

INTRODUCERE IN TEORIA MODULELOR

Violeta Leoreanu-Fotea

Cuprins

Prefață	5
1 Noțiuni introductive	7
2 Module	15
2.1 Noțiunea de modul	15
2.2 Bimodule	17
2.3 Submodul. Modul cât	18
2.4 Morfisme de module	18
2.5 Șiruri exacte de module	20
2.6 Produse directe de module	22
2.7 Sume directe de module	25
2.8 Sumă directă internă de submodule	33
2.9 Sumanzi direcți. Factori direcți. Șiruri exacte scindate	35
2.10 Probleme	39
3 Module libere și module proiective	41
3.1 Module libere	41
3.2 Module proiective	44
3.3 Module injective	47
4 Produse tensoriale de module	55
4.1 Noțiunea de produs tensorial de module	55
4.2 Produs tensorial de morfisme de module	59
4.3 Produs tensorial dintre un bimodul și un modul	59

4.4	Proprietatea de asociere a produselor tensoriale	61
4.5	Conexiunea dintre produsul tensorial și șirurile exacte scurte	64
4.6	Morfisme plate	66
5	Module de fracții și inele de fracții	69
5.1	Noțiunea de modul de fracții (cături)	69
5.2	Proprietatea de universalitate a inelelor de fracții	72
5.3	Proprietăți ale modulului de fracții	74
5.4	Transferul idealelor	77
5.5	Localizatul lui R relativ la P	80
5.6	Proprietăți ale inelului de fracții	82
6	Exerciții	87
	Bibliografie	99

Prefață

Această carte este dedicată studenților Facultății de Matematică, dar poate fi utilă și studenților altor facultăți, precum și tuturor celor care doresc o introducere și o familiarizare cu această teorie. Cartea reprezintă o introducere în teoria modulelor.

Teoria modulelor reprezintă o ramură importantă a algebrei moderne, care poate fi privită ca o generalizare a algebrei liniare clasice, cu aplicații în teoria algebrică a numerelor, teoria reprezentărilor de grupuri, algebra omologică, cât și în teoria categoriilor și în topologia algebrică.

Cartea debutează cu un capitol introductiv, ce conține noțiuni de teoria inelelor, apoi este prezentată noțiunea de modul cu diverse exemple, sunt analizate morfismele de module, nucleul și imaginea unui morfism, module factor, teoreme de izomorfism, bimodule.

Apoi sunt studiate sumele și produsele directe de module, sumele directe interne de submodule, șiruri exacte de module.

În continuare sunt prezentate diverse clase de module: libere, proiective, plate, urmate de produse tensoriale de module și de module de fracții.

Fiecare noțiune este exemplificată și sunt puse în evidență diverse proprietăți, cât și exerciții.

Capitolul 1

Noțiuni introductive

Reamintim câteva noțiuni și rezultate de bază din teoria inelelor, în particular a corpurilor.

Definiția 1.1 Structura algebrică $(R, +, \cdot)$ cu $R \neq \emptyset$ se numește *inel* dacă $(R, +)$ este grup abelian, (R, \cdot) este semigrup și are loc distributivitatea înmulțirii față de adunare, adică

$$\forall x, y, z \in R, x(y + z) = xy + xz \text{ și } (x + y)z = xz + yz.$$

Dacă există $1 \in R$ astfel încât $x \cdot 1 = 1 \cdot x = x, \forall x \in R$, atunci inelul R se numește *inel cu unitate* sau *inel unitar*.

Dacă, în plus, are loc comutativitatea înmulțirii, adică $\forall x, y \in R, xy = yx$, atunci inelul se numește *comutativ*.

Un inel cu unitate și comutativ se numește *inel comutativ cu unitate*.

Definiția 1.2 Un element $x \in R$ este *divizor al lui zero* la stânga (la dreapta) dacă există $y \in R, y \neq 0$, astfel încât $xy = 0$ (respectiv $x = 0$).

Definiția 1.3 Un inel comutativ cu unitate în care orice element nenul este inversabil se numește *corp*. Altfel spus, $(K, +, \cdot)$ este corp dacă următoarele condiții au loc: $(K, +)$ este grup abelian, (K^*, \cdot) este grup și are loc distributivitatea înmulțirii față de adunare.

Dacă înmulțirea din corp este comutativă, atunci corpul se numește *comutativ*.

Observația 1.1

1. Într-un corp nu există divizori ai lui zero nenuli.
2. Un corp are măcar două elemente.

Subinele. Ideale

Fie R un inel, $R' \subset R$; $R' \neq \emptyset$.

Definiția 1.4 R' se numește *subinel* al lui R dacă

$$\forall x', y' \in R', x' - y' \in R' \text{ și } x' \cdot y' \in R.$$

Dacă $K' \subset K$, $K' \neq \emptyset$, atunci K' este un *subcorp* al lui K și notăm

$$K' \leq K$$

dacă avem $(K', +)$ subgrup în $(K, +)$ și $((K')^*, \cdot)$ este subgrup în (K^*, \cdot) .

Fie acum R un inel și $A \subset R$, $A \neq \emptyset$.

Definiția 1.5 A se numește *ideal stâng* în R dacă:

1. $\forall a_1, a_2 \in A, a_1 - a_2 \in A$,
2. $\forall x \in R, \forall a \in A, xa \in A$, adică $RA \subseteq A$.

Similar se definește noțiunea de *ideal drept*.

Un *ideal bilateral* este un ideal stâng și drept în R .

Să observăm că, în general, $xa \neq ax$.

Pentru inelele comutative, cele trei tipuri de ideale coincid.

Notăție pentru A ideal în R : $A \leq R$.

Pentru cazul necomutativ: fie $a \in R$ fixat.

$$Ra = \{xa \in R \mid x \in R\} \text{ este ideal stâng în } R.$$

$$RaR = \{xay \in R \mid x, y \in R\} \text{ este ideal bilateral în } R.$$

Ideale principale

$(a)_s = \{xa + na \in R \mid x \in R, n \in \mathbb{Z}\}$ este ideal stâng în R .

$(a)_d = \{ax + na \in R \mid x \in R, n \in \mathbb{Z}\}$ este ideal drept în R .

Pentru inelele cu unitate $1 \neq 0$ avem $(a)_s = Ra$ și $(a)_d = aR$.

Pentru \mathbb{Z} , $n\mathbb{Z} = (n)$.

Ideal generat de un număr finit de elemente sau de o mulțime oarecare de elemente

I. Fie $A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$.

$$\begin{aligned} (A)_s &= (a_1, a_2, \dots, a_n)_s \\ &= \left\{ \sum_{i=1}^n (x_i a_i + n_i a_i) \in R \mid x_i \in R, n_i \in \mathbb{Z}, i = \overline{1, n} \right\} \end{aligned}$$

este ideal stâng în R .

$$\begin{aligned} (A)_d &= (a_1, a_2, \dots, a_n)_d \\ &= \left\{ \sum_{i=1}^n (a_i x_i + n_i a_i) \in R \mid x_i \in R, n_i \in \mathbb{Z}, i = \overline{1, n} \right\} \end{aligned}$$

este ideal drept în R .

Dacă inelul R este cu $1 \neq 0$, atunci:

$$(a_1, a_2, \dots, a_n)_s = Ra_1 + Ra_2 + \dots + Ra_n$$

și

$$(a_1, a_2, \dots, a_n)_d = a_1R + a_2R + \dots + a_nR.$$

II. Dacă $A \subset R$ nu este neapărat finită, atunci

$$(A)_s = \bigcup_{\substack{A'_i \subset A \\ A'_i \text{ finită}}} (A'_i)_s; \quad (A)_d = \bigcup_{\substack{A'_i \subset A \\ A'_i \text{ finită}}} (A'_i)_d.$$

Inelul cât (factor)

Fie R un inel și A ideal bilateral al său. Atunci $(R/A, +)$ este grup factor unde

$$R/A = \{x + A \mid x \in R\} \text{ cu } x \sim y(A) \iff x - y \in A.$$

Definim $(x + A)(y + A) = xy + A$; operația este bine definită deoarece A este ideal bilateral.

Avem că $(R/A, \cdot)$ este semigrup și are loc distributivitatea înmulțirii față de adunare. $(R/A, +, \cdot)$ se numește *inel cât (factor)*.

Exemple importante de ideale

Teorema 1.1 Fie R un inel comutativ cu $R \neq 0$ și fie P ideal în R , $P \neq R$. Atunci următoarele condiții sunt echivalente:

1. $\forall a, b \in R$, astfel încât $ab \in P \implies a \in P$ sau $b \in P$.
2. $\forall a, b \in R$, astfel încât $a \notin P$ și $b \notin P \implies ab \notin P$.
3. $\forall A, B$ ideale în R , astfel încât $A \cdot B \subset P \implies A \subset P$ sau $B \subset P$.
4. R/P domeniu de integritate.

Definiția 1.6 P se numește *ideal prim* al lui R .

Să reamintim noțiunea de număr prim.

Definiția 1.7 $p \in \mathbb{N}$, $p > 1$, se numește *număr prim* dacă $p|ab \implies p|a$ sau $p|b$.

Divizibilitatea în inele se poate scrie astfel:

$$B|A \iff A \subset B \text{ unde } A \text{ și } B \text{ sunt ideale în } R.$$

Observația 1.2 Dacă R este un domeniu de integritate, atunci $R/0 \simeq R$, de unde rezultă că 0 este ideal prim.

Operații cu ideale

Dacă A, B sunt ideale stângi (drepte, bilaterale), atunci

$A \cap B$ este ideal stâng (drept, bilateral)

$A + B = \{a + b \in R \mid a \in A, b \in B\}$ este ideal stâng (drept, bilateral)

$A \cdot B = \left\{ \sum_{i=1}^n a_i b_i \mid a_i \in A, b_i \in B, n \in \mathbb{N} \right\}$ este ideal stâng (drept, bilateral).

Dacă R este comutativ și A este ideal R , atunci

$\sqrt{A} = \{c \in R \mid \exists n \in \mathbb{N}, \text{ astfel încât } c^n \in A\}$ este ideal.

În particular,

$\sqrt{0} = \{c \in R \mid \exists n \in \mathbb{N}, \text{ astfel încât } c^n = 0\}$

se numește *nilradicalul* inelului, format din elementele *nilpotente* ale lui R .

Teorema 1.2 Fie R un inel comutativ cu $R \neq 0$ și M ideal în R , $M \neq R$. Următoarele condiții sunt echivalente:

1. $\forall x \in R, x \notin M, \exists y \in R, \text{ astfel încât } 1 - xy \in M$.
2. $\forall A$ ideal în R astfel încât $M \subseteq A$, atunci $M = A$ sau $A = R$.
3. R/M este corp comutativ.

Definiția 1.8 Un ideal M care satisface una dintre condițiile echivalente de mai sus se numește ideal *maximal* al lui R .

Fie (X, \leq) o mulțime parțial ordonată.

Definiția 1.9 $M \in X$ se numește element *maximal* dacă $M \leq x \implies x = M$, pentru $x \in X$. Considerăm $\mathcal{I} = \{A \mid A \text{ ideal al lui } R, A \neq R\}$. Atunci (\mathcal{I}, \subseteq) este o mulțime parțial ordonată.

Observația 1.3 Orice ideal maximal este prim. Reciproc, nu: 0 este ideal prim pentru un domeniu de integritate, dar nu este maximal în general.

Teorema 1.3 *Un inel cu 1 este corp dacă și numai dacă nu are ideale stângi (drepte, bilaterale) proprii.*

Deci, pentru K corp, avem doar două ideale: 0 și K .

Pentru K corp, 0 este unicul ideal maximal.

Exemple. În \mathbb{Z} , idealele prime sunt 0 și $p\mathbb{Z}$ cu p prim și idealele maximale sunt de forma $p\mathbb{Z}$, cu p prim.

Lema lui Krull

Fie R un inel comutativ cu $1 \neq 0$. Dacă A este ideal în R , $A \neq R$, atunci există M un ideal maximal în R , așa încât $A \subset M$.

Observația 1.4

1. Dacă R este un inel comutativ cu $1 \neq 0$, atunci R admite cel puțin un ideal maximal. Într-adevăr, aplicăm lema lui Krull pentru $A = 0$.
2. Dacă R este un inel comutativ cu $1 \neq 0$ și $a \in R$, a element neinversabil în R , atunci există un ideal maximal M în R , astfel încât $a \in M$. Într-adevăr, considerăm, în lema lui Krull, $A = (a) \neq R$, deoarece dacă $(a) = R$, atunci $1 \in (a)$, de unde ar rezulta că a este inversabil, fals!

Proprietăți

Fie A ideal în R .

Dacă $1 \in A$, atunci $A = R$.

Dacă $a \in A$, a inversabil, atunci $A = R$.

Observația 1.5 Dacă R este inel și A ideal în R , $A \neq R$, atunci elementele lui A sunt neinversabile.

Teorema 1.4 *Dacă mulțimea elementelor neinversabile formează un ideal, atunci acesta este unicul ideal maximal al inelului.*

Morfisme de inele

Fie $(R, +, \cdot)$ și $(R', +, \cdot)$ inele.

Definiția 1.10 Funcția $f : R \rightarrow R'$ se numește *morfism (homomorfism) de inele* dacă

1. $f(x + y) = f(x) + f(y)$.
2. $f(xy) = f(x)f(y)$, pentru orice $x, y \in R$.

Dacă inelele R și R' sunt cu $1 \neq 0$ și $1' \neq 0'$ și are loc, în plus, condiția

3. $f(1) = 1'$,

atunci f se numește *morfism unitar* de inele.

Definiția 1.11 Dacă f este morfism și f este injectivă, atunci f se numește *morfism injectiv* de inele.

Dacă f este morfism și f este surjectiv, atunci f se numește *morfism surjectiv* de inele.

Dacă morfismul f este bijectiv, f se numește *izomorfism* de inele.

Să remarcăm că pentru noțiunea de morfism de corpuri se impun doar condițiile 1 și 2. Condiția 3 rezultă din faptul că structurile (K^*, \cdot) și (K'^*, \cdot) sunt grupuri.

Observația 1.6 Orice morfism nenul de corpuri este morfism injectiv.

Pentru $f : R \rightarrow R'$, $\text{Ker } f = \{x \in R \mid f(x) = 0'\}$.

$\text{Ker } f$ este nucleul lui f și este ideal bilateral în R .

$\text{Im } f = \{f(x) \in R' \mid x \in R\}$.

$\text{Im } f$ este imaginea lui f și este subinel în R' .

Teoreme de izomorfisme ale inelelor.

Teorema 1.5 Fie $f : R \rightarrow R'$ un morfism de inele. Atunci există izomorfismul de inele

$$\begin{aligned} \varphi : R/\text{Ker } f &\xrightarrow{\sim} \text{Im } f \\ x + \text{Ker } f &\longrightarrow f(x). \end{aligned}$$

Teorema 1.6 Fie R un inel și A ideal bilateral în R . Atunci orice ideal stâng (drept, bilateral) al inelului R/A este de forma B/A unde $A \leq B \leq R$ și B este ideal stâng (drept, bilateral) în R . În plus, dacă B este ideal bilateral în R , astfel încât $A \subset B$, atunci există izomorfismul:

$$R/B \xrightarrow{\sim} (R/A)/(B/A).$$

Teorema 1.7 *Fie R inel și R' un subinel în R , iar A ideal bilateral în R . Atunci există izomorfismul canonic*

$$R'/R' \cap A \xrightarrow{\sim} (R' + A)/A.$$

Observația 1.7

1. Dacă $f : R \rightarrow R'$ este morfism de inele și A este ideal în R , atunci $f(A)$ este subinel în R' . Dacă, în plus, f este surjectiv, atunci $f(A)$ este ideal în R' .
2. Dacă A' este ideal în R' , atunci $f^{-1}(A')$ este ideal în R .

Capitolul 2

Module

2.1 Noțiunea de modul

Fie R inel cu $1 \neq 0$.

Definiția 2.1 Se numește *R-modul stâng* un grup abelian $(M, +)$, împreună cu o lege externă de compunere peste R

$$\begin{aligned}\varphi : R \times M &\longrightarrow M \\ (r, m) &\longrightarrow r \cdot m,\end{aligned}$$

astfel încât

1. $r(m_1 + m_2) = rm_1 + rm_2$.
2. $(r_1 + r_2)m = r_1m + r_2m$.
3. $r_1(r_2m) = (r_1r_2)m$.
4. $1 \cdot m = m$,

$\forall r, r_1, r_2 \in R, \forall m, m_1, m_2 \in M$.

Analog se definește noțiunea de *R-modul drept*.

Observația 2.1

1. O structură de *R-modul stâng* poate determina o structură de *R-modul drept* dacă inelul R este comutativ.

Într-adevăr, dacă ${}_R M$ este un modul stâng și $\varphi : R \times M \rightarrow M$, $\varphi(r, m) = rm$ este operația externă, în raport cu care au loc condițiile de R -modul stâng, atunci definim

$$\varphi' : M \times R \rightarrow M, \quad \varphi'(m, r) = m \circ r = rm.$$

Avem

$$(m \circ r_1) \circ r_2 = r_2(m \circ r_1) = r_2(r_1 m) = (r_2 r_1)m = m \circ (r_2 r_1).$$

Dacă inelul R este comutativ, atunci se verifică toate condițiile de R -modul drept pentru M , în raport cu φ' .

De aceea, pentru inele comutative nu mai facem distincție între noțiunile de modul stâng și modul drept.

2. Dacă inelul R nu este comutativ, atunci pe grupul abelian $(R, +)$ definim o înmulțire astfel:

$$R = R^\circ \text{ ca mulțimi, } (R, +) = (R^\circ, +)$$

și pentru $r_1, r_2 \in R^\circ$, $r_1 \circ r_2 = r_2 r_1$. Se obține astfel inelul opus $(R^\circ, +, \cdot)$.

Definim

$$\varphi'' : M \times R^\circ \rightarrow M, \quad \varphi''(m, r) = m \circ r = rm.$$

Așadar,

$${}_R M = M_{R^\circ}.$$

Exemple de module

1. Fie R un inel cu $1 \neq 0$. Atunci ${}_R R$ și R_R sunt module. În acest caz, înmulțirea externă este înmulțirea internă din inelul R .
2. Orice grup abelian $(G, +)$ este \mathbb{Z} -modul.
3. Pentru K corp comutativ și ${}_K L$ spațiu liniar, avem că ${}_K L$ este modul peste K , atât stâng, cât și drept.

4. Fie $(M, +)$ un grup abelian și notăm cu $\text{End}(M)$ inelul endomorfismelor grupului M . Atunci ${}_{\text{End}(M)}M$ este un modul stâng în care

$$\varphi : \text{End}(M) \times M \rightarrow M, \quad \varphi(f, m) = f(m).$$

Teorema 2.1 *Dacă $(M, +)$ este grup abelian și $\text{End}(M)$ este inelul endomorfismelor sale și R este inel cu $1 \neq 0$, atunci un morfism unitar de inele $f : R \rightarrow \text{End}(M)$ determină o structură de modul stâng peste R și reciproc, o structură de modul stâng peste R induce un morfism unitar de inele $f : R \rightarrow \text{End}(M)$.*

Demonstrație. Într-adevăr, dacă $f : R \rightarrow \text{End}(M)$ este un morfism unitar de inele, atunci $\forall r \in R$,

$$f(r) : M \rightarrow M$$

și definim

$$\varphi : R \times M \rightarrow M, \quad \varphi(r, m) = rm = f(r) \cdot m.$$

Reciproc, dacă ${}_R M$ este R -modul stâng, atunci definim $f : R \rightarrow \text{End}(M)$, $f(r) : M \rightarrow M$, $f(r)(m) = r \cdot m$ și se verifică faptul că f este morfism unitar de inele. \square

2.2 Bimodule

Fie $(M, +)$ un grup abelian și R, S inele cu $1 \neq 0$, așa încât

- ${}_R M$ și ${}_S M$ sunt R - și S -module stângi. Dacă, în plus, $r(sm) = s(rm)$, $\forall r \in R, \forall s \in S, \forall m \in M$, atunci ${}_{R-S} M$ este bimodul.
- ${}_R M$ și M_S sunt R -modul la stânga, respectiv S -modul la dreapta. Dacă, în plus, $(rm)s = r(ms)$, $\forall r \in R, \forall s \in S, \forall m \in M$, atunci ${}_R M_S$ este bimodul.
- M_R și M_S sunt R și S module drepte. Dacă, în plus, $(mr)s = (ms)r$, $\forall r \in R, \forall s \in S, \forall m \in M$, atunci M_{R-S} este bimodul.

Exemple.

- ${}_R R_R$ este $R - R$ bimodul.
- Dacă ${}_R M$ este modul și considerăm modulul $M_{\mathbb{Z}}$ (deoarece $(M, +)$ este grup abelian), atunci M este $\mathbb{Z} - R$ bimodul de tipurile ${}_{\mathbb{Z}-R} M$ și ${}_R M_{\mathbb{Z}}$.
- Dacă R este inel comutativ, atunci ${}_R M_R$ este $R - R$ bimodul.

2.3 Submodul. Modul cât

Fie ${}_R M$ este un R -modul stâng.

Definiția 2.2 $M' \subset M$, $M' \neq \emptyset$ se numește *submodul* al modulului M dacă

1. $\forall m'_1, m'_2 \in M'$, avem $m'_1 - m'_2 \in M'$.
2. $\forall r \in R$, $\forall m' \in M'$, avem $rm' \in M'$.

Următoarele condiții sunt echivalente cu definiția:

1. $\forall m'_1, m'_2 \in M'$, avem $m'_1 + m'_2 \in M'$.
2. $\forall r \in R$, $\forall m' \in M'$, avem $rm' \in M'$.

Notăm $M' \leq M$.

Fie ${}_R M$ modul și $M' \leq M$.

Considerăm grupul abelian $(M/M', +)$,

$$M/M' = \{m + M' \mid m \in M\}.$$

Definesc

$$\begin{aligned} \cdot : R \times M/M' &\longrightarrow M/M' \\ (r, m + M') &\longrightarrow r(m + M') = rm + M' \end{aligned}$$

Definiția de mai sus nu depinde de reprezentanți.

M/M' se numește *modul cât* (*factor*).

2.4 Morfisme de module

Fie ${}_R M$, ${}_R N$ module de același tip peste același inel R .

Definiția 2.3 Funcția $f : M \rightarrow N$ se numește *R -morfism* dacă satisface condițiile:

1. $f(m_1 + m_2) = f(m_1) + f(m_2)$, $\forall m_1, m_2 \in M$.
2. $f(rm) = rf(m)$, $\forall r \in R$, $\forall m \in M$.

Nucleul morfismului f :

$$\text{Ker } f = \{x \in M \mid f(x) = 0_N\} \text{ este submodul în } M.$$

Imaginea morfismului f

$$\text{Im } f = \{f(x) \mid x \in M\} \text{ este submodul în } N .$$

Caracterizări:

$$\begin{aligned} f \text{ monomorfism} &\iff \text{Ker } f = 0 \\ f \text{ epimorfism} &\iff \text{Im } f = N \iff N/\text{Im } f = 0. \end{aligned}$$

O compunere de morfisme este un morfism.

Fie $M' \leq M$. Atunci $i : M' \rightarrow M$ incluziunea canonică este un monomorfism, iar $p : M \rightarrow M/M'$, $p(m) = m + M'$ este un epimorfism.

Definiția 2.4 Dacă $f : M \rightarrow N$ este un morfism, atunci $N/\text{Im } f = \text{coker } f$ se numește *conucleul* lui f .

$M/\text{Ker } f = \text{coim } f$ se numește *coimagea* lui f .

Definiția 2.5 Dacă M, N sunt $R-S$ bimodule de același tip și $f : M \rightarrow N$, atunci f este *morfism de $R-S$ bimodule* dacă f este morfism de R -module și morfism de S -module.

Teoreme de izomorfisme ale modulelor

Teorema 2.2 Fie $f : M \rightarrow N$ un morfism de module. Atunci există $\varphi : M/\text{Ker } f \rightarrow \text{Im } f$, $\varphi(m + \text{Ker } f) = f(m)$ izomorfism de module.

Teorema 2.3 Fie ${}_R M$ un modul și $N \leq M$ un submodul al lui M . Atunci orice submodul al modulului cât M/N este de forma L/N unde $N \leq L \leq M$ și există un izomorfism canonic

$$\varphi : M/L \xrightarrow{\sim} (M/N)/(L/N).$$

Teorema 2.4 Dacă ${}_R M$ este un modul și $N \leq M$, $L \leq M$, atunci există un izomorfism canonic

$$\varphi : L/N \cap L \xrightarrow{\sim} (L + N)/N.$$

2.5 Şiruri exacte de module

Fie şirul $M \xrightarrow{f} N \xrightarrow{g} L$ de module şi morfisme de module.

