Cursul 3

Planul numerelor complexe

Mulţimea numerelor complexe este, prin definiţie, $\mathbb{C} = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$. După cum ştim, fiind dat într-un plan π un reper ortonormat, produsul cartezian $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R}\times\mathbb{R}$ poate fi identificat cu mulţimea punctelor planului π, notând cu $Z(x, y)$ punctul de coordonate $\mathbf{z} = (x, y) \in \mathbb{R}^2$. Prin urmare, fiecărui punct din plan îi corespunde câte un număr complex, numit *afixul punctului*, iar această corespondenţă este bijectivă. Vom spune că π este *planul numerelor complexe*, prin analogie cu *axa numerelor reale*, şi îl vom identifica cu $\mathbb{C}$, notând în acelaşi fel punctul $Z(x, y)$ şi afixul său, $z = (x, y) = x + iy$.

Mai mult, produsul cartezian $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ se structurează în mod natural ca spaţiu liniar real de dimensiune 2, definind adunarea şi înmulţirea cu scalari pe componente:

$$(x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2), \quad \forall\, (x_1, y_1), (x_2, y_2) \in \mathbb{R}^2,$$

şi

$$\alpha(x, y) = (\alpha x, \alpha y), \quad \forall\, \alpha \in \mathbb{R}, (x, y) \in \mathbb{R}^2.$$

Notând $\vec{u} = (1, 0), \vec{i} = (0, 1)$, orice vector $\vec{z} = (x, y)$ din acest spaţiu se scrie ca

$$\vec{z} = (x, y) = x\vec{u} + y\vec{i},$$

adică este vectorul de poziţie $\vec{z} = \overrightarrow{OZ}$ al punctului $Z(x, y)$ în reperul ortonormat $\{O, \vec{u}, \vec{i}\}$.

In continuare vom utiliza în mod sistematic identificarea

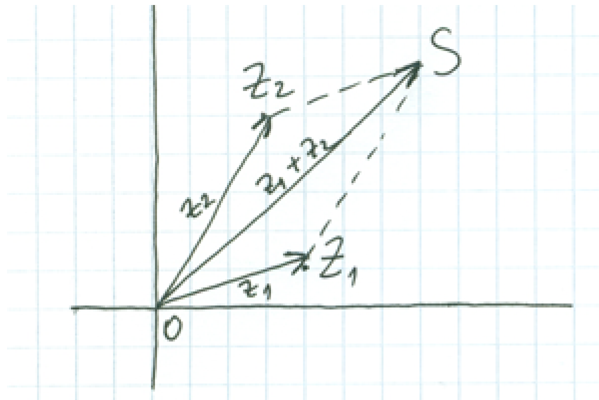
$$z = \mathbf{z} = Z = \vec{z},$$

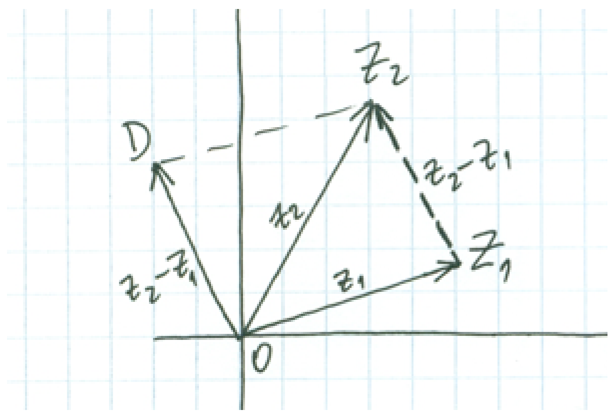
altfel spus, vom nota în acelaşi mod, când nu există pericol de confuzie, un număr complex, o pereche de numere reale, un punct şi un vector.

§1. Adunarea numerelor complexe

Prin identificarea descrisă mai sus, definiţiile adunării în $\mathbb{C}$ şi $\mathbb{R}^2$ coincid, rezultă că adunarea numerelor complexe are loc după *regula paralelogramului*: vectorul $\overrightarrow{OS}$ corespunzător sumei $s = z_1 + z_2$ este diagonala paralelogramului format de vectorii $\overrightarrow{OZ_1}$ şi $\overrightarrow{OZ_2}$.

