Numere complexe

1. Găsiţi modulul şi argumentul principal pentru următoarele numere complexe:

   (a) $z = 1 + i$
   (b) $z = -3(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4})$
   (c) $z = 3(\cos\frac{\pi}{4} - i\sin\frac{\pi}{4})$
   (d) $z = 3(-\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4})$
   (e) $z = 1 + i + i^2 + ... + i^{2025}$
   (f) $z = (-1 + i\sqrt{3})^{2025}$

2. Scrieţi următoarele numere complexe în forma polară

   (a) $2i$
   (b) $1 - i$; $1 + i$
   (c) $-3 + \sqrt{3}i$
   (d) $(2 - i)^2$
   (e) $2 + 2i$
   (f) $-\frac{1}{2}(\sqrt{3} + i)$
   (g) $-\pi$

3. Scrieţi umrătoarele numere complexe în formă carteziană

   (a) $\sqrt{2}e^{i\frac{3\pi}{4}}$
   (b) $35e^{i\frac{\pi}{2}}$
   (c) $-e^{i250\pi}$
   (d) $3e^{\frac{\pi i}{2}}$
   (e) $2e^{\frac{3\pi i}{2}}$
   (f) $\frac{1}{2}e^{\pi i}$

4. Găsiţi soluţiile ecuaţiilor

   (a) $z^2 + 2z + (1 - i) = 0$
   (b) $z^2 + 4z + 12 - 6i = 0$
   (c) $(1 + i)z^2 + (-1 + 7i)z - (10 - 2i) = 0$
   (d) $z^2 = 3 + 4i$
   (e) $z^2 = \sqrt{3} + 3i$
   (f) $z^6 = 1$
   (g) $z^4 = -16$
   (h) $z^6 = -9$
   (i) $z^6 - z^3 - 2 = 0$

5. Pentru $a, b \in \mathbb{R}$, calculaţi

   (a) $\cos(a + b)$; $\sin(a + b)$
   (b) $\cos(a - b)$; $\sin(a - b)$
   (c) $\cos(2a)$; $\sin(2a)$

6. Arătaţi că $\cos^2\theta + \sin^4\theta = \sin^2\theta + \cos^4\theta$, pentru $\theta \in \mathbb{R}$.

7. Găsiţi soluţiile pentru $z^n = 1$, $z^n = -1$, $z^n = a, a \in \mathbb{R}$, $z^n = w, w \in \mathbb{C}$.

Structura topologică

8. Reprezentaţi mulţimile. Stabiliţi dacă sunt mărginite, închise, deschise, conexe, simplu conexe.

   (a) $\{z \in \mathbb{C} \mid |\text{ Re }(z)| > 3\}$
   (b) $\{z \in \mathbb{C} | -3 < \text{ Im }(z) < -1\}$
   (c) $\{z \in \mathbb{C} ||z| < 3\}$
   (d) $\{z \in \mathbb{C} ||z - 1 + i| \leq 2\}$
   (e) $\{z \in \mathbb{C} | \text{ Re}(z + 2 - 2i) = 3\}$
   (f) $\left\{z \in \mathbb{C} | \frac{\pi}{6} < \text{ Arg }(z) < \frac{\pi}{3}\right\}$
   (g) $\left\{z \in \mathbb{C} ||\pi - \text{ Arg }(z)| < \frac{\pi}{4}\right\}$
   (h) $\left\{z \in \mathbb{C} | \text{ Arg }(z - i) = \frac{\pi}{3}\right\}$
   (i) $\left\{z \in \mathbb{C} | \frac{\pi}{4} < \text{ Arg }(z + i) < \frac{\pi}{2}\right\}$
   (j) $\{z \in \mathbb{C} | 1 < |z - i| < 3\}$
   (k) $\{z \in \mathbb{C} | 1 \leq |z - i| \leq 3\}$
   (l) $\{z \in \mathbb{C} ||z - i| + |z + i| = 3\}$
   (m) $\{z \in \mathbb{C} ||z| = |z + 1|\}$
   (n) $\{z \in \mathbb{C} ||z - 1| = 2|z + 1|\}$
   (o) $\{z \in \mathbb{C} | \text{ Re}(z^2) = 1\}$
   (p) $\{z \in \mathbb{C} | \text{ Im}(z^2) = 1\}$
   (q) $\{z \in \mathbb{C} ||z - 2| < |z + 1|\}$
   (r) $\left\{z \in \mathbb{C} | \left|\frac{z}{z+2i}\right| < 1\right\}$
   (s) $\left\{z \in \mathbb{C} | \left|\frac{1-z}{1+z}\right| < 1\right\}$

