita $l \in \mathbb{R}^p$ în punctul $a \in A'$ dacă oricare ar fi $\varepsilon > 0$, există $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ astfel încât oricare ar fi $x \in A$ cu $\|x - a\| < \delta$ avem*

$$\|f(x) - l\| < \varepsilon.$$

Evident, aşa cum am mai explicat, definiţia de mai sus poate fi formulată şi cu ajutorul noţiunii de distanţă, dat fiind că $d(x,y) = \|x - y\|$.

TEOREMA 11. *Dacă există, limita este unică.*

De asemenea, este bine de menţionat că o funcţie care ia valori în $\mathbb{R}^p$ se numeşte funcţie vectorială şi este de forma

$$f(x) = (f_1(x), f_2(x), \ldots, f_p(x)),$$

iar funcţiile $f_1,\ f_2, \ldots, f_p : A \subseteq \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ reprezintă componentele sale cu valori reale.

OBSERVAŢIE. *Limita poate fi privită pe componente, adică definiţia anterioară poate fi reformulată, ţinând cont de faptul că* $x = (x_1, x_2, \ldots, x_N)$, $a = (a_1, a_2, \ldots, a_N)$, $f = (f_1, f_2, \ldots, f_p)$ *şi* $l = (l_1, l_2, \ldots, l_p)$, *după cum urmează.*

DEFINIŢIA 19. *Spunem că* $f : A \subseteq \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^p$ *are limita* $l \in \mathbb{R}^p$ *în punctul* $a \in A'$ *dacă oricare ar fi* $\varepsilon > 0$, *există* $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ *astfel încât oricare ar fi* $x \in A$ *cu* $|x_i - a_i| < \delta$, $i \in \{1, 2, \ldots, N\}$ *avem*

$$|f_j(x) - l_j| < \varepsilon \quad \textit{pentru orice } j \in \{1, 2, \ldots, p\}.$$

Exemple:

1. $f : \mathbb{R}^\star \to \mathbb{R}^2$, $f(x) = \left(\dfrac{\sin x}{x}, x^2 + 3 \right) \Rightarrow$

$$\lim_{x \to 0} f(x) = \left(\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x}, \lim_{x \to 0} (x^2 + 3) \right) = (1, 3).$$

2. $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, $f(x, y) = (x^2 + 2,\ xy - 3, 2x^3 + y^2) \Rightarrow$

$$\begin{aligned} &\lim_{(x,y) \to (-1,2)} f(x, y) \\ &= \left(\lim_{(x,y) \to (-1,2)} (x^2 + 2), \lim_{(x,y) \to (-1,2)} (xy - 3), \lim_{(x,y) \to (-1,2)} (2x^3 + y^2) \right) \\ &= (3, -5, 2). \end{aligned}$$

TEOREMA 12. $\lim\limits_{x \to a} f(x) = l$ *dacă şi numai dacă oricare ar fi* $(x_n)_n \subset A$ *astfel încât* $x_n \to a$ *când* $n \to \infty$, *avem*

$$f(x_n) \to l \quad \textit{când } n \to \infty.$$

CONSECINŢA 3. *Dacă există* $(x_n)_n$, $(y_n)_n \subseteq A$ *astfel încât* $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = \lim\limits_{n \to \infty} y_n = a$, *dar* $\lim\limits_{n \to \infty} f(x_n) \neq \lim\limits_{n \to \infty} f(y_n)$, *atunci nu există* $\lim\limits_{x \to a} f(x)$.

Exerciţiu: Fie $f : \mathbb{R}^3 \setminus \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 | \quad x^2+y^2-z=0\} \to \mathbb{R}$, dată de $f(x,y,z) = \dfrac{2xy-z}{x^2+y^2-z}$. Stabiliţi dacă există $\lim\limits_{(x,y,z)\to(0,0,0)} f(x,y,z)$.

Rezolvare: Alegem

$$(x_n, y_n, z_n) = (0, \frac{1}{n}, 0) \to (0,0,0)$$

şi

$$(x'_n, y'_n, z'_n) = (\frac{1}{n}, \frac{1}{n}, \frac{1}{n}) \to (0,0,0).$$

Avem

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n, y_n, z_n) = 0,$$

dar

$$\lim_{n\to\infty} f(x'_n, y'_n, z'_n) = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{2}{n^2} - \frac{1}{n}}{\frac{2}{n^2} - \frac{1}{n}} = 1,$$

ceea ce înseamnă că

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n, y_n, z_n) \neq \lim_{n\to\infty} f(x'_n, y'_n, z'_n)$$

şi conform Consecinţei 3, deducem că nu există $\lim\limits_{(x,y,z)\to(0,0,0)} f(x,y,z)$.

DEFINIŢIA 20. *Fie $f : A \subseteq \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^p$. Spunem că f are limită în $a \in A'$ după direcţia $v \in \mathbb{R}^N \setminus \{0\}$ dacă există $\lim\limits_{t\to 0} f(a+tv)$.*

OBSERVAŢIE. *Prin $0 \in \mathbb{R}^N$ întelegem elementul $(0,0,\ldots,0)$. În general, pentru simplificarea scrierii, nu facem diferenţă de notaţie între un scalar $x \in \mathbb{R}$ şi un vector $x = (x_1, x_2, \ldots, x_N) \in \mathbb{R}^N$ deoarece considerăm că se subînţelege din context (de exemplu, în definiţia anterioară, 0 nu putea fi scalar deoarece avem $0 \in \mathbb{R}^N$.*

PROPRIETATEA 6. *Dacă există $\lim\limits_{x\to a} f(x)$, atunci f are limită în $a \in A'$ după orice direcţie $v \in \mathbb{R}^N \setminus \{0\}$ şi $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{t\to 0} f(a+tv)$.*

Reciproc nu: se poate ca o funcţie să aibă limită în a după orice direcţie $v \neq 0$, dar să nu aibă limită în a.

Exemplu: În exerciţiul anterior, nu există $\lim\limits_{(x,y,z)\to(0,0,0)} f(x,y,z)$. Arătăm acum că f are limită în 0 după orice direcţie $v \neq 0$. Fie $v = (v_1, v_2, v_3) \in$

$\mathbb{R}^3$ arbitrar ales.

$$\lim_{t\to 0} f(0+tv) = \lim_{t\to 0} f(tv_1, tv_2, tv_3) = \lim_{t\to 0} \frac{2t^2 v_1 v_2 - tv_3}{t^2 v_1^2 + t^2 v_2^2 - tv_3} =$$

$$= \lim_{t\to 0} \frac{2tv_1 v_2 - v_3}{tv_1^2 + tv_2^2 - v_3} = \begin{cases} 1, & \text{dacă } v_3 \neq 0, \\ \dfrac{2v_1 v_2}{v_1^2 + v_2^2} & \text{dacă } v_3 = 0. \end{cases}$$

Trecem acum la noţiunea de continuitate.

Definiţia 21. *Spunem că $f : A \subseteq \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^p$ este continuă în $a \in A \cap A'$ dacă şi numai dacă $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$. Dacă f nu este continuă în a, atunci spunem că f este discontinuă în a. Dacă f este continuă în orice $a \in A$, atunci spunem că f este continuă pe A.*

Teorema 13. *Funcţia $f : A \subseteq \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^p$, $f = (f_1, f_2, \ldots, f_p)$ este continuă în $a \in A \cap A'$ dacă şi numai dacă toate componentele ei f_i, $i \in \{1, 2, \ldots, p\}$, sunt continue în a.*

Exerciţiu: Studiaţi continuitatea funcţiei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, dată de $f(x,y) = (f_1(x,y),\, f_2(x,y))$, unde

$$f_1(x,y) = x^5 - 6x^3y^2 + 12y - 6;$$

$$f_2(x,y) = \begin{cases} (x^2+y^2)\sin\frac{1}{x^2+y^2} & \text{dacă } (x,y) \neq (0,0), \\ 0, & \text{dacă } (x,y) = (0,0), \end{cases}$$

în punctul $(0,0)$.

