

Numere complexe

1. Găsiți modulul și argumentul principal pentru următoarele numere complexe:

(a) $z = 1 + i$

(d) $z = 3(-\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4})$

(b) $z = -3(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4})$

(e) $z = 1 + i + i^2 + \dots + i^{2025}$

(c) $z = 3(\cos \frac{\pi}{4} - i \sin \frac{\pi}{4})$

(f) $z = (-1 + i\sqrt{3})^{2025}$

2. Scrieți următoarele numere complexe în forma polară

(a) $2i$

(e) $2 + 2i$

(b) $1 - i; 1 + i$

(f) $-\frac{1}{2}(\sqrt{3} + i)$

(c) $-3 + \sqrt{3}i$

(g) $-\pi$

(d) $(2 - i)^2$

3. Scrieți următoarele numere complexe în formă carteziană

(a) $\sqrt{2}e^{i\frac{3\pi}{4}}$

(d) $3e^{\frac{\pi i}{2}}$

(b) $35e^{i\frac{\pi}{2}}$

(e) $2e^{\frac{3\pi i}{2}}$

(c) $-e^{i250\pi}$

(f) $\frac{1}{2}e^{\pi i}$

4. Găsiți soluțiile ecuațiilor

(a) $z^2 + 2z + (1 - i) = 0$

(f) $z^6 = 1$

(b) $z^2 + 4z + 12 - 6i = 0$

(g) $z^4 = -16$

(c) $(1 + i)z^2 + (-1 + 7i)z - (10 - 2i) = 0$

(h) $z^6 = -9$

(d) $z^2 = 3 + 4i$

(i) $z^6 - z^3 - 2 = 0$

(e) $z^2 = \sqrt{3} + 3i$

5. Pentru $a, b \in \mathbb{R}$, calculați

(a) $\cos(a + b); \sin(a + b)$

(c) $\cos(2a); \sin(2a)$

(b) $\cos(a - b); \sin(a - b)$

6. Arătați că $\cos^2 \theta + \sin^4 \theta = \sin^2 \theta + \cos^4 \theta$, pentru $\theta \in \mathbb{R}$.

7. Găsiți soluțiile pentru $z^n = 1$, $z^n = -1$, $z^n = a$, $a \in \mathbb{R}$, $z^n = w$, $w \in \mathbb{C}$.

Structura topologică

8. Reprezentați mulțimile. Stabiliți dacă sunt mărginite, închise, deschise, conexe, simplu conexe.

- | | |
|---|--|
| (a) $\{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re}(z) > 3\}$ | (k) $\{z \in \mathbb{C} \mid 1 \leq z - i \leq 3\}$ |
| (b) $\{z \in \mathbb{C} \mid -3 < \operatorname{Im}(z) < -1\}$ | (l) $\{z \in \mathbb{C} \mid z - i + z + i = 3\}$ |
| (c) $\{z \in \mathbb{C} \mid z < 3\}$ | (m) $\{z \in \mathbb{C} \mid z = z + 1 \}$ |
| (d) $\{z \in \mathbb{C} \mid z - 1 + i \leq 2\}$ | (n) $\{z \in \mathbb{C} \mid z - 1 = 2 z + 1 \}$ |
| (e) $\{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re}(z + 2 - 2i) = 3\}$ | (o) $\{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re}(z^2) = 1\}$ |
| (f) $\{z \in \mathbb{C} \mid \frac{\pi}{6} < \operatorname{Arg}(z) < \frac{\pi}{3}\}$ | (p) $\{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Im}(z^2) = 1\}$ |
| (g) $\{z \in \mathbb{C} \mid \pi - \operatorname{Arg}(z) < \frac{\pi}{4}\}$ | (q) $\{z \in \mathbb{C} \mid z - 2 < z + 1 \}$ |
| (h) $\{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Arg}(z - i) = \frac{\pi}{3}\}$ | (r) $\{z \in \mathbb{C} \mid \left \frac{z}{z+2i} \right < 1\}$ |
| (i) $\{z \in \mathbb{C} \mid \frac{\pi}{4} < \operatorname{Arg}(z + i) < \frac{\pi}{2}\}$ | (s) $\{z \in \mathbb{C} \mid \left \frac{1-z}{1+z} \right < 1\}$ |
| (j) $\{z \in \mathbb{C} \mid 1 < z - i < 3\}$ | |

