Capitolul 2

LUNGIMI, ARII, VOLUME

In urma parcurgerii acestui capitol:

- veți obține o vedere de ansamblu asupra locului în programa analitică din învățământul secundar a noțiunilor de lungime, arie, volum,
- veți reține şi veți compara patru modalități diferite de a preda noțiunea de arie,
- veți dispune de două modalități de a preda noțiunea de volum,
- veți înțelege în ce constă metoda areolară de rezolvare a unor probleme de geometrie.

§1. CONSIDERAȚII GENERALE

Etimologic termenul geometrie conține ideea de măsurare a mărimilor asociate unor figuri geometrice. Cu timpul acest termen s-a extins pe mai multe direcții încât chiar geometria numită elementară a devenit mai degrabă o ştiință a formelor şi pozițiilor figurilor geometrice decât studiul mărimilor asociate lor. Totuşi, geometria elementară nu poate fi pe deplin înțeleasă fără studierea mărimilor asociate uzual figurilor geometrice. Mai mult, aceste mărimi stabilesc interacțiuni fundamentale între geometrie şi fizică oferind suport intuitiv propozițiilor acceptate ca axiome în geometrie.

Prima mărime geometrică impusă de experiența fizică a fost aceea de lungime, mai întâi a unui segment, apoi a unui cerc şi, mai general, a unui arc de curbă.

Foarte probabil că aproape simultan a apărut necesitatea evaluării întinderii sau, cum spunem astăzi, a ariei unor figuri plane simple (triunghiuri, patrulatere), precum şi a mărimii locului ocupat în spațiu de corpuri, cu alte cuvinte, a volumului unor corpuri simple (poliedre, sfere, cilindri, conuri).

Ideea că ariile şi volumele se pot determina prin calcule algebrice cu lungimile unor segmente din figurile respective a evoluat şi s-a precizat în setul de formule cunoscute acum de orice elev de clasa a VIII-a [1]. Tot experiența fizică directă, mânuirea obiectelor concrete, a evidențiat o serie de proprietăți ale lungimilor, ariilor şi volumelor. Cea mai semnificativă dintre ele este cea de aditivitate, care exprimă constatarea că dacă o figură se descompune în mai multe figuri, atunci lungimea (aria, volumul) ei, când acestea există, se exprimă ca sumă a lungimilor (ariilor, volumelor) figurilor ce o compun. O altă proprietate acceptată în urma experienței este aceea că figurile congruente (generic, figuri care se pot suprapune printr-o deplasare în plan sau în spațiu) au aceeaşi lungime (arie, volum), când acestea există. În sfârşit, activitatea concretă de măsurare a evoluat de la simple comparații (mai lung sau mai scurt, mai întins sau mai puțin întins, mai voluminos sau mai puțin voluminos) la ideea de alegere a unei unități de măsură, mai întâi pentru lungime şi apoi pentru arie şi volum încât a fost posibil ca aceste mărimi să se exprime prin numere reale.

Cele trei proprietăți descrise sunt fixate ca axiome în mai toate manualele actuale de geometrie.

Exprimarea lungimii, ariei, volumului prin numere reale a condus la definirea acestora, în limbajul analizei matematicii, ca funcții h pe mulțimi convenabile de figuri geometrice, cu valori în mulțimea numerelor reale pozitive, aditive ($h(F_1 \cup F_2) = h(F_1) + h(F_2)$) pentru o figură ce se descompune în două figuri F_1 şi F_2 şi luând valoarea 1 pentru o figură remarcabilă în domeniul din definiție.

Existența şi unicitatea funcției lungime pe mulțimea segmentelor din spațiu este o consecință de cea mai mare importanță a grupelor I-III şi V din axiomatica lui Hilbert a geometriei. Se poate arăta apoi că funcţiile arie şi volum, definite mai întâi pe figuri (submulţimi) simple, există şi sunt unic determinate, cu unităţi de măsură date. O problemă care a preocupat pe matematicieni a fost extinderea funcţiilor lungime, arie, volum la figuri din ce în ce mai complicate (curbe, regiuni plane mărginite de curbe, corpuri limitate de suprafeţe generale). A fost astfel introdusă noţiunea de curbă rectificabilă, adică o curbă ce are lungime, pentru a o distinge de altele care nu au, respectiv, noţiunea de regiune plană (spaţială) măsurabilă.

Orice tratare didactică a studiului lungimilor, ariilor şi volumelor trebuie să distingă trei nivele suprapuse de complexitate a subiectului: nivelul intuitiv-experimental, nivelul raţional neformalizat şi nivelul axiomatic formalizat. Atingerea acestor nivele se face în trei etape succesive ce corespund aproximativ claselor I-V, VI-VIII şi IX-X sau IX-XII, respectiv.

Nivelul intuitiv-experimental trebuie să preocupe în cea mai mare măsură pe învăţător, care are sarcina de a propune ocazii şi asigura condiţii ca elevii să opereze cu elemente concrete pentru a intui cele trei proprietăţi ale funcţiilor lungime, arie şi volum menţionate mai sus. În aceste mânuiri directe, completate cu mijloace de vizualizare, elevii trebuie să-şi formeze fondul de reprezentări necesare, care să-i ajute să treacă la raţionamente.

În gimnaziu, profesorul urmează mai întâi să consolideze fondul de reprezentări privind lungimea, aria şi volumul şi apoi să introducă formulări din ce în ce mai adecvate ale datelor experimentale, pe care să le fixeze în definiţii clare, apte să conducă, prin raţionamente, la confirmarea rezultatelor acceptate intuitiv, precum şi la unele ipoteze şi rezultate noi, neintuite anterior.

Palierul axiomatic este mai slab reprezentat în programele şcolare pentru învăţământul preuniversitar. Când acesta este prevăzut, parcurgerea sa cade în sarcina profesorului de liceu care, cu scopul de a reaminti datele esenţiale, trebuie să introducă axiomele necesare şi să se ocupe de existenţa şi unicitatea funcţiilor lungime, arie şi volum.

În continuare ne oprim pe rând asupra metodicii studierii lungimilor, ariilor şi volumelor la cele trei nivele menţionate mai sus.

§ 2. LUNGIMEA SEGMENTELOR

În perioada preşcolară, copiii îşi formează o idee despre lungimi în sensul că dau un anume conţinut expresiilor „mai scurt" şi „mai lung". Este posibil ca unii să fi văzut şi să fi mânuit în joacă, pe lângă adulţi, instrumente de măsură ca metrul de tâmplărie sau croitorie, compasul de teren, ruleta, şublerul.

Şcoala trebuie să întărească, să ordoneze aceste idei simple despre lungimi, să le completeze şi aprofundeze, să le ridice continuu şi sistematic la nivelul teoretic prevăzut de programă.

