Coordonate baricentrice

Considerăm în plan un triunghi ΔABC şi un punct Q în interiorul său, fixat arbitrar. Notăm $\sigma_c = \text{aria}\,(\Delta QAB)$ $\sigma_a = \text{aria}\,(\Delta QBC)$, $\sigma_b = \text{aria}\,(\Delta QCA)$ şi $\sigma = \text{aria}\,(\Delta ABC)$, astfel încât $\sigma = \sigma_a + \sigma_b + \sigma_c$.

Fie z_A, z_B, z_C şi z_Q afixele punctelor A, B, C şi Q. Scopul nostru este să arătăm că între aceste numere complexe are loc relaţia

$$z_Q = \frac{\sigma_a}{\sigma} z_A + \frac{\sigma_b}{\sigma} z_B + \frac{\sigma_c}{\sigma} z_C, \tag{1}$$

care spune că scalarii reali

$$\lambda_A = \frac{\sigma_a}{\sigma},\ \lambda_B = \frac{\sigma_b}{\sigma},\ \lambda_C = \frac{\sigma_c}{\sigma},$$

sunt *coordonatele baricentrice absolute* ale lui Q relative la triunghiul ΔABC, adică

$$z_Q = \lambda_A z_A + \lambda_B z_B + \lambda_C z_C \text{ cu } \lambda_A + \lambda_B + \lambda_C = 1,\ \lambda_A, \lambda_B, \lambda_C \in \mathbb{R}. \tag{2}$$

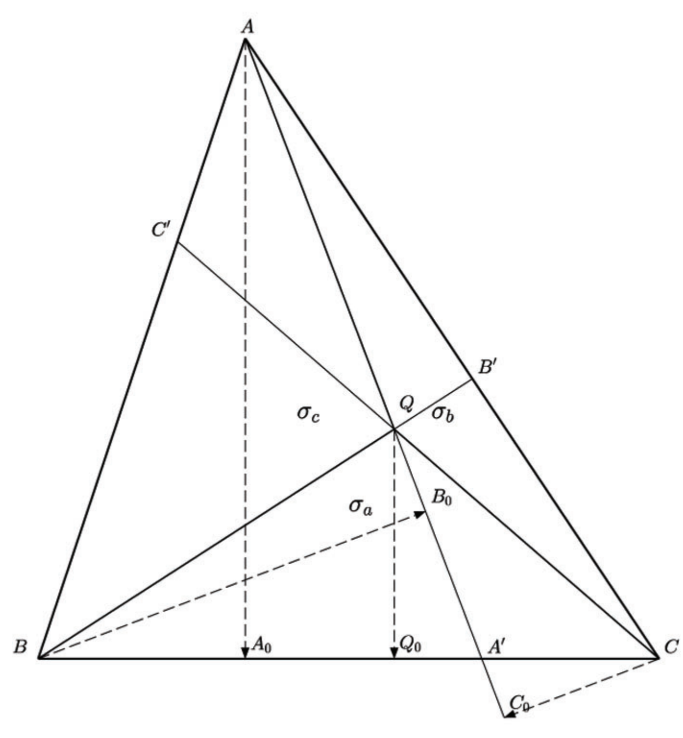

FIGURA 1. Coordonate baricentrice

Fie A', B' şi C' intersecţiile dreptelor AQ, BQ şi CQ cu laturile opuse. Amintim că dreptele AQ, BQ şi CQ se numesc *ceviene* deoarece sunt trei drepte concurente duse prin vârfurile unui triunghi.

Lema 1. *Raportul în care ceviana AQ împarte latura opusă vârfului A este egal cu rapotul ariilor triunghiurilor ΔQAB şi ΔQCA, mai precis*

$$\frac{BA'}{A'C} = \frac{\sigma_c}{\sigma_b}.$$

Demonstraţia este imediată. Fie B_0 şi C_0 proiecţiile ortogonale ale punctelor B şi C pe AQ. Avem:

$$\frac{\sigma_c}{\sigma_b} = \frac{\frac{1}{2}AQ \cdot BB_0}{\frac{1}{2}AQ \cdot CC_0} = \frac{BB_0}{CC_0} = \frac{BA'}{A'C}.$$