Definiţia 2.6 Spunem că şirul de mai sus este *exact în N* dacă $\text{Im } f = \text{Ker } g$.

Observaţia 2.2 Morfismul $M \xrightarrow{f} N$ este mono(morfism) dacă şi numai dacă şirul $0 \rightarrow M \xrightarrow{f} N$ este exact.

Morfismul $M \xrightarrow{f} N$ este epi(morfism) dacă şi numai dacă şirul $M \xrightarrow{f} N \rightarrow 0$ este exact.

Morfismul $M \xrightarrow{f} N$ este izo(morfism) dacă şi numai dacă şirul $0 \rightarrow M \xrightarrow{f} N \rightarrow 0$ este exact.

Definiţia 2.7 Un şir exact de forma

$$0 \rightarrow M' \xrightarrow{v} N \xrightarrow{q} M'' \rightarrow 0$$

se numeşte *şir exact scurt* dacă v este mono, q este epi şi $\text{Ker } q = \text{Im } v$.

Plecând de la un mono (epi) morfism putem construi în mod canonic un şir exact scurt astfel:

Fie $v : M' \rightarrow M$ mono. Obţinem şirul exact scurt

$$0 \rightarrow M' \xrightarrow{v} M \xrightarrow{p} M/\text{Im } v \rightarrow 0.$$

Fie $q : M \rightarrow M''$ epi. Obţinem şirul exact scurt

$$0 \rightarrow \text{Ker } q \xrightarrow{i} M \xrightarrow{q} M'' \rightarrow 0.$$

Cazuri particulare

- $v = u$ incluziunea canonică. Obţinem şirul exact scurt indus de un submodul

$$0 \rightarrow M' \xrightarrow{u} M \rightarrow M/M' \rightarrow 0.$$

- $q = p$ proiecţia canonică. Obţinem şirul

$$0 \rightarrow M' \rightarrow M \rightarrow M/M' \rightarrow 0.$$

Pornind de la un morfism $f : M \rightarrow N$, putem construi un șir exact astfel:

$$0 \longrightarrow \text{Ker } f \longrightarrow M \xrightarrow{f} N \xrightarrow{p} N/\text{Im } f \longrightarrow 0$$

adică este exact în fiecare termen al șirului.

Lema slabă a celor 5. *Considerăm următoarea diagramă comutativă cu liniile exacte:*

$$\begin{array}{ccccccc} A' & \xrightarrow{v} & A & \xrightarrow{q} & A'' & \longrightarrow & 0 \\ \downarrow f' & & \downarrow f & & \downarrow f'' & & \\ 0 & \longrightarrow & B' & \xrightarrow{v'} & B & \xrightarrow{q'} & B'' \end{array}$$

Au loc următoarele afirmații:

1. Dacă f' și f'' sunt mono, atunci f este mono.
2. Dacă f' și f'' sunt epi, atunci f este epi.
3. Dacă f' și f'' sunt izo, atunci f este izo.

Demonstrație.

1. Arătăm că avem $\text{Ker } f = 0$. Fie $a \in \text{Ker } f$. Atunci $f(a) = 0$, deci $q'f(a) = 0$, de unde $f''q(a) = 0$. Cum f'' este mono, obținem $q(a) = 0$, adică $a \in \text{Ker } q = \text{Im } v$. Rezultă că există $a' \in A'$, încât $a = v(a')$. Avem $0 = f(a) = fv(a') = v'f'(a')$ și, cum v' este mono, obținem $f'(a') = 0$. Dar și f' este mono, deci $a' = 0$. Obținem $a = v(a') = 0$, adică

$$\text{Ker } f = 0.$$

2. Să arătăm acum că f este epi. Verificăm surjectivitatea lui f . Fie $b \in B$. Avem $q'(b) \in B''$. Cum f'' este epi, rezultă că există $a'' \in A''$, încât $f''(a'') = q'(b)$. Dar și q este epi, rezultă că există $a_1 \in A$, încât $q(a_1) = a''$. Avem $f''(q(a_1)) = q'(b)$ și cum $f''q = q'f$ rezultă $q'(f(a_1) - b) = 0$, de unde $f(a_1) - b \in \text{Ker } q' = \text{Im } v'$. Există $b' \in B'$ încât $f(a_1) - b = v'(b')$. Morfismul f' este epi, rezultă că există $a' \in A'$ cu $f'(a') = b'$. Obținem $f(a_1) - b = v'f'(a')$, deci $f(a_1) - f(v(a')) = b$, adică

$$b = f(a_1 - v(a')) \in \text{Im } f. \quad \square$$

Lema tare a celor 5. Fie următoarea diagramă comutativă cu liniile exacte:

$$\begin{array}{ccccccccc}
 A_2 & \xrightarrow{g_2} & A_1 & \xrightarrow{g_1} & A & \xrightarrow{g} & A' & \xrightarrow{g'} & A'' \\
 \downarrow f_2 & & \downarrow f_1 & & \downarrow f & & \downarrow f' & & \downarrow f'' \\
 B_2 & \xrightarrow{h_2} & B_1 & \xrightarrow{h_1} & B & \xrightarrow{h} & B' & \xrightarrow{h'} & B''
 \end{array}$$

1. Dacă f_2 este epi și f_1 și f' sunt mono, atunci f este mono.
2. Dacă f_1 și f' sunt epi, iar f'' este mono, atunci f este epi.

2.6 Produse directe de module

I. Considerăm două module de același tip, peste același inel ${}_R M_1, {}_R M_2$.

Definiția 2.8 Se numește *produs direct* al modulelor M_1 și M_2 un modul P , împreună cu două morfisme $p_1, p_2, p_i : P \rightarrow M_i, i = \overline{1, 2}$, așa încât următoarea diagramă este comutativă:

$$\begin{array}{ccc}
 & M_1 & \\
 f_1 \nearrow & & \nwarrow p_1 \\
 \forall X & \xrightarrow{\exists! f} & P \\
 f_2 \searrow & & \nearrow p_2 \\
 & M_2 &
 \end{array}$$

Pentru orice modul X și orice morfisme $f_1 : X \rightarrow M_1, f_2 : X \rightarrow M_2$, există și este unic morfismul $f : X \rightarrow P$, așa încât

$$p_1 f = f_1, \quad p_2 f = f_2.$$

Proprietatea prin care se definește produsul direct se numește *proprietate de universalitate* a produsului direct.

Teoremă de existență și unicitate. Fie modulele ${}_R M_1$ și ${}_R M_2$. Atunci există produsul lor direct (P, p_1, p_2) și este unic până la izomorfism.

Demonstrație. *Existența.* Fie produsul cartezian

$$M_1 \amalg M_2 = \{(m_1, m_2) \mid m_1 \in M_1, m_2 \in M_2\}$$

și definim

$$(m_1, m_2) + (m'_1, m'_2) = (m_1 + m'_1, m_2 + m'_2), \quad r(m_1, m_2) = (rm_1, rm_2), \quad \forall r \in R.$$

Obținem o structură de R -modul pe $M_1 \amalg M_2$.

Definim

$$\begin{aligned} p_i : M_1 \amalg M_2 &\longrightarrow M_i \\ (m_1, m_2) &\longrightarrow m_i \end{aligned}$$

p_i sunt proiecțiile canonice și sunt epi, $i = \overline{1, 2}$.

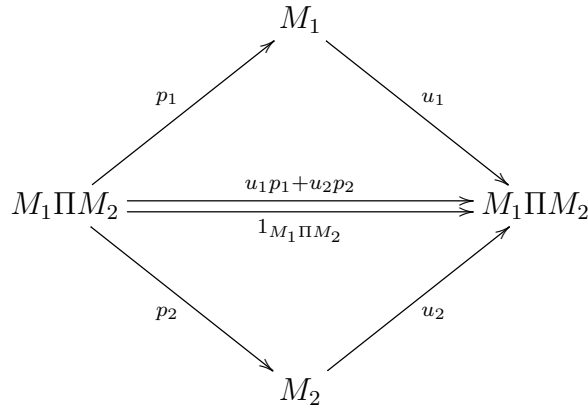
Definim $u_i : M_i \longrightarrow M_1 \amalg M_2$ cu $u_1(m_1) = (m_1, 0)$, $u_2(m_2) = (0, m_2)$.

u_1 și u_2 se numesc *injectiile canonice*.

Au loc, în plus, următoarele proprietăți:

$$p_i u_i = 1_{M_i} \quad \text{și} \quad p_i u_j = 0, \quad i \neq j.$$

De asemenea, $u_1 p_1 + u_2 p_2 = 1_{M_1 \amalg M_2}$ folosind definiția produsului direct:



Se demonstrează faptul că $(M_1 \amalg M_2; p_1, p_2)$ este produs direct al lui M_1 și M_2 .

De remarcat că $f : X \longrightarrow M_1 \amalg M_2$ este definit astfel $f(x) = (f_1(x), f_2(x))$.

Se verifică unicitatea până la izomorfism a produsului direct (tehnica "vânătorii de diagrame"). \square

II. Fie acum $\{ {}_R M_i \}_{i \in I}$ o familie de R -module, nu neapărat finită.

Produsul direct al acestei familii de module este $(P, \{p_i\}_{i \in I})$, $p_i : P \rightarrow M_i$, încât următoarea diagramă este comutativă:

$$\begin{array}{ccc} & M_i & \\ f_i \nearrow & & \nwarrow p_i \\ \forall X & \xrightarrow{\exists! f} & P \end{array}$$

Această proprietate se numește *proprietate de universalitate* a produsului direct.

Teorema de existență și unicitate. *Dată familia $\{M_i\}_{i \in I}$, există produsul ei direct și este unic, până la izomorfism.*

Demonstrație. Considerăm produsul cartezian

$$\prod_{i \in I} M_i = \{ \{m_i\}_{i \in I} \mid m_i \in M_i, i \in I \}$$

și definim:

$$” + ” : \{m_i\}_{i \in I} + \{m'_i\}_{i \in I} = \{m_i + m'_i\}_{i \in I}$$

$$” \cdot ” : r \{m_i\}_{i \in I} = \{rm_i\}_{i \in I}, \forall r \in R.$$

Obținem astfel o structură de R -modul pe $\prod_{i \in I} M_i$.

Să remarcăm că

$$\prod_{i \in I} M_i = \left\{ f : I \rightarrow \bigcup_{i \in I} M_i \mid f(i) \in M_i \right\}.$$

Definim

$$p_{i_0} : \prod_{i \in I} M_i \rightarrow M_{i_0}$$

$$\{m_i\}_{i \in I} \rightarrow m_{i_0}$$

și

$$u_{i_0} : M_{i_0} \rightarrow \prod_{i \in I} M_i$$

$$m_{i_0} \rightarrow \{m_i\}_{i \in I}$$

cu $m_i = 0$ pentru $i \neq i_0$.

Avem $p_i u_i = 1_{M_i}$, $p_i u_j = 0$, pentru $i \neq j$,

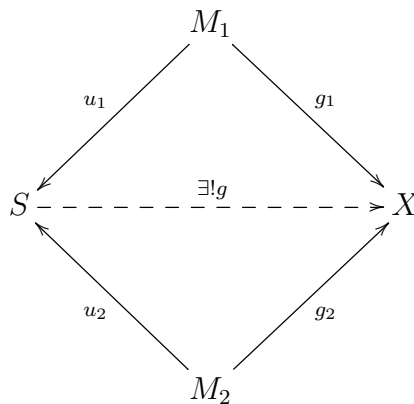
$$\sum_{i \in I} u_i p_i = 1_{\prod_{i \in I} M_i}.$$

Se verifică unicitatea până la izomorfism a produsului direct de module. \square

2.7 Sume directe de module

I. Suma directă pentru ${}_R M_1$ și ${}_R M_2$

Definiția 2.9 *Suma directă* a modulelor ${}_R M_1$ și ${}_R M_2$ este un modul S împreună cu două morfisme $u_1, u_2, u_i : M_i \rightarrow S$ monomorfisme canonice așa încât următoarea diagramă este comutativă:



$g u_i = g_i$, $i = \overline{1, 2}$, adică, pentru orice modul X și orice morfisme g_1, g_2 definite ca în diagramă, există și este unic $g : S \rightarrow X$, încât

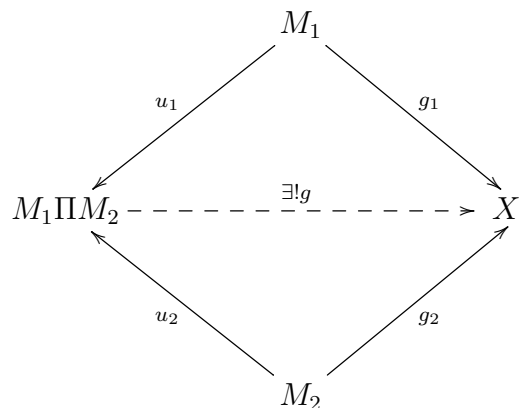
$$g u_1 = g_1 \text{ și } g u_2 = g_2.$$

Această proprietate se numește *proprietate de univiersalitate* a sumei directe.

Teorema de existență și unicitate. *Date ${}_R M_1$ și ${}_R M_2$, există suma lor directă și este unică până la izomorfism.*

Demonstrație. *Existența.* $(u_1, u_2, M_1 \amalg M_2)$ este suma directă pentru M_1 și

M_2 . Considerăm diagrama



Definim

$$g : M_1 \amalg M_2 \longrightarrow X, \quad g(m_1, m_2) = g_1(m_1) + g_2(m_2).$$

g este morfism și are loc

$$gu_i = g_i, \quad i = \overline{1, 2}.$$

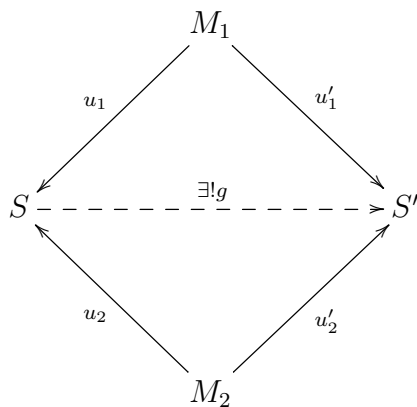
Unicitatea lui g . Presupunem că există morfismul $g' : M_1 \amalg M_2 \longrightarrow X$, așa încât $g'u_i = g_i$, $i = \overline{1, 2}$. Avem

$$\begin{aligned} g'(m_1, m_2) &= g'((0, m_2) + (m_1, 0)) \\ &= g'((0, m_2) + g'(m_1, 0)) \\ &= g'(u_2(m_2)) + g'(u_1(m_1)) \\ &= g_2(m_2) + g_1(m_1) \\ &= g(m_1, m_2), \quad \forall (m_1, m_2) \in M_1 \amalg M_2. \end{aligned}$$

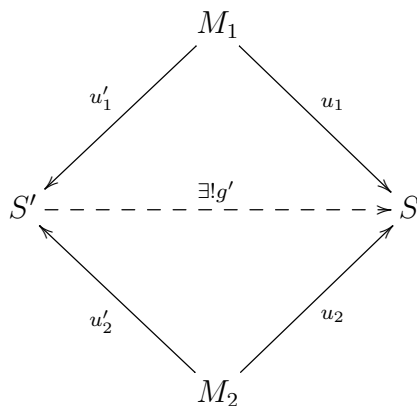
Unicitatea sumei directe

Pentru suma directă notăm $M_1 \amalg M_2$ sau $M_1 \amalg M_2$ sau $M_1 \oplus M_2$. Suma directă este $(u_1, u_2, M_1 \amalg M_2)$. Presupunem că (u_1, u_2, S) și (u'_1, u'_2, S') sunt sume directe ale modulelor M_1 și M_2 .

Să arătăm că există izomorfismul $g : S \rightarrow S'$, astfel încât $gu_i = u'_i$, $i = \overline{1, 2}$. Folosim tehnica "vânătorii de diagrame". Considerăm diagramele



$$gu_i = u'_i, \quad \forall i = \overline{1, 2},$$

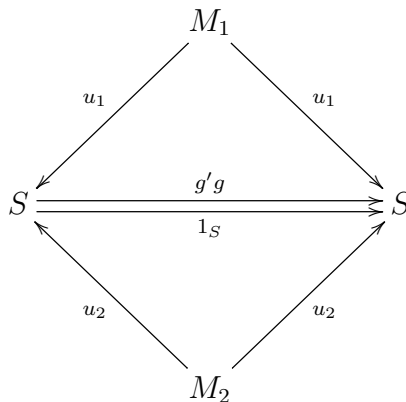


$$g'u'_i = u_i, \quad \forall i = \overline{1, 2}.$$

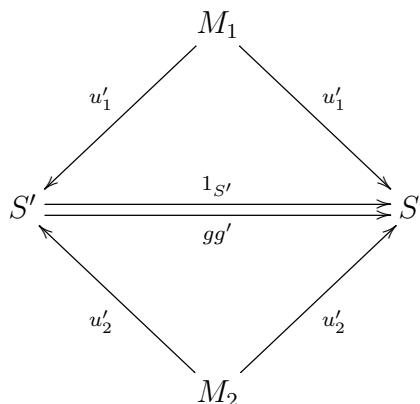
Obținem

$$(gg')u'_i = u'_i \text{ și } (g'g)u_i = u_i, \quad i = \overline{1, 2}.$$

Similar, avem



$$g'g = 1_S,$$



$$gg' = 1_{S'}.$$

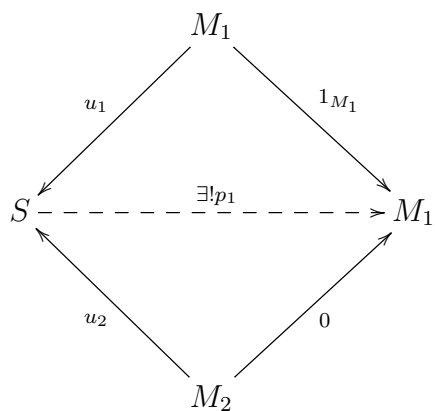
Așadar, g este un izomorfism. □

Teorema 2.5 Date modulele ${}_R M_1$, ${}_R M_2$ și modulul S , împreună cu morfismele $u_i : M_i \rightarrow S$, $i = \overline{1, 2}$, următoarele condiții sunt echivalente:

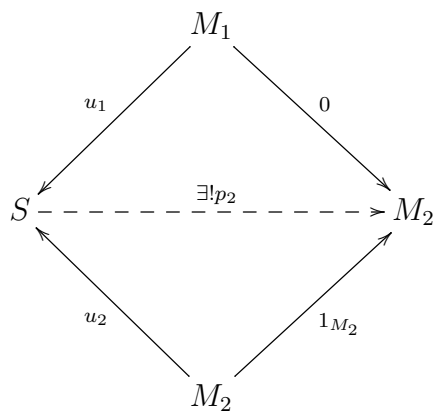
1. (u_1, u_2, S) este sumă directă.
2. Există morfismele $p_i : S \rightarrow M_i$, $i = \overline{1, 2}$, unic determinate, astfel încât

$$\begin{cases} p_1 u_1 = 1_{M_1}, p_2 u_2 = 1_{M_2}, p_i u_j = 0, i \neq j, \\ u_1 p_1 + u_2 p_2 = 1_S. \end{cases}$$

Demonstrație. $1 \implies 2$. Considerăm diagramele

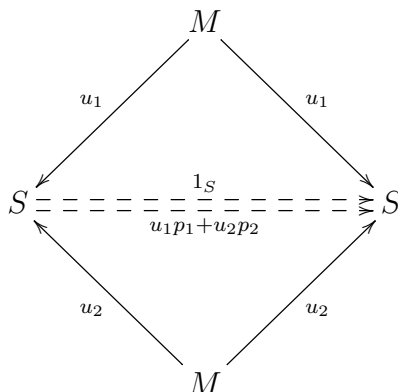


$$\exists! p_1 : S \longrightarrow M_1, \text{ încât } \begin{cases} p_1 u_1 = 1_{M_1} \\ p_1 u_2 = 0 \end{cases}$$



$$\exists! p_2 : S \longrightarrow M_2, \text{ încât } \begin{cases} p_2 u_1 = 0 \\ p_2 u_2 = 1_{M_2} \end{cases}$$

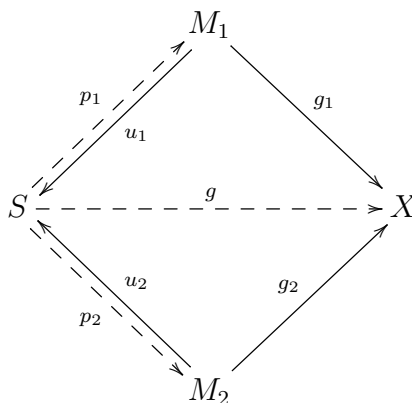
Avem



Din unicitatea morfismului avem $u_1p_1 + u_2p_2 = 1_S$.

$2 \implies 1$. Fie R -modulul X și $g_i : M_i \rightarrow X$ morfisme arbitrare. Să determinăm morfismul unic $g : S \rightarrow X$, astfel încât $gu_i = g_i$, $i = \overline{1, 2}$.

Considerăm diagrama în care $g = g_1p_1 + g_2p_2$.



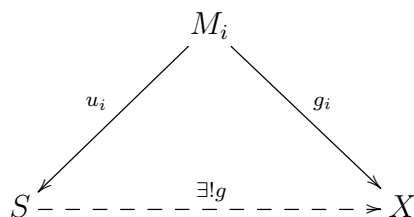
Se verifică faptul că $gu_i = g_i$, $i = \overline{1, 2}$. Morfismul g este unic cu această proprietate. Într-adevăr, dacă $g' : S \rightarrow X$ este așa încât $g'u_i = g_i$, $i = \overline{1, 2}$, atunci

$$g' = g' \circ 1_S = g' \circ (u_1p_1 + u_2p_2) = g_1p_1 + g_2p_2 = g \quad \square$$

II. Sumă directă pentru o familie de module

Fie familia de R -module $\{ {}_R M_i \}_{i \in I}$.

Definiția 2.10 Suma directă a familiei $\{M_i\}_{i \in I}$ este $(\{u_i\}_{i \in I}, S)$, unde S este un R -modul și $u_i : M_i \rightarrow S$ sunt morfisme, așa încât



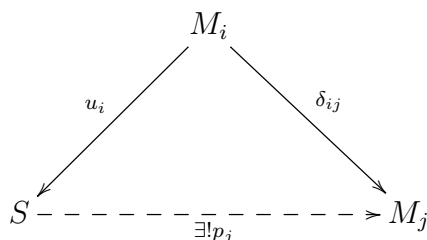
pentru orice R -modul X și orice morfisme $g_i : M_i \rightarrow X$ există și este unic $g : S \rightarrow X$, încât $gu_i = g_i, i \in I$.

Proprietatea dată în definiția de mai sus este *proprietatea de universalitate a sumei directe*.

Teorema 2.6 Dacă $(\{u_i\}_{i \in I}, S)$ este sumă directă pentru familia $\{M_i\}_{i \in I}$, atunci există și este unică familia de morfisme

$$p_i : S \rightarrow M_i, i \in I, \text{ cu } p_j u_i = \begin{cases} 1_{M_i}, & \text{pentru } j = i, \\ 0, & \text{pentru } j \neq i. \end{cases}$$

Demonstrație. Folosim diagrama



□

Teorema de existență și unicitate. Dată familia de module $\{M_i\}_{i \in I}$, există suma directă a familiei și este unică, până la izomorfism.

Soluție. Fie

$$\prod_{i \in I} M_i = \{ \{m_i\}_{i \in I} \mid m_i \in M_i, i \in I \}$$

cu $\{m_i\}_{i \in I} + \{m'_i\}_{i \in I} = \{m_i + m'_i\}_{i \in I}$ și $r\{m_i\}_{i \in I} = \{rm_i\}_{i \in I}$. Atunci $\prod_{i \in I} M_i$ este un R -modul.

Considerăm

$$\prod_{i \in I} M_i = \left\{ \{m_i\}_{i \in I} \in \prod_{i \in I} M_i \mid m_i = 0, \text{ cu excepția unui număr finit de indici} \right\}.$$

Atunci $\prod_{i \in I} M_i$ este submodul al lui $\prod_{i \in I} M_i$.