Primul pas este familiarizarea elevilor cu instrumentele de măsură a lungimilor, formarea deprinderii de a mânui aceste instrumente, în fond a deprinderii de a măsura lungimi, formarea priceperii de a calcula cu uşurinţă şi exactitate cu numerele ce reprezintă unităţi de lungime. Acest pas este fundamental intuitiv şi se realizează prin activităţi practice şi jocuri didactice atrăgătoare. Formarea priceperii de calcul cu unităţi de lungime apare ca o aplicare a calculului cu numere zecimale şi totodată, oferă o bază intuitivă pentru înţelegerea numerelor zecimale. Cunoştinţele despre sistemul metric pun la îndemână exerciţii variate, cu conţinut bogat, care reflectă realitatea obiectivă. Pe da altă parte, aceste cunoştinţe permit introducerea unităţilor de arie şi volum.

În clasa a V-a trebuie ca noțiunea de „unitate de lungime” să capete pentru elevi un conținut precis: obiect-etalon cu ajutorul căruia se determină dimensiunile (lungime, lățime, înălțime) altor obiecte.

Acest conținut se conturează prin precizarea sistematică a multiplilor şi submultiplilor metrului într-un tabel (prezentat în manual) care trebuie completat de un alt tabel ce ar putea fi realizat de elevi în care să se meargă de la submultipli la multipli. Se va observa şi insista pe diverse căi pentru a se reține că un multiplu sau un submultiplu oarecare al metrului este de 10 ori mai mic decât cel imediat superior lui şi de 10 ori mai mare decât cel imediat inferior lui.

Această observație ne permite să facem uşor schimbări ale unității de măsură şi să exprimăm lungimile prin fracții zecimale. Renunțăm la detalierea aspectelor metodice privind predarea lungimilor până la clasa a V-a. Asemenea detalieri pot fi consultate în manuale de metodica predării aritmeticii.

Predarea geometriei, care începe în clasa a VI-a, trebuie să plece de la elemente geometrice fundamentale între care se află şi lungimea. Subliniem că acum apare o primă distanțare de aspecte concrete, practice. Intuiția continuă să funcționeze, dar ea operează cu reprezentări convenționale introduse prin desene pe foaia de caiet sau pe tablă. Se propune elevilor să conceapă lungimea ca un număr asociat unui segment abstract, reprezentat prin desen, detaşat de suprafața sau corpul pe care se află. Prin aceasta se părăseşte fizica şi se intră în geometrie.

Rigla gradată, ca instrument de măsurare, rămâne concretă, obiectuală dar, desenarea ei schematizat, convențional pe caiet sau tablă lângă anumite segmente creează premisele abstractizării acestui instrument precum şi însăşi a operației de măsurare, operație de determinare a raportului între unitatea de măsură aleasă şi segmentul măsurat.

Din noțiunea de lungime a segmentelor derivă două noțiuni importante: distanța între două puncte şi congruența segmentelor. Distanța între punctele A şi B se defineşte ca lungimea segmentului închis $[AB]$ şi se notează prin AB. Lungimea segmentului deschis (AB) se notează tot prin AB, lungime care se distinge de dreapta AB în context. Aşadar, se acceptă că distanța de la A la B este în acelaşi timp şi lungimea segmentului deschis (AB) dar folosirea segmentului închis $[AB]$ este mai sugestivă pentru că implică punctele A şi B. Două segmente (ambele închise sau deschise) se numesc congruente dacă au lungimi egale. Se atrage atenția că două segmente congruente pot fi neidentificabile ca figuri geometrice. Dacă sunt identice se spune că sunt egale. Deci trebuie o nouă notați pentru congruență. Se scrie $[AB]\equiv[CD]$ pentru a spune că segmentul $[AB]$ este congruent cu segmentul $[CD]$. O dată cu congruență $[AB]\equiv[CD]$ se acceptă şi congruențele $(AB)\equiv(CD)$ şi $[CD]\equiv[AB]$. A doua exprimă în fond simetria relației de congruență a segmentelor. Cum două segmente egale sunt şi congruente, această relație este şi reflexivă.

Tranzitivitatea relației de congruență este dedusă uşor de elevi pe baza faptului fundamental experimentat frecvent până în această clasă că „două egale cu a treia sunt egale între ele”, aici fiind vorba de lungimi. Chiar dacă termenul de relație de congruență (a segmentelor) nu este folosit, considerăm absolut necesar ca proprietățile ei să fie puse în evidență.

O atenție specială trebuie dată construcției (aproximative cu rigla) pe o semidreaptă a unui segment congruent cu un segment dat (purtarea segmentelor congruente sau depunerea segmentelor). Această construcție, esențială pentru acceptarea axiomei III.1 din axiomatica lui Hilbert, introdusă ca proprietate fundamentală în [2], dă şi un anume conținut propoziției „segmentele congruente coincid prin suprapunere”. Ea se foloseşte aici, în clasa a VI-a, pentru tratarea geometrică a operaților de adunare şi scădere a segmentelor. Considerăm că pentru a sublinia caracterul geometric al acestor operații este util să introducem compasul şi să efectuăm cu acesta depunerea segmentelor. Astfel ne dispensăm de numere, facem construcţii mai exacte decât cele cu rigla şi pregătim construcţiile exacte cu rigla şi compasul, de mai târziu.

În geometrizarea operaţiilor de adunare şi scădere a segmentelor se pleacă de la configuraţia particulară: *A*, *B*, *C* trei puncte coliniare cu *B* între *A* şi *C*. Atunci lungimea segmentului [*AC*] este egală cu suma lungimilor segmentelor [*AB*] şi [*BC*]. Se reformulează acest fapt astfel: suma segmentelor [*AB*] şi [*BC*] este segmentul [*AC*] sau segmentul [*AC*] este suma segmentelor [*AB*] şi [*BC*].

Similar, avem $AB = AC - BC$ şi $BC = AC - AB$, egalităţi reformulate astfel: segmentul [*AB*] este diferenţa între segmentul [*AC*] şi segmentul [*BC*], iar segmentul [*BC*] este diferenţa între segmentul [*AC*] şi segmentul [*AB*]. Cazurile în care cele două segmente nu sunt în configuraţia de mai sus se reduc la aceea purtarea congruentă (depunerea) a segmentelor, preferabil cu un compas. După ce se sumează două segmente se extinde această operaţie la mai multe segmente prin aşezarea lor unul după altul capăt la capăt pe o dreaptă. Se arată că segmentul diferenţă poate fi construit în două moduri şi rezultatul este acelaşi.

Operarea geometrică cu segmente (absentă în [2]) sprijină considerabil înţelegerea relaţiei fundamentale „a fi între” pentru puncte, intuită numai până acum de elevi. Ei sunt capabili să sesizeze că punctul *B* se află între *A* şi *C* dacă şi numai dacă sunt coliniare şi $AB + BC = AC$. Acest rezultat care serveşte ca definiţie pentru relaţia „a fi între” în axiomatica lui Birkhoff este foarte bine clarificat de exerciţiile propuse în [1], clasa a VI-a.