Rezolvare: Funcţia f_1 este continuă în $(0,0)$ deoarece

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f_1(x,y) = 6 = f_1(0,0).$$

De asemenea, $f_2(0,0) = 0$, iar

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f_2(x,y) = 0$$

deoarece $\lim_{(x,y)\to(0,0)} (x^2+y^2) = 0$ şi funcţia sin este mărginită. De aici rezultă că şi f_2 este continuă în $(0,0)$, ceea ce conduce la concluzia că f este continuă în $(0,0)$.

Exerciţii pentru fixarea noţiunilor nou introduse

1. Fie $f : \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 |\, x^2 + y^2 \neq 0\} \to \mathbb{R}$, $f(x, y) = \dfrac{xy}{x^2 + 3y^2}$.
   a) Calculaţi limita funcţiei f în punctul $(-2, 2)$.
   b) Stabiliţi dacă există limita funcţiei f în punctul $(-2, 2)$ după orice direcţie $v \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$; dacă există, calculaţi-o.
   c) Arătaţi că nu există limita funcţiei f în punctul $(0, 0)$.
   d) Determinaţi limita funcţiei f în punctul $(0, 0)$ după direcţia vectorului v, unde:
      (i) $v = (-3, 5)$;
      (i) $v = (0, 2)$;
      (iii) $v = (4, 1)$.

2. Fie $f : \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 |\, xy - x \neq 0\} \to \mathbb{R}$, $f(x, y) = \dfrac{xy - y - x + 1}{xy - x}$.
   a) Calculaţi limita funcţiei f în punctul $(2, 1)$.
   b) Stabiliţi dacă există limita funcţiei f în punctul $(2, 1)$ după orice direcţie $v \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$; dacă există, calculaţi-o.
   c) Arătaţi că nu există limita funcţiei f în punctul $(0, 1)$.
   d) Determinaţi limita funcţiei f în punctul $(0, 1)$ după direcţia vectorului $v = (3, 2)$.

3. Fie $f : \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 |\, x^3 + yz^2 \neq 0\} \to \mathbb{R}$, $f(x, y, z) = \dfrac{x^2y - 4z}{x^3 + yz^2}$.
   a) Calculaţi limita funcţiei f în punctul $(1, 1, -2)$.
   b) Calculaţi limita funcţiei f în punctul $(1, 1, -2)$ după direcţia vectorului $v = (0, 1, 3)$.
   c) Stabiliţi dacă există limita funcţiei f în punctul $(0, 0, 0)$.
   d) Determinaţi limita funcţiei f în punctul $(0, 0, 0)$ după direcţia vectorului $v = (2, 4, 1)$.

4. Fie funcţiile $f : \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 |\, x - 2y \neq 0\} \to \mathbb{R}^3$,
$$f(x, y) = \left(x^2y + 6,\ \frac{x^2 - 4y^2}{x - 2y},\ 3xy\right)$$
şi $g : (\mathbb{R}^\star)^2 \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$,
$$g(x, y, z) = \left(\frac{\operatorname{tg} x}{x} + 2,\ x + y + 4z,\ \frac{xy + 7y^2}{3y}\right).$$

Calculaţi limita funcţiei f în punctul $(4, 2)$ şi limita funcţiei g în punctul $(0, 0, 3)$.

5. Fie funcţia $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, dată de $f(x, y, z) = (f_1(x, y, z),\ f_2(x, y, z))$, unde

$$f_1(x, y, z) = |3y - 5|;$$

$$f_2(x, y, z) = \begin{cases} xy - (1 - z)\sin\dfrac{1}{1 - z} & \text{dacă } z \neq 1, \\ \\ xy - 1 & \text{dacă } z = 1. \end{cases}$$

Studiaţi continuitatea funcţiei f în punctul $(1, 0, 1)$.

6. Fie funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$, dată de $f(x) = (f_1(x),\ f_2(x))$, unde

$$f_1(x) = \begin{cases} 5x - 3 & \text{dacă } x \leq 1, \\ \\ -2x + 4 & \text{dacă } x > 1, \end{cases}$$

$$f_2(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - 16}{x - 4} & \text{dacă } x < 4, \\ \\ 2x & \text{dacă } x \geq 4. \end{cases}$$

Studiaţi continuitatea funcţiei f pe $\mathbb{R}$.

CAPITOLUL 4

Diferenţiabilitate

Diferenţiabilitatea funcţiilor poate fi privită ca o generalizare a noţiunii de derivabilitate care a fost studiată în liceu şi rămâne în strânsă legătură cu aceasta. De aceea amintim în cele ce urmează cele mai importante formule ale derivatelor precum şi regulile de bază care apar în calculul derivatelor.

Derivate ale unor funcţii elementare

1. $(x^\alpha)' = \alpha\, x^{\alpha-1}$. Consecinţe: $(const.)' = 0$, $x' = 1$;
2. $(a^x)' = a^x \ln a$. Consecinţă: $(e^x)' = e^x$;
3. $(\log_a x)' = \dfrac{1}{x \ln a}$. Consecinţă: $(\ln x)' = \dfrac{1}{x}$;
4. $(\sin x)' = \cos x$;
5. $(\cos x)' = -\sin x$;
6. $(\operatorname{tg} x)' = \dfrac{1}{\cos^2 x}$;
7. $(\operatorname{ctg} x)' = \dfrac{-1}{\sin^2 x}$;
8. $(\arcsin x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$;
9. $(\arccos x)' = \dfrac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$;
10. $(\operatorname{arctg} x)' = \dfrac{1}{x^2+1}$;
11. $(\operatorname{arcctg} x)' = \dfrac{-1}{x^2+1}$.

Câteva reguli de derivare

1. $(f \pm g)' = f' \pm g'$;
2. $(cf)' = cf'$, unde $c \in \mathbb{R}$;
3. $(fg)' = f'g + fg'$;
4. $\left(\dfrac{f}{g}\right)' = \dfrac{f'g - fg'}{g^2}$;
5. $(f(u))' = f'(u) \cdot u'$.

Exemple:

1.
$$\begin{aligned}
&\left(-4x^{50} + 27x^3 - 16x^2 + 3x - 68\right)' \\
&\qquad = \left(-4x^{50}\right)' + \left(27x^3\right)' - \left(16x^2\right)' + (3x)' - (68)' \\
&\qquad = -4\left(x^{50}\right)' + 27\left(x^3\right)' - 16\left(x^2\right)' + 3x' \\
&\qquad = -200x^{49} + 81x^2 - 32x + 3;
\end{aligned}$$

2.
$$\begin{aligned}
&\left((6x^2 + x - 9)\cos x\right)' \\
&\qquad = \left(6x^2 + x - 9\right)' \cos x + (6x^2 + x - 9)\,(\cos x)' \\
&\qquad = (12x + 1)\cos x + (6x^2 + x - 9)(-\sin x);
\end{aligned}$$

3.
$$\left(\frac{\log_5 x}{\operatorname{arctg} x}\right)' = \frac{(\log_5 x)' \operatorname{arctg} x - \log_5 x\,(\operatorname{arctg} x)'}{\operatorname{arctg}^2 x}$$

$$= \frac{\dfrac{\operatorname{arctg} x}{x\ln 5} - \dfrac{\log_5 x}{1 + x^2}}{\operatorname{arctg}^2 x};$$

4.
$$\begin{aligned}
(\arccos\ (4^x))' &= \frac{-1}{\sqrt{1 - (4^x)^2}}\,(4^x)' \\
&= \frac{-4^x \ln 4}{\sqrt{1 - 4^{2x}}}.
\end{aligned}$$

Pentru a uşura procesul de însuşire a noţiunii de diferenţiabilitate, în funcţie de tipul funcţiilor studiate, vom trata, pe rând, următoarele cazuri:

1. cazul funcţiilor reale de variabilă reală, adică funcţii de tipul $f : A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.
   Exemplu: $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 5x^2 - 6$.
2. cazul funcţiilor vectoriale de variabilă reală, adică funcţii de tipul $f : A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}^N$.
   Exemplu: $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$, $f(x) = (5x^2 - 6,\ 2x + 8,\ e^x)$.
3. cazul funcţiilor reale de variabilă vectorială, adică funcţii de tipul $f : A \subseteq \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$.
   Exemplu: $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x, y) = e^{x+y}$.
4. cazul funcţiilor vectoriale de variabilă vectorială, adică funcţii de tipul $f : A \subseteq \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^p$.
   Exemplu: $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$,
   $$f(x, y, z) = (xyz,\ x^2 - 6z,\ \ln(x^2 + y^2 + z^2 + 2),\ 2y + 4).$$

Înainte de a începe această discuţie introducem câteva definiţii utile.