Să remarcăm că pentru I finită, avem

$$\prod_{i \in I} M_i = \prod_{i \in I} M_i.$$

Considerăm morfismele

$$u_{i_0} : M_{i_0} \longrightarrow \prod_{i \in I} M_i, \text{ pentru orice } i_0 \in I \text{ arbitrar}$$

$$u_{i_0}(m_{i_0}) = \{m_i\}_{i \in I}, \text{ cu } \begin{cases} m_i = m_{i_0} & \text{pentru } i = i_0, \\ m_i = 0 & \text{pentru } i \neq i_0. \end{cases}$$

Atunci $\left(\{u_i\}_{i \in I}, \prod_{i \in I} M_i \right)$ este sumă directă pentru familia $\{M_i\}_{i \in I}$.

Într-adevăr, considerăm diagrama

$$\begin{array}{ccc} & M_i & \\ & \swarrow u_i & \searrow g_i \\ \prod_{i \in I} M_i & \overset{\exists! g}{\dashrightarrow} & X \end{array}$$

Morfismul g se definește astfel

$$g_i(\{m_i\}_{i \in I}) = \sum_{i \in I} g_i(m_i),$$

unde $g_i(m_i) = 0$, cu excepția unui număr finit de indici.

Se verifică faptul că $gu_i = g_i$.

Unicitatea lui g . Presupunem că există $g' : \prod_{i \in I} M_i \rightarrow X$ încât $g'u_i = g_i, i \in I$.

Atunci

$$\begin{aligned} g'(\{m_i\}_{i \in I}) &= g'(u_{i_1}(m_1) + u_{i_2}(m_2) + \cdots + u_{i_k}(m_{i_k})) \\ &= g_{i_1}(m_{i_1}) + \cdots + g_{i_k}(m_{i_k}) \\ &= g(\{m_i\}_{i \in I}), \quad \forall \{m_i\}_{i \in I} \in \prod_{i \in I} M_i, \end{aligned}$$

unde m_{i_1}, \dots, m_{i_k} sunt elementele nenule din $\{m_i\}_{i \in I}$. Unicitatea sumei directe se verifică cu tehnica "vânătorii de diagrame". \square

2.8 Sumă directă internă de submodule

Fie ${}_R M$ un modul și ${}_R M_i$ submodule în ${}_R M$, pentru orice $i \in I$. Notăm

$$\sum_{i \in I} M_i = \left\{ \sum_{i \in I} m_i \in M \mid m_i \in M_i, i \in I, m_i = 0, \text{ cu excepția unui număr finit de indici} \right\}$$

Definiția 2.11 $\sum_{i \in I} M_i$ se numește *suma directă internă* a familiei $\{M_i\}_{i \in I}$

dacă scrierea oricărui element sub forma $\sum_{i \in I} m_i$ este unică.

Notăție: $\sum_{i \in I} \oplus M_i$ sau $\bigoplus_{i \in I} M_i$.

Teorema 2.7 Fie M un R -modul și $\{M_i\}_{i \in I}$ o familie de submodule ale lui M . Următoarele condiții sunt echivalente:

1. $M = \sum_{i \in I} \oplus M_i$.
2. Există un izomorfism canonic $h : \prod_{i \in I} M_i \xrightarrow{\sim} M$ indus de incluziunile canonice $h_i : M_i \rightarrow M, i \in I$, unde $\prod_{i \in I} M_i$ este suma directă externă.

$$3. M = \sum_{i \in I} M_i \text{ și } \sum_{i \in I} m_i = 0 \iff m_i = 0, \forall i \in I.$$

$$4. M = \sum_{i \in I} M_i \text{ și } M_{i_0} \cap \left(\sum_{\substack{i \in I \\ i \neq i_0}} M_i \right) = 0, \text{ pentru orice } i_0 \in I.$$

Demonstrație. $1 \implies 2$. Considerăm incluziunile canonice $h_i : M_i \longrightarrow M$. Utilizăm definiția sumei directe pentru diagrama

$$\begin{array}{ccc} & M_i & \\ & \swarrow u_i & \searrow h_i \\ \prod_{i \in I} M_i & \overset{\exists! h}{\dashrightarrow} & M \end{array}$$

$hu_i = h_i, \forall i \in I$, unde

$$h(\{m_i\}_{i \in I}) = \sum_{i \in I} h_i(m_i) = \sum_{i \in I} m_i \text{ pentru } \{m_i\}_{i \in I} \in \prod_{i \in I} M_i.$$

h este morfism surjectiv, deoarece $\forall m \in M, m$ se scrie în mod unic ca

$$m = \sum_{i \in I} m_i.$$

h este injectiv datorită faptului că $m = \sum_{i \in I} m_i$ este o scriere unică.

$2 \implies 3$. Considerăm izomorfismul

$$h : \prod_{i \in I} M_i \longrightarrow M.$$

Din definiție avem că $\sum_{i \in I} M_i$ este submodul al lui M .

Să mai arătăm că $M \subseteq \sum_{i \in I} M_i$.

Din faptul că h este un izomorfism, rezultă că, pentru orice $m \in M$ există $\{m_i\}_{i \in I}$, așa încât $m = h(\{m_i\}_{i \in I})$.

Morfismul h este indus de incluziunile canonice.

Avem $m = \sum_{i \in I} h_i(m_i) = \sum_{i \in I} m_i$. Deci $M \subset \sum_{i \in I} M_i$.

Dacă $\sum_{i=1} m_i = 0$, atunci $h(\{m_i\}_{i \in I}) = 0$ și, cum h este izomorfism, obținem $m_i = 0, \forall i \in I$.

3 \implies 4. Pentru $i_0 \in I$ oarecare, considerăm

$$x \in M_{i_0} \cap \left(\sum_{\substack{i \in I \\ i \neq i_0}} M_i \right).$$

Atunci, $x = m_{i_0} \in M_{i_0}$ și $x = \sum_{\substack{i \in I \\ i \neq i_0}} m_i$. Obținem $-m_{i_0} + \sum_{\substack{i \in I \\ i \neq i_0}} m_i = 0$, de unde $m_i = 0, \forall i \in I$, în baza lui 3. Rezultă $x = 0$.

4 \implies 1. Avem $M = \sum_{i \in I} M_i$. Fie $m = \sum_{i \in I} m_i$. Să arătăm că scrierea este unică. Presupunem că $m = \sum_{i \in I} m_i = \sum_{i \in I} m'_i$, de unde

$$m_{i_0} - m'_{i_0} = \sum_{\substack{i \in I \\ i \neq i_0}} m'_i - \sum_{\substack{i \in I \\ i \neq i_0}} m_i \in M_{i_0} \cap \left(\sum_{\substack{i \in I \\ i \neq i_0}} M'_i \right) = 0,$$

deci $m_{i_0} = m'_{i_0}$, pentru orice $i_0 \in I$. □

2.9 Sumanzi direcți. Factori direcți. Șiruri exacte scindate

Fie M un R -modul și N un submodul al său. Notăm cu $u : N \rightarrow M$ incluziunea canonică.

Definiția 2.12 Submodulul N se numește *sumand direct* al lui M dacă există morfismul $q : M \rightarrow N$, încât $qu = 1_N$.

Rezultă că morfismul q este epi.

Spunem că u are invers la stânga.

Fie acum M un R -modul și P un modul cât al lui M , iar $p : M \rightarrow P$ epimorfismul corespunzător.

Definiția 2.13 P se numește *factor direct* al lui M dacă există $v : P \rightarrow M$, încât $pv = 1_P$.

Rezultă că morfismul v este mono.

Spunem că p are invers la dreapta.

Definiția 2.14 Un șir exact scurt

$$0 \rightarrow M' \xrightarrow{v} M \xrightarrow{q} M'' \rightarrow 0$$

se numește șir exact *scindat* dacă $\text{Im } v = \text{Ker } q$ este sumand direct al lui M .

Teorema 2.8 (de caracterizare a șirurilor exacte scindate) *Fie M un R -modul, N un submodule cu $u : N \rightarrow M$ incluziunea canonică și $p : M \rightarrow M/N$ proiecția canonică. Următoarele condiții privitoare la M și N sunt echivalente.*

1. N este sumand direct al lui M .
2. M/N este factor direct al lui M .
3. Există un izomorfism canonic $f : M \xrightarrow{\sim} N \amalg (M/N)$ așa încât

$$\begin{array}{ccccc} N & \xrightarrow{u} & M & \xrightarrow{f} & N \amalg (M/N) \\ N \amalg (M/N) & \xrightarrow{f^{-1}} & M & \xrightarrow{p} & M/N \end{array}$$

$f u = u_1 : N \rightarrow N \amalg (M/N)$ este incluziunea pe prima componentă.

$p f^{-1} = p_2 : N \amalg (M/N) \rightarrow M/N$ este proiecția pe a doua componentă.

Demonstrație. Fie diagrama

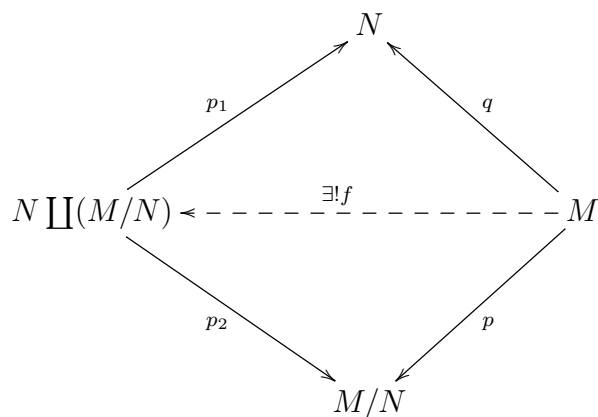
$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & N & \xrightarrow{u} & M & \xrightarrow{p} & M/N \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow 1_N & & \downarrow \exists f \text{ izo} & & \downarrow 1_{M/N} \\ 0 & \longrightarrow & N & \xleftarrow[p_1]{u_1} & N \amalg (M/N) & \xleftarrow[u_2]{p_2} & M/N \longrightarrow 0 \end{array} \quad (\text{D})$$

în care cele două linii sunt șiruri exacte.

1 \implies 3. Să arătăm că există f care face pătratele comutative și apoi, conform lemei slabe a celor 5 va rezulta că $f : M \rightarrow N \amalg (M/N)$ este izo.

Din N sumand direct rezultă că există $q : M \rightarrow N$, încât $qu = 1_N$.

Considerăm produsul direct $(N \amalg (M/N); p_1, p_2)$ și din definiția acestuia $\exists! f : M \rightarrow N \amalg (M/N)$ încât $p_1 f = q$ și $p_2 f = p$.



Așadar al doilea pătrat din diagrama (D) este comutativ. Pe de altă parte, $p_2(fu) = pu = 0$.

Considerând din nou produsul direct $N \amalg (M/N)$, rezultă că

$$\exists! u_1 : N \rightarrow N \amalg M/N$$

astfel încât $p_1 u_1 = 1_N$ și $p_2 u_1 = 0$.

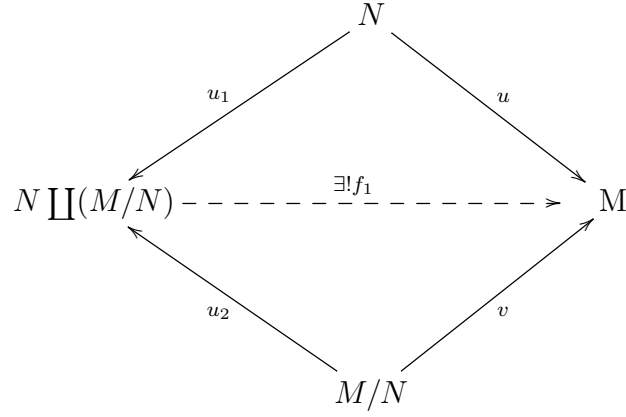
Dar și fu satisface aceste condiții, deci $fu = u_1$, deci și primul pătrat al diagramei (D) este comutativ.

Obținem așadar condiția 3.

3 \implies 1. Să arătăm că există $q : M \rightarrow N$, astfel încât $qu = 1_N$.

Considerăm $q = p_1 f : M \rightarrow N$ și avem $qu = (p_1 f)u = p_1 u_1 = 1_N$.

2 \implies 3. Procedăm analog. Din faptul că M/N este factor direct, rezultă că există $v : M/N \rightarrow M$, astfel încât $pv = 1_{M/N}$. Considerăm suma directă $(u_1, u_2; N \amalg (M/N))$ și aplicăm definiția



Rezultă că $\exists! f_1$, astfel încât $f_1 u_1 = u$ și $f_1 u_2 = v$. Obținem comutativitatea primului pătrat.

Considerăm diagrama

$$\begin{array}{ccccccc}
 0 & \longrightarrow & N & \xrightarrow{u_1} & N \amalg (M/N) & \overset{p_2}{\dashrightarrow} \underset{u_2}{\dashleftarrow} & M/N & \longrightarrow & 0 \\
 & & \downarrow 1_N & & \downarrow f_1 & & \downarrow 1_{M/N} & & \\
 0 & \longrightarrow & N & \xrightarrow{u} & M & \xrightarrow{p} & M/N & \longrightarrow & 0
 \end{array} \quad (D')$$

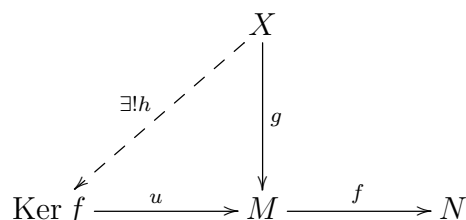
Să verificăm comutativitatea pătratelor diagramei (D'). Din $f_1 u_2 = v$ rezultă $(p f_1) u_2 = p v = 1_{M/N}$ și $(p f_1) u_1 = p u = 0$. Întrucât $N \amalg (M/N)$ este sumă directă, rezultă că există și este unic $p_2 : N \amalg (M/N) \rightarrow M/N$, încât $p_2 u_2 = 1_{M/N}$ și $p_2 u_1 = 0$. Dar și $p f_1$ satisface aceste egalități, deci $p f_1 = p_2$, adică am obținut comutativitatea celui de al doilea pătrat din (D). Așadar, f_1 este izo. Considerăm $f = f_1^{-1}$.

3 \implies 2. Să arătăm că există $v : M/N \rightarrow M$, încât $p v = 1_{M/N}$. Considerăm $v = f_1 u_2$. Avem $p v = (p f_1) u_2 = p_2 u_2 = 1_{M/N}$. \square

2.10 Probleme

1. Fie $f : M \rightarrow N$ un morfism de module și $u : \text{Ker } f \rightarrow M$ incluziunea canonică. Atunci

- $fu = 0$,
- Pentru orice modul X și orice morfism $g : X \rightarrow M$ astfel încât $fg = 0$, $\exists! h : X \rightarrow \text{Ker } f$ încât $uh = g$.

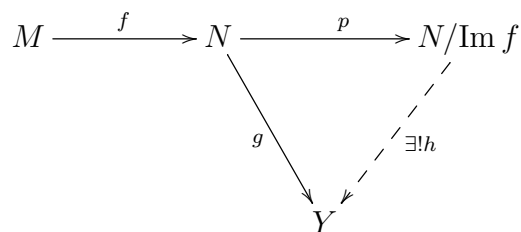


$$\begin{aligned}
 h(x) &= g(x), \quad \forall x \in X, \\
 g(x) &\in \text{Ker } f \text{ din } fg = 0.
 \end{aligned}$$

$(\text{Ker } f, u)$ se numește *nucleul* lui f și este unic până la un izomorfism. Proprietatea de mai sus este *universalitatea* nucleului.

2. Fie $f : M \rightarrow N$ un morfism de module și $p : N \rightarrow \text{Coker } f = N/\text{Im } f$. Atunci

- $pf = 0$.
- Pentru orice modul Y și orice morfism $g : N \rightarrow Y$ cu $gf = 0$, $\exists! h : N/\text{Im } f \rightarrow Y$ încât $hp = g$.



$$\text{Avem } h(x + \text{Im } f) = g(x), \text{ iar } p(x) = x + \text{Im } f, \text{ unde } x \in N.$$

$(p, \text{Coker } f)$ se numește *conucleul* lui f și este unic până la izomorfism. Proprietatea de mai sus se numește *universalitatea* conucleului.

3. Fie M un modul și $\{M_i\}_{i \in I}$ o familie de submodule. Au loc următoarele șiruri exacte:

$$(i) \quad 0 \longrightarrow \bigcap_{i \in I} M_i \xrightarrow{u} M \xrightarrow{p} \prod_{i \in I} (M/M_i)$$

unde p este indus de proiecțiile canonice $p_i : M \rightarrow M/M_i$.

$$(ii) \quad \prod_{i \in I} M_i \xrightarrow{h} M \xrightarrow{p} M / \sum_{i \in I} M_i \longrightarrow 0$$

unde p este proiecția canonică, $p(x) = \{x + M_i\}_{i \in I}$, iar h este morfismul indus de incluziunile canonice $h_i : M_i \rightarrow M$.

Capitolul 3

Module libere și module proiective

3.1 Module libere

Fie ${}_R M$ un modul și $X \subseteq M$. Notăm cu

$$\overline{X} = \left\{ \sum_{x \in X} r_x x \mid r_x \in R, x \in X, rx=0 \text{ cu excepția unui număr finit de elemente} \right\}.$$

Atunci \overline{X} este submodul al lui M .

Definiția 3.1 \overline{X} se numește *submodulul generat de X* .

Putem scrie

$$\overline{X} = \sum_{x \in X} Rx.$$

Dacă X este finită, atunci \overline{X} este submodul finit generat.

Dacă $\overline{X} = M$, atunci X este un sistem de generatori pentru M .

Avem $X = \{x_1, \dots, x_n\}$, de unde $\overline{X} = \sum_{i \in I}^n Rx_i$.

Definiția 3.2 Submulțimea $X \subseteq M$ se numește *liniar independentă* peste R dacă

$$\sum_{x \in X} r_x x = 0 \Rightarrow r_x = 0, \forall x \in X.$$

Definiția 3.3 $X \subseteq M$ se numește *bază* pentru M dacă X este mulțime de generatori și X este liniar independentă.

Definiția 3.4 M se numește *modul liber* dacă admite o bază.

Dacă M este liber cu baza X , atunci scrierea unui element din M sub forma $\sum_{x \in X} r_x \cdot x$ este unică. Notăm $M = \sum_{x \in X} \oplus Rx$.

Exemple. ${}_R R$ este modul liber cu baza $X = \{1_R\}$.

${}_K L$ spațiu liniar este un modul liber.

Teorema 3.1 Dacă X este o mulțime oarecare și R este inel cu $1 \neq 0$, atunci există un R -modul liber cu baza X .

Demonstrație. Fie

$$L = \left\{ \sum_{x \in X} r_x x \mid r_x \in R, r_x = 0 \text{ cu excepția unui număr finit de indici} \right\}.$$

Definim

$$" + " : \sum_{x \in X} r_x x + \sum_{x \in X} r'_x x = \sum_{x \in X} (r_x + r'_x) x$$

$$" \cdot " : r \left(\sum_{x \in X} r_x x \right) = \sum_{x \in X} (r r_x) x.$$

Atunci $(L, +, \cdot)$ este un R -modul, cu baza X . □

Fie ${}_R M$ un modul.

Teorema 3.2 M este modul liber cu baza X dacă și numai dacă

$$M \xrightarrow{\sim} \prod_{x \in X} R_x,$$

unde $R_x = R, \forall x \in X$.

Demonstrație. '⇒' Fie $g_x : R_x \rightarrow M$, $g_x(r_x) = r_x x$ pentru orice $x \in X$.

Familia $\{g_x\}_{x \in X}$ induce un morfism unic $g : \prod_{x \in X} R_x \rightarrow M$,

$$g(\{r_x\}_{x \in X}) = \sum_{x \in X} g_x(r_x) = \sum_{x \in X} r_x x.$$

Avem diagrama

$$\begin{array}{ccc} & R_x & \\ & \swarrow i & \searrow g_x \\ \prod_{x \in X} R_x & \overset{\text{-----}}{\underset{g}{\longrightarrow}} & M \end{array}$$

Definim acum

$$g' : M \rightarrow \prod_{x \in X} R_x, \quad g' \left(\bar{x} = \sum_{x \in X} r_x x \right) = \{r_x\}_{x \in X}.$$

Se verifică faptul că $gg' = 1_M$, $g'g = 1_{\prod_{x \in X} R_x}$. Deci

$$M \xrightarrow{\sim} \prod_{x \in X} R_x.$$

"⇐" Avem $M \xrightarrow{\sim} \prod_{x \in X} R_x$ cu $X \subset M$ și cum $\prod_{x \in X} R_x$ este un modul liber cu baza $\{1_{R_x}\}_{x \in X}$ rezultă că M este modul liber cu baza X . \square

Teorema 3.3 Fie L un modul liber cu baza X și M un modul, iar $f : X \rightarrow M$ o funcție. Atunci există un unic morfism de module $\bar{f} : L \rightarrow M$ care extinde f .

Demonstrație. Definim $\bar{f} : L \rightarrow M$, $\bar{f} \left(\sum_{x \in X} r_x x \right) = \sum_{x \in X} r_x f(x)$.

Unicitatea lui \bar{f} : presupunem că există morfismul $\bar{f}_1 : L \rightarrow M$, încât $\bar{f}_1(x) = f(x) = \bar{f}(x)$, $\forall x \in X$. Rezultă atunci că $\bar{f}_1 = \bar{f}$. \square

Teorema 3.4 *Orice modul este un modul cât al unui anumit modul liber.*

Demonstrație. Pentru orice modul M , există un modul liber L și un epimorfism $p : L \rightarrow M$. Fie X o mulțime de generatori pentru M și fie L modulul liber de bază X și considerăm aplicația

$$f : X \rightarrow M, \quad f(x) = x.$$

În baza teoremei anterioare, există

$$\bar{f} = p : L \rightarrow M, \quad p \left(\sum_{x \in X} r_x x \right) = \sum_{x \in X} r_x x.$$

p este un epimorfism. Conform primei teoreme de izomorfism, avem

$$L/\text{Ker } p \simeq M. \quad \square$$

Teorema 3.5 *Dacă f este epimorfism, iar $f : M \rightarrow N$, $g : L \rightarrow N$ sunt morfisme de module, unde L este un modul liber, atunci există un morfism (nu unic) $h : L \rightarrow M$, așa încât $fh = g$.*

Demonstrație. Considerăm diagrama

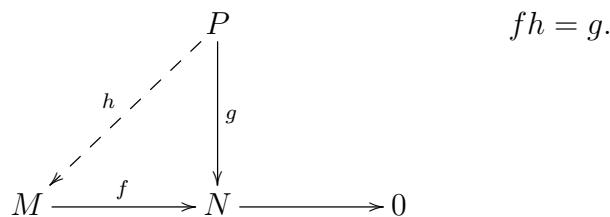
$$\begin{array}{ccc} & & L \\ & \nearrow h & \downarrow g \\ M & \xrightarrow{f} & N \longrightarrow 0 \end{array}$$

Fie X o bază pentru modulul liber L . Definim o aplicație de la X la M . Fie $f' : X \rightarrow M$, așa încât $f'(x) = m_x \in M$ cu $f(m_x) = g(x)$. Observăm că f' nu este unic, pentru că $g(x)$ poate avea mai multe contraimagini.

f' se poate extinde unic la h , care verifică egalitatea $fh = g$. □

3.2 Module proiective

Definiția 3.5 Un modul ${}_R P$ se numește *proiectiv* dacă pentru orice epimorfism $f : M \rightarrow N$ și orice morfism $g : P \rightarrow N$ există un morfism $h : P \rightarrow M$, astfel încât



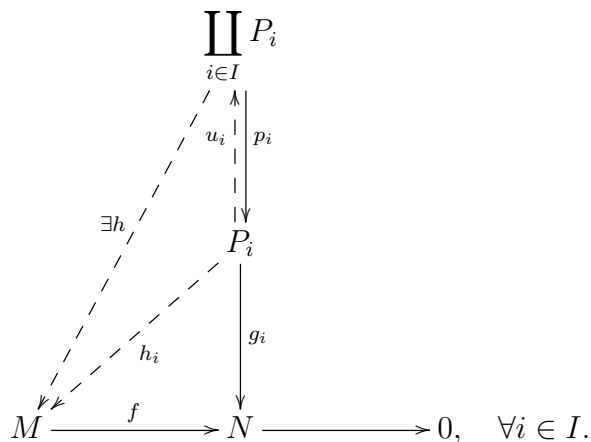
Să observăm că h nu este unic.