În clasele următoare de gimnaziu mărimile segmentelor şi operaţiile algebrice sau geometrice cu segmente se folosesc frecvent fără însă a se mai reveni la „fundamentare”, cu excepţia momentului în care se tratează subiectul „Teorema lui Thales”. În această teoremă intervin rapoarte de segmente. Raportul a două segmente se defineşte natural ca raportul lungimilor lor. Acesta nu depinde de unitatea de măsură, când ea este aceeaşi pentru ambele segmente.

Raportul a două segmente este un număr care în general apare sub forma $\frac{m}{n}$ cu $n \neq 0$ şi *m*, *n* numere naturale, deci este un număr raţional pozitiv. Prin împărţire se obţine forma sa zecimală care poate să aibă un număr finit de zecimale sau o infinitate de zecimale cu o anumită periodicitate. Dar evaluarea raportului a două segmente poate conduce şi la numere care se scriu cu o infinitate de zecimale fără nici o periodicitate. Acestea se numesc numere iraţionale, iar segmentele care prin raportare conduc la asemenea numere se numesc incomensurabile. Un număr iraţional este, de exemplu, 0,10110111011110… . Se observă uşor regula de formare a zecimalelor şi imposibilitatea oricărei periodicităţi. Considerăm că asupra subiectului trebuie revenit după ce se arată la algebră că $\sqrt{2}$ este iraţional (prin reducere la absurd) şi de evidenţiat că aceasta implică incomensurabilitatea diagonalei unui pătrat cu latura sa.

Teorema lui Thales se demonstrează mai întâi pentru cazul rapoartelor raţionale. Trebuie să precizăm că ea are loc şi în cazul în care rapoartele ce intervin sunt iraţionale în sensul că dacă în triunghiul *ABC* avem $DE \parallel BC$ cu $D \in (AB)$ şi $E \in (AC)$ şi dacă raportul $\frac{AD}{DB}$ este iraţional atunci şi raportul $\frac{AE}{EC}$ este iraţional şi ele sunt egale. Demonstraţia acestui fapt poate fi omisă deşi ea se găseşte în [1], clasa a VI-a.

Palierul următor de reluare a noţiunii de lungime a segmentelor este cel axiomatic. În acest punct apare o deosebire fundamentală între manualele [1] şi [2], dictată, evident, de programele analitice care le-au generat. Astfel, în [1] se introduce explicit un sistem axiomatic, datorat lui G. D. Birkhoff şi se predă o mare parte a materiei geometrice, subliniindu-se punctul nou de vedere adus de axiome, în ideea de a familiariza elevii cu metoda axiomatică. În [2] ideea de metodă axiomatică este implicită pentru elevi, deseori termenul de axiomă este înlocuit cu cel de proprietate fundamentală şi se urmăreşte mai puţin sistematic modul de folosire a axiomelor în justificarea teoremelor.

Din punct de vedere teoretic palierul axiomatic în discuţia arată după cum urmează.

Este normal ca axiomatica geometriei să ia ca noţiuni primare numai noţiuni geometrice, iar relaţiile primare să se exprime de asemenea în formă geometrică, cu alte cuvinte în axiomatica geometriei nu-şi are loc numărul real. Acesta este fundamental legat de compararea segmentelor, dar segmentele se pot compara şi geometric. O asemenea axiomatică a fost edificată de D. Hilbert în 1899 şi publicată apoi în cartea sa „Grundlagen der Geometrie”. Axiomatica lui Hilbert satisface cele mai pretenţioase condiţii formulate de metateoria teoriilor axiomatice [6].

Între consecinţele axiomelor de incidenţă, ordine, congruenţă şi continuitate se află şi următoarele rezultate (un rol esenţial în demonstrarea lor au cele două axiome de continuitate):

Fie *d* o dreaptă orientată (noţiune precizată folosindu-se în esenţă grupa axiomelor de ordine). Se numeşte sistem cartezian de coordonate pe *d* o aplicaţie $f: d \to \mathbf{R}$ cu proprietăţile:

1) numerele 0 şi 1 se află în imaginea aplicaţiei *f*,
2) *f* este monoton crescătoare,
3) două segmente (*AB*) şi (*CD*) ale dreptei *d* sunt congruente şi la fel orientate dacă şi numai dacă $f(B) - f(A) = f(D) - f(C)$.

Din această definiţie rezultă că *f* este injectivă. Se notează $O = f^{-1}(0)$ şi $E = f^{-1}(1)$ şi se numesc primul origine şi al doilea punct unitate pentru sistemul de coordonate $f: d \to \mathbf{R}$. Rezultă că $O < E$, unde „$<$” notează relaţia de ordine indusă de orientarea dreptei *d*. Numărul $x = f(P)$ se numeşte coordonata (abscisa) lui *P*. Dacă $P \in (OE$ atunci $x > 0$, dacă *P* coincide cu *O* avem $x = 0$ şi dacă *P* aparţine semidreptei complementare lui $(OE$, atunci *x* este negativ. Are loc următorul rezultat fundamental, a cărui demonstraţie are multe dificultăţi conceptuale (ea implică o cunoaştere aprofundată a structurii câmpului numerelor reale, îndeosebi a completitudinii acestui câmp):

Fie *d* o dreaptă orientată şi $O < E$ două puncte fixate pe *d*. Atunci:

1) Există un singur sistem cartezian de coordonate
$$f: d \to \mathbf{R} \text{ cu proprietatea } f(O) = 0,\ f(E) = 1,$$
2) Aplicaţia $f: d \to \mathbf{R}$ este bijectivă.

Proprietăţile lungimii sau mărimii segmentelor menţionate mai sus se formulează prin introducerea funcţiei măsură a segmentelor ca o aplicaţie $m: \mathbf{S} \to \mathbf{R}_+$ de la mulţimea **S** a segmentelor în mulţimea numerelor reale nenegative, care satisface condiţiile:

a) Pentru un segment nul (*AA*) avem $m(AA) = 0$,
b) Există un segment nenul (*AB*) încât $m(AB) = 1$,
c) Dacă $(AB) \equiv (CD)$, atunci $m(AB) = m(CD)$,
d) Dacă *A*, *B*, *C* sunt puncte coliniare şi *B* este între *A* şi *C*, atunci $m(AB) + m(BC) = m(AC)$.

Amintim că relaţia „a fi între” pentru puncte şi relaţia de congruenţă sunt relaţii primare ale axiomaticii lui Hilbert.

Segmentul (*AB*) cu proprietatea $m(AB) = 1$ se numeşte unitate de măsură iar $m(CD)$ se numeşte măsura sau lungimea segmentului (*CD*) măsurată cu unitatea de lungime (*AB*). Rezultatul precedent conduce la propoziţia ([8], p. 106):

Există o singură măsură a segmentelor pentru care unitatea de măsură este dată a priori.

Ideea de demonstrație este de a considera pe o dreaptă AB un sistem cartezian de coordonate f şi de a defini $m(AB) = |f(B) - f(A)|$.