9. Găsiţi locul geometric al punctelor $M(z)$ care verifică

   (a) $|z - a| = |z - b|, \quad a, b \in \mathbb{C}$
   (b) $|z - a| + |z - b| = c, \quad a, b \in \mathbb{C}, \quad c \in \mathbb{R}$
   (c) $||z - z_1| - |z - z_2|| = 2a, \quad a \in \mathbb{R}$
   (d) $|z - 1| = |\text{ Re }(z)|$

10. Fie $G = \{z \in \mathbb{C} | -2 < z < -1\} \cup \{z \in \mathbb{C} ||z| < 1\} \cup \{z = 1\} \cup \{z = 2\}$. Reprezentaţi mulţimea G, determinaţi punctele interioare, punctele frontieră şi punctele izolate ale mulţimii.

11. Găsiţi o parametrizare pentru următoarele curbe:

    (a) $C(1 + i, 1)$ orientat în sens trigonometric;
    (b) segmentul de la $-1 - i$ la $2i$;
    (c) semicercul superior al $C(0, 3)$orientat invers trigonometric;
    (d) dreptunghiul de varfuri $\pm 1 \pm 2i$ orientat invers trigonometric;
    (e) elipsa $\{z \in \mathbb{C} ||z - i| + |z + i| = 4\}$ orientată în sens trigonometric.

12. Reprezentaţi grafic curba parametrizată $\gamma(t) = \cos t |\cos t| + i \sin t |\sin t|, \quad 0 \leq t \leq 2\pi$.

Limite. Continuitate.

1. Calculaţi $\lim\limits_{z\to 0}\frac{|z|}{z}$, $\lim\limits_{z\to 0}\frac{|z|^2}{z}$.
2. Arătaţi că functiile $f, g : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}, g(z) =$ Re z şi $f(z) = |z|$ sunt continue pe $\mathbb{C}$.
3. Studiaţi continuitatea funcţiei $f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$, $f(z) = \begin{cases} \frac{\overline{z}\ \mathrm{Im}\ z}{z^2}, z \neq 0 \\ 0, z = 0. \end{cases}$
4. Studiaţi continuitatea funcţiei $f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$, $f(z) = \begin{cases} \frac{z^2\ \mathrm{Re}\ z}{\overline{z}^2}, z \neq 0 \\ 0, z = 0. \end{cases}$
5. Studiaţi continuitatea funcţiei $f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$, $f(z) = \begin{cases} |z|, |z| \leq 1 \\ z, |z| > 1. \end{cases}$
6. Studiaţi continuitatea funcţiei $f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$, $f(z) = \begin{cases} |z|^2, |z| \leq 1 \\ \overline{z}, |z| > 1. \end{cases}$
7. Studiaţi continuitatea funcţiei $f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$, $f(z) = \begin{cases} |z|^2, |z| \leq 1 \\ z^3, |z| > 1. \end{cases}$

Func derivabile. Funcţii olomorfe. Ecuaţiile Cauchy-Riemann

Funcţii elemetare. Funţia exponenţială. Funcţii trigonometrice. Logaritmul complex. Funcţia putere

1. Calculaţi Ln(i); ln(-3); Ln$(1 - i)$; ln$(1 + i)$; i^i; sin$(\pi + i)$; 2^i; $(-1)^{2i}$.
2. Verificaţi Ln(i) + Ln$(i - 1)$ şi Ln$(i(i - 1))$.

Integrala complexă. Primitive

Teorema lui Cauchy

Formula integrală a lui Cauchy

Şiruri şi serii în $\mathbb{C}$

1. Calculaţi $\lim\limits_{n\to\infty} z_n$, unde $z_n = n\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) + i\frac{n+5}{n}$.
2. Calculaţi $\lim\limits_{n\to\infty} z_n$, unde $z_n = \frac{\sin\left(1+\frac{1}{n}\right)}{n} + i(n + 1)^{\frac{1}{n}}$.
3. Calculaţi $\lim\limits_{n\to\infty} n(\sqrt[n]{z} - 1)$, $z \in \mathbb{C}$.

Serii de puteri. Derivarea seriilor de puteri.

Teorema lui Taylor

Serii de Laurent. Singularități izolate. Poli

Teorema reziduurilor a lui Cauchy. Calculul reziduurilor

Aplicaţii ale Teoremei reziduurilor în calculul unor serii numerice

Aplicaţii ale Teoremei reziduurilor în calculul unor integrale improprii