DEFINIŢIA 22. *Fie $A \subseteq \mathbb{R}^N$. Punctul $x_0 \in A$ este punct interior al mulţimii A dacă există o vecinătate $V \in \mathcal{V}_{x_0}$ astfel încât $V \subseteq A$.*

DEFINIŢIA 23. *Mulţimea A se numeşte mulţime deschisă dacă este formată numai din puncte interioare. Complementara unei mulţimi deschise se numeşte mulţime închisă.*

OBSERVAŢIE. *O mulţime închisă poate fi gândită ca reuniunea dintre o mulţime deschisă A cu frontiera sa şi se notează prin $\bar{A}$.*

Exemple:

1. Toate bilele deschise sunt mulţimi deschise (a se vedea Definiţia 14 precum şi exemplele corespunzătoare).
2. Orice interval (a, b) este o mulţime deschisă. De asemenea, reuniunea, intersecţia şi produsul cartezian a două intervale deschise (sau a oricăror mulţimi deschise) reprezintă o mulţime deschisă. În acelaşi timp, un interval de forma $[a, b)$ nu este o mulţime deschisă deoarece punctul a nu este punct interior al acestui interval. Nici intervalele de forma $(a, b]$ sau $[a, b]$ nu sunt mulţimi

deschise, din motive similare. Mai mult, $[a, b]$ este o mulţime închisă deoarece $[a, b] = (a, b) \cup \{a, b\}$.

DEFINIŢIA 24. *Fie V si W două spaţii vectoriale peste $\mathbb{R}$. Se numeşte aplicaţie liniară o funcţie $f : V \to W$ având următoarele proprietăţi:*

1. *f este aditivă, adică $f(x+y) = f(x)+f(y)$, oricare ar fi x, $y \in V$;*
2. *f este omogenă, adică $f(\alpha x) = \alpha f(x)$, oricare ar fi $\alpha \in \mathbb{R}$ şi oricare ar fi $x \in V$.*

OBSERVAŢIE. *O aplicaţie liniară mai este numită şi morfism de spaţii vectoriale.*

PROPRIETATEA 7. *Fie V si W două spaţii vectoriale peste $\mathbb{R}$. Funcţia $f : V \to W$ este aplicaţie liniară dacă şi numai dacă*

$$f(\alpha x + \beta y) = \alpha f(x) + \beta f(y),$$

oricare ar fi α, $\beta \in \mathbb{R}$ şi oricare ar fi x, $y \in V$.

Aceste noţiuni intervin în definiţia diferenţiabilităţii.

1. Diferenţiabilitatea funcţiilor de variabilă reală

1.1. Funcţii reale de variabilă reală.

DEFINIŢIA 25. *Fie $A \subseteq \mathbb{R}$ o mulţime deschisă, $x_0 \in A$ şi $f : A \to \mathbb{R}$. Funcţia f se numeşte diferenţiabilă în punctul x_0 dacă există o aplicaţie liniară $L_{x_0} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ astfel încât*

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0) - L_{x_0}(h)}{h} = 0.$$

Dacă f este diferenţiabilă în $x_0 \in A$, aplicaţia liniară L_{x_0} se numeşte diferenţiala funcţiei f în punctul x_0 şi se notează df_{x_0}. Funcţia f se numeşte diferenţiabilă pe A dacă este diferenţiabilă în fiecare punct $x \in A$, iar funcţia $df : A \to \mathcal{L}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ dată de

$$df(x) = df_x,$$

se numeşte diferenţiala funcţiei f pe A, unde mulţimea $\mathcal{L}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ reprezintă mulţimea tuturor aplicaţiilor liniare de la $\mathbb{R}$ la $\mathbb{R}$.

TEOREMA 14. *Fie $A \subseteq \mathbb{R}$ o mulţime deschisă, $x_0 \in A$ şi $f : A \to \mathbb{R}$. Atunci f este diferenţiabilă în punctul x_0 dacă şi numai dacă f este derivabilă în x_0, iar*

$$df_{x_0}(h) = f'(x_0) \cdot h,$$

oricare ar fi $h \in \mathbb{R}$.

Exemplu: Fie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sin x$. Funcţia f este derivabilă, $f'(x) = \cos x$, deci conform teoremei anterioare f este diferenţiabilă şi diferenţiala sa este dată de $df_x(h) = h \cos x$.

OBSERVAŢIE. *Teorema 14 poate fi privită şi invers, adică dacă f este diferenţiabilă în punctul x_0, atunci f este derivabilă în x_0, iar*

$$f'(x_0) = df_{x_0}(1).$$

Reamintim din liceu că o funcţie $f : A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ nu poate fi derivabilă în $x_0 \in A$ dacă nu este continuă în $x_0 \in A$.

1.2. Funcţii vectoriale de variabilă reală.

DEFINIŢIA 26. *Fie $A \subseteq \mathbb{R}$ o mulţime deschisă, $x_0 \in A$ şi $f : A \to \mathbb{R}^N$. Funcţia f se numeşte diferenţiabilă în punctul x_0 dacă există o aplicaţie liniară $L_{x_0} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^N$ astfel încât*

$$\lim_{|h| \to 0} \frac{\|f(x_0 + h) - f(x_0) - L_{x_0}(h)\|}{|h|} = 0.$$

Dacă f este diferenţiabilă în $x_0 \in A$, aplicaţia liniară L_{x_0} se numeşte diferenţiala funcţiei f în punctul x_0 şi se notează df_{x_0}.

Reamintim definiţia normei Euclidiene pentru $x = (x_1, x_2, \dots x_N) \in \mathbb{R}^N$:

$$\|x\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_N^2}.$$

La fel ca în capitolele precedente, este mai simplu să lucrăm pe componente, atunci când avem de-a face cu cantităţi vectoriale din $\mathbb{R}^N$.

TEOREMA 15. *Fie $A \subseteq \mathbb{R}$ o mulţime deschisă, $x_0 \in A$ şi funcţia $f : A \to \mathbb{R}^N$, deci f este de forma $f = (f_1, f_2, \dots, f_N)$, cu componentele $f_i : A \to \mathbb{R}$, $i \in \{1, 2, \dots, N\}$. Funcţia f este diferenţiabilă în x_0 dacă şi numai dacă toate componentele sale $f_i : A \to \mathbb{R}$, $i \in \{1, 2, \dots, N\}$, sunt* *diferenţiabile în x_0, iar diferenţiala funcţiei f în punctul x_0 este dată de formula*

$$\begin{aligned} df_{x_0}(h) &= (h\cdot f_1'(x_0),\, h\cdot f_2'(x_0),\dots,h\cdot f_N'(x_0)) \\ &= h\cdot (f_1'(x_0),\, f_2'(x_0),\dots,f_N'(x_0)), \end{aligned}$$

unde $h\in\mathbb{R}$.

DEFINIŢIA 27. *Funcţia f se numeşte diferenţiabilă pe A dacă este diferenţiabilă în fiecare punct $x\in A$.*

Exerciţiu: Fie $f:(0,\infty)\to\mathbb{R}^4$, $f(x)=(4x-16,\, x^2,\, \ln x,\, \operatorname{arctg} x)$. Arătaţi că f este diferenţiabilă pe $(0,\infty)$ şi determinaţi diferenţiala sa.