Fără legătură directă cu scopul nostru, doar pentru a evidenţia utilitatea acestei leme, vom demonstra:

Teorema lui Ceva. *Dreptele AA', BB' şi CC' sunt concurente dacă şi numai dacă*

$$\frac{BA'}{A'C} \cdot \frac{CB'}{B'A} \cdot \frac{AC'}{C'B} = 1.$$

Demonstraţie. Dacă ştim că AA', BB' şi CC' sunt concurente într-un punct Q, atunci, conform lemei,

$$\frac{BA'}{A'C} \cdot \frac{CB'}{B'A} \cdot \frac{AC'}{C'B} = \frac{\sigma_c}{\sigma_b} \cdot \frac{\sigma_a}{\sigma_c} \cdot \frac{\sigma_b}{\sigma_a} = 1.$$

Afirmaţia reciprocă se demonstrează prin reducere la absurd, folosind unicitatea punctului care împarte un segment într-un raport dat.

Un alt rezultat auxiliar:

Lema 2. *Raportul în care Q împarte ceviana AA' este dat de rapotul ariilor triunghiurilor ΔQBC şi ΔABC, mai precis*

$$\frac{QA'}{AA'} = \frac{\sigma_a}{\sigma}.$$

Demonstraţie. Fie A_0 şi Q_0 proiecţiile ortogonale ale punctelor A şi Q pe BC. Atunci:

$$\frac{\sigma_a}{\sigma} = \frac{\frac{1}{2}BC \cdot QQ_0}{\frac{1}{2}BC \cdot AA_0} = \frac{QQ_0}{AA_0} = \frac{QA'}{AA'}.$$

Probăm şi utilitatea acestei leme, justificând

Teorema lui Van Aubel. *Cu notaţiile precizate, are loc relaţia*

$$\frac{AQ}{QA'} = \frac{AC'}{C'B} + \frac{AB'}{B'C}.$$

Demonstraţia constă în *proporţii derivate*:

$$\frac{AA'}{QA'} = \frac{\sigma}{\sigma_a} \;\Leftrightarrow\; \frac{AA' - QA'}{QA'} = \frac{\sigma - \sigma_a}{\sigma_a} \;\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\; \frac{AQ}{QA'} = \frac{\sigma_b}{\sigma_a} + \frac{\sigma_c}{\sigma_a} \;\Leftrightarrow\; \frac{AQ}{QA'} = \frac{AC'}{C'B} + \frac{AB'}{B'C}.$$

În sfârşit, să revenim la formula coordonatelor baricentrice. Din coliniaritatea $B - A' - C$ şi din proporţia

$$\frac{BA'}{A'C} = \frac{\sigma_c}{\sigma_b}$$

deducem

$$\frac{z_{A'} - z_B}{z_C - z_{A'}} = \frac{\sigma_c}{\sigma_b} \;\Leftrightarrow\; z_{A'} = \frac{\sigma_b z_B + \sigma_c z_C}{\sigma_b + \sigma_c}.$$

Analog, din $A - Q - A'$ şi

$$\frac{QA'}{AA'} = \frac{\sigma_a}{\sigma},$$

obţinem

$$\frac{z_{A'} - z_Q}{z'_A - z_A} = \frac{\sigma_a}{\sigma} \;\Leftrightarrow\; z_Q = \frac{\sigma_a}{\sigma} z_A + \left(1 - \frac{\sigma_a}{\sigma}\right) z_{A'}.$$

Deoarece $\sigma = \sigma_a + \sigma_b + \sigma_c$, urmează formula căutată:

$$z_Q = \frac{\sigma_a}{\sigma} z_A + \frac{\sigma_b + \sigma_c}{\sigma} \cdot \frac{\sigma_b z_B + \sigma_c z_C}{\sigma_b + \sigma_c} = \frac{\sigma_a z_A + \sigma_b z_B + \sigma_c z_C}{\sigma}.$$

Observaţie. Am justificat formula (1) numai în cazul în care Q este în interiorul triunghiului ΔABC, caz în care $\lambda_A > 0$, $\lambda_B > 0$ şi $\lambda_C > 0$. Relaţia rămâne valabilă şi pentru Q în exteriorul triunghiului ΔABC, dacă se consideră *triunghiuri orientate*: aria se ia cu semnul $+$ dacă triunghiul este parcurs în sens trigonometric, şi cu semnul $-$ dacă este parcurs în sens antitrigonometric, astfel încât relaţia

$$\sigma = \sigma_a + \sigma_b + \sigma_c$$

să se păstreze în toate cazurile.