Din punct de vedere didactic axiomatica lui Hilbert este greoaie. Nivelul ei de rigoare şi abstractizare nu este accesibil elevilor de liceu, iar timpul necesar pentru a o parcurge nu poate fi găsit în programa analitică liceală. Totuşi, ideea de axiomatizare este o idee fundamentală în ştiința secolului XX şi deci este necesar ca ea să fie cunoscută de absolvenții învățământului preuniversitar. Soluția propusă a fost aceea de a se folosi pentru expunerea geometriei sisteme axiomatice mai puțin complexe, cu axiome mai „tari" şi deci mai puține la număr încât elevii să ajungă repede la faptele geometrice interesante, acceptabile şi utile. Din numărul mare de asemenea sisteme axiomatice, o răspândire mai largă a căpătat cel construit de matematicianul american G. David Birkhoff (1884 – 1944) în 1931, îndeosebi datorită prelucrării didactice la care a fost supus ([9], [10]). Acest sistem axiomatic într-o variantă adaptată după aceea din [10] se foloseşte în [1].

În sistemul axiomatic datorat lui G. D. Birkhoff se utilizează limbajul teoriei mulțimilor şi se presupune cunoscut corpul numerelor reale. Lungimea unui segment (AB) se identifică cu distanța de la A la B, iar distanța se ia ca noțiune primară. Cu alte cuvinte, se acceptă că oricare ar fi punctele A şi B există un număr real unic notat $d(A,B)$ sau simplu AB care se numeşte distanța între A şi B. Lungimea segmentului (AB) este $d(A,B)$ sau AB. Reprezentarea numerelor reale pe o dreaptă, exersată frecvent de elevi în clasele precedente îi determină să accepte cu uşurință axioma riglei:

Fie d o dreaptă oarecare şi $A, B \in d$ două puncte distincte. Există o funcție bijectivă $f : d \to \mathbf{R}$ astfel încât:

1) $f(A) = 0, f(B) > 0$,

2) Oricare ar fi punctele P, Q pe d avem $d(P,Q) = |f(Q) - f(P)| = |PQ|$.

Funcția $f : d \to \mathbf{R}$ se numeşte sistem de coordonate pe d, punctul A – originea lui şi $f(M) = x_M$ – abscisa punctului M.

O comparare instructivă a sistemelor axiomatice Birkhoff şi Hilbert se găseşte în [8].

§ 3. MĂSURAREA UNGHIURILOR

În cadrul acestei teme profesorul trebuie să „didactizeze", să facă accesibilă funcția măsură a unghiurilor care poate fi introdusă după cum urmează.

Fie $\mathbf{U}$ mulțimea unghiurilor din plan. O funcție $m : \mathbf{U} \to [0,180]$ se numeşte funcție măsură a unghiurilor (în grade) dacă are proprietățile:

1) Pentru orice unghi A, măsura sa $m(A)$ este un număr cuprins între 0 şi 180. unghiurile nule au măsura zero, iar unghiurile alungite au măsura 180.

2) Fie $(OA$ o semidreaptă şi $\mathbf{S}$ un semiplan limitat de dreapta OA. Pentru orice număr real $\alpha \in (0,180)$ există o semidreaptă unică $(OB$ în $\mathbf{S}$ încât $m(AOB) = \alpha$.

3) Dacă C este în interiorul unui unghi AOB, atunci $m(AOC) + m(COB) = m(AOB)$.

Observăm că 3) exprimă aditivitatea funcției m, iar 2) ne spune că funcția m este surjectivă, dar nu este injectivă, adică există mai multe unghiuri cu aceeaşi măsură (semidreapta $(OA$ este arbitrară). Acest fapt conduce la a spune că două unghiuri se numesc congruente dacă au aceeaşi măsură. Relația de congruență este o relație de echivalență şi constatăm că m induce o aplicație bijectivă de la mulțimea claselor de echivalență în [0,180]. Această constatare poate fi un exercițiu util la clasa a IX-a pentru că el conține idei fundamentale, frecvent folosite în matematică.

Unicitatea semidreptei din proprietatea 2) ne arată că unghiurile congruente pot fi „suprapuse” prin purtarea congruentă sau depunere a unghiurilor (efectuată cu un raportor, dar şi mai bine cu un compas). Din aceeaşi proprietate 2) rezultă că există cel puţin un unghi care are măsura 1. Acel unghi poate fi folosit ca unghi unitate de măsură. Toate aceste consideraţii au avut scopul de a arăta că funcţia *m* satisface cerinţele generale impuse unei funcţii măsură.

În predarea temei „Măsura unghiurilor” apar mai bine conturate nivelele intuitiv şi axiomatic. La nivel intuitiv există mai multe posibilităţi de abordare a problematicii. Fiecare trebuie să pregătească nivelul axiomatic. Nivelul intuitiv se poate parcurge după cum urmează.

Se introduce măsura unghiurilor prin intermediul operaţiei de măsurare a unghiurilor cu raportorul (pe unghiuri desenate în caiet, pe tablă sau în condiţii concrete când acestea există). Cu raportorul se măsoară în grade sexazecimale. Se introduc submultiplii gradului (minutul şi secunda) şi se subliniază că operaţia de măsurare este aproximativă şi se insistă ca elevii să sesizeze că domeniul funcţiei *m* este intervalul de numere reale [0,180]. Operaţia de măsurare a unghiurilor este o altă rampă de lansare spre numere iraţionale.

Se explică procedeul de efectuare a operaţiilor de adunare şi scădere a unghiurilor măsurate în grade, minute şi secunde, care se fixează apoi prin mai multe exerciţii.

Un pas mai departe constă în definirea geometrică a adunării şi scăderii unghiurilor. În acest scop se introduc unghiurile adiacente. Definiţia formală are trei condiţii (vârf comun, o latură comună, celelalte două laturi situate de o parte şi de alta o dreptei care conţine latura comună), deci este mai greu de reţinut. Este bine să începem cu desene în care apar situaţiile favorabile dar şi cele nefavorabile (contraexemple). Plecând de la un desen, introducem termenul de unghi sumă (diferenţă) echivalent cu egalităţile numerice $m(AOC) = m(AOB) + m(BOC)$ şi, similar, pentru unghi diferenţă. În particular, apar unghiurile complementare şi respectiv, suplimentare. Trebuie să insistăm ca elevii să privească operaţiile cu unghiuri atât geometric cât şi aritmetic. Aspectul geoemtric este specific axiomaticii lui Hilbert şi va fi întâlnit în probleme în care măsurile unghiurilor nu sunt date, dar este necesară operarea cu ele.

În sfârşit, se explicitează proprietăţile funcţiei *m* şi se procedează la fixarea lor. Acest ultim pas se poate amâna încât proprietăţile funcţiei *m* să fie prezentate în cadrul axiomatic la o clasă de liceu. Considerăm că nivelul axiomatic poate fi parcurs în liceu. El nu prezintă dificultăţi didactice deosebite.

După studiul „Cercul” se poate evidenţia posibilitatea de a măsura unghiurile şi în radiani.