Rezolvare: Funcţia f este de forma $f=(f_1,\, f_2,\, f_3,\, f_4)$, cu componentele

$$f_1(x)=4x-16,\quad f_2(x)=x^2,\quad f_3(x)=\ln x,\quad f_4(x)=\operatorname{arctg} x.$$

Cum fiecare componentă f_i, $i\in\{1,2,3,4\}$, este derivabilă pe $(0,\infty)$, din Teorema 14 deducem că f_1, f_2, f_3 şi f_4 sunt diferenţiabile pe $(0,\infty)$. Aplicând acum Teorema 15 obţinem că f este diferenţiabilă pe $(0,\infty)$, iar diferenţiala sa este dată de

$$\begin{aligned} df_x(h) &= h\cdot (f_1'(x),\, f_2'(x),\, f_3'(x),\, f_4'(x)) \\ &= (4h,\, 2xh,\, \frac{h}{x},\, \frac{h}{x^2+1}), \end{aligned}$$

oricare ar fi $h\in\mathbb{R}$.

2. Diferenţiabilitatea funcţiilor de variabilă vectorială

Înainte de a începe discuţia propriu-zisă despre diferenţiabilitate, introducem definiţia produsului scalar Euclidian, împreună cu câteva proprietăţi, deoarece o vom folosi în interiorul acestei secţiuni (şi, în plus, aceasta este o noţiune matematică deosebit de importantă).

2.1. Produsul scalar Euclidian.

DEFINIŢIA 28. *Se numeşte produs scalar Euclidian aplicaţia pozitiv definită, biliniară şi simetrică $\langle\cdot,\cdot\rangle:\mathbb{R}^N\times\mathbb{R}^N\to\mathbb{R}$ dată de*

$$\langle x,\, y\rangle = x_1y_1+x_2y_2+\cdot+x_Ny_N,$$

unde $x=(x_1,x_2,\dots,x_N)$, $y=(y_1,y_2,\dots,y_N)$.

OBSERVAŢIE. *O altă notaţie pentru produsul scalar, la fel de des utilizată, este $x \cdot y$, deci*

$$x \cdot y = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \cdot + x_N y_N.$$

Noi vom utiliza ambele notaţii în cele ce urmează deoarece este important să familiarizăm cititorul cu ambele variante.

Exemplu: Fie $x = (1, 2, -5)$ şi $y = (-3, 2, -1)$. Produsul scalar al vectorilor x şi y este

$$\langle x,\, y\rangle = 1 \cdot (-3) + 2 \cdot 2 + (-5) \cdot (-1) = -3 + 4 + 5 = 6$$

(sau, utilizând cealaltă notaţie, putem scrie $x \cdot y = -3 + 4 + 5 = 6$).

OBSERVAŢIE. $\langle x,\, x\rangle = x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_N^2 = \|x\|^2$. *Mai mult, deoarece în loc de $\langle x,\, x\rangle$ putem scrie $x \cdot x$, uneori în loc de $\|x\|^2$ scriem x^2.*

PROPRIETATEA 8. $\langle x,\, y\rangle = \|x\| \cdot \|y\| \cdot \cos\, \widehat{(x, y)}$.

Aplicaţie: Cosinusul unghiului făcut de vectorii $x = (2, 4, 0)$ şi $y = (3, -3, 8)$ este

$$\cos\, \widehat{(x, y)} = \frac{\langle x,\, y\rangle}{\|x\| \cdot \|y\|} = \frac{6 - 12 + 0}{2\sqrt{5} \cdot \sqrt{82}} = -\frac{3}{\sqrt{410}}.$$

CONSECINŢA 4. *Doi vectori $x, y \in \mathbb{R}^N$ sunt ortogonali (şi notăm $x \perp y$) dacă şi numai dacă $\langle x,\, y\rangle = 0$ (adică unghiul făcut de aceşti doi vectori este $\frac{\pi}{2}$.*

Exemplu: Fie $x, y \in \mathbb{R}^2$, $x = (1, 3)$, $y = (6, -2)$. Atunci $\langle x,\, y\rangle = 6 - 6 = 0$, deci $x \perp y$.

2.2. Funcţii reale de variabilă vectorială. Derivate parţiale.

DEFINIŢIA 29. *Fie $A \subseteq \mathbb{R}^N$ o mulţime deschisă, $x_0 \in A$ şi $f : A \to \mathbb{R}$. Funcţia f se numeşte diferenţiabilă în punctul x_0 dacă există o aplicaţie liniară $L_{x_0} : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ astfel încât*

$$\lim_{\|h\| \to 0} \frac{|f(x_0 + h) - f(x_0) - L_{x_0}(h)|}{\|h\|} = 0.$$

Dacă f este diferenţiabilă în $x_0 \in A$, aplicaţia liniară L_{x_0} se numeşte diferenţiala funcţiei f în punctul x_0 şi se notează df_{x_0}.

Reamintim că definiţia normei Euclidiene pentru $h \in \mathbb{R}^N$, unde $h = (h_1, h_2, \dots h_N)$, este $\|h\| = \sqrt{h_1^2 + h_2^2 + \cdots + h_N^2}$.

Acum că avem definiţia diferenţiabilităţii unei funcţii reale de variabilă vectorială se pune întrebarea: oare cum putem face legătura cu derivabilitatea? Pentru aceasta introducem o nouă definiţie.

DEFINIŢIA 30. *Se numeşte derivată parţială a funcţiei $f : A \subseteq \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ în raport cu variabila x_i în punctul $a \in A$, următoarea limită:*

$$\lim_{t\to 0} \frac{f(a_1, a_2, \dots, a_{i-1}, a_i + t, a_{i+1}, \dots, a_N) - f(a_1, a_2, \dots, a_i, \dots, a_N)}{t}.$$

Notaţii: $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}(a)$, $\partial_{x_i} f(a)$, $f_{x_i}(a)$.

De fapt, pentru a afla $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}$, derivăm f în raport cu x_i în mod obişnuit (adică rămân valabile formulele cunoscute ale derivatelor funcţiilor elementare) în timp ce celelalte componente x_j, $j \neq i$, sunt privite ca şi cum ar fi constante.

Exemple:

1. Dacă $f(x, y) = x^9 \sin y$, atunci derivatele sale parţiale sunt:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 9x^8 \sin y,$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = x^9 \cos y.$$

2. Dacă $g(x, y, z) = xy^2z^3 - 4y^5z^2 + 7z$, atunci derivatele sale parţiale sunt:

$$\frac{\partial g}{\partial x}(x, y, z) = y^2z^3,$$

$$\frac{\partial g}{\partial y}(x, y, z) = 2xyz^3 - 20y^4z^2,$$

$$\frac{\partial g}{\partial z}(x, y, z) = 3xy^2z^2 - 8y^5z + 7.$$

OBSERVAŢIE. *Rolul derivatei de la funcţiile de variabilă reală este jucat aici, unde funcţia f are variabilă vectorială, de vectorul care are drept componente derivatele parţiale ale lui f. Acest vector se numeşte*

gradientul *funcţiei* f *şi scriem*

$$\nabla f = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_N} \right).$$

O altă notaţie pentru gradient este grad f.

Exemple: Luând în considerare funcţiile f şi g din exemplele anterioare, avem:

1. $(\nabla f)(x, y) = (9x^8 \sin y,\ x^9 \cos y)$,
2. $(\nabla g)(x, y, z) = (y^2 z^3,\ 2xyz^3 - 20y^4 z^2,\ 3xy^2 z^2 - 8y^5 z + 7)$

TEOREMA 16. *Fie* $A \subseteq \mathbb{R}^N$ *o mulţime deschisă,* $a \in A$ *şi* $f : A \to \mathbb{R}$ *o funcţie diferenţiabilă în punctul* a. *Atunci,*

$$\begin{aligned} df_a(h) &= (\nabla f)(a) \cdot h \quad (= \textit{produsul scalar Euclidian } \langle (\nabla f)(a),\, h \rangle) \\ &= \frac{\partial f}{\partial x_1}(a) h_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2}(a) h_2 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_N}(a) h_N, \end{aligned}$$

oricare ar fi $h = (h_1, h_2, \dots, h_N) \in \mathbb{R}^N$.