Observaţie. Relaţia (1), scrisă sub forma

$$z_Q = \frac{\sigma_a z_A + \sigma_b z_B + \sigma_c z_C}{\sigma_a + \sigma_b + \sigma_c}. \tag{3}$$

ne spune că σ_a, σ_b şi σ_c sunt *coordonate baricentrice omogene* pentru punctul Q şi notăm aceasta prin

$$\sigma_a : \sigma_b : \sigma_c.$$

Spre deosebire coordonatele baricentrice absolute, λ_A, λ_B şi λ_C, definite de relaţia (2), coordonatele baricentrice omogene nu sunt unice, două triplete direct proporţionale $\alpha_1 : \beta_1 : \gamma_1$ şi $\alpha_2 : \beta_2 : \gamma_2$ determinând acelaşi punct Q. Altfel spus, prin definiţie,

$$\alpha_1 : \beta_1 : \gamma_1 = \alpha_2 : \beta_2 : \gamma_2$$

dacă există factorul de proporţionalitate $\lambda \in \mathbb{R}$ astfel încât

$$\alpha_2 = \lambda\alpha_1,\ \beta_2 = \lambda\beta_1, \gamma_2 = \lambda\gamma_1,$$

caz în care

$$\frac{\alpha_1 z_A + \beta_1 z_B + \gamma_1 z_C}{\alpha_1 + \beta_1 + \gamma_1} = \frac{\alpha_2 z_A + \beta_2 z_B + \gamma_2 z_C}{\alpha_2 + \beta_2 + \gamma_2},$$

pentru orice ΔABC plan.

Exerciţiu. *Să se determine coordonatele baricentrice ale unui punct Q situat în interiorul triunghiului ΔABC cunoscând rapoartele în care cevienele prin Q împart laturile triunghiului.*

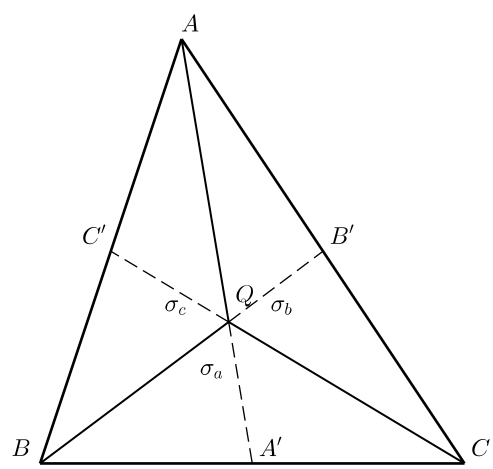

FIGURA 2. Punctul Q.

Rezolvare. Presupunem cunoscute rapoartele

$$\delta_{AB} = \frac{AC'}{C'B},\quad \delta_{BC} = \frac{BA'}{A'C},\quad \delta_{CA} = \frac{CB'}{B'A}.$$

Cu aceste notaţii avem

$$\delta_{BA} = \frac{BC'}{C'A} = \frac{1}{\delta_{AB}},\quad \delta_{CB} = \frac{CA'}{A'B} = \frac{1}{\delta_{BC}},\quad \delta_{AC} = \frac{AB'}{B'C} = \frac{1}{\delta_{CA}},$$

şi menţionăm că teorema lui Ceva se scrie sub forma

$$\delta_{AB} \cdot \delta_{BC} \cdot \delta_{CA} = 1 = \delta_{AC} \cdot \delta_{CB} \cdot \delta_{BA}.$$