Remarcăm că orice modul liber este proiectiv, invers nu!

Teorema 3.6 *Dacă $\{P_i\}_{i \in I}$ este o familie de module, atunci $\prod_{i \in I} P_i$ este proiectiv dacă și numai dacă P_i este proiectiv pentru orice $i \in I$.*

Demonstrație. " \implies " Fie $u_i : P_i \longrightarrow \prod_{i \in I} P_i$ injecțiile canonice.

Considerăm diagrama



$\prod_{i \in I} P_i$ este o sumă directă, deci $\exists p_i : \prod_{i \in I} P_i \longrightarrow P_i$, $i \in I$, astfel încât $p_i u_i = 1_{P_i}$ și $p_i u_j = 0$, pentru $j \neq i$.

Există morfismul $h : \prod_{i \in I} P_i \longrightarrow M$, așa încât $fh = g_i p_i$. Definim $h_i = hu_i$.

Se verifică $fh_i = g_i$.

” \Leftarrow ” Fie diagrama

$$\begin{array}{ccccc}
 & & P_i & & \\
 & & \downarrow u_i & & \\
 & & \coprod P_i & & \\
 & \nearrow h_i & \downarrow g & \searrow h & \\
 M & \xrightarrow{f} & N & \longrightarrow & 0
 \end{array}$$

Există morfismul $h_i : P_i \rightarrow M$, așa încât $fh_i = gu_i$. Morfismul h apare de la proprietatea sumei directe. Avem $hu_i = h_i$ și atunci $fh = g$ din $fhu_i = gu_i$, $\forall i \in I$, și din faptul că $\{u_i\}_{i \in I}$ este o familie epimorfică.

Ultimul pas îl mai putem justifica astfel:

$$\begin{array}{ccc}
 & P_i & \\
 u_i \swarrow & & \searrow gu_i = fhu_i \\
 \coprod_{i \in I} P_i & \xrightarrow{fh} & N \\
 & \xrightarrow{g} &
 \end{array}$$

Din definiția sumei directe, $fh = g$. □

Exemplu. Fie $(m, n) = 1$ și considerăm modulele $\mathbb{Z}_{nm}\mathbb{Z}_n$, $\mathbb{Z}_{nm}\mathbb{Z}_m$, $\mathbb{Z}_{nm}\mathbb{Z}_{nn}$. Din $(m, n) = 1$ rezultă $\mathbb{Z}_{nm} \simeq \mathbb{Z}_n \times \mathbb{Z}_m$. Modulul $\mathbb{Z}_{nm}\mathbb{Z}_{nm}$ este liber, deci proiectiv. Conform teoremei precedente, rezultă că $\mathbb{Z}_{nm}\mathbb{Z}_n$ și $\mathbb{Z}_{nm}\mathbb{Z}_m$ sunt proiective. Pe de altă parte, $\mathbb{Z}_{nm}\mathbb{Z}_n$ nu este liber, deoarece $\forall \hat{x} \in \mathbb{Z}_n$, $\hat{n}\hat{x} = \hat{0}$, dar $\hat{n} \neq \hat{0}$, $\hat{n} \in \mathbb{Z}_{nm}$. Deci nu este satisfăcută condiția de liniară independență pentru $\forall \hat{x} \in \mathbb{Z}_n$.

Teorema 3.7 (de caracterizare pentru module proiective) *Fie ${}_R P$ un modul. Următoarele condiții sunt echivalente:*

1. P este modul proiectiv.

2. Pentru orice șir exact $M \xrightarrow{f} N \rightarrow 0$, șirul indus de grupuri abeliene

$$\mathrm{Hom}_R(P, M) \xrightarrow{f_*} \mathrm{Hom}_R(P, N) \rightarrow 0$$

este exact, unde $f_*(g) = fg$.

3. Pentru orice epimorfism $p : M \rightarrow P$, P este factor direct al lui M .

4. P este sumand direct al unui anumit modul liber.

Demonstrație. $1 \implies 2$. Avem

$$\begin{aligned} \mathrm{Hom}_R(P, M) &= \{g : P \rightarrow M \mid g \text{ morfism}\} \\ (g + g')(x) &= g(x) + g'(x) \end{aligned}$$

$(\mathrm{Hom}_R(P, M), +)$ este un grup abelian.

În continuare, folosim definiția modulului proiectiv.

$2 \implies 3$. Considerăm șirul exact

$$M \xrightarrow{p} P \rightarrow 0$$

Conform cu 2, următorul șir este exact

$$\mathrm{Hom}_R(P, M) \xrightarrow{p_*} \mathrm{Hom}_R(P, P) \rightarrow 0$$

Pentru $1_P : P \rightarrow P$ există $v : P \rightarrow M$, așa încât $p_*(v) = 1_P$, adică $pv = 1_P$. Cu alte cuvinte, P este factor direct al lui M .

$3 \implies 4$. Pentru P există un modul liber L și $p : L \rightarrow P$ epimorfism. Conform cu 3, P este factor direct al lui L . Avem $L \simeq \mathrm{Ker} p \oplus (L/\mathrm{Ker} p) \simeq \mathrm{Ker} p \oplus P$.

$4 \implies 1$. Pentru P există un modul liber L și Q submodul al lui L încât $L = P \amalg Q$. L este proiectiv, fiind liber, deci și P este proiectiv. \square

3.3 Module injective

Definiția 3.6 Fie ${}_R I$ un R -modul. I se numește *injectiv* dacă pentru orice monomorfism $f : {}_R M \rightarrow {}_R N$ de R -module și orice morfism $g : {}_R M \rightarrow {}_R I$ există $h : N \rightarrow I$ morfism de module încât $hf = g$.

Considerăm diagrama

$$\begin{array}{ccccc}
 0 & \longrightarrow & M & \xrightarrow{f} & N \\
 & & \searrow g & & \swarrow \exists h \\
 & & & & I
 \end{array}$$

Teorema 3.8 *Un R -modul I este injectiv dacă și numai dacă, pentru orice R -modul N , orice R -submodul M al lui N și orice morfism $g : M \rightarrow I$, există un morfism $\bar{g} : N \rightarrow I$ încât $\bar{g}|_M = g$.*

Demonstrație. Este imediată. Avem diagrama:

$$\begin{array}{ccccc}
 0 & \longrightarrow & M & \xrightarrow{u} & N \\
 & & \searrow g & & \swarrow \bar{g} \\
 & & & & I
 \end{array}$$

Teorema 3.9 *Un R -modul I este injectiv dacă și numai dacă pentru orice șir exact de R -module*

$$0 \longrightarrow M \xrightarrow{u} N \xrightarrow{v} P$$

următorul șir

$$\text{Hom}(P, I) \xrightarrow{\bar{v}} \text{Hom}(N, I) \xrightarrow{\bar{u}} \text{Hom}(M, I) \longrightarrow 0$$

este exact.

Demonstrație. „ \implies ” Fie ${}_R I$ un modul injectiv. Avem deja $\text{Im } \bar{v} = \ker \bar{u}$. Într-adevăr, $\bar{v}(\alpha) = \alpha v$ și $\alpha \in \text{Hom}(P, I)$, $\bar{u}(\alpha v) = \alpha v u = 0$, deci $\text{Im } \bar{v} \subset \ker \bar{u}$. Pe de altă parte, $\forall w \in \text{Hom}(N, I)$, încât $w u = 0$, cum I este injectiv există $\alpha \in \text{Hom}(P, I)$ încât $\alpha v u = w u$ și cum u este monomorfism, $w = \alpha v$, deci $w \in \ker \bar{u} \subset \text{Im } \bar{v}$. Așadar, $\ker \bar{u} = \text{Im } \bar{v}$.

Fie acum $g \in \text{Hom}(M, I)$. Avem că u este monomorfism și I injectiv, deci există $f : N \rightarrow I$ încât $f u = g$, adică \bar{u} este epimorfism.

„ \Leftarrow ” Considerăm acum monomorfismul

$$\begin{array}{ccccc} 0 & \longrightarrow & M & \xrightarrow{f} & N \\ & & & \searrow g & \\ & & & & I \end{array}$$

$g \in \text{Hom}(M, I)$.

Din șirul exact

$$0 \longrightarrow M \xrightarrow{f} N$$

obținem șirul exact de R -module

$$\text{Hom}_R(N, I) \xrightarrow{\bar{f}} \text{Hom}_R(M, I) \longrightarrow 0$$

adică \bar{f} este epimorfism, deci, pentru $g \in \text{Hom}(M, I)$, există $h \in \text{Hom}(N, I)$ încât $\bar{f}(h) = hf = g$. Așadar, ${}_R I$ este injectiv. \square

Teorema 3.10 *Un R -modul I este injectiv dacă și numai dacă orice șir scurt de R -module*

$$0 \longrightarrow I \xrightarrow{u} M \xrightarrow{v} N \longrightarrow 0$$

este scindat.

Demonstrație. „ \Rightarrow ” Considerăm șirul exact de mai sus. Să arătăm că este scindat.

Din u monomorfism rezultă că există $w : M \rightarrow I$ morfism de module, încât $wu = 1_I$, adică șirul este scindat.

„ \Leftarrow ” Fie $f : A \rightarrow B$ un monomorfism de module și $g : A \rightarrow I$ un morfism de module. Avem diagrama

$$\begin{array}{ccccc} 0 & \longrightarrow & A & \xrightarrow{f} & B \\ & & & \searrow g & \\ & & & & I \end{array}$$

Fie $(I \oplus B, \sigma_1, \sigma_2)$ suma directă a modulelor I și B . σ_1 și σ_2 sunt injecțiile canonice.

Fie $S = \text{Im}(\sigma_1 g - \sigma_2 f) = \{(\sigma_1 g - \sigma_2 f)(a) \mid a \in A\} = \{(g(a), -f(a)) \mid a \in A\}$ submodulul în $I \oplus B$.

Considerăm modulul factor $T = I \oplus B/S$ și morfismele de module $\alpha : I \rightarrow T$, $\alpha(i) = (i, 0) + S$ și $\beta : B \rightarrow T$, $\beta(b) = (0, b) + S$. Completăm diagrama de mai sus astfel:

$$\begin{array}{ccccc}
 0 & \longrightarrow & A & \xrightarrow{f} & B \\
 & & \searrow g & & \searrow \beta \\
 & & & & I & \xrightarrow{\alpha} & T
 \end{array}$$

Avem $\alpha g(a) = (g(a), 0) + S$, iar $(\beta f)(a) = (0, f(a)) + S$. Are loc echivalența:

$$(\alpha g)(a) = (\beta f)(a) \iff (g(a), -f(a)) \in S,$$

ceea ce este adevărat. Deci $\alpha g = \beta f$.

Să verificăm acum că α este monomorfism, adică este injectivă.

Dacă $\alpha(i) = \alpha(i')$, atunci $(i - i', 0) \in S$, deci $\exists a \in A$ încât $(i - i', 0) = (g(a), -f(a))$, de unde $i - i' = g(a)$ și $0 = -f(a)$. Obținem că $a \in \ker f = 0$, deci $g(a) = 0$, de unde $i = i'$, adică α este injectivă.

Considerăm acum șirul exact

$$0 \longrightarrow I \xrightarrow{\alpha} T \xrightarrow{\pi} T/\text{Im } \alpha \longrightarrow 0$$

Conform ipotezei, acest șir este scindat, deci $\exists \gamma : T \rightarrow I$ morfism, încât $\gamma \alpha = 1_I$. Notăm $h = \gamma \beta : B \rightarrow I$ și avem

$$hf = (\gamma \beta) f = \gamma(\beta f) = \gamma(\alpha g) = (\gamma \alpha) g = 1_I g = g,$$

adică modulul I este injectiv. □

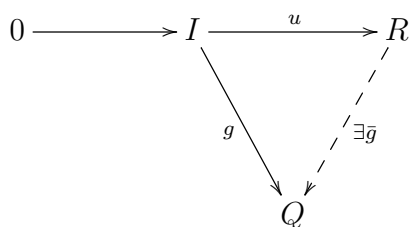
Teorema 3.11 Pentru o familie $\{I_j\}_{j \in J}$ de R -module avem că $I = \prod_{j \in J} I_j$ este R -modul injectiv dacă și numai dacă I_j este R -modul injectiv, pentru orice $i \in I$.

Demonstrație. Teorema de mai sus reprezintă duala Teoremei 3.6 de la module proiective și se demonstrează prin dualitate (întoarcerea sageților). \square

Teorema 3.12 Fie modulul ${}_R Q$. Următoarele afirmații sunt echivalente:

- 1°. Q este injectiv.
- 2°. Pentru orice ideal I al lui R și pentru orice morfism $g : I \rightarrow Q$ există morfismul $\bar{g} : R \rightarrow Q$ încât $\bar{g}/I = g$ (criteriul lui Baer).
- 3°. Pentru orice ideal I al lui R și pentru orice morfism $g : I \rightarrow Q$ există $x_0 \in Q$ încât $g(i) = ix_0, \forall i \in I$.

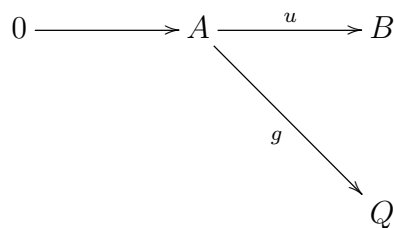
Demonstrație. $1^\circ \implies 2^\circ$. Imediată. Avem diagrama



cu $\bar{g}u = g$.

$2^\circ \implies 3^\circ$. Considerăm $g : I \rightarrow Q$ morfism de module unde I este ideal în R . Conform cu 2° , există $\bar{g} : R \rightarrow Q$, încât $\bar{g}u = g$. Notăm $\bar{g}(1) = x_0$. Avem $g(i) = \bar{g}(i) = i\bar{g}(1) = ix_0$, pentru orice $i \in I$.

$3^\circ \implies 1^\circ$. Fie diagrama de module



u poate fi considerat incluziune.

Fie

$$\mathcal{F} = \{(A_i, g_i) \mid A \leq A_i \leq B, g_i : A_i \rightarrow Q \text{ morfism cu } g_i/A = g\}.$$

Avem $(A, g) \in \mathcal{F}$, deci $\mathcal{F} \neq \emptyset$. Definim pe \mathcal{F} relația de ordine

$$(A_i, g_i) \leq (A_j, g_j) \iff A_i \leq A_j \text{ și } g_j/A_i = g_i$$

Mulțimea ordonată (\mathcal{F}, \leq) este inductiv ordonată și atunci, conform lemei lui Zorn, există cel puțin un element maximal (A_0, g_0) în \mathcal{F} .

Arătăm că $A_0 = B$. Presupunem prin absurd că există $b \in B - A_0$ și fie $I = \{a \in I \mid ab \in A_0\}$ ideal al lui R și $u : I \rightarrow Q$, $u(a) = g_0(ab)$ pentru orice $a \in I$.

Conform ipotezei, există $x_0 \in Q$ încât $u(a) = ax_0$, pentru orice $a \in I$.

Considerăm

$$v : A_0 + Rb \rightarrow Q, \quad v(x + ab) = g_0(x) + ax_0.$$

Astfel, $(A_0 + Rb, v) \in \mathcal{F}$ și $(A_0, g_0) < (A_0 + Rb, v)$, ceea ce contrazice maximalitatea lui (A_0, g_0) în \mathcal{F} .

Așadar, $A_0 = B$, ceea ce înseamnă că modulul Q este injectiv. \square

Exemple. \mathbb{Q} , \mathbb{Q}/\mathbb{Z} sunt \mathbb{Z} -module injective.

Definiția 3.7 Fie R un inel unitar și fie R_0 mulțimea nondivizorilor lui zero din R . Un R -modul Q se numește *divizibil* dacă $\forall x \in Q$ și $\forall a \in R_0$ există $y \in Q$ încât $x = ay$.

Teorema 3.13 Orice R -modul injectiv este divizibil.

Demonstrație. Fie Q un R -modul injectiv, fie $x \in Q$, $x \neq 0$, și $a \in R_0$. Fie $I = Ra$ și monomorfismul $g : Ra \rightarrow Q$, $g(ra) = rx$, oricare ar fi $r \in R$. Din injectivitatea lui Q rezultă că există $h : R \rightarrow Q$ morfism încât $h/Ra = g$.

Notăm $h(1) = t \in Q$. Avem $at = ah(1) = h(1 \cdot a) = g(a) = x$, deci $x = at$. Pentru $x = 0$ alegem $t = 0$. Deci modulul Q este divizibil. \square

Observația 3.1 Dacă R este un domeniu de integritate, atunci corpul de fracții K al lui R este un R -modul divizibil.

Teorema 3.14 Fie R un domeniu cu ideale principale. Un R -modul Q este injectiv dacă și numai dacă este divizibil.

Demonstrație. Conform teoremei anterioare, avem de demonstrat doar implicația.

„ \Leftarrow ” Fie ${}_R Q$ un R -modul divizibil. Fie I un ideal al lui R și $g : I \rightarrow Q$ un morfism de module. Idealul I este principal, adică este de forma $I = Ra$, $a \in I$.

Dacă $a = 0$, atunci $g = 0$ și atunci considerăm $\bar{g} : R \rightarrow Q$, $\bar{g} = 0$ care satisface condiția $\bar{g}/I = g$.

Considerăm acum $a \neq 0$. Avem $g(a) \in Q$, iar Q este divizibil, deci $\exists x_0 \in Q$, încât $g(a) = ax_0$, de unde $g(ra) = rax_0, \forall ra \in Ra$.

Considerăm diagrama

$$\begin{array}{ccccc}
 0 & \longrightarrow & I = Ra & \xrightarrow{u} & R \\
 & & \searrow g & & \swarrow \exists \bar{g} \\
 & & & & Q
 \end{array}$$

Fie $\bar{g} : R \rightarrow Q$ încât $\bar{g}(r) = rx_0, \forall r \in R$. Atunci \bar{g} este un morfism și $\bar{g}/I = g$, de unde obținem că Q este injectiv. \square

Lema 3.1 Orice \mathbb{Z} -modul se scufundă într-un \mathbb{Z} -modul injectiv.

Teorema 3.15 Orice R -modul se scufundă într-un R -modul injectiv.

Demonstrație. Fie ${}_R M$ un R -modul. Conform Lemei 3.1, există un \mathbb{Z} -modul injectiv G și un monomorfism de \mathbb{Z} -module, $\sigma : M \rightarrow G$.

Considerăm funcția

$$\sigma_* : \text{Hom}_{\mathbb{Z}}(R, M) \rightarrow \text{Hom}_{\mathbb{Z}}(R, G), \quad \sigma_*(u) = \sigma u.$$

Se verifică faptul că σ_* este un monomorfism de R -module.

Pe de altă parte, funcția $\alpha : M \rightarrow \text{Hom}_{\mathbb{Z}}(R, M)$, $\alpha(x)(a) = ax, \forall x \in M$ și $\forall a \in R$ este un morfism injectiv de R -module.

Atunci $\sigma_* \alpha : M \rightarrow \text{Hom}_{\mathbb{Z}}(R, G)$ este un monomorfism.

Pe de altă parte, $\text{Hom}_{\mathbb{Z}}(R, G)$ este un modul injectiv. Într-adevăr, dacă $0 \rightarrow M_1 \xrightarrow{f} M_2$ este șir exact de R -module, atunci șirul

$$\text{Hom}_R(M_2, \text{Hom}_{\mathbb{Z}}(R, G)) \xrightarrow{\bar{f}} \text{Hom}_R(M_1, \text{Hom}_{\mathbb{Z}}(R, G)) \rightarrow 0$$

este exact. Apoi avem

$$\mathrm{Hom}_R(M_2, \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(R, G)) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(R \otimes_R M_2, G) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(M_2, G)$$

iar

$$\mathrm{Hom}_R(M_1, \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(R, G)) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(R \otimes_R M_1, G) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(M_1, G).$$

Să remarcăm că șirul următor este exact

$$\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(M_2, G) \xrightarrow{f^*} \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(M_1, G) \longrightarrow 0$$

unde $f^*(u) = uf$, deoarece G este \mathbb{Z} -modul divizibil, deci injectiv. \square

Capitolul 4

Produse tensoriale de module

4.1 Noțiunea de produs tensorial de module

Fie M_R și ${}_R N$ module și G un grup abelian.

Definiția 4.1 Funcția $f : M \times N \rightarrow G$ se numește \mathbb{Z} -biliniară dacă $\forall m, m_1, m_2 \in M, \forall n, n_1, n_2 \in N$, avem:

1. $f(m_1 + m_2, n) = f(m_1, n) + f(m_2, n)$.
2. $f(m, n_1 + n_2) = f(m, n_1) + f(m, n_2)$.

Definiția 4.2 O aplicație \mathbb{Z} -biliniară se numește *balansată*, dacă

3. $f(mr, n) = f(m, rn), \forall m \in M, \forall n \in N, \forall r \in R$.

Definiția 4.3 Fie modulele M_R și ${}_R N$. Se numește *produs tensorial* al modulelor M și N perechea (T, f) , unde T este un grup abelian, iar $f : M \times N \rightarrow T$ este o aplicație balansată care satisface condiția:

pentru orice grup abelian G și pentru orice aplicație balansată $g : M \times N \rightarrow G$ există un unic \mathbb{Z} -morfism $h : T \rightarrow G$ astfel încât $hf = g$.

$$\begin{array}{ccc} M \times N & \xrightarrow{f} & T \\ & \searrow g & \swarrow h \\ & & G \end{array}$$

Teorema 4.1 Pentru orice module $M_R, {}_R N$ există produsul lor tensorial și este unic până la izomorfism.

Demonstrație. Existența. Considerăm produsul direct $M_R \times_R N$. Notăm cu $X(M, N)$ \mathbb{Z} -modulul liber cu baza $M \times N$.

Fie $Y(M, N)$ submodulul lui $X(M, N)$ generat de submulțimea elementelor de forma

$$\begin{aligned}(m_1 + m_2, n) - (m_1, n) - (m_2, n) &\in M \times N, \\ (m, n_1 + n_2) - (m, n_1) - (m, n_2) &\in M \times N, \\ (mr, n) - (m, rn) &\in M \times N,\end{aligned}$$

pentru orice $m, m_1, m_2 \in M, n, n_1, n_2 \in N, r \in R$.

Notăm $M \otimes_R N = X(M, N)/Y(M, N)$. Considerăm șirul

$$M \times N \xrightarrow{u} X(M, N) \xrightarrow{p} X(M, N)/Y(M, N) = M \otimes_R N \text{ și } f = pu.$$

Funcția f este balansată și o vom numi aplicație canonică. Atunci $(M, \otimes_R N, f)$ este produs tensorial pentru M_R și ${}_R N$.

Considerăm diagrama

$$\begin{array}{ccccccc} M \times N & \xrightarrow{u} & X(M, N) & \xrightarrow{p} & M \otimes_R N & \longrightarrow & 0 \\ & \searrow g & \downarrow h_1 & \swarrow h & & & \\ & & G & & & & \end{array}$$

$\exists! h_1 : X(M, N) \rightarrow G$, așa încât $h_1 u = g$.

Avem

$$Y(M, N) \subseteq \text{Ker } h_1$$

deoarece h_1 duce orice generator al lui $Y(M, N)$ în 0

$$\begin{array}{ccccccc} Y(M, N) & \xrightarrow{u'} & X(M, N) & \xrightarrow{p} & M \otimes_R N & & \\ & & \downarrow h_1 & \swarrow h & & & \\ & & G & & & & \end{array}$$

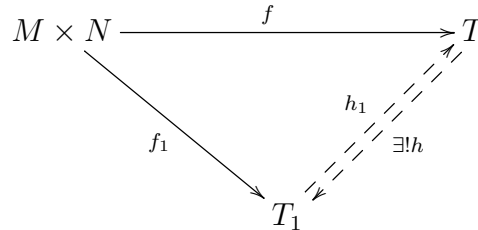
Din universalitatea conucleului rezultă că $\exists! h$ așa încât $hp = h_1$, unde $hpu = h_1u = g$, adică $hf = g$.

Unicitatea. Fie $h' : M \otimes_R N \rightarrow G$, așa încât $h'f = g$, cu $f = pu$. Avem $(h'p)u = g$. Din unicitatea lui h_1 obținem $h'p = h_1$ și, cum $hp = h_1$ și p este surjectiv, rezultă $h = h'$.

Unicitatea produsului tensorial până la izomorfism se obține cu tehnica "vânătorii de diagrame".