Analog, vectorul de poziţie $\overrightarrow{OD}$ corespunzător diferenţei $d = z_2 - z_1$ este vectorul liber $\overrightarrow{Z_1Z_2}$ translatat cu Z_1 în origine (astfel încât $\overrightarrow{OZ_2}$ să fie diagonala paralelogramului format de $\overrightarrow{OZ_1}$ şi $\overrightarrow{OD}$. Spunem că suma $z_1 + z_2$ este diagonala paralelogramului format de vectorii z_1 şi z_2, iar diferenţa $z_2 - z_1$ este vectorul $\overrightarrow{z_1z_2}$.

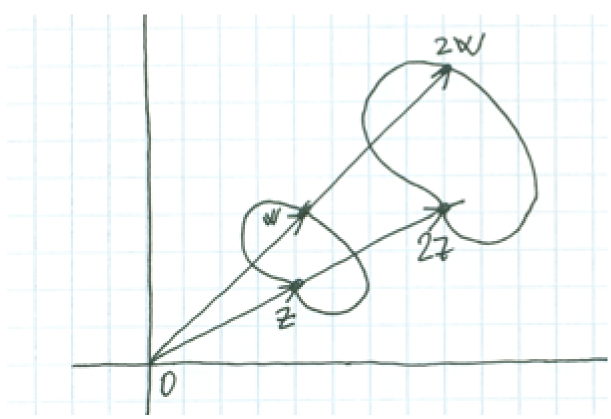




Cu acest prilej să observăm că înmulţirea cu scalari din spaţiul liniar $\mathbb{R}^2$ este de fapt înmulţirea în $\mathbb{C}$ dintre un număr real şi un număr complex, deoarece

$$\alpha\vec{z} = \alpha(x,y) = (\alpha x, \alpha y) = (\alpha, 0)(x,y) = \alpha z.$$

Urmează că înmulţirea cu numere reale reprezintă, în planul numerelor complexe, *o scalare*, adică o mărire/micşorare la scară cu centru în originea O. De exemplu, *produsul cu 2*, adică aplicaţia $z \to 2z$, măreşte figurile din plan de două ori privind din origine (este o omotetie cu centru O şi raport 2).



§2. Înmulţirea numerelor complexe

Forma trigonometrică ne permite să dăm o interpretare remarcabilă înmulţirii numerelor complexe.

Să calculăm produsul lui $\omega = \alpha(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ cu $z = \rho(\cos\theta + i\sin\theta)$. Avem

$$\begin{aligned}\omega z &= \alpha\rho[(\cos\varphi\cos\theta - \sin\varphi\sin\theta) + i(\sin\varphi\cos\theta + \cos\varphi\sin\theta)]\\ &= \alpha\rho(\cos(\varphi+\theta) + i\sin(\varphi+\theta))\end{aligned}$$

de unde obţinem că

$$|\omega z| = |\omega||z|$$

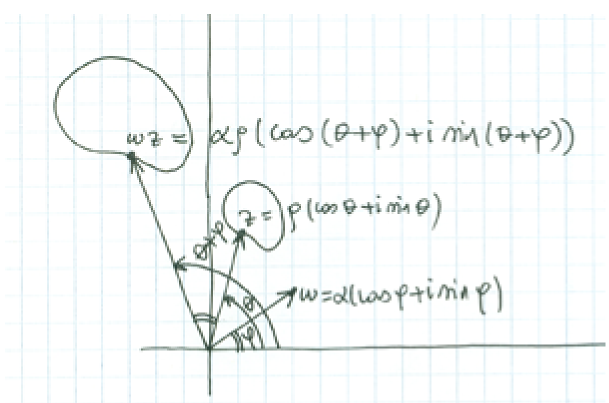
şi

$$\arg\omega z = \arg\omega + \arg z \pmod{2\pi}.$$

Deci, la înmulţirea numerelor complexe, modulele se înmulţesc iar argumentele se adună. Deducem de aici că *produsul cu* $\omega = \alpha(\cos\varphi + i\sin\varphi)$, adică aplicaţia

$$z \to \omega z,$$

reprezintă *o scalare* de factor α compusă cu *o rotaţie* de unghi φ în sens trigonometric în jurul originii.



