Cercul celor nouă puncte

Vom demonstra aici un alt rezultat celebru din geometria plană, rezultat numit *cercul celor nouă puncte*, dar până atunci vom rezolva următoarea problemă auxiliară:

Problema 1. Dreapta lui Euler[1]**.** *Fiind dat un triunghi ΔABC, notăm cu O centrul cercului circumscris, cu G centrul de greutate şi cu H ortocentrul triunghiului. Arătaţi că punctele H, G şi O sunt coliniare şi, mai mult, $HG = 2OG$.*

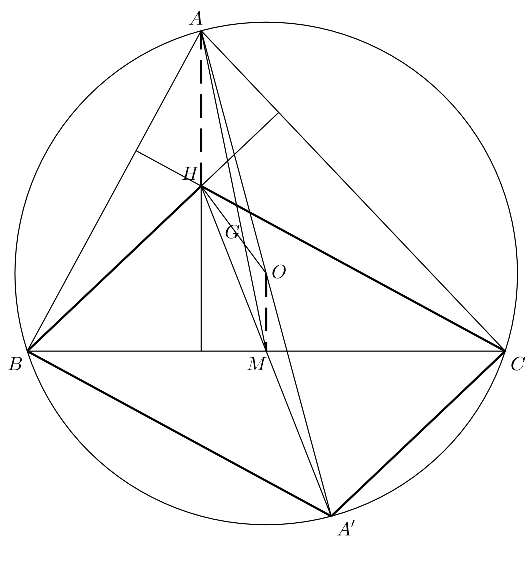

Figura 1: Dreapta lui Euler

Soluţie. *Metoda I, cu numere complexe.* Notăm cu z_A, z_B, z_C şi z_O afixele punctelor A, B, C şi O, şi notăm cu R raza cercului circumscris triunghiului. Considerăm numărul complex

$$h = z_A + z_B + z_C - 2z_O.$$

[1]vezi `https://ro.wikipedia.org/wiki/Dreapta_lui_Euler`

Din

$$< h - z_A, z_B - z_C > = < (z_B - z_O) + (z_C - z_O), (z_B - z_O) - (z_C - z_O) > =$$

$$= |z_B - z_O|^2 - |z_C - z_O|^2 = R^2 - R^2 = 0,$$

rezultă că punctul de afix h se află pe înălţimea din A a triunghiului ΔABC. Din simetria relaţiilor, rezultă că acest punct se află pe oricare altă înălţime, deci h este afixul z_H al ortocentrului triunghiului. Am stabilit relaţia

$$z_H = z_A + z_B + z_C - 2z_O.$$

Se ştie că afixul z_G al centrului de greutate este dat de formula

$$z_G = \frac{z_A + z_B + z_C}{3},$$

prin urmare relaţia demonstrată devine

$$z_H = 3z_G - 2z_O \quad \Leftrightarrow \quad z_H - z_G = 2(z_G - z_O),$$

de unde rezultă că punctele O, G şi H sunt coliniare şi, mai mult, G se află în interiorul segmentului HO şi îl împarte în raportul $HG = 2OG$.

Metoda a II-a, prin geometrie sintetică. Fie M mijlocul laturii BC şi fie A' punctul diametral opus lui A pe cercul circumscris triunghiului ΔABC. Unghiurile $\widehat{ABA'}$ şi $\widehat{ACA'}$ sunt unghiuri drepte, fiind unghiuri înscrise în semicerc. Urmează că patrulaterul $HBA'C$ este paralelogram, prin urmare M este şi mijlocul diagonalei $A'H$. În sfârşit, în triunghiul $\Delta A'HA$ segmentul MO este linie mijlocie, de aici rezultă că HO intersectează mediana AM a triunghiului ΔABC în raportul $2:1$, aşadar punctul lor de intersecţie este chiar G, centrul de greutate.