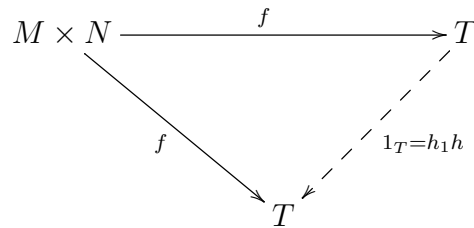
Fie (T, f) și (T_1, f_1) produse tensoriale ale modulelor M și N . Arătăm că există un unic izomorfism de grupuri abeliene $h : T \rightarrow T_1$, încât $hf = f_1$.

Avem diagrama



Aplicăm definiția produsului tensorial și rezultă că $\exists! h$ cu $hf = f_1$. Schimbăm rolurile lui T cu T_1 și obținem că $\exists! h_1 : T_1 \rightarrow T$ încât $h_1f_1 = f$. Obținem $(h_1h)f = f$ și $(hh_1)f_1 = f_1$.

Considerăm apoi diagrama



Avem $1_T = h_1h$ și similar $hh_1 = 1_{T_1}$. Așadar, h este un izomorfism. □

Proprietăți. Fie

$$\begin{aligned} f : M \times N &\longrightarrow M \otimes_R N = T \\ (m, n) &\longrightarrow m \otimes n \end{aligned}$$

Au loc următoarele proprietăți: $\forall m, m_1, m_2 \in M, \forall n, n_1, n_2 \in N, \forall r \in R$:

$$f(m_1 + m_2, n) = f(m_1, n) + f(m_2, n)$$

deoarece f este balansată.

Obținem:

$$\mathbf{P}_1 : (m_1 + m_2) \otimes n = m_1 \otimes n + m_2 \otimes n.$$

Similar,

$$\mathbf{P}_2 : m \otimes (n_1 + n_2) = m \otimes n_1 + m \otimes n_2$$

$$\mathbf{P}_3 : (mr) \otimes n = m \otimes rn$$

pentru orice $m, m_1, m_2 \in M$, orice $n, n_1, n_2 \in N$ și orice $r \in R$.

Mai mult, avem

$$\mathbf{P}_4 : 0 \otimes n = m \otimes 0 = 0$$

(deoarece $f(0, n) = f(0, n) + f(0, n)$, deci $f(0, n) = 0$)

$$\mathbf{P}_5 : (-m) \otimes n = m \otimes (-n) = -(m \otimes n)$$

$$\mathbf{P}_6 : (zm) \otimes n = m \otimes (zn) = z(m \otimes n), \forall m \in M, \forall n \in N, \forall z \in \mathbb{Z}.$$

Dacă x este arbitrar din $X(M, N)$, atunci

$$x = \sum_{i=1}^k z_i(m'_i, n_i).$$

Deci

$$\bar{x} = f(x) = \sum_{i=1}^k z_i(m'_i \otimes n_i) = \sum_{i=1}^k (z_i m'_i) \otimes n_i = \sum_{i=1}^k m_i \otimes n_i,$$

unde $m_i = z_i m'_i$. Așadar, orice element din $M \otimes N$ este de forma

$$\sum_{i=1}^k m_i \otimes n_i.$$

Deci, $\{m \otimes n \mid m \in M, n \in N\}$ este mulțime de generatori pentru $M \otimes_R N$.

4.2 Produs tensorial de morfisme de module

Fie morfismul $u : M_R \rightarrow M'_R$ și $v : {}_R N \rightarrow {}_R N'$. Notăm cu

$$\begin{aligned} (u, v) : M \times N &\longrightarrow M' \otimes_R N' \\ (m, n) &\longrightarrow u(m) \otimes v(n). \end{aligned}$$

Din definiție rezultă că (u, v) este balansată.

Considerăm diagrama

$$\begin{array}{ccc} M \times N & \xrightarrow{f} & M \otimes_R N \\ & \searrow (u, v) & \downarrow \exists! u \otimes v \\ & & M' \otimes_R N' \end{array}$$

$(u \otimes v)f = (u, v)$, adică

$$(u \otimes v)(m \otimes n) = u(m) \otimes v(n).$$

$u \otimes v$ se numește *produsul tensorial* al morfismelor de module u și v .

Dacă $u' : M'' \rightarrow M$ și $v' : N'' \rightarrow N$, atunci

$$(u \otimes v)(u' \otimes v') = (uu') \otimes (vv')$$

și deci

$$(u \otimes 1_{N'})(1_M \otimes v) = (u1_M) \otimes (1_{N'}v) = u \otimes v.$$

4.3 Produs tensorial dintre un bimodul și un modul

Fie ${}_S M_R$ un $S - R$ bimodul și ${}_R N$. Considerăm produsul tensorial $M \otimes_R N$. Pentru $s \in S$, definim

$$h_s : M \rightarrow M, h_s(m) = sm.$$

h_s este un endomorfism de grupuri abeliene. Mai mult, h_s este un morfism de R -module.

Într-adevăr, $h_s(mr) = s(mr) = (sm)r = h_s(m)r$.
 Considerăm $h_s \otimes 1_N : M \otimes N \longrightarrow M \otimes_R N$

$$(h_s \otimes 1_N)(m \otimes n) = h_s(m) \otimes n = sm \otimes n.$$

Pentru grupul abelian $M \otimes_R N$ definim o înmulțire cu scalari peste S astfel:

$$s(m \otimes n) = (h_s \otimes 1_N)(m \otimes n) = sm \otimes n.$$

Se verifică faptul că $M \otimes_R N$ este S -modul stâng.

1°. Așadar, pentru perechea $({}_S M_R, {}_R N)$ se definește înmulțirea externă

$$s(m \otimes n) = (sm) \otimes n$$

și obținem o structură de S -modul stâng pe $M \otimes_R N$.

Similar, putem obține următoarele rezultate:

2°. Pentru $(M_{R-S}, {}_R N)$ se definește

$$(m \otimes n)s = (ms) \otimes n$$

și obținem o structură de S -modul drept pe $M \otimes_R N$.

Analog, în situația în care N este bimodul.

3°. Pentru $(M_R, {}_{S-R} N)$ se definește

$$s(m \otimes n) = m \otimes (sn)$$

și obținem o structură de S -modul stâng pe $M \otimes_R N$.

4°. Pentru $(M_R, {}_R N_S)$ se definește

$$(m \otimes n)s = m \otimes (ns)$$

și obținem o structură de S -modul drept pe $M \otimes_R N$.

Exemplu. ${}_R R_R$ este bimodul și dacă M_R este modul drept, atunci considerând $(M_R, {}_R R_R)$ obținem $M \otimes_R R$ care este R -modul drept. Considerând $({}_R R_R, {}_R N)$, obținem $R \otimes_R N$ care este R -modul stâng.

Teorema 4.2 $R \otimes_R N \xrightarrow{\sim} N$ ca module stângi și $M \otimes_R R \xrightarrow{\sim} M$ ca module drepte.

Demonstrație. Considerăm diagrama

$$\begin{array}{ccc} R_R \times_R N & \xrightarrow{f} & R \otimes_R N \\ & \searrow g & \swarrow \exists! h \\ & & N \end{array}$$

unde $g(r, n) = r \cdot n$, g este balansată. Atunci $\exists! h : R \otimes_R N \rightarrow N$ morfism de grupuri abeliene, încât $hf = g$. Altfel scris, $h(r \otimes n) = rn$.

Să arătăm că h este morfism de R -module stângi. Mai întâi, $\forall \bar{x} \in R \otimes_R N$, \bar{x} este de forma

$$x = \sum_{i=1}^k (r_i \otimes n_i) = \sum_{i=1}^k (1 \otimes r_i n_i) = 1 \otimes \sum_{i=1}^k r_i n_i = 1 \otimes n,$$

unde $n = \sum_{i=1}^k r_i n_i$. Așadar, $\forall \bar{x} \in R \otimes_R N$, avem $\bar{x} = 1 \otimes n$. Avem

$$h(\bar{x}) = h(1 \otimes n) = 1 \cdot n = n.$$

h este deja morfism de grupuri, să mai verificăm următoarea condiție

$$h(r\bar{x}) = h[r(1 \otimes n)] = h(r \otimes n) = rn = rh(\bar{x}),$$

pentru orice $r \in R$ și orice $\bar{x} \in R \otimes_R N$. În plus, h este un monomorfism.

Fie $\bar{x} = 1 \otimes n \in \ker h$. Avem $h(1 \otimes n) = n = 0$, de unde $1 \otimes n = 0$, deci $\ker h = 0$, adică h este monomorfism.

h este și epimorfism. Într-adevăr, $\forall n \in N$, $\exists 1 \otimes n \in R \otimes_R N$, astfel încât $n = h(1 \otimes n)$. Deci h este un izomorfism. \square

4.4 Proprietatea de asociere a produselor tensoriale

Fie modulele $M_R, {}_R N_S, {}_S P$. Atunci $M \otimes_R N$ este S modul drept și considerăm $(M \otimes_R N) \otimes_S P$. Pe de altă parte, $N \otimes_S P$ este un R -modul stâng și considerăm $M \otimes_R (N \otimes_S P)$.

Observații.

1. Are loc izomorfismul

$$\begin{aligned} M \otimes_R N \otimes_S P &\simeq M \otimes_R (N \otimes_S P) \\ h((m \otimes n) \otimes p) &= m \otimes (n \otimes p) \end{aligned}$$

2. Dacă
- R
- este un inel comutativ și
- ${}_R M_R, {}_R N_R$
- sunt
- R
- bimodule, atunci există un izomorfism canonic de
- R
- module:

$$\begin{aligned} h : M \otimes_R N &\rightarrow N \otimes_R M \\ h(m \otimes n) &= n \otimes m \end{aligned}$$

Teorema 4.3 Dacă M_R și $\{{}_R N_i\}_{i \in I}$ este o familie de module stângi, atunci există $\prod_{i \in I} N_i$ și este un R -modul stâng și există un izomorfism canonic de grupuri abeliene

$$h : M \otimes_R \prod_{i \in I} N_i \xrightarrow{\sim} \prod_{i \in I} (M \otimes_R N_i)$$

Cu alte cuvinte, produsul tensorial comută cu sumele directe.

Demonstrație. Fie o aplicație

$$\begin{aligned} g : M \times \prod_{i \in I} N_i &\rightarrow \prod_{i \in I} (M \otimes N_i) \\ g(m, \{n_i\}_{i \in I}) &= \{m \otimes n_i\}_{i \in I} \end{aligned}$$

g este balansată. Considerăm diagrama

$$\begin{array}{ccc} M \times \prod_{i \in I} N_i & \xrightarrow{f} & M \otimes_R \prod_{i \in I} N_i \\ & \searrow g & \swarrow \exists! h \\ & & \prod_{i \in I} M \otimes N_i \end{array}$$

h este un morfism de grupuri abeliene. Avem

$$h(m \otimes \{n_i\}_{i \in I}) = \{m \otimes n_i\}_{i \in I}$$

Definim acum o aplicație despre care vom arăta că este inversa lui h . Considerăm diagrama

$$\begin{array}{ccc} M \times N_{i_0} & \xrightarrow{f} & M \otimes N_{i_0} \\ & \searrow g_{i_0} & \swarrow \exists! h'_{i_0} \\ & & M \otimes_R \coprod_{i \in I} N_i \end{array}$$

unde $g_{i_0}(m, n_{i_0}) = m \otimes \{n_i\}_{i \in I}$,

unde $n_i = \begin{cases} n_{i_0}, & \text{pentru } i = i_0, \\ 0, & \text{pentru } i \neq i_0, \end{cases}$

g_{i_0} este balansată. h'_{i_0} este morfism de grupuri abeliene.

$$h'_{i_0}(m \otimes n_{i_0}) = m \otimes \{n_i\}_{i \in I}$$

cu $n_i = \begin{cases} n_{i_0}, & \text{pentru } i = i_0, \\ 0, & \text{pentru } i \neq i_0. \end{cases} \quad \forall i_0 \in I.$

Considerăm acum următoarea diagramă pentru sumă directă:

$$\begin{array}{ccc} M \otimes N_{i_0} & \xrightarrow{h_{i_0}} & M \otimes \coprod_{i \in I} N_i \\ & \searrow g & \swarrow \exists h' \\ & & \coprod_{i \in I} M \otimes N_i \end{array}$$

cu

$$h'(\{m \otimes n_i\}_{i \in I}) = \sum_i (m \otimes \{n_j^i\}_{j \in I})$$

unde $n_j^i = n_i$ pentru $j = i$ și $n_j^i = 0$ pentru $j \neq i$.
 h' este morfism de grupuri abeliene. Se verifică

$$\begin{aligned} h'h &= 1_{M \otimes \coprod N_i} \text{ și} \\ hh' &= 1_{\coprod_{i \in I} (M \otimes_R N_i)} \end{aligned}$$

deci h este un izomorfism. □

Analog, se obține următorul rezultat.

Teorema 4.4 *Fie $\{M_i\}_{i \in I}$ o familie de R -module drepte și ${}_R N$ un modul stâng. Atunci există izomorfismul canonic*

$$\coprod_{i \in I} M_i \otimes_R N \xrightarrow{\sim} \coprod_{i \in I} (M_i \otimes N)$$

4.5 Conexiunea dintre produsul tensorial și șirurile exacte scurte

Teorema 4.5 *Fie șirul exact de module drepte*

$$M'_R \xrightarrow{v} M_R \xrightarrow{q} M''_R \longrightarrow 0$$

și fie ${}_R N$ un modul stâng. Atunci șirul indus

$$M' \otimes_R N \xrightarrow{v \otimes 1_N} M \otimes_R N \xrightarrow{q \otimes 1_N} M'' \otimes_R N \longrightarrow 0$$

este un șir exact de grupuri abeliene.

Notăm $v \otimes 1_N = v_*$ și $q \otimes 1_N = q_*$ și le numim morfisme induse de v , respectiv de q .

Demonstrație. Este suficient să arătăm că

$$M'' \otimes_R N \xrightarrow{\sim} \text{Coker } v_* = (M \otimes_R N) / \text{Im}(v \otimes 1_N)$$

adică are loc diagrama

$$\begin{array}{ccccc}
 M' \otimes_R N & \xrightarrow{v_*} & M \otimes_R N & \xrightarrow{p_*} & \text{Coker } v_* \\
 & & \searrow q_* & & \swarrow \exists h' \\
 & & & & M'' \otimes_R N
 \end{array}$$

Avem:

$$p_* v_* = 0 \quad \text{și} \quad q_* v_* = 0,$$

deoarece $q_* v_* = (q \otimes 1_N)(v \otimes 1_N) = (qv) \otimes 1_N = 0 \otimes 1_N = 0$.

Din universalitatea conucleului, rezultă că $\exists! h' : \text{Coker } v_* \rightarrow M'' \otimes_R N$.
 h' morfism de grupuri abeliene, încât $h' p_* = q_*$.

Să determinăm acum o inversă pentru h' . Considerăm diagrama:

$$\begin{array}{ccc}
 M'' \times N & \xrightarrow{f} & M'' \otimes_R N \\
 \searrow g & & \swarrow \exists h \\
 & & \text{Coker } v_* = (M \otimes_R N) / \text{Im } v_*
 \end{array}$$

unde $g(m'', n) = \overline{m \otimes n}$ așa încât $m'' = q(m)$.

Definiția este bună. Într-adevăr, $m'' = q(m_1)$ implică $q(m - m_1) = 0$, deci $m - m_1 \in \ker q = \text{Im } v$, adică $\exists m' \in M'$, încât $m - m_1 = v(m')$. Atunci $m \otimes n - m_1 \otimes n = (m - m_1) \otimes n = v(m') \otimes n = (v \otimes 1_N)(m' \otimes n) = v_*(m' \otimes n)$, de unde $m \otimes n - m_1 \otimes n \in \text{Im } v_*$. În plus, g este balansată.

Așadar, $\exists h : M'' \otimes_R N \rightarrow \text{Coker } v_*$, h morfism de grupuri abeliene, unde

$$h(m'' \otimes n) = \overline{m \otimes n} \text{ cu } m'' = q(n).$$

Morfismele h și h' sunt inverse una alteia. Deci

$$M'' \otimes_R N \xrightarrow{\sim} \text{Coker } v_* \quad \square$$

Observația 4.1 Chiar dacă v ar fi mono, morfismul indus v_* nu este neapărat mono.

Exemple. Fie șirul

$$\begin{aligned} 0 \longrightarrow \mathbb{Z} \xrightarrow{u} \mathbb{Z} \xrightarrow{p} \mathbb{Z}_2 \longrightarrow 0 \\ u(m) = 2m \\ \text{Im } u = 2\mathbb{Z} = \ker p \end{aligned}$$

Avem $\mathbb{Z}_2 = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} = \mathbb{Z}/\text{Im } u$. Considerăm șirul de produse tensoriale peste \mathbb{Z} cu \mathbb{Z}_2 :

$$\mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}_2 \xrightarrow{u_*} \mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}_2 \xrightarrow{p_*} \mathbb{Z}_2 \otimes \mathbb{Z}_2 \longrightarrow 0$$

Să observăm că u_* nu este mono.

$$u_*(m \otimes \bar{n}) = (u \otimes 1_{\mathbb{Z}_2})(m \otimes \bar{n}) = u(m) \otimes 1_{\mathbb{Z}_2}(\bar{n}) = 2m \otimes \bar{n} = m \otimes \overline{2n} = m \otimes \bar{0} = 0.$$

Așadar, $\ker u_* = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}_2 \simeq \mathbb{Z}_2 \neq 0$, adică u_* nu este mono.

4.6 Morfisme plate

Definiția 4.4 Un modul ${}_R N$ se numește *modul plat* (sau R -plat) la stânga dacă, pentru orice monomorfism de module drepte $v : M'_R \rightarrow M_R$, morfismul indus $v_* : M' \otimes_R N \rightarrow M \otimes_R N$ este mono.

Teorema 4.6 Dacă R este un inel, atunci R este R -plat (la stânga și la dreapta).

Demonstrație. Într-adevăr, fie monomorfismul $v : M'_R \rightarrow M_R$ și morfismul indus $v \otimes 1_R : M' \otimes_R R \rightarrow M \otimes_R R$ este mono. Într-adevăr, considerăm următoarea diagramă comutativă:

$$\begin{array}{ccc} M' \otimes_R R & \xrightarrow{v \otimes 1_R} & M \otimes_R R \\ \downarrow h' & & \downarrow h \\ M' & \xrightarrow{v} & M \end{array}$$

$$h(v \otimes 1_R) = vh', \text{ unde } h \text{ și } h' \text{ sunt izo.}$$

Din v mono și h' izo rezultă că $v \otimes 1_R$ este mono.

Teorema 4.7 *Orice modul liber ${}_R L$ este R -plat.*

Demonstrație. Într-adevăr, verificăm că, dacă $v : M' \rightarrow M$ este mono, atunci morfismul indus

$$v \otimes 1_L : M' \otimes_R L \rightarrow M \otimes_R L$$

este mono.

Fie X baza modului liber L .

Rezultă că $L \simeq \coprod_{x \in X} R_x$, unde $R_x = R, \forall x \in X$.

Considerăm următoarea diagramă comutativă:

$$\begin{array}{ccc}
 M' \otimes_R L & \xrightarrow{\quad} & M \otimes_R L \\
 \downarrow & & \downarrow \\
 M' \otimes_R \coprod_{x \in X} R_x & & M \otimes_R \coprod_{x \in X} R_x \\
 \downarrow & & \downarrow \\
 \coprod_{x \in X} (M' \otimes_R R_x) & & \coprod_{x \in X} (M \otimes_R R_x) \\
 \downarrow & & \downarrow \\
 \coprod_{x \in X} M'_x & \xrightarrow{\quad \bar{v} \quad} & \coprod_{x \in X} M_x
 \end{array}$$

unde $M'_x = M'$ și $M_x = M$. Menționăm că toate morfismele care apar pe coloane sunt izomorfisme. Avem

$$\bar{h}(v \otimes 1_L) = \bar{v} \bar{h}',$$

unde

$$\bar{h}' : M' \otimes_R L \rightarrow \coprod_{x \in X} M'_x \quad \text{și} \quad \bar{h} : M \otimes_R L \rightarrow \coprod_{x \in X} M_x$$

sunt compunerea izomorfismelor din diagrama de mai sus.

$\bar{v} \bar{h}'$ este monomorfism, deci $v \otimes 1_L$ este mono. □

Teorema 4.8 Fie următorul șir scindat de module drepte:

$$0 \longrightarrow M'_R \xrightleftharpoons[p]{v} M_R \xrightarrow{g} M''_R \longrightarrow 0$$

cu $p : M_R \rightarrow M'_R$ încât $pv = 1_{M'}$ și fie ${}_R N$ un R -modul stâng. Atunci următorul șir indus este exact:

$$0 \longrightarrow M' \otimes_R N \xrightleftharpoons[p \otimes 1_N]{v \otimes 1_N} M \otimes_R N \xrightarrow{q \otimes 1_N} M'' \otimes_R N \longrightarrow 0$$

Demonstrație. Avem că $\text{Im } v = \ker q \simeq M'$ este sumand direct în M , deci există un morfism $p : M \rightarrow M'$ așa încât $pv = 1_{M'}$ (din faptul că șirul dat este scindat). Rezultă că

$$\begin{aligned} p \otimes 1_N : M \otimes_R N &\longrightarrow M' \otimes_R N \\ (p \otimes 1_N)(v \otimes 1_N) &= pv \otimes 1_N = 1_{M'} \otimes 1_N = 1_{M' \otimes N} \end{aligned}$$

care este un monomorfism, deci $v \otimes 1_N$ este un monomorfism. \square

Teorema 4.9 Orice modul proiectiv este plat.

Demonstrație. Fiind proiectiv, modulul ${}_R P$ este sumand direct al unui modul liber, deci există L modul liber așa încât $L = P \otimes Q$ și fie $u : P \rightarrow L$ monomorfismul corespunzător.

Similar ca în teorema anterioară obținem că $1_{M'} \otimes u$ este un monomorfism.

Să verificăm acum că, dacă $v : M'_R \rightarrow M_R$ este un monomorfism, atunci $v \otimes 1_P : M' \otimes_R P \rightarrow M \otimes_R P$ este un monomorfism.

Considerăm următoarea diagramă comutativă:

$$\begin{array}{ccc} M' \otimes_R P & \xrightarrow{v \otimes 1_P} & M \otimes_R P \\ \downarrow 1_{M'} \otimes u & & \downarrow 1_M \otimes u \\ M' \otimes_R L & \xrightarrow{v \otimes 1_L} & M \otimes_R L \end{array}$$

Din $(v \otimes 1_L)(1_{M'} \otimes u) = (1_M \otimes u)(v \otimes 1_P)$ și faptul că $v \otimes 1_N$ și $1_{M'} \otimes u$ sunt mono, rezultă că $v \otimes 1_P$ este mono, adică P este un modul plat. \square

Capitolul 5

Module de fracții și inele de fracții

5.1 Noțiunea de modul de fracții (câturi)

Fie R un inel comutativ și ${}_R M$ un modul.

Definiția 5.1 $S \subset R$, $S \neq \emptyset$, se numește *sistem multiplicativ închis* (prescurtat s.m.î.) dacă $\forall s, s' \in S$ avem $ss' \in S$.

Exemple

1. Fie $a \in R$, a nenilpotent și $S = \{a^n \in R \mid n \in \mathbb{N}^*\}$. Avem $a^n \neq 0$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$. Atunci S este un s.m.î.
2. S poate fi ales ca mulțimea tuturor nedivizorilor lui zero din R .
3. S poate fi mulțimea tuturor elementelor inversabile din R .
4. Dacă P este un ideal prim în R , putem considera $S_P = R - P$, care este un s.m.î.

Observația 5.1 S ar putea conține și divizori ai lui zero, dar în cazul în care $x \in S$, $x \neq 0$, x este divizor al lui zero și $y \in R$, $y \neq 0$, încât $xy = 0$, avem $y \notin S$.

Exemplu. Fie inelul \mathbb{Z}_{12} și fie $P = \langle \hat{3} \rangle = \{\hat{0}, \hat{3}, \hat{6}, \hat{9}\}$ idealul generat de $\hat{3}$. Atunci

$$\mathbb{Z}_{12} - P = \{\hat{1}, \hat{2}, \hat{4}, \hat{5}, \hat{7}, \hat{8}, \hat{10}, \hat{11}\}$$

conține divizori ai lui zero (pe $\hat{2}, \hat{4}, \hat{8}, \hat{10}$), dar $\hat{0} \notin \mathbb{Z}_{12} - P$.