Din **Lema 1** avem relaţiile

$$\frac{\sigma_b}{\sigma_a} = \delta_{AB} \quad \frac{\sigma_c}{\sigma_b} = \delta_{BC},\quad \frac{\sigma_a}{\sigma_c} = \delta_{CA},$$

de unde obţinem, de exemplu,

$$\sigma_b = \delta_{AB}\sigma_a, \quad \sigma_c = \delta_{AC}\sigma_a,$$

deci

$$\sigma = \sigma_a + \sigma_b + \sigma_c = (1 + \delta_{AB} + \delta_{AC})\sigma_a$$

şi, prin urmare,

$$\lambda_A = \frac{\sigma_a}{\sigma} = \frac{1}{1 + \delta_{AB} + \delta_{AC}}.$$

Celelalte coordonate baricentrice absolute se obţin prin permutări circulare:

$$\lambda_B = \frac{\sigma_b}{\sigma} = \frac{1}{1 + \delta_{BC} + \delta_{BA}}$$

şi

$$\lambda_C = \frac{\sigma_c}{\sigma} = \frac{1}{1 + \delta_{CA} + \delta_{CB}}.$$

Puncte importante în triunghi

Punctul G, centrul de greutate, se află la intersecţia medianelor, prin urmare,

$$1 = \frac{BA'}{A'C} = \frac{\sigma_c}{\sigma_b} \Rightarrow \sigma_b = \sigma_c,$$

şi, analog pentru celelalte laturi.

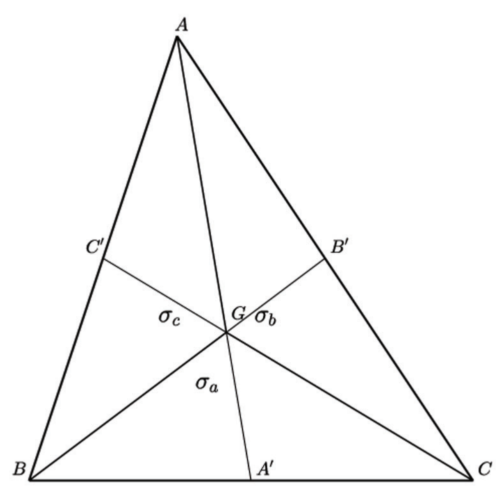

Figura 3. Punctul G.

Obţinem $\sigma_a = \sigma_b = \sigma_c = \dfrac{\sigma}{3}$, deci centrul de greutate are coordonatele baricentrice omogene

$$\sigma_a : \sigma_b : \sigma_c = \frac{\sigma}{3} : \frac{\sigma}{3} : \frac{\sigma}{3} = 1 : 1 : 1$$

şi afixul

$$z_G = \frac{z_A + z_B + z_C}{3}.$$

Punctul I, centrul de cercului înscris, se află la intersecţia bisectoarelor interioare. Aplicând teorema bisectoarei, avem

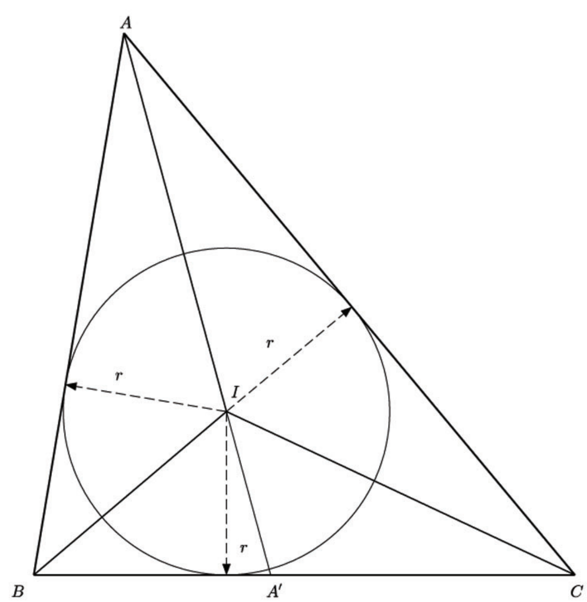

FIGURA 4. Punctul I.

$$\frac{c}{b} = \frac{BA'}{A'C} = \frac{\sigma_c}{\sigma_b} \Rightarrow \frac{\sigma_b}{b} = \frac{\sigma_c}{c},$$