Aplicaţie: Determinaţi diferenţiala funcţiei $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, date de formula $f(x, y, z) = e^{3xy^4 - z^3}$, în punctul $(2, 1, -1)$.

Rezolvare: Reamintim din liceu, de la funcţiile reale de variabilă reală, următoarea formulă a derivatei unei funcţii compuse:

$$\left(e^{u(x)}\right)' = e^{u(x)} \cdot (u(x))'.$$

Avem:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y, z) &= e^{3xy^4 - z^3} \frac{\partial}{\partial x}(3xy^4 - z^3) = 3y^4 e^{3xy^4 - z^3}, \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x, y, z) &= e^{3xy^4 - z^3} \frac{\partial}{\partial y}(3xy^4 - z^3) = 12xy^3 e^{3xy^4 - z^3}, \\ \frac{\partial f}{\partial z}(x, y, z) &= e^{3xy^4 - z^3} \frac{\partial}{\partial z}(3xy^4 - z^3) = -3z^2 e^{3xy^4 - z^3}. \end{aligned}$$

În consecinţă,

$$(\nabla f)(x, y, z) = \left(3y^4 e^{3xy^4 - z^3},\ 12xy^3 e^{3xy^4 - z^3},\ -3z^2 e^{3xy^4 - z^3} \right),$$

iar

$$(\nabla f)(2, 1, -1) = \left(3e^7, 24e^7, -3e^7\right) = e^7 \left(3, 24, -3\right),$$

deci

$$df_{(2,1,-1)}(h) = e^7\,(3h_1 + 24h_2 - 3h_3) \quad \text{oricare ar fi } h = (h_1, h_2, h_3) \in \mathbb{R}^3.$$

Observăm că în aplicaţia anterioară am derivat parţial o funcţie compusă. Formulele generale pentru derivatele parţiale ale unei funcţii $f \circ u$, unde $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $u : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, sunt:

$$\frac{\partial f(u)}{\partial x}(x,y,z) = f'(u)\frac{\partial u}{\partial x}(x,y,z),$$
$$\frac{\partial f(u)}{\partial y}(x,y,z) = f'(u)\frac{\partial u}{\partial y}(x,y,z),$$
$$\frac{\partial f(u)}{\partial z}(x,y,z) = f'(u)\frac{\partial u}{\partial z}(x,y,z).$$

Bineînţeles, se procedează similar atunci când avem de-a face cu funcţii u de două variabile, etc.

Exemplu: Pentru $f : \mathbb{R}^2 \to (0, \pi)$, $f(x,y) = \operatorname{arcctg}(2x^5 - 3x^3y^2)$, ne gândim la formula $(\operatorname{arcctg} x)' = \dfrac{-1}{x^2+1}$ şi la cele spuse mai sus, observând ca avem de-a face cu o funcţie de forma $\operatorname{arcctg} u$, unde $u(x,y) = 2x^5 - 3x^3y^2$.

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{-1}{u^2+1}\cdot\frac{\partial u}{\partial x}(x,y) = \frac{-10x^4 + 9x^2y^2}{(2x^5 - 3x^3y^2)^2 + 1},$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{-1}{u^2+1}\cdot\frac{\partial u}{\partial y}(x,y) = \frac{6x^3y}{(2x^5 - 3x^3y^2)^2 + 1}.$$

De asemenea, când avem de calculat derivatele parţiale ale produsului sau raportului a două funcţii, utilizăm formulele (adaptându-le la numărul de variabile corespunzător):

$$\frac{\partial (fg)}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial x}g + f\frac{\partial g}{\partial x}; \quad \frac{\partial (fg)}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial y}g + f\frac{\partial g}{\partial y};$$

respectiv,

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{f}{g}\right) = \frac{\dfrac{\partial f}{\partial x}g - f\dfrac{\partial g}{\partial x}}{g^2}; \quad \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{f}{g}\right) = \frac{\dfrac{\partial f}{\partial y}g - f\dfrac{\partial g}{\partial y}}{g^2}.$$

DEFINIŢIA 31. *Fie $A \subseteq \mathbb{R}^N$ o mulţime deschisă şi $f : A \to \mathbb{R}$. Spunem că f este derivabilă parţial pe A dacă există derivatele parţiale ale lui f în raport cu toate variabilele sale în orice punct din A. Dacă, în plus, toate derivatele parţiale sunt continue, atunci spunem că f este de clasă C^1 pe A şi notăm $f \in C^1(A)$.*

TEOREMA 17. *Fie $A \subseteq \mathbb{R}^N$ o mulţime deschisă şi $f : A \to \mathbb{R}$. Dacă $f \in C^1(A)$, atunci f este diferenţiabilă pe A (adică f este diferenţiabilă în orice punct $a \in A$).*

2.3. Funcţii vectoriale de variabilă vectorială.

DEFINIŢIA 32. *Fie $A \subseteq \mathbb{R}^N$ $(N \geq 2)$ o mulţime deschisă, $x_0 \in A$ şi $f : A \to \mathbb{R}^p$ $(p \geq 2)$. Funcţia f se numeşte diferenţiabilă în punctul x_0 dacă există o aplicaţie liniară $L_{x_0} : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^p$ astfel încât*

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0) - L_{x_0}(h)}{\|h\|} = 0.$$

Dacă f este diferenţiabilă în $x_0 \in A$, aplicaţia liniară L_{x_0} se numeşte diferenţiala funcţiei f în punctul x_0 şi se notează df_{x_0}.

OBSERVAŢIE. *În definiţia anterioară, $\| \cdot \|$ reprezintă norma Euclidiană din $\mathbb{R}^N$.*

Privind funcţia f pe componente avem

$$f(x_1, x_2, \dots, x_N) = (f_1(x_1, x_2, \dots, x_N), \dots, f_p(x_1, x_2, \dots, x_N)),$$

cu $f_i : A \to \mathbb{R}$, oricare ar fi $i \in \{1, 2, \dots, p\}$.

TEOREMA 18. *Fie $A \subseteq \mathbb{R}^N$ o mulţime deschisă, $x_0 \in A$ şi funcţia $f : A \to \mathbb{R}^p$. Funcţia f este diferenţiabilă în x_0 dacă şi numai dacă toate componentele sale $f_i : A \to \mathbb{R}$, $i \in \{1, 2, \dots, p\}$, sunt diferenţiabile în x_0.*

DEFINIŢIA 33. *Funcţia f se numeşte diferenţiabilă pe A dacă este diferenţiabilă în fiecare punct $x \in A$.*

Fie $A \subseteq \mathbb{R}^N$ $(N \geq 2)$ o mulţime deschisă, $a \in A$ şi $f : A \to \mathbb{R}^p$ $(p \geq 2)$, $f = (f_1, f_2, \dots, f_p)$. Dacă fiecare componentă f_i, $i \in \{1, 2, \dots, p\}$, este derivabilă parţial în a în raport cu fiecare variabilă x_i, atunci putem păstra toate aceste derivate parţiale într-o matrice.