În cele ce urmează, vom presupune că $0 \notin S$.

Definim pe $M \times S$ următoarea relație binară:

$$(x, s) \sim (y, t) \iff \exists u \in S, \text{ a.î. } u(tx - sy) = 0.$$

Relația „ \sim ” este o relație de echivalență pe $M \times S$. Notăm clasa de echivalență a elementului (x, s) cu $\frac{x}{s}$. Mulțimea factor este mulțimea claselor:

$$S^{-1}M = \left\{ \frac{x}{s} \mid x \in M, s \in S \right\}.$$

Definim pe $S^{-1}M$:

$$\text{„+”} \quad \frac{x}{s} + \frac{y}{t} = \frac{tx + sy}{st}$$

$$\text{„R”} \quad r \cdot \frac{x}{s} = \frac{rx}{s} \quad \forall \frac{x}{s}, \frac{y}{t} \in S^{-1}M \text{ și } \forall r \in R.$$

Definițiile de mai sus nu depind de reprezentanți.

Într-adevăr, dacă $\frac{x}{s} = \frac{x'}{s'}$ și $\frac{y}{t} = \frac{y'}{t'}$, atunci $\exists u, v \in S$, încât

$$u(s'x - sx') = 0 \text{ și } v(t'y - ty') = 0.$$

Înmulțim egalitățile cu $t'tv$, respectiv cu $s'su$, și rezultă:

$$uv[s't'(tx + sy) - st(t'z' + s'y')] = 0.$$

Notăm $w = uv \in S$. Am obținut că

$$\frac{t'x' + s'y'}{s't'} = \frac{tx + sy}{st}$$

sau, echivalent,

$$\frac{x'}{s'} + \frac{y'}{t'} = \frac{x}{s} + \frac{y}{t}.$$

Pentru „,”, arătăm că, dacă $\frac{x}{s} = \frac{s'}{s'}$, atunci $r \frac{x}{s} = r \frac{s'}{s'}$, adică $\exists w \in S$, încât $w(s'rx - sr x') = 0$. Considerăm $w = u$ și obținem cerința.

În plus, $(S^{-1}M, +)$ este grup abelian. Elementul neutru este $\frac{y}{t}$, pentru care $\exists v \in S$, așa încât $vy = 0$. Opusul lui $\frac{x}{s}$ este $\frac{-x}{s}$. Obținem că

Teorema 5.1 $(S^{-1}M, +, \cdot)$ este un R -modul.

Observația 5.2 Dacă $0 \in S$, atunci $\forall (x, s), (y, t)$, putem considera $u = 0$ și atunci $(x, s) \sim (y, t)$, caz în care mulțimea factor va avea un singur element și anume clasa lui 0.

Caz particular

Pentru ${}_R M = {}_R R$, avem că R -modulul $S^{-1}R$ este, de fapt, un inel. Înmulțirea $\frac{a}{s} \cdot \frac{b}{t} = \frac{ab}{st}$ nu depinde de reprezentanți. Mai mult, $(S^{-1}R, \cdot)$ este un monoid comutativ cu elementul neutru $1 = \frac{s}{s} \in S^{-1}R$.

Se verifică și celelalte condiții din definiția inelului și $(S^{-1}R, +, \cdot)$ este un inel comutativ cu 1, numit *inelul fracțiilor lui R relativ la S* .

Considerăm funcția

$$\varphi : R \longrightarrow S^{-1}R, \quad \varphi(a) = \frac{as}{s}, \text{ pentru } s \in S.$$

Se verifică faptul că definiția este bună; adică dacă $\frac{as}{s} = \frac{at}{t}$, $\forall s, t \in S$. Au loc următoarele **proprietăți**:

- φ este un morfism unitar de inele
- $\varphi(s)$ este inversabil în $S^{-1}R$ pentru orice $s \in S$
- $\ker f = \{a \in R \mid \exists v \in S, \text{ a.î. } va = 0\}$

$\varphi = \varphi_S$ se numește *morfism canonic*.

Într-adevăr, $\varphi(s) = \frac{st}{t}$ este inversabil în $S^{-1}R$ cu inversul $\frac{t}{st}$.

$$\begin{aligned} \ker \varphi &= \{a \in R \mid \varphi(a) = 0\} = \left\{a \in R \mid \frac{as}{s} = 0\right\} \\ &= \{a \in R \mid \exists u \in S, \text{ a.î. } uas = 0\} = \{a \in R \mid \exists v (= us), \text{ a.î. } va = 0\}. \end{aligned}$$

Caz particular în modulul ${}_R R$.

Considerăm S format doar din nedivizori ai lui zero. Relația de echivalență se reduce la

$$(a, s) \sim (b, t) \iff ta = sb.$$

Atunci $\ker \varphi = 0$, adică φ este morfism injectiv. Cu alte cuvinte, R se poate scufunda în $S^{-1}R$, adică R poate fi văzut ca un subinel în $S^{-1}R$.

Dacă S este mulțimea tuturor nedivizorilor lui zero, atunci $S^{-1}R \stackrel{\text{not}}{=} Q(R)$ se numește *inelul total de fracții* al lui R .

În cazul în care R este un domeniu de integritate și dacă $S = R^*$, atunci $S^{-1}R \stackrel{\text{not}}{=} K(R)$ este *corpul fracțiilor domeniului de integritate* R .

Pentru $R = \mathbb{Z}$, avem $K(\mathbb{Z}) = \mathbb{Q}$.

Proprietate. Pentru orice $\frac{a}{s} \in S^{-1}R$, avem

$$\frac{a}{s} = \varphi(a)[\varphi(s)]^{-1}.$$

Într-adevăr, dacă $\frac{a}{s} \in S^{-1}R$, atunci $\frac{at}{st} = \frac{a}{s}, \forall t \in S$. Avem

$$\frac{a}{s} = \frac{as}{ss} = \frac{as}{s} \cdot \frac{1}{s} = \varphi(a) \cdot \frac{1}{s} = \varphi(a)[\varphi(s)]^{-1},$$

deoarece

$$\frac{1}{s} = \frac{t}{st} = [\varphi(s)]^{-1}, \text{ unde } \varphi(s) = \frac{st}{t}.$$

5.2 Proprietatea de universalitate a inelelor de fracții

Considerăm inelul comutativ R , s.m.î. S , inelul cât $S^{-1}R$.

Teorema 5.2 Fie R' un inel comutativ cu $1 \neq 0$ și fie $\eta : R \rightarrow R'$, așa încât $\eta(s)$ este inversabil în R' . Atunci $\exists! \bar{\eta} : S^{-1}R \rightarrow R'$ a.î. $\bar{\eta}\varphi = \eta$, unde

$$\begin{array}{ccc} R & \xrightarrow{\varphi} & S^{-1}R \\ & \searrow \eta & \swarrow \exists! \bar{\eta} \\ & & R' \end{array}$$

Demonstrație. Definim

$$\bar{\eta} \left(\frac{a}{s} \right) = \eta(a)[\eta(s)]^{-1}.$$

Să arătăm că $\bar{\eta}$ este morfism unitar de inele.

$$\begin{aligned} \bar{\eta} \left(\frac{a}{s} + \frac{b}{t} \right) &= \bar{\eta} \left(\frac{at + bs}{st} \right) \\ &= \eta(at + bs)[\eta(st)]^{-1} \\ &= [\eta(a)\eta(t) + \eta(b)\eta(s)] \cdot [\eta(s)]^{-1} \cdot [\eta(t)]^{-1} \\ &= \eta(a)[\eta(s)]^{-1} + \eta(b)[\eta(t)]^{-1} \\ &= \bar{\eta} \left(\frac{a}{s} \right) + \bar{\eta} \left(\frac{b}{t} \right), \quad \forall \frac{a}{s}, \frac{b}{t} \in S^{-1}R. \end{aligned}$$

Analog,

$$\bar{\eta} \left(\frac{a}{s} \cdot \frac{b}{t} \right) = \bar{\eta} \left(\frac{a}{s} \right) \bar{\eta} \left(\frac{b}{t} \right), \quad \forall \frac{a}{s}, \frac{b}{t} \in S^{-1}R \quad \text{și} \quad \bar{\eta} \left(\frac{s}{s} \right) = 1_{R'}, \quad \forall s \in S.$$

Mai mult, $\bar{\eta}\varphi = \eta$ și $\bar{\eta}$ este unic cu proprietatea de mai sus. Într-adevăr,

$$(\bar{\eta}\varphi)(a) = \bar{\eta} \left(\frac{as}{s} \right) = \eta(as) \cdot [\eta(s)]^{-1} = \eta(a), \quad \forall a \in R.$$

Presupunem că $\bar{\eta}' : S^{-1}R \rightarrow R'$ așa încât

$$\bar{\eta}'\varphi = \eta.$$

Avem

$$\begin{aligned} \bar{\eta}' \left(\frac{a}{s} \right) &= \bar{\eta}'(\varphi(a)[\varphi(s)]^{-1}) = \bar{\eta}'(\varphi(a)) \cdot [\bar{\eta}'(\varphi(s))]^{-1} \\ &= (\bar{\eta}'\varphi)(a)[\bar{\eta}'\varphi(s)]^{-1} = \eta(a)[\eta(s)]^{-1} \\ &= \bar{\eta} \left(\frac{a}{s} \right), \quad \forall \frac{a}{s} \in S^{-1}R. \end{aligned}$$

Deci, pentru un sistem multiplicativ închis S dat, inelul de fracții este unic până la un izomorfism de inele. \square

5.3 Proprietăți ale modulului de fracții

Fie R un inel comutativ și S un sistem multiplicativ închis. Fie M un R -modul. Definim în $M \otimes_R S^{-1}R$ următoarea înmulțire cu scalari:

$$a \left(x \otimes \frac{b}{s} \right) = ax \otimes \frac{b}{s} = x \otimes \frac{ab}{s}.$$

Teorema 5.3 *Există un izomorfism canonic de R -module*

$$g : S^{-1}M \longrightarrow M \otimes_R S^{-1}R.$$

Demonstrație. Definim

$$g : S^{-1}M \longrightarrow M \otimes_R S^{-1}R$$

$$g \left(\frac{x}{s} \right) = x \otimes \frac{1}{s}$$

g este bine definit.

Într-adevăr, dacă $\frac{x}{s} = \frac{x'}{s'}$, atunci $\exists u \in S$ încât $u(s'x - sx') = 0$. Avem

$$\begin{aligned} g \left(\frac{x}{s} \right) &= x \otimes \frac{1}{s} = x \otimes \frac{us'}{us's} = (us')x \otimes \frac{1}{us's} \\ &= (us)x' \otimes \frac{1}{us's} = x' \otimes \frac{us}{us's} = x' \otimes \frac{1}{s'} = g \left(\frac{x'}{s'} \right). \end{aligned}$$

Se verifică, de asemenea, că g este un morfism de R -module și este bijectiv. Avem

$$\begin{aligned} g \left(\frac{x}{s} + \frac{y}{t} \right) &= g \left(\frac{tx + sy}{st} \right) = (tx + sy) \otimes \frac{1}{s \cdot t} \\ &= tx \otimes \frac{1}{st} + sy \otimes \frac{1}{st} = x \otimes \frac{1}{s} + y \otimes \frac{1}{t} \\ &= g \left(\frac{x}{s} \right) + g \left(\frac{y}{t} \right), \quad \forall \frac{x}{s}, \frac{y}{t} \in S^{-1}M \end{aligned}$$

și

$$\begin{aligned} g \left(a \left(\frac{y}{t} \right) \right) &= g \left(\frac{ay}{t} \right) = (ay) \otimes \frac{1}{t} = a \left(y \otimes \frac{1}{t} \right) = ag \left(\frac{y}{t} \right), \\ &\quad \forall a \in R \text{ și } \forall \frac{y}{t} \in S^{-1}M. \end{aligned}$$

Construim inversa lui g . Considerăm următoarea diagramă:

$$\begin{array}{ccc}
 M \times S^{-1}R & \xrightarrow{f} & M \otimes_R S^{-1}R \\
 \searrow \eta & & \swarrow \bar{\eta} \\
 & & S^{-1}M
 \end{array}$$

f este aplicație canonică

$$\eta\left(x, \frac{a}{s}\right) = \frac{ax}{s}$$

Buna definiție a lui η :

$$\frac{a}{s} = \frac{b}{t} \iff \exists v \in S, \text{ a.î. } v(ta - sb) = 0 \implies v(tax - sbx) = 0 \text{ adică } \frac{ax}{s} = \frac{bx}{t}.$$

Definim

$$\bar{\eta}\left(x \otimes \frac{a}{s}\right) = \frac{ax}{s}.$$

$\bar{\eta}$ este morfism de grupuri abeliene.

Să arătăm că $\bar{\eta}$ este morfism de module.

$$\begin{aligned}
 \bar{\eta}\left[b\left(x \otimes \frac{a}{s}\right)\right] &= \bar{\eta}\left((bx) \otimes \frac{a}{s}\right) = \bar{\eta}\left(x \otimes \frac{ba}{s}\right) = \frac{bax}{s} = b \cdot \frac{ax}{s} = b\bar{\eta}\left(x \otimes \frac{a}{s}\right), \\
 &\forall b \in R, \forall x \in M, \forall \frac{a}{s} \in S^{-1}R.
 \end{aligned}$$

Avem

$$\bar{\eta}g = 1_{S^{-1}M} \text{ și } g\bar{\eta} = 1_{M \otimes_R S^{-1}R}$$

Într-adevăr,

$$(\bar{\eta}g)\left(\frac{x}{s}\right) = \bar{\eta}\left(g\left(\frac{x}{s}\right)\right) = \bar{\eta}\left(x \otimes \frac{1}{s}\right) = \frac{x}{s}$$

și

$$\begin{aligned}
 (g\bar{\eta})\left(x \otimes \frac{a}{s}\right) &= g\left(\bar{\eta}\left(x \otimes \frac{a}{s}\right)\right) = g\left(\frac{ax}{s}\right) = ax \otimes \frac{1}{s} = x \otimes \frac{a}{s}, \\
 &\forall x \otimes \frac{a}{s} \in M \otimes_R S^{-1}R.
 \end{aligned}$$

Așadar, $S^{-1}M \simeq M \otimes_R S^{-1}R$. □

Teorema 5.4 $S^{-1}R$ este modul R -plat.

Demonstrație. Fie $v : M' \rightarrow M$ un morfism de R -module. Arătăm că morfismul indus

$$v \otimes 1_{S^{-1}R} : M' \otimes_R S^{-1}R \rightarrow M \otimes_R S^{-1}R$$

este un morfism.

Considerăm următoarea diagramă:

$$\begin{array}{ccc} M' \otimes_R S^{-1}R & \xrightarrow{v \otimes 1_{S^{-1}R}} & M \otimes_R S^{-1}R \\ \downarrow g'^{-1} & & \downarrow g^{-1} \\ S^{-1}M' & \xrightarrow{\bar{v}} & S^{-1}M \end{array}$$

unde $\bar{v} \left(\frac{x'}{s'} \right) = \frac{v(x')}{s}$.

Verificăm acum buna definire a lui \bar{v} . Fie $\frac{x'}{s} = \frac{y'}{t}$. Rezultă că $\exists u \in S$, a.î. $u(tx' - sy') = 0$, de unde $v(u(tx' - sy')) = 0$, adică $u(v(tx') - v(sy')) = 0$, deci $u(tv(x') - sv(y')) = 0$, adică $\frac{v(x')}{s} = \frac{v(y')}{t}$.

Să arătăm acum că \bar{v} este morfism. Fie $\bar{v} \left(\frac{x'}{s} \right) = 0$. Rezultă $\frac{v(x')}{s} = 0$, adică $\exists u \in S$, a.î. $uv(x') = 0$, de unde $v(ux') = 0$ și, cum v este mono, obținem $ux' = 0$, de unde $\frac{x'}{s} = 0$.

Diagrama de mai sus este comutativă, adică

$$g^{-1}(v \otimes 1_{S^{-1}R}) = \bar{v}(g')^{-1}$$

deoarece

$$g^{-1}(v \otimes 1_{S^{-1}R}) \left(x' \otimes \frac{a}{s} \right) = g^{-1} \left(v(x') \otimes \frac{a}{s} \right) = \frac{av(x')}{s}.$$

Pe de altă parte,

$$(\bar{v}(g')^{-1}) \left(x \otimes \frac{a}{s} \right) = \bar{v} \left(\frac{ax'}{s} \right) = \frac{v(ax')}{s}, \quad \forall x \in M, \quad \forall \frac{a}{s} \in S^{-1}R,$$

deci diagrama este comutativă.

Cum \bar{v} este mono și $(g')^{-1}$ izomorfism, rezultă că $\bar{v}(g')^{-1}$ este monomorfism, de unde $v \otimes 1_{S^{-1}R}$ este un monomorfism.

Așadar, $S^{-1}R$ este R -plat. \square

5.4 Transferul idealelor

Considerăm R un inel comutativ cu $1 \neq 0$, S un sistem multiplicativ închis al său, $S^{-1}R$ inelul fracțiilor și $\varphi : R \rightarrow S^{-1}R$ morfismul canonic $\varphi(a) = \frac{as}{s}$.

Fie A un ideal al lui R . Atunci $S^{-1}A$ este idealul generat de $\varphi(A)$ în $S^{-1}R$, notat $(\varphi(A))$.

$S^{-1}A$ se numește *extensia* lui A .

Pe de altă parte, dacă A' este ideal în $S^{-1}R$, $\varphi^{-1}(A')$ imaginea inversă a lui A' este

$$A' \cap R = \{a \in R \mid \varphi(a) \in A'\}$$

și se numește *contractia* lui A' .

Teorema 5.5 *Au loc următoarele proprietăți:*

- 1) $S^{-1}A = \left\{ \frac{a}{s} \in S^{-1}R \mid a \in A, s \in S \right\}$.
- 2) $S^{-1}A \neq S^{-1}R \iff A \cap S = \emptyset$.
- 3) $S^{-1}(A' \cap R) = A'$ (*extensia contractiei lui A' este A'*).
- 4) $(S^{-1}A) \cap R = A_S$ unde $A_S = \{a \in R \mid \exists s \in S \text{ a.î. } as \in A\}$ (*contractia extensiei lui A este un ideal ce conține idealul A*).
- 5) *Există o corespondență bijectivă $\psi : \mathbb{P}_R \rightarrow \mathbb{P}_{S^{-1}R}$ cu păstrarea ordinii date de incluziune, unde*

$$\begin{aligned} \mathbb{P}_R &= \{P \text{ ideal prim în } R \mid P \neq 0 \text{ și } P \cap S = \emptyset\} \\ \mathbb{P}_{S^{-1}R} &= \{\mathcal{P} \text{ ideal în } S^{-1}R \mid \mathcal{P} \neq 0\}. \end{aligned}$$

Demonstrație. 1) Notăm

$$\bar{A} = \left\{ \frac{a}{s} \in S^{-1}R \mid a \in A, s \in S \right\}.$$

Verificăm că $\bar{A} \subset S^{-1}A$. Avem

$$\frac{a}{s} = \frac{1}{s} \cdot \frac{as}{s} = \frac{1}{s} \varphi(a) \in (\varphi(A)) = S^{-1}A \text{ ideal în } S^{-1}R.$$

Invers, $(\varphi(A)) = S^{-1}A \subseteq \bar{A}$. Într-adevăr, fie $\bar{x} \in (\varphi(A))$. Rezultă că \bar{x} are forma

$$\bar{x} = \sum_{i=1}^n \frac{a_i}{s_i} \varphi(a'_i) \text{ cu } a'_i \in A.$$

Avem

$$\bar{x} = \sum_{i=1}^n \frac{a_i}{s_i} \cdot \frac{a'_i s_i}{s_i} = \sum_{i=1}^n \frac{a_i a'_i s_i}{s_i^2} = \sum_{i=1}^n \frac{a''_i}{t_i},$$

unde $a''_i = a_i a'_i s_i \in A$ și $s_i s_i = t_i \in S$. Obținem

$$\bar{x} = \frac{a''_1}{t_1} + \frac{a''_2}{t_2} + \dots + \frac{a''_n}{t_n} = \frac{a''_1 t_2 \dots t_n + a''_2 t_1 t_3 \dots t_n + \dots + a''_n t_1 t_2 \dots t_{n-1}}{t_1 t_2 \dots t_n} \in \bar{A}$$

2) „ \implies ” Presupunem $A \cap S \neq \emptyset$, deci există $a \in A$, $a \in S$.

Elementul $\frac{a}{a} \in S^{-1}A$, de unde $1 \in S^{-1}A$, deci $S^{-1}A = S^{-1}R$.

„ \impliedby ” Presupunem că $S^{-1}A = S^{-1}R$, de unde $1 = \frac{s}{s} \in S^{-1}A$, deci există

$a \in A$, $t \in S$, încât $\frac{s}{s} = \frac{a}{t}$. Rezultă că $\exists v \in S$ încât $v(st - sa) = 0$.

Obținem

$$vsa = vst \in A \cap S,$$

ceea ce este fals! Deci $S^{-1}A \neq S^{-1}R$.

3) „ \subset ” Fie $\frac{a}{s} \in S^{-1}(A' \cap R)$, unde $a \in A' \cap R$, deci $\varphi(a) = \frac{as}{s} \in A'$. Avem

$\frac{a}{s} = \frac{1}{s} \cdot \frac{as}{s} \in A'$, de unde $\frac{a}{s} \in A'$. Deci $S^{-1}(A' \cap R) \subset A'$.

Invers, dacă $\frac{a}{s} \in A'$, atunci $a \in A' \cap R$, adică $\varphi(a) \in A'$.

Avem $\frac{as}{s} = \frac{s^2}{s} \cdot \frac{a}{s} \in A'$, de unde $\varphi(a) \in A'$, deci $a \in A' \cap R$, de unde $\frac{a}{s} \in S^{-1}(A' \cap R)$. Rezultă $A' \subset S^{-1}(A' \cap R)$.

4) $(S^{-1}A) \cap R = A_S$, unde

$$A_S = \{a \in R \mid \exists s \in S, as \in A\}.$$

„ \subset ” Fie $a \in (S^{-1}A) \cap R$, adică $\varphi(a) \in S^{-1}A$, deci $\varphi(a) = \frac{a'}{s'}$ cu $a' \in A$, adică $\frac{as}{s} = \frac{a'}{s'}$. Rezultă că $\exists t \in S$, a.î. $t(ass' - sa') = 0$, de unde $a(ss't) = a'st \in A$. Rezultă că $a \in A_S$.

„ \supset ” Fie $a \in A_S$, adică $\exists s \in S$, a.î. $as \in A$. Să arătăm că $\varphi(a) \in S^{-1}A$, adică $\varphi(a) = \frac{a'}{s'}$, cu $a' \in A$. Deci $\frac{as}{s} = \frac{a'}{s'}$. Cum $as \in A$, rezultă că $\frac{as}{s} \in S^{-1}A$, adică $\varphi(a) \in S^{-1}A$.

5) Definem aplicația $\psi : \mathbb{P}_R \rightarrow \mathbb{P}_{S^{-1}R}$, $\psi(P) = S^{-1}P$.

Din $P \cap S = \emptyset$ rezultă $S^{-1}P \neq S^{-1}R$. Din $P \neq 0$ rezultă $S^{-1}P \neq 0$.

Fie $\frac{a}{s}, \frac{b}{t} \in S^{-1}R$, a.î. $\frac{a}{s} \cdot \frac{b}{t} \in S^{-1}P$. Rezultă că $\exists \frac{a'}{s'}$ cu $a' \in P$, $s' \in S$, așa încât $\frac{ab}{st} = \frac{a'}{s'}$. Rezultă că $\exists v \in S$, a.î. $v(s'ab - sta') = 0$, de unde $(vs')(ab) = (vst)a' \in P$. Deci $(vs')(ab) \in P$ și, cum P este prim și $P \cap S = \emptyset$, rezultă că $ab \in P$, de unde $a \in P$ sau $b \in P$. Rezultă că $\frac{a}{s} \in S^{-1}P$ sau $\frac{b}{t} \in S^{-1}P$. Deci $S^{-1}P$ este ideal prim al lui $S^{-1}R$.

Considerăm $\psi' : \mathbb{P}_{S^{-1}R} \rightarrow \mathbb{P}_R$, $\psi'(\mathcal{P}) = \mathcal{P} \cap R \stackrel{\text{not}}{=} P$. Să atătam că

$$P \cap S = \emptyset$$

$$S^{-1}(\mathcal{P} \cap R) = \mathcal{P} \neq S^{-1}R \text{ din 3.}$$

Deci $(\mathcal{P} \cap R) \cap S = \emptyset$ conform cu 2).