In particular, *înmulţirea cu* i, care are modulul 1 şi argumentul $\frac{\pi}{2}$ *radiani*, este o rotaţie de $90°$ în sens trigonometric în jurul originii. Prin urmare, produsul cu i^2 înseamnă două rotaţii de $90°$ în acelaşi sens, adică de o rotaţie de $180°$, exact transformarea geometrică asociată produsului cu -1. Iată o interpretare geometrică elegantă a egalităţii $i^2 = -1$.

Să reamintim şi celebra *formulă a lui Moivre* (Abraham de Moivre (1667 – 1754), matematician francez): dacă $z = \rho(\cos\theta + i\sin\theta)$ atunci pentru orice $n \in \mathbb{Z}$ avem

$$z^n = \rho^n(\cos n\theta + i\sin n\theta).$$

Această formulă permite, printre altele, şi următoarea extindere la exponenţi reali pozitivi a operaţiei de ridicare la putere a unui număr complex:

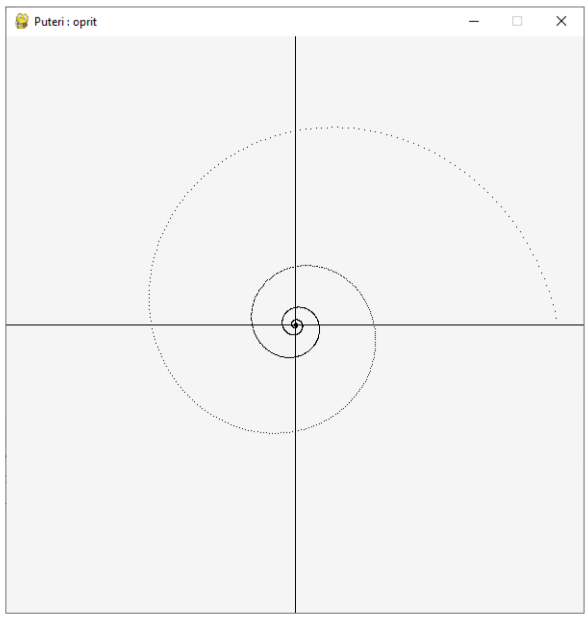
$$z^\alpha = \rho^\alpha(\cos\alpha\theta + i\sin\alpha\theta),$$

pentru orice $\alpha \in (0, +\infty)$.

Programul următor reprezintă grafic puterile numărului

$$z = \frac{995}{1000}(\cos\frac{\pi}{120} + i\sin\frac{\pi}{120}).$$

Deoarece $|z^n| = |z|^n = 0.995^n \to 0$ pentru $n \to +\infty$, puterile lui z de exponent $n = 1, 2, 3, \ldots$ vor forma un şir de puncte care se apropie de origine, rotindu-se în jurul ei la fiecare pas cu $\pi/120$ radiani, şi parcurgând astfel o spirală îndreptată către zero.




```
import ComplexPygame as C
import Color
import math

def Puteri():
    C.setXminXmaxYminYmax(-1.1, 1.1, -1.1, 1.1)
    C.fillScreen()
    C.setAxis()
    z = C.fromRhoTheta(0.995, math.pi / 120)
    p = 1
    for k in range(10000):
        p *= z
        C.setPixel(p, Color.Black)
        if C.mustClose():
            return

if __name__ == '__main__':
    C.initPygame()
    C.run(Puteri)
```

§3. Rădăcinile unităţii.

Considerăm un număr natural fixat $n \geq 1$, notăm

$$\theta = \frac{2\pi}{n}$$

şi definim

$$\varepsilon = \cos\theta + i\sin\theta.$$

Este uşor de văzut că primele n puteri ale lui ε,

$$1, \varepsilon, \varepsilon^2, \varepsilon^3, \ldots, \varepsilon^{n-1},$$

date de formula

$$z_k = \varepsilon^k = \cos k\theta + i\sin k\theta,$$

sunt distincte şi sunt vârfurile unui poligonului regulat cu n laturi înscris în cercul unitate. Deoarece pentru orice $k \in \{0, 1, 2, \ldots, n-1\}$ avem

$$z_k^n = \cos nk\theta + i\sin nk\theta = \cos 2k\pi + i\sin 2k\pi = 1,$$

deducem că mulţimea

$$U_n = \{1, \varepsilon, \varepsilon^2, \varepsilon^3, \ldots, \varepsilon^{n-1}\}$$

este formată din cele n soluţii în $\mathbb{C}$ ale ecuaţiei

$$z^n = 1.$$

U_n se numeşte mulţimea rădăcinilor de ordin n ale unităţii şi are o structură de grup în raport cu înmulţirea. Puterile lui ε se repetă din n în n, mai precis avem

$$\varepsilon^k \varepsilon^h = \varepsilon^{k+h \pmod n}$$

şi prin urmare aplicaţia $\varepsilon^k \to k$ este un izomorfism între $(U_n, \cdot)$ şi grupul $(\mathbb{Z}_n, +)$ al claselor de resturi modulo n.