şi, analog, pentru celelalte laturi. Obţinem

$$\frac{\sigma_a}{a} = \frac{\sigma_b}{b} = \frac{\sigma_c}{c}$$

adică $\sigma_a : \sigma_b : \sigma_c = a : b : c$. Acelaşi rezultat se obţine şi calculând ariile triunghiurilor cu vârful în I utilizând raza r a cercului înscris:

$$\sigma_a = \frac{ar}{2} \Rightarrow \frac{\sigma_a}{a} = \frac{r}{2} = \text{const.}$$

În concluzie, punctul I are coordonatele omogene

$$\sigma_a : \sigma_b : \sigma_c = a : b : c$$

şi afixul

$$z_I = \frac{az_A + bz_B + cz_C}{a+b+c}.$$

Punctul O, centrul de cercului circumscris, se află la intersecţia mediatoarelor laturilor.

Fie $\mathscr{C}(O, R)$ cercul circumscris triunghiului ΔABC. Unghiul la centru $\sphericalangle BOC$ are măsura cât arcul 7.0pt$\overset{\frown}{\mathrm{BC}}$ de pe cerc, iar unghiul înscris în cerc $\sphericalangle BAC$ are măsura jumătate din măsura lui 7.0pt$\overset{\frown}{\mathrm{BC}}$. Rezultă că

$$\sphericalangle BOC = 2A,$$

prin urmare

$$\sigma_a = \text{aria}\,(\Delta BOC) = \frac{1}{2} OB \cdot OC \sin \sphericalangle BOC = \frac{1}{2} R^2 \sin 2A.$$

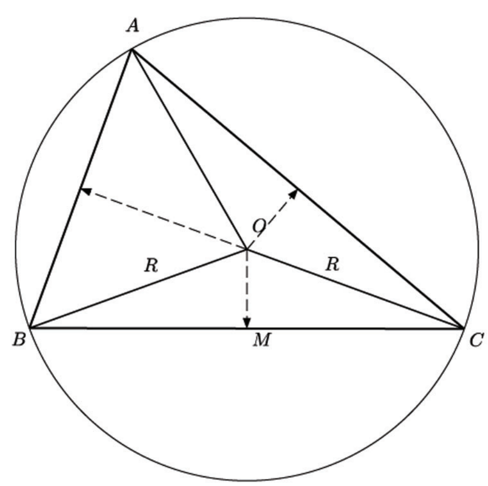

Figura 5. Punctul O.

Obţinem proporţionalitatea

$$\frac{\sigma_a}{\sin 2A} = \frac{\sigma_b}{\sin 2B} = \frac{\sigma_c}{\sin 2C} = \frac{1}{2} R^2,$$

deci, pentru punctul O, avem

$$\sigma_a : \sigma_b : \sigma_c = \sin 2A : \sin 2B : \sin 2C,$$

şi, prin urmare,

$$z_O = \frac{\sin 2A\, z_A + \sin 2B\, z_B + \sin 2C\, z_C}{\sin 2A + \sin 2B + \sin 2C}.$$

Alt set de coordonate omogene pentru O se obţine aplicând *teorema sinusurilor* şi *teorema cosinusului*. Să le reamintim. În triunghiul isoscel ΔBOC mediana OM este şi bisectoare, şi înălţime, deci

$$\sphericalangle BOM = \frac{1}{2}\sphericalangle BOC = A,$$

de unde urmează

$$\sin A = \sin \sphericalangle BOM = \frac{BM}{BO} = \frac{a}{2R}.$$

Obţinem astfel teorema sinusurilor:

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R,$$

de unde rezultă

$$a : b : c = \sin A : \sin B : \sin C,$$

relaţie utilă la determinarea punctului I, de exemplu.