§ 4. ARIILE SUPRAFEŢELOR POLIGONALE

În predarea acestei teme nivelul intuitiv corespunde claselor I-V şi deci premerge studiului propriu-zis al geometriei. Menţionăm, totuşi, câteva obiective care trebuie atinse la acest nivel pentru a se trece apoi fără efort la nivelul raţional neformalizat.

1. Formularea conceptului de arie. Stabilirea şi fixarea terminologiei uzuale.
2. Intuirea faptului că figurile congruente au aceeaşi arie.
3. Intuirea şi folosirea proprietăţii de aditivitate a funcţiei arie.
4. Deprinderea de a calcula ariile unor suprafeţe poligonale simple şi de a opera transformări de unităţi de măsură ale ariei.

Aceste obiective se realizează prin activităţi practice (care pot include şi jocuri) în care elevul este pus să manipuleze modele concrete. Modalităţi interesante de realizare a acestor obiective sunt descrise în [5], lucrare care ia ca bază teoretică ideile lui Piaget privind formarea conceptelor fundamentale la copii.

Nivelul rațional neformalizat are ca obiective cunoașterea de către elevi a demonstrațiilor pentru formulele de calcul de arii pentru suprafețe poligonale începând cu cele simple: triunghi, dreptunghi, paralelogram etc., precum şi consolidarea proprietăților funcției arie, fie că acestea sunt explicitate sau nu.

Există două modalități importante de realizare a acestor obiective, diferențiate prin punctul de pornire: aria triunghiului şi, respectiv, aria dreptunghiului (pătratului). Fiecare din aceste modalități poate avea două variante depinzând de reluarea sau nereluarea problematicii privind aria la nivel axiomatic, formalizat. Apar astfel patru posibilități esențiale de predare a acestui subiect la clasa a VII-a [1]. Schițăm ordinea de desfăşurare a activităților în fiecare din cele patru situații.

1) Punct de plecare: aria triunghiului

- Se demonstrează că produsul dintre lungimea unei laturi a unui triunghi şi înălțimea corespunzătoare este acelaşi oricare ar fi latura şi înălțimea corespunzătoare ei.
- Se defineşte aria triunghiului.
- Se observă că două triunghiuri congruente au arii egale.
- Se demonstrează că raportul ariilor a două triunghiuri asemenea este egal cu pătratul raportului de asemănare.
- Se demonstrează o variantă simplă a proprietății de aditivitate:

$$S_{ABC} = S_{ABD} + S_{ADC} \text{ (fig. 1)}$$

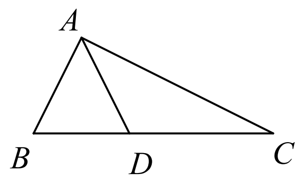

Fig. 1

- Se arată că pentru un patrulater (fig. 2), avem $S_{ABC} + S_{ADC} = S_{ABD} + S_{BDC}$.

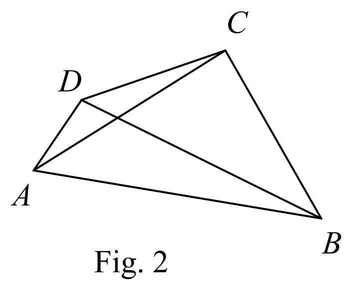

Fig. 2

- Se defineşte aria patrulaterului.
- Se deduc formulele de calcul pentru aria paralelogramului (dreptunghi, romb, pătrat) şi a trapezului.
- Se propun probleme care să trateze situații particulare de aditivitate a ariei pentru a sugera forma generală a acestei proprietăți precum şi ideea că prin „triangulizarea" unei suprafețe poligonale (convexe) putem obține aria ei ca suma ariilor triunghiurilor care o compun. Acest fapt va servi la deducerea formulei de calcul a ariei unui poligon regulat cu $n > 4$ laturi.

Observăm că pe calea propusă punem pe elevi în situația de a demonstra foarte multe, aspect favorabil pentru formarea lor şi totodată îi plasăm într-o poziție de pe care pot sesiza proprietățile fundamentale ale funcției arie (neexplicitate totuşi) şi modul în care ele intervin în definirea ariei şi în deducerea formulelor de calcul.

2) Punct de plecare: aria triunghiului

Lucrăm în ipoteza că problematica ariei figurilor plane nu se mai reia la nivel axiomatic formalizat. Este deci necesară o insistență mai mare pe „funcția arie”.

Ordinea de prezentare poate fi următoarea:

- Se introduce termenul de suprafață poligonală simplă: poate fi descompusă într-un număr finit de triunghiuri care au două câte două interioarele disjuncte.
- Se defineşte funcția arie ca o funcție pe mulțimea suprafețelor poligonale simple cu valori reale (a se vedea definiția de mai jos). Ca figură unitate de arie se poate lua triunghiul dreptunghic cu catetele de 1 şi respectiv 2 unități de lungime. Se poate folosi limbajul specific pentru funcții introdus deja la Algebră.
- Se defineşte aria triunghiului (ca la 1)).
- Se demonstrează că definiția dată conduce la o funcție arie pe mulțimea triunghiurilor (două triunghiuri congruente au aceeaşi arie şi proprietăți de aditivitate, unele date în 1) ca probleme).
- Se extinde funcția arie la patrulatere prin justificarea invarianței la triangulizări şi se sugerează extinderea ei la suprafețe poligonale simple. Aici rămân multe aspecte fără demonstrație.
- Se deduc formulele de calcul pentru ariile suprafețelor poligonale simple în ordinea şi maniera de la 1).

Observăm că materia vizând variantele 1) şi 2) este aproximativ aceeaşi. Punctele de vedere diferite induc schimbări în forma şi ordinea de prezentare.

3) Punct de plecare: aria dreptunghiului

- Se defineşte aria dreptunghiului ca produsul dintre lungimea şi lățimea sa.
- Se demonstrează apoi formulele de calcul pentru aria unui triunghi dreptunghic (o doime dintr-un dreptunghi), a unui triunghi oarecare prin descompunerea în sumă (diferență) de triunghiuri dreptunghice, apoi a paralelogramului şi trapezului.
- Problemele propuse pun în evidență proprietăți ale funcției arie acceptate intuitiv şi folosite ca atare mai sus.

Varianta aceasta este prea mult simplificată. Simplificarea provine din aceea că am acceptat o ipoteză foarte tare: formula pentru aria dreptunghiului.

Putem lua ca premisă ceva mai puțin: aria pătratului de latură a este a^2. Pentru a deduce formula ariei unui dreptunghi de dimensiuni a şi b completăm dreptunghiul la un pătrat de latură $a+b$ (fig. 3). Cele două dreptunghiuri formate sunt congruente şi acceptăm intuitiv că au aceeaşi arie. Proprietatea de aditivitate (subînțeleasă intuitiv) conduce la egalitatea $(a+b)^2 = a^2 + b^2 + 2A$ de unde obținem $A = ab$.