9. Găsiți locul geometric al punctelor $M(z)$ care verifică

- | | |
|--|--|
| (a) $ z - a = z - b , \quad a, b \in \mathbb{C}$ | (c) $ z - z_1 - z - z_2 = 2a, \quad a \in \mathbb{R}$ |
| (b) $ z - a + z - b = c, \quad a, b \in \mathbb{C}, \quad c \in \mathbb{R}$ | (d) $ z - 1 = \operatorname{Re}(z) $ |

10. Fie $G = \{z \in \mathbb{C} \mid -2 < z < -1\} \cup \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\} \cup \{z = 1\} \cup \{z = 2\}$. Reprezentați mulțimea G , determinați punctele interioare, punctele frontieră și punctele izolate ale mulțimii.

11. Găsiți o parametrizare pentru următoarele curbe:

- $C(1 + i, 1)$ orientat în sens trigonometric;
- segmentul de la $-1 - i$ la $2i$;
- semicercul superior al $C(0, 3)$ orientat invers trigonometric;
- dreptunghiul de varfuri $\pm 1 \pm 2i$ orientat invers trigonometric;
- elipsa $\{z \in \mathbb{C} \mid |z - i| + |z + i| = 4\}$ orientată în sens trigonometric.

12. Reprezentați grafic curba parametrizată $\gamma(t) = \cos t |\cos t| + i \sin t |\sin t|$, $0 \leq t \leq 2\pi$.

Șiruri și serii în $\mathbb{C}$

1. Calculați $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n$, unde $z_n = n \ln \left(1 + \frac{1}{n}\right) + i \frac{n+5}{n}$.
2. Calculați $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n$, unde $z_n = \frac{\sin\left(1 + \frac{1}{n}\right)}{n} + i(n+1)^{\frac{1}{n}}$.
3. Calculați $\lim_{n \rightarrow \infty} n(\sqrt[n]{z} - 1)$, $z \in \mathbb{C}$.

Limite. Continuitate.

1. Calculați $\lim_{z \rightarrow 0} \frac{|z|}{z}$, $\lim_{z \rightarrow 0} \frac{|z|^2}{z}$.
2. Arătați că funcțiile $f, g : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, $g(z) = \operatorname{Re} z$ și $f(z) = |z|$ sunt continue pe $\mathbb{C}$.
3. Studiați continuitatea funcției $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, $f(z) = \begin{cases} \frac{\bar{z} \operatorname{Im} z}{z^2}, & z \neq 0 \\ 0, & z = 0. \end{cases}$
4. Studiați continuitatea funcției $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, $f(z) = \begin{cases} \frac{z^2 \operatorname{Re} z}{\bar{z}^2}, & z \neq 0 \\ 0, & z = 0. \end{cases}$
5. Studiați continuitatea funcției $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, $f(z) = \begin{cases} |z|, & |z| \leq 1 \\ z, & |z| > 1. \end{cases}$
6. Studiați continuitatea funcției $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, $f(z) = \begin{cases} |z|^2, & |z| \leq 1 \\ \bar{z}, & |z| > 1. \end{cases}$
7. Studiați continuitatea funcției $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, $f(z) = \begin{cases} |z|^2, & |z| \leq 1 \\ z^3, & |z| > 1. \end{cases}$

Funcții derivabile. Funcții olomorfe. Ecuațiile Cauchy-Riemann

Funcții elementare. Funcția exponențială. Funcții trigonometrice. Logaritmul complex. Funcția putere

1. Calculați $\operatorname{Ln}(i)$; $\ln(-3)$; $\operatorname{Ln}(1-i)$; $\ln(1+i)$; i^i ; $\sin(\pi+i)$; 2^i ; $(-1)^{2i}$.
2. Verificați $\operatorname{Ln}(i) + \operatorname{Ln}(i-1)$ și $\operatorname{Ln}(i(i-1))$.