Să presupunem că $P = R$, de unde $1 \in P$, deci $\varphi(1) \in \mathcal{P}$, adică $\frac{s}{s} \in \mathcal{P}$, de unde $\mathcal{P} = S^{-1}R$, ceea ce este fals! Deci $P \neq R$.

Mai mult, P este ideal prim.

Fie $ab \in P$, adică $\varphi(ab) \in \mathcal{P}$, de unde $\varphi(a)\varphi(b) \in \mathcal{P}$ care ne conduce la $\varphi(a) \in \mathcal{P}$ sau $\varphi(b) \in \mathcal{P}$, adică $a \in P$ sau $b \in P$.

Să mai arătăm că $\psi'\psi = 1_{\mathbb{P}_R}$ și $\psi\psi' = 1_{\mathbb{P}_{S^{-1}R}}$ și că ψ păstrează ordinea.

Avem

$$(\psi'\psi)(P) = \psi'(\psi(P)) = \psi'(S^{-1}P) = (S^{-1}P) \cap R = P_S,$$

$$\text{cu } P \in \mathbb{P}_R \text{ și } P \cap S = \emptyset.$$

Avem $P \subset P_S$. Pe de altă parte, din $a \in P_S$ rezultă că $\exists s \in S$, a.î. $as \in P$. Cum $P \cap S = \emptyset$, rezultă că $s \notin P$, deci $a \in P$. Obținem că $\psi'\psi = 1_{\mathbb{P}_R}$. Totodată,

$$(\psi\psi')(\mathcal{P}) = \psi(\mathcal{P} \cap R) = S^{-1}(\mathcal{P} \cap R) = \mathcal{P},$$

conform cu 3).

Fie acum $P_1 \subset P_2$ ideale din \mathbb{P}_R . Fie $\frac{a}{s} \in S^{-1}P_1$, de unde $a \in P_1 \subset P_2$, deci $\frac{a}{s} \in S^{-1}P_2$. \square

5.5 Localizatul lui R relativ la P

Fie R un inel comutativ și P un ideal prim al lui R . Considerăm sistemul multiplicativ închis $S_P = R - P$. Notăm $S_P^{-1}R \stackrel{\text{not}}{=} R_P$. Fie A un ideal al lui R . Notăm $S_P^{-1}A = AR_P$.

Teorema 5.6 PR_P este unicul ideal maximal al lui R_P .

Demonstrație. Fie P' un ideal prim al lui R_P . Conform teoremei precedente, există un ideal prim P_1 al lui R încât $P_1 \cap S_P = \emptyset$ și $P_1R_P = P'$. Avem deci $P_1 \subset P$ și, datorită păstrării ordinii, obținem

$$P_1R_P = P' \subset PR_P,$$

adică PR_P include orice ideal prim. \square

Puteam obține același rezultat folosind teorema următoare.

Teorema 5.7 Fie R un inel comutativ cu $1 \neq 0$. Următoarele condiții sunt echivalente:

1. R admite un unic ideal maximal;
2. Mulțimea $A = \{a \in R \mid a \text{ neinvertibil în } R\}$ este ideal în R .
3. Dacă a, b sunt elemente neinvertibile, atunci $a + b$ este element neinvertibil.
4. Dacă $a + b$ este invertibil, atunci a este invertibil sau b este invertibil.

Demonstrație. $1 \implies 2$ Fie M unicul ideal maximal al lui R .

M conține doar elemente neinversabile, deci $M \subseteq A$. Fie acum $a \in A$. Deoarece a este neinversabil, rezultă că există un ideal maximal M care conține pe a . Pe de altă parte, M este unicul ideal maximal, deci $a \in M$. Rezultă că $M = A$.

$2 \implies 1$ Din lema lui Krull există în R un ideal maximal M . Avem $M \subseteq A$ și, conform condiției de maximalitate, rezultă $M = A$, deci A este unicul ideal maximal al lui R .

$2 \implies 3$ $(A, +)$ este subgrup al lui $(R, +)$.

$3 \implies 2$ În raport cu adunarea, $(A, +)$ este parte stabilă. Să verificăm acum că dacă $b \in R$ și a este neinversabil, atunci ba este neinversabil. Într-adevăr, dacă presupunem că ba este inversabil, atunci există $u \in R$, încât $(ub)a = 1$, adică a este inversabil, fals! Deci ba nu este inversabil în R .

$3 \iff 4$ Imediată. □

Definiția 5.2 Un inel care verifică una dintre condițiile echivalente din teorema precedentă se numește *inel local*.

Teorema 5.8 Dacă R este un domeniu de integritate și A, B sunt ideale în R , atunci

$$A = B \iff AR_P = BR_P$$

pentru orice P ideal maximal în R .

Demonstrație.

Metoda 1.

Arătăm că

$$\bigcap_{P \text{ ideal maximal}} AR_P = A$$

„ \supseteq ”: Fie $\frac{a}{s} \in AR_P$, unde P este ideal maximal oarecare. Avem $s \in R - P$, pentru orice ideal maximal P , deci s este inversabil. Într-adevăr, dacă s ar fi neinversabil, atunci ar exista un ideal maximal M , încât $s \in M$, ceea ce este fals.

$$\text{Avem } \frac{a}{s} = \frac{a}{1} \cdot s^{-1} \in A \cdot R = A.$$

„ \supset ”: R este domeniu de integritate, deci φ_{S_P} este injectiv. Pentru orice ideal maximal P avem $A \subseteq AR_P$ ($\varphi(a) = \frac{a}{1} \in AR_P$), deci

$$A \subseteq \bigcap_{P \text{ maximal}} AR_P.$$

Să remarcăm că $1 \in S_P$ pentru că altfel $1 \in P$ implică $P = R$. Așadar,

$$\bigcap_{P \text{ ideal maximal}} AR_P = A,$$

de unde rezultă cerința. \square

Metoda 2.

Avem că $AR_P = BR_P$, pentru orice ideal P maximal. Să verificăm că $A \subseteq B$. Fie $a \in A$. Avem $\frac{a}{1} \in AR_P = BR_P$, deci $\frac{a}{1} = \frac{b_P}{s_P}$, unde $b_P \in B$, iar $s_P \in R - P = S_P$, pentru orice ideal P maximal. Deci $as_P = b_P \in B$, pentru orice ideal P maximal.

Fie C idealul generat de mulțimea

$$\{s_P \in S_P \mid P \text{ ideal maximal}\}$$

Arătăm că $C = R$. Presupunem prin reducere la absurd că $C \not\subseteq R$. Conform lemei lui Krull, există un ideal maximal P_0 , așa încât $C \subset P_0$. Din definiția lui C , $s_{P_0} \in C \subset P_0$, dar $s_{P_0} \in R - P_0$, fals! Deci $C = R$. În particular, $1 \in C$, deci există idealele maximale P_1, \dots, P_k , încât $1 = x_1 s_{P_1} + \dots + x_k s_{P_k}$, cu $s_i \in R$, $i = \overline{1, k}$, de unde

$$a = x_1 a s_{P_1} + \dots + x_k a s_{P_k}.$$

Dar $a s_{P_i} \in B$, $\forall i = \overline{1, k}$, deci $a \in B$, adică $A \subseteq B$. Similar se arată că $B \subseteq A$. Rezultă $A = B$. \square

5.6 Proprietăți ale inelului de fracții

Teorema 5.9 Fie R un inel comutativ cu $1 \neq 0$, S un sistem multiplicativ închis în R , $\eta : R \rightarrow R'$ un morfism unitar de inele. Dacă η are următoarele proprietăți:

1. $\eta(s)$ este inversabil în R' , $\forall s \in S$.
2. $\ker \eta = \ker \varphi_S$.
3. $\forall \alpha \in R'$, $\exists a \in R$, $\exists s \in S$, a.î. $\alpha = \eta(a)[\eta(s)]^{-1}$,

atunci există un izomorfism $\bar{\eta} : S^{-1}R \rightarrow R'$.

Demonstrație. Considerăm diagrama de la universalitatea inelelor de câțuri:

$$\begin{array}{ccc}
 R & \xrightarrow{\varphi_{S'}} & S^{-1}R \\
 & \searrow \eta & \swarrow \exists! \bar{\eta} \\
 & & R'
 \end{array}$$

$\bar{\eta}$ morfism, încât $\bar{\eta}\varphi_S = \eta$. Avem

$$\bar{\eta}\left(\frac{a}{s}\right) = \eta(a)[\eta(s)]^{-1}.$$

Să mai arătăm că $\bar{\eta}$ este o aplicație bijectivă. Pentru injectivitate, verificăm că $\ker \bar{\eta} = 0$. Avem

$$\ker \bar{\eta} = \left\{ \frac{a}{s} \in S^{-1}R \mid \bar{\eta}\left(\frac{a}{s}\right) = 0 \right\}$$

$$\bar{\eta}\left(\frac{a}{s}\right) = 0 \iff \eta(a)(\eta(s))^{-1} = 0 \iff \eta(a) = 0,$$

adică $a \in \ker \eta = \ker \varphi_S$, de unde există $v \in S$, așa încât $av = 0$, deci $\frac{a}{s} = 0$. Obținem $\ker \bar{\eta} = 0$, adică $\bar{\eta}$ este injectivă. $\bar{\eta}$ este și surjectivă. Într-adevăr, pentru orice $\alpha \in R'$, $\exists a \in R$, $\exists s \in S$, încât $\alpha = \eta(a)[\eta(s)]^{-1} = \bar{\eta}\left(\frac{a}{s}\right)$. Așadar, $\bar{\eta}$ este un izomorfism. \square

Corolarul 5.1 Dacă R este un inel comutativ cu $1 \neq 0$, iar S, T sunt sisteme multiplicative, încât $S \subset T$, atunci

$$[\varphi_S(T)]^{-1}S^{-1}R \simeq T^{-1}R.$$

Demonstrație. Considerăm diagrama

$$\begin{array}{ccc} R & \xrightarrow{\varphi_S} & S^{-1}R \\ & \searrow \varphi_T & \swarrow \exists \eta \\ & & T^{-1}R \end{array}$$

$\varphi_T(s) = \frac{st}{t}$ este inversabil în $T^{-1}R$ (din $S \subset T$). Avem

$$\eta\left(\frac{a}{s}\right) \stackrel{\text{def}}{=} \varphi_T(a)[\varphi_T(s)]^{-1}.$$

În teorema anterioară, considerăm $S^{-1}R$ în locul lui R , $T^{-1}R$ în locul lui R' , și $\varphi_S(T)$ în locul lui S .

$\varphi_S(T)$ este sistem multiplicativ închis în $S^{-1}R$, deoarece

$$\varphi_S(t_1)\varphi_S(t_2) = \varphi_S(t_1t_2).$$

Să verificăm acum următoarele afirmații:

1°. $\eta(\varphi_S(t))$ este inversabilă în $T^{-1}R$.

2°. $\ker \eta = \ker \varphi_{\varphi_S(T)}$.

3°. $\forall \alpha \in T^{-1}R, \exists \frac{a}{s} \in S^{-1}R, \exists \varphi_S(t)$ în $\varphi_S(T)$ astfel încât

$$\alpha = \eta\left(\frac{a}{s}\right)\eta(\varphi_S(t))^{-1}.$$

1°. $\eta(\varphi_S(t)) = \eta\left(\frac{ts}{s}\right) = \varphi_T(ts)[\varphi_T(s)]^{-1} = \varphi_T(t)\varphi_T(s)(\varphi_T(s))^{-1} = \varphi_T(t)$ care este inversabil în $T^{-1}R$.

2°. „ \subset ” Fie $\frac{a}{s} \in S^{-1}R$ cu $\eta\left(\frac{a}{s}\right) = 0$. Rezultă că $\varphi_T(a)(\varphi_T(s))^{-1} = 0$, adică $\varphi_T(a) = 0$, de unde $a \in \ker \varphi_T$. Așadar, $\exists t \in T$, încât $at = 0$.

Pe de altă parte,

$$\ker \varphi_{\varphi_S(T)} = \left\{ \frac{a}{s} \in S^{-1}R \mid \exists w \in \varphi_S(T), \text{ a.î. } \frac{aw}{s} = 0 \right\}.$$

$w \in \varphi_{S(T)}$ implică $w = \frac{ts}{s}$, pentru anumiți $s \in S$ și $t \in T$. Avem $\frac{a}{s} w = \frac{a}{s} \cdot \frac{ts}{s}$ și, cum $ts \in T$, rezultă că $\frac{a}{s} = 0$ în $T^{-1}S$. Deci $at = 0$ implică $\frac{a}{s} = 0$, adică $\ker \eta \subseteq \ker \varphi_{\varphi_S(T)}$.

„ \supseteq ” Este imediată.

3°. Fie acum $\alpha \in T^{-1}R$, $\alpha = \frac{a}{t}$ cu $t \in T$. Avem

$$\begin{aligned} \frac{a}{t} &= \varphi_T(a)[\varphi_T(t)]^{-1} = (\eta\varphi_S)(a)[\eta(\varphi_S)(t)]^{-1} \\ &= \eta\left(\frac{as}{s}\right) \left[\eta\left(\frac{st}{s}\right)\right]^{-1} = \eta\left(\frac{as}{s}\right) [\eta(\varphi_S(t))]^{-1}. \end{aligned}$$

În loc de $\frac{a}{s}$ din proprietatea 3°, considerăm $\frac{as}{s} \in S^{-1}R$.

Conform teoremei anterioare, rezultă că există un izomorfism

$$[\varphi_S(T)]^{-1}S^{-1}R \simeq T^{-1}R. \quad \square$$

Teorema 5.10 Fie R un inel comutativ cu $1 \neq 0$ și S un sistem multiplicativ închis în R . Fie A ideal al lui R , a.î. $A \cap S = \emptyset$ și fie $p : R \rightarrow R/A$ proiecția canonică. Următoarele afirmații au loc:

1°. $p(S)$ este s.m.î. în R/A .

2°. Există un izomorfism canonic $[p(S)]^{-1}R/A \xrightarrow{\sim} S^{-1}R/S^{-1}A$.

Demonstrație. Notăm $p' : S^{-1}R \rightarrow S^{-1}R/S^{-1}A$ proiecția canonică și considerăm diagrama

$$\begin{array}{ccc} R & \xrightarrow{\varphi_S} & S^{-1}R \\ \downarrow p & & \downarrow p' \\ R/A & \xrightarrow{\exists \eta} & S^{-1}R/S^{-1}A \end{array}$$

$\exists \eta$ morfism unitar care face diagrama comutativă, adică

$$\eta p = p' \varphi_S.$$

Definim η astfel

$$\eta(a + A) = \varphi_S(a) + S^{-1}A.$$

η este bine definit.

$$a + A = a' + A \implies a - a' \in A \implies \varphi_S(a - a') \in \varphi_S(A) \subseteq S^{-1}A.$$

Aceasta înseamnă că

$$\varphi_S(a - a') = \frac{(a - a')s}{s} \in S^{-1}A,$$

de unde $\varphi_S(a) + S^{-1}A = \varphi_S(a') + S^{-1}A$. Mai mult, η este morfism.

Verificăm acum că η satisface următoarele condiții:

1°. $\eta(s + A)$ este inversabil în $S^{-1}R/S^{-1}A$, $\forall s \in S$.

2°. $\ker \eta = \ker \varphi_{p(S)}$.

3°. $\forall \alpha \in S^{-1}R/S^{-1}A$, $\exists a + A \in R/A$ și $p(s) \in p(S)$, încât

$$\alpha = \eta(a + A)[\eta(s + A)]^{-1}.$$

1°. $\eta(s + A) = \varphi_S(s) + S^{-1}A$. Aici $\varphi_S(s)$ este inversabil în $S^{-1}R$, deci există $[\varphi_S(s)]^{-1} + S^{-1}A \in S^{-1}R/S^{-1}A$ a.î. $(\varphi_S(s) + S^{-1}A)([\varphi_S(s)]^{-1} + S^{-1}A) = 1_{S^{-1}R} + S^{-1}A = 1_{S^{-1}R/S^{-1}A}$. Deci $\eta(s + A)$ este inversabil în $S^{-1}R/S^{-1}A$, $\forall s \in S$.

2°. „ \subset ” Fie $a + A \in \ker \eta$, adică $\eta(a + A) = \bar{0}$, de unde $\varphi_S(a) + S^{-1}A = \bar{0}$, adică $\varphi_S(a) \in S^{-1}A$ sau $\frac{as}{s} \in S^{-1}A$. Pe de altă parte, $\ker \varphi_{p(S)} = \{a + A \in R/A \mid \exists p(s) \in p(S) \text{ a.î. } (a + A)p(s) = A = 0_{R/A}\}$. Deci $(a + A)(s + A) = a$, adică $as \in A$. Rezultă că $\frac{as}{s} \in S^{-1}A$, deci există $a' \in A$, există $t \in S$ încât $\frac{as}{s} = \frac{a'}{t}$. Așadar, există $v \in S$, încât $v(ast - sa') = 0$ sau încă $a(vst) = a'vs$, cu $vst \in S$, $a'vs \in A$. Deci $\exists vst \in S$ încât $a(vst) \in A$, adică $a + A \subset \ker \varphi_{p(S)}$.

„ \supset ” Este imediată.

3°. Fie $\alpha = \frac{a}{s} + S^{-1}A \in S^{-1}R/S^{-1}A$. Avem $\frac{a}{s} = \varphi_S(a)[\varphi_S(s)]^{-1}$, deci $\alpha = \varphi_S(a)[\varphi_S(s)]^{-1} + S^{-1}A = (\varphi_S(a) + S^{-1}A)([\varphi_S(s)]^{-1} + S^{-1}A) = \eta(a + A)[\eta(s + A)]^{-1}$. \square

Capitolul 6

Exerciții

1. Fie $f :_R M \rightarrow_R M$ un morfism de module, așa încât $f^2 = f$. Atunci $M = \ker f \oplus \operatorname{Im} f$.

Soluție. Pentru orice $x \in M$ avem $x = x - f(x) + f(x)$. Avem că $x - f(x) \in \ker f$. Dacă $u \in \ker f \cap \operatorname{Im} f$, atunci $f(u) = 0$ și $u = f(a)$, pentru $a \in M$. Obținem $f(a) = 0$, deci $u = 0$. Obținem $M = \ker f \oplus \operatorname{Im} f$.

2. Fie $M = M_1 \oplus M_2$. Atunci există morfismul $f : M \rightarrow M$, încât $f^2 = f$ și $M_1 = \ker f$, $M_2 = \operatorname{Im} f$.

Soluție. Pentru orice $x \in M$, avem scrierea unică $x = x_1 + x_2$ cu $x_1 \in M_1$, $x_2 \in M_2$. Considerăm $f(x) = x_2$. f satisface condițiile din enunț.

3. Arătați că $\operatorname{Hom}_R(R, M) \simeq M$.

Soluție. Avem $\operatorname{Hom}_R(R, M) = \{f : R \rightarrow M \mid f \text{ morfism de module}\}$.

$$(f + g)(r) = f(r) + g(r).$$

Considerăm

$$\varphi : \operatorname{Hom}(R, M) \rightarrow M$$

$$\varphi(f) = f(1) \in M$$

φ este surjectivă: $\forall x \in M$ considerăm

$$f : R \rightarrow M, \quad f(r) = rx.$$

f este morfism de module și $\varphi(f) = x$.

φ este injectivă. Într-adevăr, dacă $\varphi(f) = \varphi(g)$, adică $f(1) = g(1)$, atunci

$$f(r) = rf(1) = rg(1) = g(r).$$

Deci φ este izomorfism.

Exemplu: $\text{Hom}_{\mathbb{Z}}\mathbb{Z}, \mathbb{Z}_n) \simeq \mathbb{Z}_n$.

4. Arătați că $\text{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}_n, \mathbb{Z}) = 0$.

Soluție. Fie $f : \mathbb{Z}_n \rightarrow \mathbb{Z}$, $f(\hat{0}) = 0$, $f(\hat{k}) = f(k \cdot \hat{1}) = kf(\hat{1})$. Avem $f(\hat{0}) = f(\hat{n}) = 0$ și $f(\hat{n}) = nf(\hat{1})$. Rezultă că $nf(\hat{1}) = 0$ în \mathbb{Z} , deci $f(\hat{1}) = 0$, adică $f = 0$.

5. Fie $(m, n) = 1$, $m, n \geq 2$. Atunci $\mathbb{Z}_{m,n} \simeq \mathbb{Z}_m \times \mathbb{Z}_n$.

Soluție. Considerăm

$$\begin{aligned} f : \mathbb{Z}_{nm} &\rightarrow \mathbb{Z}_m \times \mathbb{Z}_n \\ f(\hat{x}) &= (\bar{x}, \bar{\bar{x}}) \end{aligned}$$

Se verifică faptul că f este izomorfism.

Observația 6.1 Dacă $n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_k^{\alpha_k}$, atunci

$$\mathbb{Z}_n \simeq \mathbb{Z}_{p_1^{\alpha_1}} \times \mathbb{Z}_{p_2^{\alpha_2}} \times \dots \times \mathbb{Z}_{p_k^{\alpha_k}}.$$

6. $\text{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}_m, \mathbb{Z}_n) = \mathbb{Z}_d$ cu $d = (m, n)$.

Soluție. Fie $A = \{\hat{a} \in \mathbb{Z}_n \mid m\hat{a} = \hat{0}\}$, $m\hat{a} = \hat{0} \iff n|ma$. Avem $m = dm_1$, $n = dn_1$ cu $(m_1, n_1) = 1$. Din $n|ma$ obținem $n_1|m_1a$, deci $a \in (n_1) = \left(\frac{n}{d}\right)$.

Rezultă că $A = \left(\frac{\hat{n}}{d}\right) \simeq \mathbb{Z}_d$. Definim

$$\varphi : \text{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}_m, \mathbb{Z}_n) \rightarrow \mathbb{Z}_d = A, \quad \varphi(f) = f(\hat{1}).$$

Avem

$$mf(\hat{1}) = f(\hat{m}) = f(\hat{0}) = \hat{0},$$

deci $f(\hat{1}) \in A \simeq \mathbb{Z}_d$. Mai mult, φ este izomorfism.

7. Fie ${}_R M$ un R -modul. Arătați că următoarele afirmații sunt echivalente.

1°. $M = 0$.

2°. $|\text{Hom}_R(M, N)| = 1$, pentru orice modul ${}_R N$.

3°. $|\text{Hom}_R(M, N)| = 1$, oricare ar fi modulul ${}_R N$.

Soluție. 1° \implies 2° Fie $f \in \text{Hom}_R(0, N)$. Avem $f(0) = 0$, adică $f = 0$. Rezultă că $\text{Hom}_R(0, N) = \{0\}$, deci $|\text{Hom}_R(0, N)| = 1$.

2° \implies 1° Pentru $N = M$ avem morfismele 0 și 1_M din $\text{Hom}_R(M, N)$. Conform ipotezei, rezultă că $1_M = 0$, deci $x = 1_M(x) = 0, \forall x \in M$, adică $M = 0$.

1° \implies 3° Similar ca 1° \implies 2°.

8. Fie n un număr natural $n \geq 2$. Arătați că următoarele afirmații sunt echivalente.

1°. n este prim.

2°. Orice morfism nenul $f : \mathbb{Z}_n \rightarrow G$ de \mathbb{Z} -module este monomorfism.

3°. Orice morfism nenul $g : G \rightarrow \mathbb{Z}_n$ de \mathbb{Z} -module este epimorfism.

Soluție. Amintim că \mathbb{Z} -modulele sunt grupurile abeliene.

1° \implies 2° Din $f \neq 0$, rezultă că $\ker f \neq \mathbb{Z}_n$. Pe de altă parte, $|\ker f| \mid n$, care este prim (teorema lui Lagrange), deci $|\ker f| = 1$, adică avem $\ker f = 0$. Deci f este monomorfism.

2° \implies 3° Considerăm șirul

$$G \xrightarrow{g} \mathbb{Z}_n \xrightarrow{p} \mathbb{Z}_n / \text{Im } g$$

unde p este proiecția canonică.

Dacă $p = 0$, atunci $\text{Im } g = \mathbb{Z}_n$, adică g este un epimorfism.

Dacă $p \neq 0$, atunci din 2° rezultă că p este un monomorfism. Deci $\ker p = \text{Im } g = 0$, adică $g = 0$, contradicție. Deci g este un epimorfism.