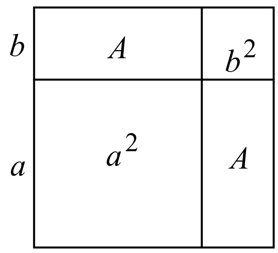

Fig. 3

Se continuă apoi ca mai sus.

4) Punct de plecare: aria dreptunghiului

Această variantă se poate folosi, de asemenea, în cazul în care nu se mai tratează nivelul axiomatic.

- Se introduce noțiunea de suprafață poligonală simplă.
- Se defineşte funcția arie şi se acceptă existența ei (se dau proprietățile funcției arie ca proprietăți fundamentale sau axiome).
- Se deduce formula de calcul pentru aria unui dreptunghi. Recomandăm procedeul din [2, p. 207]. Anume, se arată mai întâi că ariile a două dreptunghiuri de lungimi egale se raportează ca lățimile lor şi apoi se aplică aceasta comparând dreptunghiul cu pătratul unitate. Demonstrația este de o rigoare convenabilă, ea deducându-se în ultimă analiză la afirmația: dacă $0 \le a < \varepsilon$, oricare ar fi $\varepsilon > 0$, atunci $a = 0$. Această afirmație uşor de intuit se poate demonstra prin reducere la absurd, ocazie cu care intervine faptul că între oricare două numere reale există un al treilea, deci nu putem evita aspecte de structură a mulțimii numerelor reale.
- Se deduc apoi formulele de calcul pentru ariile triunghiului, paralelogramului etc. ca la 3) sau în ordinea din [2].

În programele analitice construite în spirală (cum este cazul programei româneşti) problematica legată de arii se reia şi se insistă pe nivelul axiomatic.

Sistemele axiomatice (Hilbert sau Birkhoff) permit definirea interiorului unui poligon convex şi apoi a unei suprafețe poligonale convexe ca reunire a liniei poligonale cu interiorul poligonului convex. Mai general, se pot considera suprafețe poligonale definite ca reuniuni finite de suprafețe poligonale convexe care, luate două câte două, au interioare disjuncte. Echivalent, se spune că o suprafață poligonală se descompune într-un număr finit de suprafețe poligonale convexe. În particular, avem suprafețe triunghiulare, suprafețe patrulatere ş.a.m.d. Printr-o inducție finită după numărul laturilor *n* se demonstrează că o suprafață poligonală convexă cu $n > 3$ laturi se descompune în $n - 2$ suprafețe triunghiulare şi, în consecință, orice suprafață poligonală se descompune într-un număr finit de suprafețe triunghiulare. Aşadar, ele sunt simple în sensul definit anterior.

Numind unitate de suprafață un pătrat *U* de latură 1 se introduce funcția arie definită pe mulțimea **SP** a tuturor suprafețelor poligonale simple.

O funcție $\sigma : \mathbf{SP} \to \mathbf{R}_+$ cu proprietățile

1) Dacă triunghiurile T_1 şi T_2 sunt congruente, atunci $\sigma(T_1) = \sigma(T_2)$.
2) Dacă S_1 şi S_2 sunt suprafețe poligonale simple, cu interioare disjuncte, atunci
$$\sigma(S_1 \cup S_2) = \sigma(S_1) + \sigma(S_2).$$
3) $\sigma(U) = 1$,

se numeşte funcție arie.

Se reformulează, fără demonstrație

Teoremă. *Dacă unitatea de suprafață U este fixată, atunci există o singură funcție arie.*

Demonstrația acestei teoreme, după cum se constată în [7], revine la a arăta că aria unei suprafețe poligonale nu depinde de „triangulizările” ei.

Formulele de calcul se stabilesc similar cu varianta 3) după ce se arată că aria pătratului de latură *a* este a^2. Pentru *a* rațional, prin divizare în pătrate mai mici, se obține uşor formula.

Pentru *a* irațional apar dificultăți conceptuale în care structura mulțimii numerelor reale este din nou implicată. Recomandăm demonstrația din [9, p. 157].

Observație. Se pare că este mai accesibil să deducem mai întâi aria dreptunghiului ca în varianta 4).

Funcțiile lungime şi arie se extind la figuri mai complicate decât cele discutate mai sus. Astfel, funcția lungime se extinde la liniile curbe (în particular la cerc), iar funcția arie se extinde la regiuni plane mărginite de linii curbe (în particular la discuri). Nu ne ocupăm de aceste extensiuni, în particular, de lungimea cercului şi aria discului pentru că în şcoala generală ele nu pot depăşi nivelul intuitiv şi reţinerea mecanică a formulelor. Evident că unele consideraţii de natură intuitivă cu menirea de a favoriza reţinerea formulelor, sunt binevenite. Astfel de observaţii, mai mult sau mai puţin extinse, se găsesc, de obicei, în manuale, indiferent de modalitatea de abordare a ariilor suprafeţelor poligonale.

Există numeroase încercări de a prezenta riguros lungimea şi aria cercului la nivel elementar, prin exploatarea proceselor de trecere la limită implicate în aceste noţiuni. Multe din acestea sunt foarte interesante şi sunt accesibile elevilor foarte buni. Fiind, totuşi, complicate, ele nu pot constitui o pregătire pentru înţelegerea noţiunii de limită, care se poate explica pe situaţii mai simple. Considerăm că revenirea asupra lungimii şi ariei cercului după studiul limitelor de şiruri şi funcţii este extrem de favorabilă sub aspect formativ, pentru o mai bună integrare a cunoştinţelor.

Nu putem încheia acest paragraf fără a ne referi la problemele de geometrie în care noţiunea de arie este implicată.

Pe lângă problemele-exerciţii de aplicare a formulelor de calcul şi a celor în care se cer diverse relaţii cu arii, semnalăm că noţiunea de arie poate servi la demonstrarea unor teoreme sau rezolvarea unor probleme care prin enunţ nu trimit sub nici o formă la această noţiune. Fenomenul este suficient de prezent pentru a se putea vorbi de metoda areolară ca metodă de rezolvare a unor probleme de geometrie.

Sarcina de a introduce o clasificare a problemelor rezolvabile prin metoda areolară este foarte dificilă. Se poate doar observa că mai multe dintre aceste probleme se referă la relaţii metrice. Astfel, există mai multe demonstraţii prin arii ale teoremei lui Pitagora, a teoremei fundamentale a asemănării ([9], [10]). Prin consideraţii de arii se obţin formulele $R=\dfrac{abc}{4S}$, $r=\dfrac{S}{p}$ într-un triunghi (notaţii standard). Pentru lungimea bisectoarei din vârful A al unui triunghi se obţine formula $l=\dfrac{2bc}{b+c}\cos\dfrac{A}{2}$.

Unele relaţii aparent complicate sunt consecinţe ale unor relaţii simple cu arii.