Integrala complexă. Primitive. Teorema Fundamentală a lui Cauchy. Formula integrală a lui Cauchy

1. Calculați integrala complexă a funcției f pe curba γ , folosind definiția integralei. Reprezentați în fiecare caz curba γ în planul complex $\mathbb{C}$.

(a) $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, $f(z) = 3z + \bar{z}$, $\gamma(t) = t(1 + i)$, $t \in [0, 1]$.

(b) $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, $f(z) = 3z + \bar{z}$, $\gamma(t) = t + t^3i$, $t \in [0, 1]$. De ce rezultatul este diferit de cel de la punctul (a)? (Hint: este f olomorfă?)

(c) $f : \mathbb{C} \setminus \{i\} \rightarrow \mathbb{C}$, $f(z) = \frac{1}{z - i}$, $\gamma(t) = i + e^{4\pi it}$, $t \in [0, 1]$. Observați că z parcurge curba γ de două ori.

(d) $f : \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0] \rightarrow \mathbb{C}$, $f(z) = \text{Ln}(z)$, $\gamma(t) = e^{i\frac{\pi}{2}(2t-1)}$, $t \in [0, 1]$. Nu uitați să vă că asigurați integrala este bine definită pe γ .

(e) $f : \mathbb{C} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{C}$, $f(z) = \frac{\sin z}{z}$, $\gamma(t) = e^{2\pi it}$, $t \in [0, 1]$.

(f) $f : \mathbb{C} \setminus \{\pm i\} \rightarrow \mathbb{C}$, $f(z) = \frac{|z|}{z^2 + 1}$, $\gamma(t) = e^{\pi it}$, $t \in [0, 1]$.

(g) $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, $f(z) = z \cdot e^z$, $\gamma(t) = t + t^2i$, $t \in [0, 1]$.

(h) $f : \mathbb{C} \setminus \{\pm ir\} \rightarrow \mathbb{C}$, $f(z) = \frac{dz}{z^2 + r^2}$, $r \geq 0$ parametru, $\gamma : |z| = 2$ (cercul de rază 2, centrat în 0, parcurs în sens trigonometric).

(i) $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, $f(z) = (\text{Re } z)^2$, $\gamma : |z| = r$, $r > 0$ parametru.

2. Determinați o primitivă olomorfă a funcției f și folosiți-o împreună cu Teorema Leibniz-Newton pentru a calcula integrala lui f pe curba γ .

(a) $f : \mathbb{C} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{C}$, $f(z) = \frac{1}{z^3}$, $\gamma(t) = 1 + ti$, $t \in [0, 1]$.

(b) $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, $f(z) = \sin(z)^3 \cos(z)$, $\gamma(t) = 2t$, $t \in [0, 1]$.

(c) $f : \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0] \rightarrow \mathbb{C}$, $f(z) = \frac{1}{z}$, $\gamma(t) = e^{i\frac{\pi}{2}t}$, $t \in [0, 1]$. De ce nu am ales $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ ca domeniu al lui f ?

(d) $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, $f(z) = 2z \cos(z^2)$, $\gamma : |z| = 3$.

3. Fie funcția $f : D \setminus \{z_0\} \rightarrow \mathbb{C}$ definită de $f(z) = \frac{1}{z - z_0}$.

(a) Verificați că funcția f este olomorfă pe $D \setminus \{z_0\}$.

(b) Fie $\gamma : [a, b] \rightarrow D$ o curbă închisă, simplă, omotopă cu un punct în D astfel încât $z_0 \in \text{Int}(\gamma)$. Fie $r > 0$ astfel încât $\overline{D(z_0, r)} \subset D\gamma$, unde $D\gamma$ este domeniul mărginit de curba γ . Arătați că