§4. Conjugatul unui număr complex

Pentru a efectua împărţirea a două numere complexe sub formă algebrică avem nevoie de operaţia de conjugare.

Conjugatul lui $z = x + iy$ este $\bar{z} = x - iy$ şi are proprietatea esenţială

$$z\bar{z} = x^2 + y^2 = |z|^2 \in \mathbb{R}.$$

Operaţia de conjugare (adică aplicaţia $z \to \bar{z}$) reprezentă trecerea de la un punct la simetricul său în raport cu axa reală, prin urmare conjugarea păstrează operaţiile:

$$\begin{aligned}
\overline{z_1 + z_2} &= \overline{z}_1 + \overline{z}_2,\\
\overline{z_1 - z_2} &= \overline{z}_1 - \overline{z}_2,\\
\overline{z_1 z_2} &= \overline{z}_1 \overline{z}_2,\\
\overline{z_1 / z_2} &= \overline{z}_1 / \overline{z}_2.
\end{aligned}$$

In sfârşit, pentru $z = x + iy$ avem

$$\mathcal{R}e\, z = x = \frac{z + \bar{z}}{2} \text{ şi } \mathcal{I}m\, z = y = \frac{z - \bar{z}}{2i}.$$

Este util de ţinut minte că, dacă $|z| = 1$ atunci $\bar{z} = \frac{1}{z}$.

Să observăm că pentru oricare trei puncte z_1, z_2 şi z_3 necoliniare, triunghiurile $\Delta z_1 z_2 z_3$ şi $\Delta \overline{z}_1 \overline{z}_2 \overline{z}_3$ sunt totdeauna congruente, fără ca ele să poată fi suprapuse numai prin prin translaţii şi rotaţii.

§5. Împărţirea numerelor complexe.

Sub formă algebrică, împărţirea a două numere complexe se efectuează prin amplificare cu conjugatul numitorului:

$$\frac{a+ib}{x+iy} = \frac{(a+ib)(x-iy)}{(x+iy)(x-iy)} = \frac{ax+by}{x^2+y^2} + i\frac{bx-ay}{x^2+y^2}.$$

După cum rezultă imediat din proprietăţile înmulţirii, raportul a două numere complexe sub formă trigonometrică, $z_1 = \rho_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1) \neq 0$ şi $z_2 = \rho_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)$ este

$$\frac{z_2}{z_1} = \frac{\rho_2}{\rho_1}(\cos(\theta_2-\theta_1) + i\sin(\theta_2-\theta_1)).$$

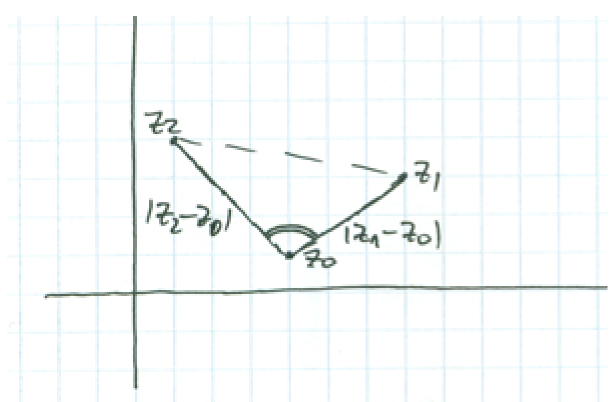
Deducem că modulul raportului z_2/z_1 este raportul lungimilor vectorilor z_2 şi z_1 iar argumentul raportului z_2/z_1 este unghiul $\widehat{z_1 0 z_2}$ dintre cei doi vectori.