Fie un triunghi ABC, un punct M în planul său şi A' intersecţia dreptelor AM şi BC. Atunci

(1) $$\frac{A'B}{A'C}=\frac{\sigma[ABM]}{\sigma[ACM]},$$

(2) $$\frac{A'M}{A'A}=\frac{\sigma[MBC]}{\sigma[ABC]}.$$

Pentru a demonstra (1) proiectăm B şi C pe AA' în punctele E şi, respectiv, F. O asemănare de triunghiuri ne dă

$$\frac{A'B}{A'C}=\frac{BE}{CF}=\frac{BE\cdot AM}{CF\cdot AM}=\frac{\sigma[ABM]}{\sigma[ACM]}.$$

Pentru a obţine (2) proiectăm A şi M pe BC în A_1 şi M_1, respectiv, şi avem:

$$\frac{A'M}{A'A}=\frac{MM_1}{AA_1}=\frac{MM_1\cdot BC}{AA_1\cdot BC}=\frac{\sigma[MBC]}{\sigma[ABC]}.$$

Consecinţe ale relaţiei (1):

- Pentru $M\equiv A$ sau $M\equiv A'$ obţinem

(1') $$\frac{A'B}{A'C}=\frac{\sigma[ABA']}{\sigma[ACA']}$$

iar pentru A' mijlocul lui BC găsim $\sigma[ABA']=\sigma[ACA']$.

- Fie A' piciorul bisectoarei interioare (exterioare) din A. Din (1') obţinem

$$\frac{A'B}{A'C}=\frac{AB\cdot AA'\cdot\sin(A\hat{A}'B)}{AC\cdot AA'\cdot\sin(A\hat{A}'C)}=\frac{AB}{AC},$$

pentru că unghiurile $A\hat{A}'B$ şi $A\hat{A}'C$ fiind suplimentare au acelaşi sinus. Am găsit astfel teorema bisectoarei.

- Fie B' şi C' intersecțiile dreptelor BM cu AC şi CM cu AB, respectiv. Atunci avem

(3) $\frac{A'B}{A'C}\cdot\frac{B'C}{B'A}\cdot\frac{C'A}{C'B}=1$ (relația lui Ceva)

Se poate arăta prin reducere la absurd că relația lui Ceva asigură concurența dreptelor AA', BB', CC' când punctele A', B', C' sunt pe laturile triunghiului *ABC* sau două sunt pe prelungirile laturilor şi unul pe o latură.

Ca o consecință a teoremei bisectoarei se obține concurența bisectoarelor.

- Combinând (1) cu (2), cu notațiile folosite se obține uşor

(4) $\frac{MA}{MA'}=\frac{B'A}{B'C}+\frac{C'A}{C'B}$ (relația lui Van Aubel).

Semnalăm următoarele consecințe ale relației (2). Cu notațiile de mai sus avem:

(5) $\frac{MA'}{AA'}+\frac{MB'}{BB'}+\frac{MC'}{CC'}=1$.

Pentru $M\equiv G$, centrul de greutate al ΔABC, relația (5) este banal verificată. În acest caz se obține, de asemenea, că $\sigma[GBC]=\sigma[GAC]=\sigma[GAB]=\frac{1}{3}\sigma[ABC]$. Interesant este că G este singurul punct din planul triunghiului *ABC* cu această proprietate.

- Pentru $M\equiv I$, centrul cercului înscris în ΔABC, deoarece $\frac{I'A}{AA'}=\frac{r}{h_a}$, relația (5) se reduce la

(6) $\frac{1}{h_a}+\frac{1}{h_b}+\frac{1}{h_c}=\frac{1}{r}$.

Relații similare implicând razele cercurilor exînscrise pot fi de asemenea stabilite [6].

§ 5. MĂSURA VOLUMELOR

Tema aceasta trebuie să exploateze intens şi eficace analogia plan – spațiu. Această analogie apare implicată atât în linia generală de abordare a temei cât şi în lecțiile curente. Ea se referă la conținutul ştiințific, la metodele de demonstrație, precum şi la tratarea sub aspect metodic.

Nivelul intuitiv de abordare a problematicii, care premerge predării geometriei, ținând de fizică în măsură mai mare decât cel consacrat ariilor, are ca obiective:

1. Formularea conceptului de volum al unui corp. Stabilirea şi reținerea terminologiei specifice.
2. Intuirea proprietăților funcției volum.
3. Măsurarea volumelor unor corpuri, operații cu unități de volum, transformarea lor.

Mai multe mijloace ingenioase pentru realizarea acestor obiective sunt descrise în [5].

La nivel rațional neformalizat putem distinge, ca şi în cazul ariilor, două modalități de prezentare generate de puncte de plecare distincte: volumul tetraedrului şi, respectiv, volumul cubului (paralelipipedului dreptunghic). Fiecare din acestea poate căpăta mai multe variante în funcție de rigoarea dorită şi de timpul disponibil.

În continuare, descriem cele două modalități importante de derulare a temei şi indicăm pe scurt unele variante.

Oricare dintre variante are la bază funcția volum. Înainte de a introduce această funcție trebuie să-i precizăm domeniul de definiție, cu alte cuvinte să descriem suficient de precis figurile geometrice cărora le vom asocia un volum. În ideea de a merge de la simplu la complex, se asociază mai întâi volume mulțimilor (corpurilor) poliedrale şi ulterior corpurilor mărginite de suprafețe mai complicate decât planele. Mulțimea poliedrală este analoagă suprafeței poligonale (simple) în sensul că este o mulțime care se exprimă ca reuniune finită de tetraedre (piramide triunghiulare) cu interioare disjuncte două câte două.

Notăm prin **CP** mulțimea ale cărei elemente sunt corpuri (mulțimi) poliedrale.

O funcție $v:\mathbf{CP}\to\mathbf{R}_+$ cu proprietățile

1) Dacă două tetraedre T_1 şi T_2 sunt congruente, atunci $v(T_1)=v(T_2)$.
2) Dacă P_1 şi P_2 sunt mulțimi poliedrale cu interioare disjuncte, atunci
$$v(P_1\cup P_2)=v(P_1)+v(P_2).$$
3) Dacă U este un cub de muchie 1, atunci $v(U)=1$,

se numeşte funcție volum.

Proprietățile funcției volum pot rămâne neexplicitate, dar subînțelese pe baza intuiției şi experienței din clasele anterioare (în situația a. de mai jos) sau se explicitează ca proprietăți fundamentale ale volumelor (în situația b. de mai jos).

a.Punct de plecare: volumul tetraedrului

- Se demonstrează că produsul dintre aria unei fețe a unui tetraedru şi înălțimea corespunzătoare este acelaşi, oricare ar fi latura şi înălțimea corespunzătoare.
- Se defineşte volumul tetraedrului ca produsul de mai sus împărțit la 3. Definiția este corectă. Aşadar, analogia triunghi – tetraedru se continuă în corespondența arie – volum şi se corelează cu trecerea de la 2 la 3.
- Se face observația că două tetraedre congruente au acelaşi volum şi că două tetraedre cu ariile a două fețe respectiv egale şi înălțimile corespunzătoare egale au acelaşi volum.
- Se demonstrează că volumul unei prisme triunghiulare este dat de produsul între aria bazei şi înălțime prin descompunerea ei în trei tetraedre de acelaşi volum. Această descompunere este punctul cel mai delicat al temei şi se impune tratarea lui cu atenție, însoțită de desene şi, eventual, de un model concret din lemn sau plastic, care, de obicei, se găseşte în trusa cu material didactic.
- Se deduce formula volumului unei prisme oarecare prin descompunerea în prisme triunghiulare. În particular, se dă formula uzuală pentru volumul unui paralelipiped oblic, apoi pentru volumul unui paralelipiped dreptunghic şi apoi pentru cub, introducându-se astfel unitatea de volum.
- Se stabilesc formule de calcul pentru volumul piramidei şi trunchiului de piramidă.
- Se evidențiază pe unele corpuri particulare că raportul volumelor a două corpuri poliedrale asemenea este egal cu cubul raportului de asemănare.