Pentru teorema cosinusului, calculăm $a^2 = |z_C - z_B|^2$ cu ajutorul produsului scalar. Pentru oricare două numere complexe $u, v \in \mathbb{C}$ avem

$$|u+v|^2 = < u+v, u+v > = < u, u > + 2 < u, v > + < v, v > =$$

$$= |u|^2 + 2 < u, v > + |v|^2,$$

prin urmare

$$a^2 = |z_C - z_B|^2 = |(z_C - z_A) + (z_A - z_B)|^2 =$$

$$= |z_C - z_A|^2 + 2 < z_C - z_A, z_A - z_B > + |z_A - z_B|^2 =$$

$$= |z_C - z_A|^2 - 2 < z_C - z_A, z_B - z_A > + |z_B - z_A|^2 = b^2 - 2bc\cos A + c^2,$$

şi am demonstrat astfel teorema cosinusului:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A.$$

Revenim la coordonatele baricentrice ale punctului O şi calculăm

$$\sin 2A = 2\sin A\cos A = 2\cdot\frac{a}{2R}\cdot\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc},$$

de unde urmează că fracţia

$$\frac{\sin 2A}{a^2(b^2+c^2-a^2)} = \frac{1}{Rabc} = \text{const.}$$

este constantă la permutări circulare ale vârfurilor triunghiului.

Am arătat că punctul O admite şi următorul set de coordonate baricentrice omogene:

$$a^2(b^2+c^2-a^2) : b^2(c^2+a^2-b^2) : c^2(a^2+b^2-c^2).$$

Punctul H, ortocentrul, este punctul de intersecţie al înălţimilor. Fie A' punctul diametral opus lui A în $\mathscr{C}(O,R)$, cercul circumscris triunghiului ΔABC. Avem

$$\sphericalangle ABA' = \sphericalangle ACA' = 90^\circ,$$

ca unghiuri înscrise în semicerc. Rezultă imediat că $HBA'C$ este un paralelogram, deci

$$BH = A'C = AA' \cos \sphericalangle AA'C = 2R\cos B$$

şi

$$CH = A'B = AA' \cos \sphericalangle AA'B = 2R\cos C$$

deoarece $\sphericalangle AA'C = \sphericalangle ABC$ şi $\sphericalangle AA'B = \sphericalangle ACB$, ca unghiuri înscrise în cerc care subîntind acelaşi arc.

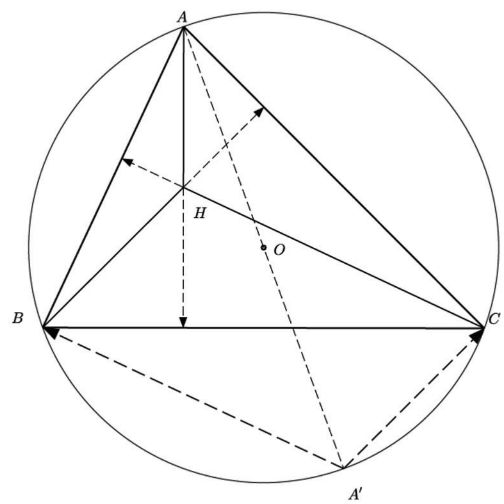

Figura 6. Punctul H.

Mai avem şi

$$\sphericalangle BHC = \sphericalangle BA'C = 180^\circ - A,$$

de unde urmează

$$\sigma_a = \text{aria}\,(\Delta BHC) = \frac{1}{2} BH \cdot CH \sin \sphericalangle BHC =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot 2R\cos B \cdot 2R \cos C \cdot \sin(180^\circ - A) = 2R^2 \cos B \cos C \sin A =$$

$$= 2R^2 \cos B \cos C \cos A \operatorname{tg} A.$$

Fracţia

$$\frac{\sigma_a}{\operatorname{tg} A.} = 2R^2 \cos B \cos C \cos A = \text{const.}$$

fiind invariantă la permutări circulare, am obţinut umătoarele coordonate omogene pentru ortocentru:

$$\sigma_a : \sigma_b : \sigma_c = \operatorname{tg} A : \operatorname{tg} B : \operatorname{tg} C,$$

şi, prin urmare,

$$z_H = \frac{\operatorname{tg} A\, z_A + \operatorname{tg} B\, z_B + \operatorname{tg} C\, z_C}{\operatorname{tg} A + \operatorname{tg} B + \operatorname{tg} C}.$$