DEFINIŢIA 34. *Matricea*

$$J_f(a) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial x_1}(a) & \dfrac{\partial f_1}{\partial x_2}(a) & \dots & \dfrac{\partial f_1}{\partial x_N}(a) \\ \dfrac{\partial f_2}{\partial x_1}(a) & \dfrac{\partial f_2}{\partial x_2}(a) & \dots & \dfrac{\partial f_2}{\partial x_N}(a) \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \dfrac{\partial f_p}{\partial x_1}(a) & \dfrac{\partial f_p}{\partial x_2}(a) & \dots & \dfrac{\partial f_p}{\partial x_N}(a) \end{pmatrix}$$

se numeşte matrice Jacobi (sau matrice Jacobiană) asociată funcţiei f în punctul $a \in A$. Dacă această matrice este pătratică (adică $N = p$), atunci determinantul său se numeşte Jacobianul funcţiei f sau determinantul funcţional asociat lui f şi se notează

$$\det J_f(a) = |J_f(a)| = \frac{D(f_1,\, f_2,\, \dots, f_N)}{D(x_1,\, x_2,\, \dots, x_N)}(a).$$

TEOREMA 19. *Fie $A \subseteq \mathbb{R}^N$ o mulţime deschisă, $a \in A$ şi $f : A \to \mathbb{R}^p$ o funcţie diferenţiabilă în punctul a. Atunci*

$$df_a(h) = J_f(a)\, h,$$

oricare ar fi $h = (h_1, h_2, \dots, h_N) \in \mathbb{R}^N$.

Exerciţiu: Fie funcţia $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $f(x, y, z) = (x^2+xy,\ xyz,\ z^2x^3 - \operatorname{arctg}(yz))$.

a) Determinaţi diferenţiala funcţiei f.

b) Calculaţi Jacobianul lui f în punctul $(-1, 0, 1)$.

Rezolvare:

a) Componentele lui f sunt funcţiile $f_1,\ f_2,\ f_3 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$,

$$f_1(x, y, z) = x^2 + xy, \quad f_2(x, y, z) = xyz, \quad f_3(x, y, z) = z^2x^3 - \operatorname{arctg}(yz).$$

Calculăm derivatele parţiale ale acestor funcţii.

$$\frac{\partial f_1}{\partial x}(x, y, z) = 2x + y; \quad \frac{\partial f_1}{\partial y}(x, y, z) = x; \quad \frac{\partial f_1}{\partial z}(x, y, z) = 0;$$

$$\frac{\partial f_2}{\partial x}(x, y, z) = yz; \quad \frac{\partial f_2}{\partial y}(x, y, z) = xz; \quad \frac{\partial f_2}{\partial z}(x, y, z) = xy;$$

$$\frac{\partial f_3}{\partial x}(x,y,z) = 3x^2z^2; \quad \frac{\partial f_3}{\partial y}(x,y,z) = -\frac{z}{1+y^2z^2};$$
$$\frac{\partial f_3}{\partial z}(x,y,z) = 2zx^3 - \frac{y}{1+y^2z^2}.$$

Ţinând cont de Teorema 19, calculăm

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x}(x,y,z) & \frac{\partial f_1}{\partial y}(x,y,z) & \frac{\partial f_1}{\partial z}(x,y,z) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x}(x,y,z) & \frac{\partial f_2}{\partial y}(x,y,z) & \frac{\partial f_2}{\partial z}(x,y,z) \\ \frac{\partial f_3}{\partial x}(x,y,z) & \frac{\partial f_3}{\partial y}(x,y,z) & \frac{\partial f_3}{\partial z}(x,y,z) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \\ h_3 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 2x+y & x & 0 \\ yz & xz & xy \\ 3x^2z^2 & -\frac{z}{1+y^2z^2} & 2zx^3 - \frac{y}{1+y^2z^2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \\ h_3 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} (2x+y)h_1 + xh_2 \\ yzh_1 + xzh_2 + xyh_3 \\ 3x^2z^2h_1 - \frac{zh_2}{1+y^2z^2} + 2zx^3h_3 - \frac{yh_3}{1+y^2z^2} \end{pmatrix}.$$

De aici deducem că
$df_{(x,y,z)}(h) =$
$$\left((2x+y)h_1 + xh_2, yzh_1 + xzh_2 + xyh_3, 3x^2z^2h_1 - \frac{zh_2 + yh_3}{1+y^2z^2} + 2zx^3h_3 \right).$$

b)

$$|J_f(-1,0,1)| = \begin{vmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x}(-1,0,1) & \frac{\partial f_1}{\partial y}(-1,0,1) & \frac{\partial f_1}{\partial z}(-1,0,1) \\ \\ \frac{\partial f_2}{\partial x}(-1,0,1) & \frac{\partial f_2}{\partial y}(-1,0,1) & \frac{\partial f_2}{\partial z}(-1,0,1) \\ \\ \frac{\partial f_3}{\partial x}(-1,0,1) & \frac{\partial f_3}{\partial y}(-1,0,1) & \frac{\partial f_3}{\partial z}(-1,0,1) \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \\ 0 & -1 & 0 \\ \\ 0 & -1 & -2 \end{vmatrix}$$

$$= 2.$$

Foarte strâns legate de derivatele parţiale sunt următoarele noţiuni care apar adesea în aplicaţiile specifice profilului ingineresc.

2.4. Divergenţă. Rotor. Derivata după o direcţie dată.

DEFINIŢIA 35. *Fie $A \subseteq \mathbb{R}^N$ o mulţime deschisă si $f : A \to \mathbb{R}^N$ o funcţie de clasă C^1 pe A. Atunci*

$$\begin{aligned} \operatorname{div} f(a) &= \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial f_i}{\partial x_i}(a) \\ &= \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(a) + \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(a) + \cdots + \frac{\partial f_N}{\partial x_N}(a). \end{aligned}$$

se numeşte divergenţa lui f în punctul $a \in A$.

Exemplu: Fie $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $f(x,y) = (5x^2 - 3y,\ 2x^4y^{10})$. Prin urmare $f_1(x,y) = 5x^2 - 3y$, $f_2(x,y) = 2x^4y^{10}$ şi

$$\operatorname{div} f(x,y) = \frac{\partial f_1}{\partial x}(x,y) + \frac{\partial f_2}{\partial y}(x,y) = 10x + 20x^4y^9.$$

Observaţie. *Ţinând cont şi de noţiunea de gradient pe care am introdus-o în acest capitol, putem introduce o nouă noţiune, şi anume, operatorul Laplace asociat lui $f : A \subseteq \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ (A fiind mulţime deschisă)*

$$\begin{aligned}\Delta f &= \operatorname{div}(\nabla f)\\ &= \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right).\end{aligned}$$

Remarcăm aici prezenţa derivatelor parţiale de ordin superior (am presupus că putem deriva parţial încă o dată derivatele parţiale) care vor fi introduse ceva mai târziu, motiv pentru care deocamdată nu insistăm asupra acestei noţiuni.

Trecem acum la o altă noţiune importantă.

Definiţia 36. *Fie $A \subseteq \mathbb{R}^3$ o mulţime deschisă, $a \in A$ şi $f : A \to \mathbb{R}^3$, $f \in C^1(A)$. Atunci*

$$\operatorname{rot}_a f = \left(\frac{\partial f_3}{\partial y}(a) - \frac{\partial f_2}{\partial z}(a), \frac{\partial f_1}{\partial z}(a) - \frac{\partial f_3}{\partial x}(a), \frac{\partial f_2}{\partial x}(a) - \frac{\partial f_1}{\partial y}(a)\right)$$

se numeşte rotorul lui f în punctul a.

Această definiţie se reţine mai uşor dacă se merge pe următoarea scriere formală a rotorului:

$$\operatorname{rot} f = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ f_1 & f_2 & f_3 \end{vmatrix}$$

$$= \vec{i} \begin{vmatrix} \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ f_2 & f_3 \end{vmatrix} - \vec{j} \begin{vmatrix} \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ f_1 & f_3 \end{vmatrix} + \vec{k} \begin{vmatrix} \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} \\ f_1 & f_2 \end{vmatrix}$$

$$= \left(\frac{\partial f_3}{\partial y} - \frac{\partial f_2}{\partial z} \right) \vec{i} - \left(\frac{\partial f_3}{\partial x} - \frac{\partial f_1}{\partial z} \right) \vec{j} + \left(\frac{\partial f_2}{\partial x} - \frac{\partial f_1}{\partial y} \right) \vec{k},$$

unde $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ reprezintă versorii corespunzători axelor de coordonate Ox, Oy, respectiv Oz ale unui sistem cartezian de coordonate din $\mathbb{R}^3$, prin urmare $\vec{i} = (1,0,0)$, $\vec{j} = (0,1,0)$, $\vec{k} = (0,0,1)$. Reamintim că prin versor înţelegem un vector de lungime 1, adică un vector a cărui normă este 1.