În această modalitate de predare elevii sunt puşi în situația de a demonstra suficient de mult fără a întâlni dificultăți conceptuale semnificative. Demonstrațiile țin efectiv de domeniul geometriei în spațiu.

a) Punct de plecare: volumul cubului

Lucrăm în ipoteza că problematica ariei figurilor plane nu se mai reia la nivel axiomatic formalizat. Este deci necesară o insistență mai mare pe „funcția arie”.

Ordinea de prezentare poate fi următoarea:

- Se introduce funcția volum (sau se introduc proprietățile ei ca proprietăți fundamentale).
- Se arată că volumul unui cub de latură a este a^3 prin descompunerea lui în cuburi de latură 1. cazul a irațional ridică dificultăți similare cu cele de la aria pătratului. Se tratează analog.
- Se demonstrează că volumul paralelipipedului dreptunghic este egal cu produsul dimensiunilor sale. Se poate proceda prin descompunerea în cuburi de latură 1 cu dificultățile ridicate de situația în care una sau mai multe laturi au lungimi numere iraționale. O cale mai accesibilă este cea propusă în [2]. Se arată mai întâi că volumele a două paralelipipede dreptunghice cu aceeaşi bază se raportează ca înălțimile lor şi se aplică succesiv acest rezultat paralelipipedelor dreptunghice de dimensiuni 1, 1, 1; a, 1, 1; a, b, 1; a, b, c.
- Volumul paralelipipedului oblic se reduce la calculul volumului unuia dreptunghic prin decupare şi completare convenabilă.
- Volumul prismei triunghiulare se găseşte prin completare la un paralelipiped, iar al prismei oarecare prin descompunere în prisme triunghiulare.
- Formula pentru volumul tetraedrului se obține ca în situația a).
- Se deduc formulele de calcul pentru volumului piramidei şi trunchiului de piramidă.

Remarcăm că de la un moment dat modalitățile a) şi b) devin identice.

Nivelul axiomatic presupune definirea riguroasă, fără elemente intuitive a mulțimilor poliedrale, formularea axiomelor volumului (exact proprietățile funcției volum) şi demonstrarea existenței funcției volum (în fond un model pentru axiome).

Semnalăm posibilitatea de a deduce formulele de calcul pentru volumele corpurilor uzuale, inclusiv a celor numite uneori „rotunde”: cilindru, con, sferă, pe baza principiului lui Cavalieri [9].

În sfârşit, menționăm că există numeroase probleme de geometrie în spațiu care se rezolvă prin considerații de volume. Cele mai multe se referă la relații metrice.

BIBLIOGRAFIE

1. *Manualele de geometrie pentru gimnaziul şi liceu*, ediții de după 1982.
2. *Manualul de geometrie pentru clasele VII-IX*, elaborat de A.V. Pogorelov şi tradus în limba română pentru şcolile din Republica Moldova de I. Goian şi I. Chitoroagă, 1990.
3. Achiri I. ş.a., *Metodica predării matematicii,* Vol. I, Chişinău, Ed. Lumina, 1992.
4. Anastasiei M., *Metodica predării matematicii*, Univ. "Al. I. Cuza", Iaşi, 1985.
5. Bell ş.a., *Arie, masă, volum*, Bucureşti, EDP, 1981.
6. Mihăileanu N. N., *Lecții complementare de geometrie*, Bucureşti, EDP, 976.
7. Miron R., *Geometrie elementară*, Bucureşti, EDP, 1968.
8. Miron R., Brânzei O., *Fundamentele aritmeticii şi geometriei*, Bucureşti, Ed. Academiei Române, 1983.
9. Moise E., *Geometrie elementară dintr-un punct de vedere superior*, Bucureşti, EDP, 1980.
10. Moise E., Downs F., *Geometrie*, Bucureşti, EDP, 1983.
11. Popescu O. Radu V., *Metodica predării geometriei în gimnaziu*, Bucureşti, EDP, 1983.
12. Kolmogorov A. N. ş.a., *Algebră şi elemente de analiză X-XI*, Chişinău, Ed. Lumina, 1991.

REZUMAT

Incepem prin a evidenția modalități intuitive şi riguroase de a introduce lungimea (măsura) segmentelor. Cele riguroase ne trimit la axiomatici ale geometriei şi ne referim la cea a lui D. Hilbert şi la cea a lui G.D. Birkhoff. Procedăm la fel cu măsura unghiurilor. Pentru ariile poligoanelor plane considerăm funcția arie şi punem în evidență patru modalități de a preda în şcoală tema „Ariile suprafețelor poligonale". Măsura volumului corpurilor este introdusă prin funcția-volum. Evidențiem două căi de a găsi formulele uzuale pentru calculul volumelor unor piliedre. Pentru corpuri rotunde folosim principiul lui Cavalieri. Prezentăm apoi aplicații ale formulelor pentru arii în rezolvarea unor probleme de geometrie şi argumentăm în favoarea acestei metode numită metoda areolară. Se indică frecvent metode de abordare la clasă a subiectelor în discuție.

TEMĂ DE CONTROL

1. Scrieți o listă cu formulele de calcu a ariei poligoanelor simple studiate în şcoală. Deduceți aceste formule presupunând dată a) formula de calcul a ariei unui dreptunghi şi b) formula ariei unui triunghi.

2. Deduceți formula lui heron de calcul a ariei unui triunghi.

3. Demonstrați prin considerații de arii teorema lui Pitagora.

4. Stabiliți o formulă care leagă aria proiecției unui triunghi pe un plan de aria triunghiului. Fie un tetraedru OABC tridreptunghic în O. Aratați că proiecția lui O pe planul (ABC) coincide cu ortocentrul H al truinghiului ABC. Demonstrați că suma patratelor ariilor triunghiurilor OAB, OAC, OBC este egală cu pătratul ariei triunghiului ABC. Scrieți volumul tetraedrului în mai multe feluri pentru a deduce o relație între lungimile segmentelor OA,OB,OC şi OH.

5. Imaginați predarea la clasa a X-a a formulei care dă volumul trunchiului de con.