O interpretare remarcabilă vom avea într-un triunghi $\Delta z_0 z_1 z_2$ în care, dacă ţinem cont că diferenţele $z_2 - z_0$ şi $z_1 - z_0$ sunt laturi, avem

$$\left|\frac{z_2-z_0}{z_1-z_0}\right| = \frac{|z_2-z_0|}{|z_1-z_0|} = \frac{Z_0Z_2}{Z_0Z_1}$$

şi

$$\arg\frac{z_2-z_0}{z_1-z_0} = \widehat{Z_1Z_0Z_2}.$$



Reţinem: raportul a două laturi este numărul complex care are modulul egal cu raportul lungimilor laturilor şi argumentul egal cu unghiul dintre cele două laturi. Deducem de aici că triunghiurile (orientate) $\Delta z_0 z_1 z_2$ şi $\Delta z_0{}' z_1{}' z_2{}'$ sunt asemenea dacă şi numai dacă

$$\frac{z_2'-z_0'}{z_1'-z_0'} = \frac{z_2-z_0}{z_1-z_0}$$

sau

$$\frac{z_2' - z_0'}{z_1' - z_0'} = \frac{\overline{z}_2 - \overline{z}_0}{\overline{z}_1 - \overline{z}_0}.$$

În primul caz spunem că triunghiurile sunt *direct-asemenea*, iar în al doilea caz spunem că sunt *invers-asemenea*.

Punctele z_0, z_1 şi z_2 sunt coliniare când unghiul $\widehat{Z_1 Z_0 Z_2}$ are 0 sau π radiani, deci atunci când raportul celor două laturi,

$$\frac{z_2 - z_0}{z_1 - z_0} = \lambda,$$

are argumentul 0 sau π şi, prin urmare, este număr real. Deducem de aici caracterizarea: punctul z_2 care împarte segmentul $z_0 z_1$ în raportul

$$\lambda = \frac{|z_2 - z_0|}{|z_1 - z_0|}$$

este dat de egalitatea

$$\lambda = \frac{z_2 - z_0}{z_1 - z_0},$$

şi, prin urmare,

$$z_2 = z_0 + \lambda(z_1 - z_0).$$

Urmează că dreapta determinată de două puncte distincte, z_0 şi z_1, admite reprezentarea parametrică

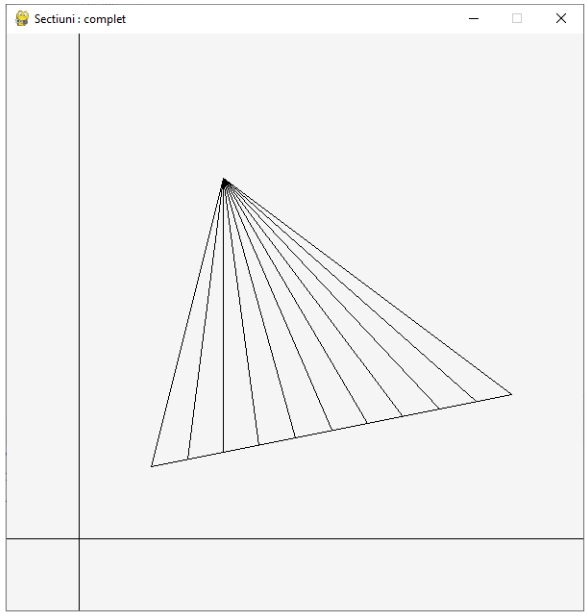
$$z = z_0 + t(z_1 - z_0), \quad t \in \mathbb{R}.$$

Ca aplicaţie, următorul program secţionează triunghiul Δabc în zece felii de arii egale:

```
import ComplexPygame as C
import Color
def Sectiuni():
    def Sectioneaza(a, b, c, nrSectoare):
        C.drawLine(b, c, Color.Black)
        for k in range(nrSectoare + 1):
            C.drawLine(a, b + k * (c - b) / nrSectoare, Color.Black)

    C.setXminXmaxYminYmax(-1, 7, -1, 7)
    C.fillScreen()
    C.setAxis()
    a = 2 + 5j
    b = 1 + 1j
    c = 6 + 2j
    Sectioneaza(a, b, c, 10)

if __name__ == '__main__':
    C.initPygame()
    C.run(Sectiuni)
```



§6. Produsul scalar.