3° \implies 1° Presupunem prin absurd că n nu este prim. Rezultă că $\exists m \mid n, m \neq 1, m \neq n$. Fie $G = m\mathbb{Z}_n$ și fie $g : G \rightarrow \mathbb{Z}_n$ morfismul incluziune. Din $g \neq 0$ rezultă din 3° că g este un epimorfism, contradicție. Deci n este prim.

9. Orice grup abelian cu n elemente poate fi înzestrat cu o structură de \mathbb{Z}_n -modul.

Soluție. Fie $(G, +)$ un grup abelian cu $|G| = n$. Definim

$$\begin{aligned}\varphi : \mathbb{Z}_n \times G &\longrightarrow G, \\ \varphi(\hat{a}, x) &= ax\end{aligned}$$

φ este bine definit. Într-adevăr, dacă $\hat{a}_1 = \hat{a}_2$, atunci $n|(a_1 - a_2)$, adică $a_1 - a_2 = nk$, $k \in \mathbb{N}$. Avem $a_1x - a_2x = nkx = 0$, deci $a_1x = a_2x$. Sunt satisfăcute condițiile din definiția unui \mathbb{Z}_n -modul.

10. Pentru orice $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, următorul șir este exact

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z} \xrightarrow{f} \mathbb{Z} \xrightarrow{g} \mathbb{Z}_n \longrightarrow 0$$

$$\text{cu } f(x) = nx \text{ și } g(x) = \bar{x}.$$

Soluție. Se verifică faptul că f este monomorfism, g este epimorfism și $\ker g = \text{Im } f = n\mathbb{Z}$.

11. \mathbb{Z} -modulul \mathbb{Z}_n nu este liber.

Soluție. Pentru orice \hat{x} din \mathbb{Z}_n , $n\hat{x} = \hat{0}$, deci orice submulțime a lui \mathbb{Z}_n este liniar dependentă. Așadar, \mathbb{Z}_n nu este liber.

12. Fie M_R un R -modul așa încât există $x_1 \in M$ încât $x_1a = 0 \implies a = 0$, unde $a \in R$. Considerăm funcția $f_a : M \longrightarrow M$, $f_a(x) = xa$. Să se arate că următoarele afirmații sunt echivalente:

1. f_a este morfism de module.
2. $a \in Z(R)$.

Soluție. $1 \implies 2$ Pentru orice $b, c \in R$ și $y, z \in M$, avem

$$f_a(yb + zc) = f_a(y)b + f_a(z)c,$$

adică $(yb + zc)a = (ya)b + (za)c$. Considerăm $y = x_1$ și $z = 0$ și obținem

$$x_1ba = x_1ab$$

și, conform ipotezei, $ba = ab$, $\forall b \in R$, adică $a \in Z(R)$.

$2 \implies 1$ Imediată.

13. Fie R un inel unitar, I un ideal al său și M un R -modul. Fie

$$IM = \left\{ \sum_{i=1}^n a_i x_i \mid n \in \mathbb{N}^*, a_i \in I, x_i \in M, \forall i = \overline{1, n} \right\}.$$

Atunci

1. IM este R -submodul al lui M .
2. $(R/I) \otimes_R M \simeq M/IM$.

Soluție. 1. Se verifică definiția unui R -modul.

2. Fie $f : (R/I) \times M \rightarrow (R/I) \otimes_R M$ aplicația canonică a produsului tensorial. Definim $g : (R/I) \times M \rightarrow M/IM$, $g(a + I, x) = ax + IM$, $\forall a \in R$, $\forall x \in M$.

g este bine definită și balansată.

Considerăm diagrama

$$\begin{array}{ccc} (R/I) \times M & \xrightarrow{f} & (R/I) \otimes_R M \\ & \searrow g & \swarrow \exists! \varphi \\ & & M/IM \end{array}$$

$\varphi f = g$, deci

$$\varphi((a + I) \otimes x) = ax + IM, \quad \forall a \in R, \forall x \in M.$$

Construim acum inversa lui φ . Fie

$$\begin{aligned} \psi : M/IM &\rightarrow (R/I) \otimes_R M, \\ \psi(x + IM) &= (1 + I) \otimes x, \quad \forall x \in M. \end{aligned}$$

Se verifică faptul că ψ este bine definită și mai mult este morfism de module.

Verificăm că $\psi\varphi = 1_{(R/I) \otimes_R M}$. Avem

$$(\psi\varphi)((a + I) \otimes x) = \psi(ax + IM) = (1 + I) \otimes ax = a(1 + I) \otimes x = (a + I) \otimes x.$$

Pe de altă parte,

$$(\varphi\psi)(x + IM) = \varphi((1 + I) \otimes x) = x + IM,$$

deci $\varphi\psi = 1_{M/IM}$. Așadar, are loc izomorfismul

$$(R/I) \otimes_R M \simeq M/IM.$$

14. Are loc izomorfismul de grupuri abeliene $\mathbb{Z}_n \otimes_{\mathbb{Z}} G \simeq G/n\mathbb{Z}$.

Soluție. Considerăm în problema precedentă $R = \mathbb{Z}$, $I = n\mathbb{Z}$ și $M = G$.

15. Fie R un inel comutativ unitar și fie I și J ideale ale lui R . Să se arate că are loc izomorfismul de R -module

$$(R/I) \otimes_R (R/J) \simeq R/(I + J).$$

Soluție. Considerăm în problema precedentă $M = R/J$. Obținem $(R/I) \otimes R/J \simeq (R/J)/I(R/J)$. Pe de altă parte, $I(R/J) \simeq (I + J)/J$ și, conform teoremei a treia de izomorfism la inele, obținem

$$(R/I) \otimes_R (R/J) \simeq R/(I + J).$$

Cazuri particulare:

a. $R = \mathbb{Z}$, $I = m\mathbb{Z}$, $J = n\mathbb{Z}$.

Obținem $\mathbb{Z}_m \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}_n \simeq \mathbb{Z}/(m\mathbb{Z} + n\mathbb{Z}) = \mathbb{Z}/d\mathbb{Z} = \mathbb{Z}_d$, cu $d = (m, n)$.

b. $R = \mathbb{Z}$, $I = m\mathbb{Z}$, $J = n\mathbb{Z}$ cu $(m, n) = 1$.

Obținem $\mathbb{Z}_m \otimes \mathbb{Z}_n = 0$.

c. $R = \mathbb{Z}$, $I = J = \mathbb{Z}_n$.

Obținem $\mathbb{Z}_n \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}_n \simeq \mathbb{Z}_n$.

16. Fie K corpul de fracții al unui domeniu de integritate R . Atunci

$$K \otimes_R K \simeq K.$$

Soluție. Considerăm diagrama

$$\begin{array}{ccc} K \times K & \xrightarrow{f} & K \otimes_R K \\ & \searrow g & \swarrow \exists! h \\ & & K \end{array}$$

unde f este aplicația canonică și $g(k_1, k_2) = k_1 \cdot k_2$.

g este R -balansată, deci $\exists! h : K \otimes_R K \rightarrow K$
 $h(k_1 \otimes k_2) = k_1 k_2$
 Definim $h' : K \rightarrow K \otimes_k K$, $h'(k) = 1 \otimes k$. Avem $hh' = 1_K$ și $h'h = 1_{K \otimes_R K}$.
 Așadar, $K \otimes_R K \simeq K$.
 În particular, $\mathbb{Q} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q} \simeq \mathbb{Q}$.

17. Fie R un inel, $S \subseteq R$ un sistem multiplicativ închis în R . Dacă M_1 și M_2 sunt R -module, atunci

$$(S^1 M_1) \otimes_{S^{-1}R} (S^{-1} M_2) \simeq S^{-1}(M_1 \otimes_R M_2).$$

Soluție. Au loc următoarele izomorfisme:

$$\begin{aligned} (S^{-1} M_1) \otimes_{S^{-1}R} (S^{-1} M_2) &\simeq (S^{-1} M_1) \otimes_{S^{-1}R} [(S^{-1} R) \times_R M_2] \\ &\simeq [(S^{-1} M_1) \otimes_{S^{-1}R} (S^{-1} R)] \otimes_R M_2 \simeq (S^{-1} M_1) \otimes_R M_2 \\ &\simeq [(S^{-1} R) \otimes_R M_1] \otimes_R M_2 \simeq (S^{-1} R) \otimes_R (M_1 \otimes_R M_2) \simeq S^{-1}(M_1 \otimes_R M_2). \end{aligned}$$

18. Fie R un inel și M un R -modul la dreapta. Dacă R nu are divizori ai lui zero la dreapta și M este plat, atunci M este fără torsiune (adică $xr = 0 \implies x = 0$, unde $x \in M$ și $r \in R^*$).

Soluție. Fie $r \in R$, $r \neq 0$, și definim funcția

$$h_r : R \rightarrow R, \quad h_r(a) = ar.$$

h_r este un morfism injectiv, deoarece R nu are divizori ai lui zero la dreapta. Avem $M \otimes_R R \simeq M$ și cum M este plat rezultă că $1_M \otimes h_r$ este injectiv, unde $1_M \otimes h_r : M \rightarrow M$, $(1_M \otimes h_r)(x) = xr$. Fiind monomorfism, obținem că $xr = 0 \implies x = 0$, adică M este fără torsiune.

19. Fie R un inel comutativ unitar, B o R -algebră plată și fie N un B -modul plat. Să se arate că modulul N este R -modul plat.

Soluție. Reamintim că o R -algebră B este un R -modul, care are și structură de inel încât $\forall r \in R, \forall x, y \in B$, avem $r(xy) = (rx)y = x(ry)$.

Fie următorul șir exact de R -module:

$$0 \longrightarrow M' \xrightarrow{f} M$$

Cum B este R -modul plat, rezultă că șirul

$$0 \longrightarrow M' \otimes_R B \xrightarrow{f \otimes_R 1_B} M \otimes_R B$$

este șir exact de R -module. Pe de altă parte, N este un B -modul plat, deci următoarea diagramă este comutativă, unde morfismele de pe coloane sunt izomorfisme:

$$\begin{array}{ccccc} 0 & \longrightarrow & (M' \otimes_R B) \otimes_B N & \longrightarrow & (M \otimes_R B) \otimes_B N \\ & & \downarrow & & \downarrow \\ 0 & \longrightarrow & M' \otimes_R (B \otimes_B N) & \longrightarrow & M \otimes_R (B \otimes_B N) \\ & & \downarrow & & \downarrow \\ 0 & \longrightarrow & M' \otimes_R N & \longrightarrow & M \otimes_R N \end{array}$$

Așadar, morfismul $M' \otimes_R N \rightarrow M \otimes_R N$ este injectiv, adică N este R -modul plat.

20. Dacă R este un inel comutativ unitar, iar M și N sunt R -module plate, atunci $M \otimes_R N$ este R -modul plat.

Soluție. Considerăm următorul șir exact de module

$$0 \longrightarrow E \longrightarrow F \longrightarrow P \longrightarrow 0$$

Cum M și N sunt R -plate, obținem șirul exact:

$$0 \longrightarrow M \otimes_R (N \otimes_R E) \longrightarrow M \otimes_R (N \otimes_R F) \longrightarrow M \otimes_R (N \otimes_R P) \longrightarrow 0$$

adică următorul șir este exact:

$$0 \longrightarrow (M \otimes_R N) \otimes_R E \longrightarrow (M \otimes_R N) \otimes_R F \longrightarrow (M \otimes_R N) \otimes_R P \longrightarrow 0$$

Cu alte cuvinte, modulul $M \otimes_R N$ este plat.

21. Fie R este un inel comutativ unitar și fie S un sistem multiplicativ închis în R . Să se arate că

$$(S^{-1}R)[X] \simeq S^{-1}(R[X]).$$

Soluție. Observăm că $\forall s \in S, \frac{s}{1} \in (S^{-1}R)[X]$ este inversabil. Considerăm diagrama

$$\begin{array}{ccc} R[X] & \xrightarrow{\varphi_S} & S^{-1}(R[X]) \\ & \searrow f & \swarrow \exists! h \\ & & (S^{-1}R)[X] \end{array}$$

unde $f(r) = \frac{r}{1}, f(X) = X$.

Obținem că $\exists! h : S^{-1}(R[X]) \rightarrow (S^{-1}R)[X]$ încât $h\varphi_S = f$.

Avem $h(X) = X$. Folosim universalitatea inelului de polinoame $(S^{-1}R)[X]$:

$$\begin{array}{ccc} S^{-1}R & \xrightarrow{u_{S^{-1}R}} & (S^{-1}R)[X] \\ & \searrow \tilde{u} & \swarrow \exists! h_1, \text{ morfism} \\ & & S^{-1}(R[X]) \end{array}$$

cu $u_{S^{-1}R}$ și \tilde{u} morfisme de incluziune și $h_1 u_{S^{-1}R} = \tilde{u}$. Se verifică faptul că $h h_1 = 1_{(S^{-1}R)[X]}$ și $h_1 h = 1_{S^{-1}(R[X])}$, deci h este un izomorfism.

22. Arătați că:

- 1°. $\mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C} \simeq \mathbb{R}^4$.
- 2°. $\mathbb{R} \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{R} \simeq \mathbb{R}$.
- 3°. $\mathbb{C} \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{C} \simeq \mathbb{C} \times \mathbb{C}$.

Soluție. 1°. $\dim_{\mathbb{R}} \mathbb{C} = 2$, o bază fiind $\{1, i\}$. Atunci $\mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$ este un \mathbb{R} -spațiu liniar de dimensiune 4, deci $\mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C} \simeq \mathbb{R}^4$.

2°. $\dim_{\mathbb{Q}}\mathbb{R} = c$, deci $\mathbb{R} \simeq \mathbb{Q}^{(I)}$ cu $|I| = c$, adică $\mathbb{R} \simeq \bigoplus_{i \in I} \mathbb{Q}_i$, $\mathbb{Q}_i = \mathbb{Q}$.

Mulțimile I și $I \times I$ sunt echipotente, deci $\mathbb{R} \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{R} \simeq \mathbb{Q}^{(I \times I)} \simeq \mathbb{Q}^{(I)} \simeq \mathbb{R}$.

3°. Avem ${}_{\mathbb{Q}}\mathbb{C} \simeq_{\mathbb{Q}} (\mathbb{R} \times \mathbb{R}) =_{\mathbb{Q}} \mathbb{R}^2$, deci

$$\mathbb{C} \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{C} \simeq \mathbb{R}^2 \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{R}^2 = (\mathbb{R} \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{R})^4 \simeq \mathbb{R}^4 \simeq \mathbb{C} \times \mathbb{C}.$$

23. \mathbb{Z} nu este \mathbb{Z} -modul injectiv. Singurul \mathbb{Z} -submodul injectiv al lui \mathbb{Z} este 0.

Soluție. Presupunem că $n\mathbb{Z}$ ($n \in \mathbb{N}^*$) este submodul injectiv al lui \mathbb{Z} . Fie monomorfismul $f : n\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$, $f(nx) = 2nx$. Avem diagrama

$$\begin{array}{ccccc} 0 & \longrightarrow & n\mathbb{Z} & \xrightarrow{f} & \mathbb{Z} \\ & & \searrow^{1_{n\mathbb{Z}}} & & \swarrow^{\exists h} \\ & & & & n\mathbb{Z} \end{array}$$

Din injectivitatea lui $n\mathbb{Z}$ rezultă că $\exists h : \mathbb{Z} \rightarrow n\mathbb{Z}$ morfism încât $hf = 1_{n\mathbb{Z}}$. Deci $nx = 1_{n\mathbb{Z}}(nx) = hf(nx) = h(2nx) = 2n x h(1)$, $\forall x \in \mathbb{Z}$, deci $h(1) = 1/2$, fals!

Singurul \mathbb{Z} -modul injectiv al lui \mathbb{Z} este deci 0.

24. Fie R -modulele ${}_R M$ și ${}_R N$. Dacă unul dintre ele este divizibil, atunci $M \otimes_R N$ este R -modul divizibil.

Soluție. Considerăm că ${}_R M$ este divizibil. Fie $z = \sum_{i=1}^n x_i \otimes y_i \in M \otimes_R N$ și $a \in R$. Pentru fiecare $i = \overline{1, n}$, $\exists x'_i \in M$ așa încât $x_i = ax'_i$. Atunci $z' = \sum_{i=1}^n x'_i \otimes y_i \in M \otimes_R N$ satisface condiția $az' = z$. Într-adevăr,

$$az' = a \sum_{i=1}^n x'_i \otimes y_i = \sum_{i=1}^n (ax'_i) \otimes y_i = \sum_{i=1}^n x_i \otimes y_i = z.$$

25. (i) Fie ${}_R M$ un modul cu proprietatea: $\forall x \in M, \exists a \in R^*$, astfel încât $ax = 0$. (M se numește modul de torsiune). Dacă N este un R -modul divizibil, atunci $M \otimes N = 0$.

(ii) Arătați că $\mathbb{Z}_n \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q} = 0$, $\mathbb{Z}_n \otimes_{\mathbb{Z}} (\mathbb{Q}/\mathbb{Z}) = 0$ și $(\mathbb{Q}/\mathbb{Z}) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q} = 0$.

Soluție. (i) Fie $y \in N$. Din ipoteza $\exists y' \in N$ încât $y = ay'$. Atunci $\forall x \otimes y \in M \otimes N$. Avem

$$x \otimes y = x \otimes ay' = (xa) \otimes y' = 0 \otimes y' = 0.$$

(ii) Ținem cont că \mathbb{Z}_n este \mathbb{Z} -modul de torsiune, iar $\mathbb{Q}, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ sunt module divizibile.

26. Un R -modul drept M este plat dacă și numai dacă R -modulul stâng $M^* = \text{Hom}_{\mathbb{Z}}(M, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$ este injectiv.

Soluție. „ \implies ” Fie șirul exact de R -module stângi

$$0 \longrightarrow N_1 \xrightarrow{f} N_2.$$

Verificăm că șirul

$$\text{Hom}_R(N_2, M^*) \xrightarrow{f^*} \text{Hom}_R(N_1, M^*) \longrightarrow 0$$

este exact, unde $f^*(u) = uf$. Următoarea diagramă este comutativă, iar morfismele de pe verticală sunt izomorfisme.

$$\begin{array}{ccccc}
 \text{Hom}_{\mathbb{Z}}(M \otimes_R N_2, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) & \longrightarrow & \text{Hom}_{\mathbb{Z}}(M \otimes_R N_1, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) & \longrightarrow & 0 \\
 \downarrow & & \downarrow & & \\
 \text{Hom}_R(N_2, M^*) & \longrightarrow & \text{Hom}_R(N_1, M^*) & \longrightarrow & 0
 \end{array}$$

(*)

Din faptul că \mathbb{Q}/\mathbb{Z} este \mathbb{Z} -modul injectiv rezultă că prima linie a diagramei este exactă. Așadar și a doua linie a diagramei este exactă.

„ \impliedby ” Invers, dacă M^* este injectiv, considerăm șirul exact de module

$$0 \longrightarrow {}_R N_1 \longrightarrow {}_R N_2$$

Deoarece M^* este injectiv, rezultă că linia a doua a diagramei (*) este exactă. Așadar și prima linie a acestei diagrame este exactă, adică

$$(M \otimes_R N_2)^* \longrightarrow (M \otimes_R N_1)^* \longrightarrow 0$$

este exact, de unde

$$0 \longrightarrow M \otimes_R N_1 \longrightarrow M \otimes_R N_2$$

este exact, deci M este plat.

27. \mathbb{Z} este \mathbb{Z}_{10} -modul proiectiv, dar nu este liber.

Soluție. Are loc izomorfismul

$$\mathbb{Z}_{10} \simeq \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_5$$

deci ${}_{\mathbb{Z}_{10}}\mathbb{Z}_2$ este sumand direct al modulului liber ${}_{\mathbb{Z}_{10}}\mathbb{Z}_{10}$, deci ${}_{\mathbb{Z}_{10}}\mathbb{Z}_2$ este proiectiv. Pe de altă parte, orice \mathbb{Z}_{10} -modul liber are măcar 10 elemente, deci ${}_{\mathbb{Z}_{10}}\mathbb{Z}_2$ nu este modul liber.

28. ${}_{\mathbb{R}}\mathbb{R}[X]$ este \mathbb{R} -modul plat.

Soluție. Într-adevăr, ${}_{\mathbb{R}}\mathbb{R}[X]$ este modul liber cu o bază $\{X^i \mid i \in \mathbb{N}\}$, deci este plat.

29. Fie $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$. Modulul ${}_{\mathbb{Z}}\mathbb{Z}_n$ nu este proiectiv.

Soluție. Presupunem că ${}_{\mathbb{Z}}\mathbb{Z}_n$ este proiectiv și fie epimorfismul $f : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}_n$, $f(x) = \hat{x}$. Ar rezulta că există morfismul $h : \mathbb{Z}_n \rightarrow \mathbb{Z}$, încât $fh = 1_{\mathbb{Z}_n}$. Avem $h(\hat{x}) = xh(\hat{1})$, $\forall \hat{x} \in \mathbb{Z}_n$, de unde $0 = h(\hat{0}) = nh(\hat{1})$. Deci $h(\hat{1}) = 0$, adică $h = 0$, contradicție cu $fh = 1_{\mathbb{Z}_n}$. Deci \mathbb{Z}_n nu este proiectiv.

30. Fie R un inel comutativ unitar. Dacă următorul șir de R -module este exact

$$M_1 \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} M_2$$

atunci șirul de $S^{-1}R$ -module

$$S^{-1}M_1 \xrightarrow{S^{-1}f} S^{-1}M \xrightarrow{S^{-1}g} S^{-1}M_2$$

este exact.

Soluție. Din $gf = 0$ rezultă că $S^{-1}g \circ S^{-1}f = S^{-1}(0) = 0$, de unde $\text{Im}(S^{-1}f) \subseteq \ker(S^{-1}g)$. Invers, fie $x/s \in \ker(S^{-1}g)$. Avem $g(x)/s = 0$ în $S^{-1}M_2$, de unde există $t \in S$ încât $tg(x) = 0$ în M_2 . Avem $tg(x) = g(tx)$, deci $tx \in \ker g = \text{Im } f$, adică $tx = f(x_1)$ cu $x_1 \in M_1$. Obținem $x/s = f(x_1)/st = (S^{-1}f)(x_1/st) \in \text{Im } S^{-1}f$, adică $\ker(S^{-1}g) \subseteq \text{Im}(S^{-1}f)$. Așadar, șirul de module de fracții este exact.

Bibliografie

- [1] F.W. Anderson, F.W., Fuller, K.R., Rings and Categories of Modules, *Graduate Texts in Mathematics*, vol. 13, 2nd Ed., Springer-Verlag, New York, 1992.
- [2] Beachy, J.A., *Introductory Lectures on Rings and Modules*, Cambridge University Press, 1999.
- [3] Berrick, A.J., Keating, M.E., *An Introduction to Rings and Modules with K-Theory in View*, Cambridge University Press, 2000.
- [4] Blyth, T.S., *Module Theory. An approach to linear algebra*, Electronic Edition University of St Andrews, <https://research-repository.st-andrews.ac.uk/handle/10023/12643>
- [5] Ion, D.I., Radu, N., *Algebra*, EDP, București, 1981/91.
- [6] Ion, D.I. et al., *Probleme de Algebră*, EDP, București, 1981.
- [7] Leoreanu, V., *Fundamente de algebră*, Ed. MatrixRom, București, 2001.
- [8] Năstăsescu, C., ș.a., *Bazele algebrei*, vol.I., Ed. Acad., București, 1986.
- [9] Năstăsescu, C., Niță, C., *Teoria calitativă a ecuațiilor algebrice*, Ed. Tehnică, 1979
- [10] Purdea, I., *Tratat de algebră modernă*, vol. II, Ed. Academiei, București, 1982
- [11] Purdea, I., Pelea, C., *Probleme de algebră*, Colecția Universitas, seria Matematica, Ediția a doua, 2007.
- [12] Tărnăuceanu, M., *Probleme de algebră*, vol. II., Ed. Univ. Al.I. Cuza Iași, 2003.

- [13] Solian, Al., *Teoria modulelor, Categorii de module*, Editura Academiei R.S. România, 1972.
- [14] Tofan, I., *Elemente de algebră*, Editura Universității Al.I. Cuza, Iași, 1998.
- [15] Tofan, I., Volf, A.C., *Algebra, Inele, Module, Teorie Galois*, Ed. MatrixRom, București, 2001.