Exerciţiu: Fie $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $f(x,y,z) = (4x^2 z,\ x + 2y - z^3,\ \cos(3x^2 - 2z))$. Determinaţi $\operatorname{rot}_{(x,y,z)} f$ apoi calculaţi $\operatorname{rot}_{(0,4,3)} f$.

Definiţia 37. *Fie $A \subseteq \mathbb{R}^N$ o mulţime deschisă, $a = (a_1, \dots, a_N) \in A$, $f : A \to \mathbb{R}^3$ şi $v = (v_1, \dots, v_N) \in \mathbb{R}^N$ un versor dat. Funcţia f se numeţe derivabilă în a după direcţia v dacă*

$$(\exists) \lim_{t \to 0} \frac{f(a + tv) - f(a)}{t} \in \mathbb{R}.$$

Dacă există, această limită se numeşte derivata lui f după direcţia v în punctul a şi se notează $\frac{\partial f}{\partial v}(a)$.

Teorema 20. *Fie $A \subseteq \mathbb{R}^N$ o mulţime deschisă, $a = (a_1, \dots, a_N) \in A$, $f : A \to \mathbb{R}^N$ şi $v = (v_1, \dots, v_N) \in \mathbb{R}^N$ un versor dat. Dacă f este diferenţiabilă în a, atunci*

$$\frac{\partial f}{\partial v}(a) = df_a(v) = \nabla f(a) \cdot v.$$

Reamintim că $\nabla f(a)$ reprezintă gradientul lui f în a şi are expresia

$$\nabla f(a) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(a), \frac{\partial f}{\partial x_2}(a), \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_N}(a) \right).$$

Exerciţiu: Fie $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x,y) = 5y^3 \ln(x^2+3y^4+1)$. Determinaţi derivata lui f în $(2,1)$ după direcţia versorului $(-1,0)$.

Exerciţii pentru fixarea noţiunilor nou introduse

1. Fie vectorii $u = (1,2,-4)$, $v = (2,-3,5)$ şi $w = (-2,-1,0)$. Determinaţi $\|u\|$, $d(v,w)$, $\langle u,v\rangle$, $v \cdot w$, $\cos \widehat{(u,v)}$, v^2, w^2, $\cos \widehat{(w,v)}$.
2. Determinaţi:
   a) $(3x^8 - 4x^5 + 2x^2 - x + 9)'$;
   b) $(5x^{10} - 7x^8 + 12x^4 - x^2 + 9x - 3)'$;
   c) $(-x^6 + 7x^4 + x + 14x - \text{arcctg}\,'x)'$;
   d) $(x^7 \cdot \log_3 x)'$;
   e) $\left(\dfrac{x^3 - 4x + 1}{\sin x}\right)'$;
   f) $(\text{tg}\,(5x-3))'$;
   g) $(\ln(3x^3 + 73x + 5))'$.
3. Determinaţi diferenţiala funcţiei f, unde:
   a) $f : [-1,1] \to \mathbb{R}$, $f(x) = \arcsin\, x + 8$;
   b) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 9^x + x^9 + 9x + 9$;
   c) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$, $f(x) = (\sin x,\ \text{ctg}\, x,\ e^x + 4)$;
   d) $f : (0,\infty) \to \mathbb{R}^2$, $f(x) = (\cos(\ln x),\ x^4 + 3x)$;
   e) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x,y) = 3x^4 + 7x^3y^2 - 2xy^4$;
   f) $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $f(x,y,z) = x^3z^4 + x\cos\, z + y^8 \text{arctg}\, x$;
   g) $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $f(x,y,z) = (x^2 + 2yz,\ zy^3 - 2,\ 4x^2y - 5x^3y)$.
   În plus, calculaţi Jacobianul funcţiei f în punctul $(0,1,2)$.
4. Fie funcţiile $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x) = 2^{7x-y^4}$ şi $g : \mathbb{R} \times (0,\infty) \to \mathbb{R}^2$, $g(x,y) = (x+y, 3x^2 \ln y)$. Determinaţi $\nabla f(1,-1)$ şi $\text{div}\, g(5,1)$.
5. Fie $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $f(x,y,z) = (e^z,\ 3xy^6 + 2yz,\ 4x^3y^2z)$. Determinaţi $\text{rot}_{(x,y,z)} f$. Cât este $\text{rot}_{(-2,1,0)} f$?

6. Stabiliţi care dintre următorii vectori este versor:

   a) în $\mathbb{R}^2$: $u = (1, 2)$, $v = (0, -1)$, $w = \left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}, -\dfrac{1}{2}\right)$.

   b) în $\mathbb{R}^3$: $u = (0, 0, 1)$, $v = \left(\dfrac{1}{3}, \dfrac{1}{3}, \dfrac{1}{3}\right)$, $w = \left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}, -\dfrac{\sqrt{2}}{2}, 0\right)$.

7. Fie $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $f(x, y, z) = \cos(xy^2 - 3xz^4)$. Determinaţi derivata lui f în $(0, 5, 1)$ după direcţia versorului $\left(\dfrac{\sqrt{3}}{3}, \dfrac{\sqrt{3}}{3}, -\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right)$.

8. Fie $f, g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x, y) = 3y^2 7^x$, $g(x, y) = 4xy^3$. Determinaţi $\nabla(fg)$ şi $\nabla\left(\dfrac{f}{g}\right)$.

3. Derivate parţiale de ordinul 2. Aplicaţii

DEFINIŢIA 38. *Fie $A \subseteq \mathbb{R}^N$ o mulţime deschisă, $a \in A$ şi $f : A \to \mathbb{R}$. Spunem că f este de două ori derivabilă parţial în a dacă şi numai dacă fiecare derivată parţială a lui f în a, $\dfrac{\partial f}{\partial x_1}(a)$, $\dfrac{\partial f}{\partial x_2}(a)$, ..., $\dfrac{\partial f}{\partial x_N}(a)$, este derivabilă parţial în raport cu toate variabilele. Derivata parţială a unei derivate parţiale se numeşte derivată parţială de ordinul 2 şi avem notaţia*

$$\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial f}{\partial x_j}\right) = \begin{cases} \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} & \textit{dacă } i \neq j, \\[2ex] \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_i^2} & \textit{dacă } i = j. \end{cases}$$

În acest context, derivatele parţiale ale lui f sunt numite derivate parţiale de ordinul întâi. Dacă derivatele parţiale de ordinul întâi ale unei funcţii reale de variabilă vectorială erau păstrate într-un vector care se numeţe gradient, derivatele parţiale de ordinul doi sunt păstrate într-o matrice, după cum urmează.

DEFINIŢIA 39. *Matricea*

$$H_f(a) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial}{\partial x_1}\left(\dfrac{\partial f}{\partial x_1}\right)(a) & \dfrac{\partial}{\partial x_1}\left(\dfrac{\partial f}{\partial x_2}\right)(a) & \dots & \dfrac{\partial}{\partial x_1}\left(\dfrac{\partial f}{\partial x_N}\right)(a) \\ \dfrac{\partial}{\partial x_2}\left(\dfrac{\partial f}{\partial x_1}\right)(a) & \dfrac{\partial}{\partial x_2}\left(\dfrac{\partial f}{\partial x_2}\right)(a) & \dots & \dfrac{\partial}{\partial x_2}\left(\dfrac{\partial f}{\partial x_N}\right)(a) \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ \dfrac{\partial}{\partial x_N}\left(\dfrac{\partial f}{\partial x_1}\right)(a) & \dfrac{\partial}{\partial x_N}\left(\dfrac{\partial f}{\partial x_2}\right)(a) & \dots & \dfrac{\partial}{\partial x_N}\left(\dfrac{\partial f}{\partial x_N}\right)(a) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(a) & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}(a) & \dots & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_N}(a) \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1}(a) & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}(a) & \dots & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_N}(a) \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_N \partial x_1}(a) & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_N \partial x_2}(a) & \dots & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_N^2}(a) \end{pmatrix}$$

se numeşte matrice Hessiană asociată funcţiei f în punctul $a \in A$.