Fie $z_1 = x_1 + iy_1$ şi $z_2 = x_2 + iy_2$ afixele punctelor Z_1 şi Z_2. După cum ştim, prin produsul scalar al vectorilor $\overrightarrow{OZ_1}$ şi $\overrightarrow{OZ_2}$ se înţelege numărul real

$$\overrightarrow{OZ_1} \cdot \overrightarrow{OZ_2} = \|OZ_1\| \|OZ_2\| \cos \sphericalangle Z_1 O Z_2$$

şi se calculează pe coordonate cu formula

$$\overrightarrow{OZ_1} \cdot \overrightarrow{OZ_2} = x_1 x_2 + y_1 y_2.$$

Din acest motiv, vom defini *produsul scalar* al numerelor complexe z_1 şi z_2 prin

$$< z_1, z_2 >= x_1 x_2 + y_1 y_2 = \operatorname{Re} z_1 \bar{z}_2 = \frac{1}{2}(z_1 \bar{z}_2 + \bar{z}_1 z_2).$$

Următoarele proprietăţi ale produsului scalar sunt evidente:

- $< z, z >= |z|^2$
- $< u, v >=< v, u >$
- $< z, u + v >=< z, u > + < z, v >$
- $< \lambda u, v >= \lambda < u, v >=< u, \lambda v >, \ \forall \lambda \in \mathbb{R}.$
- $< z_1, z_2 >= 0 \Leftrightarrow OZ_1 \perp OZ_2$
- $< uz, vz >= |z|^2 < u, v >$

Produsul scalar este util la caracterizarea perpendicularităţii: dacă A, B, C şi D au afixele a, b, c şi d, atunci

$$AB \perp CD \Leftrightarrow < b - a, d - c >= 0 \Leftrightarrow \frac{b - a}{d - c} = \lambda i, \lambda \in \mathbb{R}.$$

Exemplu. Fie H ortocentrul şi O centrul cercului circumscris triunghiului ΔABC. Arătaţi că între afixele h, o, a, b şi c ale acestor puncte are loc relaţia

$$h = a + b + c - 2o.$$

Rezolvare Fie $\tilde{h} = a + b + c - 2o$. Din

$$< \tilde{h} - a, b - c >=< (b - o) + (c - o), (b - o) - (c - o) >= |b - o|^2 - |c - o|^2 = 0,$$

rezultă că $\tilde{H}$ se află pe înălţimea din A a triunghiului ΔABC. Din simetria relaţiilor, rezultă că $\tilde{H}$ este pe oricare înălţime, deci este ortocentrul triunghiului.

§7. Transformări geometrice.

Identificând în continuare $\mathbb{C}$ cu mulţimea punctelor unui plan, prin *figură geometrică* vom înţelege, în cele ce urmează, o mulţime oarecare F de numere complexe, prin *transformare geometrică* o aplicaţie $T : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, iar prin *transformata figurii* F mulţimea formată din transformatele punctelor lui F:

$$F' = T(F) = \{z' = T(z),\ z \in F\}.$$

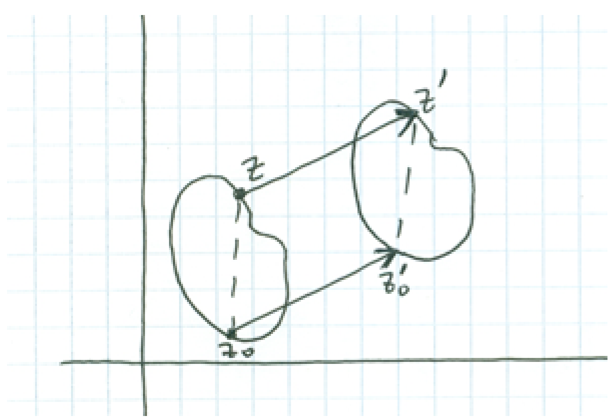
Pe baza interpretării geometrice a operaţiilor cu numere complexe, avem următoarele caracterizări ale transformărilor întâlnite în geometria planului.

§7.1. Translaţia. Dorim să translatăm o figură F astfel încât un punct fixat $z_0 \in F$ să ajungă într-un z_0' fixat în F'. Fie $z \in F$ şi $z' \in F'$ transformatul său. Vectorii $\overrightarrow{zz'}$ şi $\overrightarrow{z_0z_0'}$ trebuie să fie egali, deci $z' - z = z_0' - z_0$, de unde rezultă $z' = z + (z_0' - z_0)$.