Problema 2. Cercul celor nouă puncte[2]. *Fiind dat un triunghi ΔABC, notăm cu O centrul cercului circumscris şi cu H ortocentrul triunghiului. Arătaţi că mijloacele laturilor, picioarele înalţimilor şi mijloacele segmentelor de la H la vârfuri sunt nouă puncte conciclice, situate pe un cerc cu centru în mijlocul segmentului OH.*

Soluţie. Relativ la vârful A, notăm cu A_1 piciorul înălţimii din A, cu A_2 mijlocul laturii BC şi cu A_3 mijlocul segmentului AH. Procedăm analog şi cu vârfurile B şi C (vezi Figura 2). Notăm cu Q mijlocul segmentului OH.

[2] vezi `https://en.wikipedia.org/wiki/Nine-point_circle`

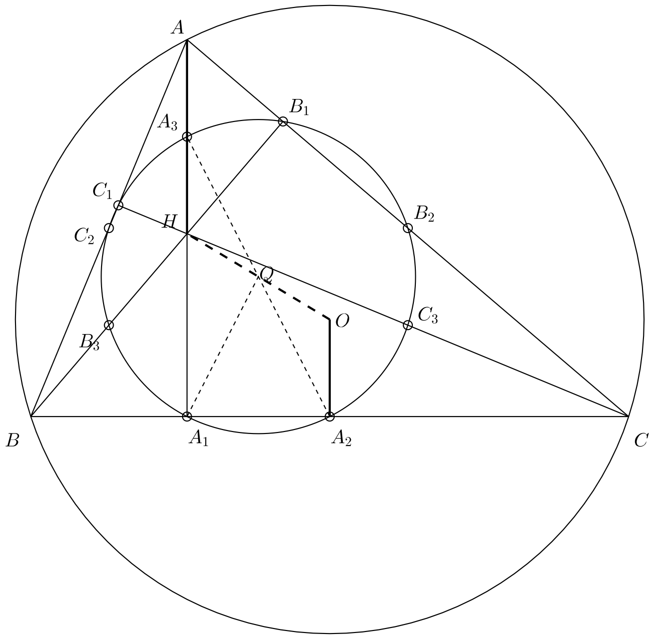

Figura 2: Cercul celor nouă puncte

Metoda I, cu numere complexe. Notăm afixele punctelor considerate cu z_A, z_{A_1}, etc. Din relaţiile stabilite în problema precedentă, deducem

$$z_Q = \frac{z_H + z_O}{2} = \frac{z_A + z_B + z_C - z_O}{2}.$$

Urmează că

$$z_Q - z_{A_2} = z_Q - \frac{z_B + z_C}{2} = \frac{z_A - z_O}{2},$$

de unde obţinem

$$QA_2 = |z_Q - z_{A_2}| = \frac{|z_A - z_O|}{2} = \frac{R}{2},$$

unde am notat cu R raza cercului circumscris triunghiului ΔABC.

Analog

$$z_Q - z_{A_3} = \frac{z_H + z_O}{2} - \frac{z_A + z_H}{2} = \frac{z_O - z_A}{2},$$

deci

$$QA_3 = |z_Q - z_{A_3}| = \frac{|z_O - z_A|}{2} = \frac{R}{2}.$$

Din calculele de mai sus rezultă şi egalitatea

$$z_Q - z_{A_2} = z_{A_3} - z_Q,$$

deci punctul Q este mijlocul segmentului A_2A_3, urmează că vârfurile triunghiului dreptunghic $\Delta A_3A_2A_1$ se află pe cercul $\mathscr{C}(Q, \frac{R}{2})$, de centru Q şi rază $\frac{R}{2}$, cerc care nu depinde de vârful A.

Am justificat astfel că toate cele nouă puncte se află pe cercul $\mathscr{C}(Q, \frac{R}{2})$.

Metoda a II-a, prin geometrie sintetică. Din problema precedentă ştim că $AH = 2OA_2$, deci $A_3H = OA_2$, urmează că în paralelogramul A_3HA_2O punctul Q este şi mijlocul diagonalei A_2A_3. Din $AA_3 = OA_2$ deducem că în paralelogramul AA_3A_2O avem $A_3A_2 = AO = R$, astfel că cercul circumscris triunghiului dreptunghic $\Delta A_3A_2A_1$ este chiar cercul $\mathscr{C}(Q, \frac{R}{2})$, cerc care nu depinde de vârful A.