DEFINIŢIA 40. *Fie $A \subseteq \mathbb{R}^N$ o mulţime deschisă şi $f : A \to \mathbb{R}$. Dacă f este de de două ori derivabilă parţial în fiecare punct din A, spunem că f este de două ori derivabilă parţial pe A. Dacă f este de două ori derivabilă parţial pe A şi derivatele parţiale de ordinul 2 sunt continue, atunci spunem că f este de clasă C^2 pe A şi notăm $f \in C^2(A)$.*

TEOREMA 21. *Fie $A \subseteq \mathbb{R}^N$ o mulţime deschisă şi $f : A \to \mathbb{R}$. Dacă $f \in C^2(A)$, atunci $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}$, oricare ar fi $i, j \in \{1, \dots, N\}$.*

TEOREMA 22. *Fie $A \subseteq \mathbb{R}^N$ o mulţime deschisă şi $f : A \to \mathbb{R}$. Dacă $f \in C^2(A)$, atunci matricea Hessiană H_f este simetrică, adică $H_f =$*

$(H_f)^t$. *În plus, pentru a face legătura cu ceea ce se studiază de obicei la cursul de algebră de către studenţii din anul I de la facultăţi cu profil tehnic,* $H_f(a)$ *(cu* $a \in A$*) determină o formă pătratică* $\varphi_a : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$, $\varphi_a(h) = \sum\limits_{i,j=1}^{N} \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a) h_i h_j$.

Exerciţiu: Fie $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $f(x, y, z) = x^2 + 3xy + 7y^2z^3$. Determinaţi Hessiana funcţiei f în punctul $(4, -1, 1)$.

OBSERVAŢIE. $\operatorname{Tr} H_f = \Delta f$, *unde prin* $\operatorname{Tr} H_f$ *înţelegem urma matricei* H_f*, adică suma elementelor de pe diagonala principală.*

3.1. Puncte de extrem local.

DEFINIŢIA 41. *Fie* $A \subseteq \mathbb{R}^N$ *o mulţime deschisă şi* $f : A \to \mathbb{R}$, $a \in A$. *Spunem că* a *este punct de extrem local al funcţiei* f *dacă există vecinătate* V *a lui* a *astfel încât* $f(x) - f(a)$ *să aibă semn constant pe* V. *Mai exact, dacă* $f(x) \leq f(a)$, $\forall x \in V$, *atunci* a *este punct de maxim local al funcţiei* f. *Iar dacă* $f(x) \geq f(a)$, $\forall x \in V$, *atunci* a *este punct de minim local al funcţiei* f.

OBSERVAŢIE. *Dacă* $f(x) \leq f(a)$, $\forall x \in A$, *atunci* a *este punct de maxim global al funcţiei* f. *Dacă* $f(x) \geq f(a)$, $\forall x \in A$, *atunci* a *este punct de minim global al funcţiei* f.

DEFINIŢIA 42. *Fie* $A \subseteq \mathbb{R}^N$ *o mulţime deschisă şi* $f : A \to \mathbb{R}$, $a \in A$. *Spunem că* a *este punct critic (sau staţionar) al lui* f *dacă şi numai dacă* $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}(a) = 0$, *oricare ar fi* $i \in \{1, \ldots, N\}$.

Exerciţiu: Determinaţi punctele critice ale funcţiei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x, y) = x^3 + xy - 2y$.

TEOREMA 23. *(Teorema lui Fermat)*
Fie $A \subseteq \mathbb{R}^N$ *o mulţime deschisă şi* $a \in A$. *Dacă* $f : A \to \mathbb{R}$ *este derivabilă parţial în* a *şi* a *este punct de extrem local al lui* f, *atunci* a *este punct critic al lui* f.

Cu alte cuvinte, pentru funcţiile derivabile parţial pe A, punctele de extrem local se caută printre punctele critice.

DEFINIŢIA 43. *Spunem că o mulţime* $A \subseteq \mathbb{R}^N$ *este convexă dacă şi numai dacă oricare ar fi* $x, y \in A$, $tx + (1-t)y \in A$, *oricare ar fi* $t \in [0, 1]$ *(adică o dată cu capetele unui segment, conţine şi segmentul).*

DEFINIŢIA 44. *Fie o matrice pătratică $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$,*

$$B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ b_{n1} & b_{n2} & \dots & b_{nn} \end{pmatrix}.$$

Minorii

$$\Delta_1 = b_{11},\ \Delta_2 = \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{vmatrix},\ \Delta_3 = \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{vmatrix}, \dots,\ \Delta_n = \det B.$$

se numesc minori principali ai matricei B.

TEOREMA 24. *(Teorema lui Sylvester)*
Fie $A \subseteq \mathbb{R}^N$ o mulţime deschisă şi convexă şi $f : A \to \mathbb{R}$, $f \in C^2(A)$. Fie $a \in A$ un punct critic al lui f şi $\Delta_1, \Delta_2, \dots, \Delta_N$ minorii principali ai lui $H_f(a)$.

a) Dacă $\Delta_1 > 0, \Delta_2 > 0, \dots, \Delta_N > 0$, atunci a este punct de minim local pentru f.
b) Dacă $\Delta_1 < 0, \Delta_2 > 0, \dots, (-1)^N \Delta_N > 0$, atunci a este punct de maxim local pentru f.

Dacă nu ne aflăm în niciuna dintre situaţiile descrise de Teorema lui Sylvester, apelăm la definiţia punctelor de extrem local sau la una dintre proprietăţile.

PROPRIETATEA 9. *Fie $A \subseteq \mathbb{R}^N$ o mulţime deschisă, $f : A \to \mathbb{R}$, $f \in C^2(A)$ şi $a \in A$ un punct critic al lui f.*
Dacă $H_f(a)$ are toate valorile proprii strict pozitive, atunci a este punct de minim local.
Dacă $H_f(a)$ are toate valorile proprii strict negative, atunci a este punct de maxim local.

Deosebit de utile sunt următoarele două proprietăţi care vizează cazurile 2-dimensional şi 3-dimensional, în aceleaşi ipoteze ca mai sus.

(i) Pentru $N = 2$, dacă $\Delta_2 < 0$, atunci a este punct de şa al lui f, nu punct de extrem.

(ii) Pentru $N = 3$, dacă Δ_3 şi $\operatorname{Tr} H_f(a)$ au semne diferite, atunci a este punct de şa al lui f, nu punct de extrem.

Algoritm de determinare a punctelor de extrem local

Sintetizând, pentru a stabili dacă o funcţie admite puncte de extrem local, parcurgem următoarele etape:

I determinăm punctele critice (dacă f nu admite puncte critice, nu admite nici puncte de extrem local);

II calculăm Hessiana şi aflăm valoarea Hessianei în fiecare punct critic găsit;

III pentru fiecare punct critic aplicăm Teorema 24 (Teorema lui Sylvester), definiţia, sau una dintre proprietăţie de mai sus, pentru a determina dacă este punct de extrem local.

Aplicaţie: Stabiliţi dacă următoarele funcţii admit puncte de extrem local.

a) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x, y) = x^3 + xy - 2y$;

b) $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$.

Exerciţii pentru fixarea noţiunilor nou introduse

1. Fie $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x, y) = y \cos x$. Determinaţi Hessiana funcţiei f.
2. Fie $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $f(x, y, z) = xy^3 - 5xyz^2$. Determinaţi Hessiana funcţiei f în punctul $(3, 2, -2)$ şi Laplaceanul funcţiei f în punctul $(-1, -2, 1)$
3. Stabiliţi dacă următoarele funcţii admit puncte de extrem local.
   a) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x, y) = -x^3 - 3y^2 + 6x$;
   b) $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - xy + x - 2z$.