$$\int_{\gamma} \frac{dz}{z - z_0} = \int_{C(z_0, r)} \frac{dz}{z - z_0}.$$

4. Calculați următoarele integrale complexe (folosind, eventual, o teoremă a lui Cauchy):

- (a) $\int_{\gamma} (z-i)^n dz$, $n \in \mathbb{Z}$, $\gamma(t) = i + e^{2\pi it}$, $t \in [0, 1]$.
- (b) $\int_{|z|=2} z^n (1-z)^m dz$, $m, n \in \mathbb{Z}$. (Calculați mai întâi în niște cazuri particulare, e.g., $n = 1, m = -1$.)
- (c) $\int_{|z|=1} \frac{e^z}{z} dz$, $\int_{|z|=1} e^z z^{-n} dz$, $n > 1$.
- (d) $\int_{|z|=1} \frac{\cos(z)}{z^2} dz$, $\int_{|z-i|=1} \frac{\sin(z)}{(z-i)^3} dz$.
- (e) $\int_{|z-1|=1} \frac{1}{(z-\frac{1}{2})(z-i)^2} dz$.
- (f) $\int_{|z-1|=1} \frac{1}{z^4-1} dz$.
- (g) $\int_{|z-\pi|=1} z^2 - 6z + 1 dz$.
- (h) $\int_{\square} \frac{e^z \sin(z)}{(z-\pi)^2} dz$, $\square$: pătratul cu vârfurile $\pm 5 \pm 5i$, parcurs în sens trigonometric.
- (i) $\int_{\square} \frac{\sin(z^2)}{z} dz$, $\square$: pătratul cu vârfurile $\pm 1 \pm i$, parcurs în sens trigonometric.

Serii de puteri. Serii Taylor. Serii Laurent. Singularități izolate. Teorema reziduurilor

- 1. Dezvoltați în serie Taylor funcția $f : \mathbf{C} \setminus \{1, -i, i\}$, $f(z) = \frac{1}{(z-1)(z^2+1)}$ în discul $|z| < 1$.
- 2. Dezvoltați în serie Taylor funcția $f : \mathbf{C} \setminus \{-1, -2, -3\}$, $f(z) = \frac{1}{(z+1)(z+2)(z+3)}$ în discul $|z| < 1$.
- 3. Dezvoltați în serie Laurent funcția $f : \mathbf{C} \setminus \{-i, i\}$, $f(z) = \frac{1}{z^2+1}$ în discul punctat $D(-i, 1)$ și în discul punctat $D(i, 1)$.
- 4. Fie $f : \mathbf{C} \setminus \{0, 1, -2\}$, $f(z) = \frac{1}{z(z-1)(z+2)}$.
 - (a) Ce fel de singularități sunt $z_0 = 0, z_1 = 1, z_2 = -2$?
 - (b) Calculați $\text{rez}(f, 0), \text{rez}(f, 1), \text{rez}(f, -2)$;
 - (c) Calculați $\int_{|z-1|=\frac{3}{2}} f(z) dz$
 - (d) Dezvoltați în serie Laurent funcția f în coroana circulară $D(1, 1, 2)$.

5. Fie $f : \mathbf{C} \setminus \{0, i\}, \quad f(z) = \frac{1}{z^2 - iz}$.

(a) Ce fel de singularități sunt $z_0 = 0, z_1 = i$?

(b) Calculați $\operatorname{rez}(f, 0), \operatorname{rez}(f, i)$;

(c) Calculați $\int_{|z|=1/2} f(z)dz, \int_{|z-i|=2} f(z)dz$

6. Fie $f : \mathbf{C} \setminus \{0, -i, i\}, \quad f(z) = \frac{1}{z^3 + z}$.

(a) Ce fel de singularități sunt $z_0 = 0, z_1 = i, z_2 = -i$?

(b) Calculați $\operatorname{rez}(f, 0), \operatorname{rez}(f, i), \operatorname{rez}(f, -i)$;

(c) Calculați $\int_{|z-i|=4} f(z)dz$

(d) Dezvoltați în serie Laurent funcția f în coroana circulară $D(0, 1, 2)$.

Teorema reziduurilor. Aplicații ale Teoremei reziduurilor.

1. Calculați

(a) $\int_{|z|=1} z \cos\left(\frac{1}{z}\right) dz$

(b) $\int_{|z|=1} z \sin\left(\frac{1}{z^2}\right) dz$

(c) $\int_{|z|=1} z^3 e^{\frac{1}{z^2}} dz.$

2. Calculați

(a) $\int_0^{2\pi} \frac{dt}{2 + \cos t}$

(b) $\int_0^{2\pi} \frac{dt}{(2 + \cos t)^2}$

(c) $\int_0^{2\pi} \frac{dt}{2 + \sin t}$