Să observăm că, din egalitatea

$$\sigma_a = 2R^2 \cos B \cos C \sin A = 2R^2 \cdot \frac{a^2+c^2-b^2}{2ac} \cdot \frac{b^2+a^2-c^2}{2ba} \cdot \frac{a}{2R}$$

urmează că

$$\frac{\sigma_a}{(a^2+c^2-b^2)(b^2+a^2-c^2)} = \frac{R}{4abc} = \text{const.}$$

şi astfel obţinem încă un set de coordonate omogene pentru H:

$$(a^2+c^2-b^2)(b^2+a^2-c^2) : (b^2+a^2-c^2)(c^2+b^2-a^2) : (c^2+b^2-a^2)(a^2+c^2-b^2).$$

Transformarea baricentrică

Fiind date în plan triunghiurile ΔABC şi $\Delta A'B'C'$, putem defini imediat următoarea transformare afină care suprapune aceste două triunghiuri: pentru fiecare punct Q în plan considerăm coordonatele sale baricentrice absolute λ_A, λ_B şi λ_C relative la ΔABC şi definim transformatul său, Q', ca fiind punctul care are exact aceste coordonate baricentrice, dar relative la triunghiul $\Delta A'B'C'$. Altfel spus, cu numere complexe, dacă

$$z_Q = \lambda_A z_A + \lambda_B z_B + \lambda_C z_C,$$

cu $\lambda_A + \lambda_B + \lambda_C = 1$, atunci

$$z_{Q'} = \lambda_A z_{A'} + \lambda_B z_{B'} + \lambda_C z_{C'}.$$

Este clar că transformarea $Q' = T(Q)$ este bijectivă şi este uşor de văzut că este o transformare afină, înţelegând prin aceasta că între coordonatele lui Q şi Q' există relaţii de forma

$$\begin{cases} x_{Q'} = a_1 x_Q + b_1 y_Q + c_1 \\ y_{Q'} = a_2 x_Q + b_2 y_Q + c_2. \end{cases}$$

Această afirmaţie se justifică observând că, notând cu $\sigma_{\Delta XYZ}$ aria unui triunghi ΔXYZ, avem pentru λ_A, de exemplu, relaţia

$$\lambda_A = \frac{\sigma_{\Delta QBC}}{\sigma_{\Delta ABC}} = \frac{1}{2\sigma_{\Delta ABC}} \begin{vmatrix} 1 & x_Q & y_Q \\ 1 & x_B & y_B \\ 1 & x_C & y_C \end{vmatrix} = a x_Q + b y_Q + c,$$

unde coeficienţii a, b şi c nu depind de Q.

Pentru calculul cu numere complexe este foarte utilă următoarea formulă

$$2\sigma_{\Delta ABC} = \begin{vmatrix} 1 & x_A & y_A \\ 1 & x_B & y_B \\ 1 & x_C & y_C \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & x_A & y_A \\ 0 & x_B - x_A & y_B - y_A \\ 0 & x_C - x_A & y_C - y_A \end{vmatrix} =$$
$$= (x_B - x_A)(y_C - y_A) - (x_C - x_A)(y_C - y_A) =$$
$$= \operatorname{Im}(z_B - z_A)\overline{(z_C - z_A)}.$$

Prin urmare, considerând pentru Q următorul set de coordonate omogene relativ la ΔABC

$$\sigma_{\Delta QBC} : \sigma_{\Delta QCA} : \sigma_{\Delta QAB},$$

obţinem că

$$\mu_A = \operatorname{Im}(z_B - z_Q)\overline{(z_C - z_Q)},$$
$$\mu_B = \operatorname{Im}(z_C - z_Q)\overline{(z_A - z_Q)},$$
$$\mu_C = \operatorname{Im}(z_A - z_Q)\overline{(z_B - z_Q)},$$

formează alt set de coordonate omogene şi avem, în final,

$$z_{Q'} = \frac{\mu_A z_{A'} + \mu_B z_{B'} + \mu_C z_{C'}}{\mu_A + \mu_B + \mu_C} = \frac{\mu_A z_{A'} + \mu_B z_{B'} + \mu_C z_{C'}}{2\sigma_{\Delta ABC}}.$$