In concluzie, transformarea $T : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ dată de

$$T(z) = z + (z_0' - z_0),\ z \in \mathbb{C},$$

este *translaţia de vector* $\overrightarrow{z_0z_0'}$.

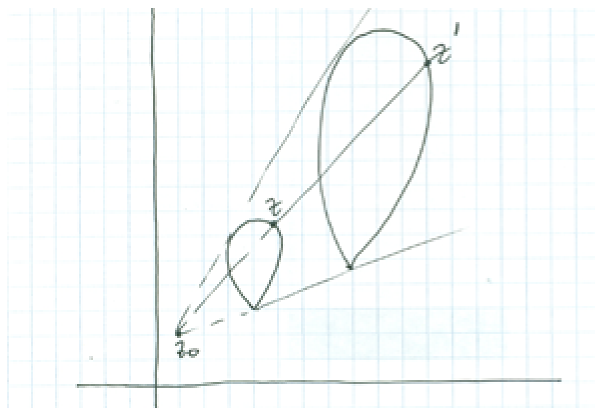


§7.2. Omotetia. Fixăm un punct $z_0 \in \mathbb{C}$ şi un număr real $\lambda > 0$. Fiind dată o figură F, dorim să o "mărim la scară" cu factorul λ relativ la centrul z_0. Fie $z \in F$ şi $z' \in F'$ transformatul său. Cerem ca punctele z_0, z şi z' să fie coliniare şi raportul segmentelor $z_0 z'$ şi $z_0 z$ să fie λ, de unde rezultă că $z' = z_0 + \lambda(z - z_0)$.

In concluzie, transformarea $T : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ dată de

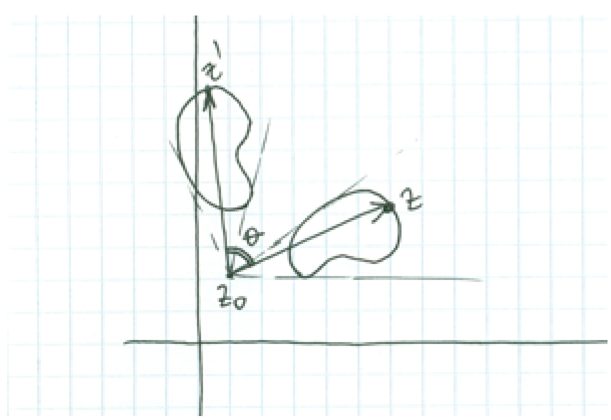
$$T(z) = z_0 + \lambda(z - z_0), \ z \in \mathbb{C},$$

cu $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$, este *omotetia de centru z_0 şi raport λ*.



§7.3. Rotaţia. Dorim să rotim o figură F în jurul unui punct fix $z_0 \in \mathbb{C}$ cu un unghi θ. Considerăm un $z \in F$, notăm cu $z' \in F'$ transformatul său şi definim numărul complex ω prin

$$\omega = \frac{z' - z_0}{z - z_0}.$$



Avem

$$|\omega| = \frac{|z' - z_0|}{|z - z_0|} = 1$$

şi

$$\arg = \widehat{z' z_0 z} = \theta = \text{const.},$$

de unde rezultă că $\omega = \cos\theta + i\sin\theta$.

Rotaţia de centru z_0 şi unghi θ este dată de transformarea $T : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ definită de

$$T(z) = z_0 + \omega(z - z_0),\ \ z \in \mathbb{C},$$

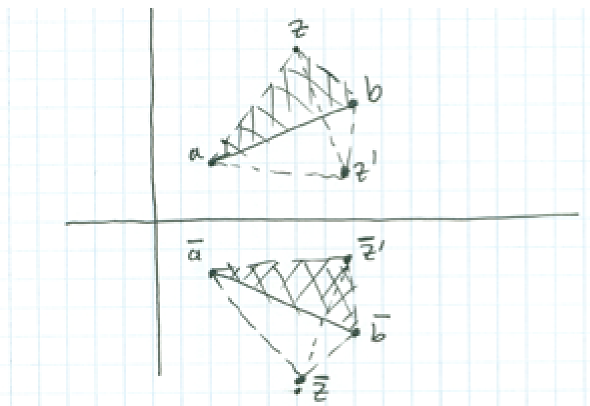
cu $\omega = \cos\theta + i\sin\theta$.

§7.4. Simetria faţă de un punct. Punctul z' este simetricul lui z faţă de z_0 dacă $z' - z_0 = -(z - z_0)$ şi, prin urmare,

$$T(z) = 2z_0 - z,\ \ z \in \mathbb{C},$$

este *simetria faţă de punctul* z_0.

§7.5. Simetria faţă de o dreaptă. Fie d_{ab} dreapta determinată de două puncte distincte a şi b din $\mathbb{C}$. Dorim să determinăm simetricul z' al unui punct z faţă de dreapta d_{ab}.



Considerăm conjugatele $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{z}$ şi $\bar{z'}$ care, după cum ştim, sunt simetricele punctelor a, b, z şi z' faţă de axa reală. Din egalitatea

$$\frac{z' - a}{b - a} = \frac{\bar{z} - \bar{a}}{\bar{b} - \bar{a}},$$

dată de congruenţa triunghiurilor $\Delta a z' b$ şi $\Delta \bar{a}\bar{z}\bar{b}$, obţinem mai departe

$$z' = a + \frac{b - a}{\bar{b} - \bar{a}}(\bar{z} - \bar{a}).$$

În concluzie, *simetria faţă de dreapta determinată de punctele a şi b* este transformarea $T : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ dată de

$$T(z) = a + \omega(\overline{z} - \overline{a}),\ \ z \in \mathbb{C},$$

cu $\omega = \dfrac{b - a}{\overline{b} - \overline{a}}$.

§7.6. Asemănarea. Fie λ un număr real strict pozitiv. Numim *asemănare* de raport $\lambda > 0$ o transformare $T : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, cu proprietatea

$$|T(z_1) - T(z_2)| = \lambda |z_1 - z_2|,$$

pentru orice $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$. Dacă $\lambda = 1$, spunem că T este o *izometrie.*

Se ştie că orice izometrie poate fi scrisă ca o compunere formată dintr-o translaţie, o rotaţie şi, eventual, o simetrie faţă de o dreaptă. Mai departe, orice asemănare poate fi scrisă ca o compunere dintre o izometrie şi o omotetie.

Este uşor de văzut că, în planul complex, orice asemănare este de forma

$$T(z) = a + \omega z,$$

sau

$$\widetilde{T}(z) = a + \omega \overline{z},$$

cu a şi $\omega \neq 0$ numere complexe oarecare, unde $\lambda = |\omega| > 0$ este raportul de asemănare.

Spunem că T este o *asemănare directă*, o asemănare care păstrează mărimea unghiurilor, în timp ce $\widetilde{T}$ este o *asemănare inversă*, deoarece inversează semnul mărimii unghiurilor.

De exemplu, simetria faţă de o dreapă este o *izometrie inversă.* Într-adevăr, simetria faţă de dreapta ab are forma

$$T(z) = a + \omega(\overline{z} - \overline{a}) = (a - \omega\overline{a}) + \omega\overline{z},\ \forall z \in \mathbb{C},$$

unde $\omega = \dfrac{b-a}{\overline{b}-\overline{a}}$ are modulul $|\omega| = 1$.

Este clar că asemănările duc triunghiuri în triunghiuri asemenea şi, în consecinţă, transformă poligoane în poligoane asemenea. Din acest motiv, două figuri $F, F' \subset \mathbb{C}$ se numesc *figuri asemenea*, (*direct-asemenea* sau *invers-asemenea*), dacă există o asemănare T, (directă sau inversă), astfel încât $T(F) = F'$.

Orice pereche de triunghiuri asemenea $\Delta z_0 z_1 z_2 \sim \Delta u_0 u_1 u_2$ determină în mod unic o asemănare T astfel încât $T(z_0) = u_0$, $T(z_1) = u_1$ şi $T(z_2) = u_2$. De fapt transformarea T este determinată, până la sensul direct sau invers, de oricare pereche de segmente care se corespund.

Teoremă. *Fiind date punctele $z_1 \neq z_2$ şi $u_1 \neq u_2$, există o unică asemănare directă T astfel încât $T(z_1) = u_1$ şi $T(z_2) = u_2$ şi o unică asemănare inversă $\widetilde{T}$ astfel încât $\widetilde{T}(z_1) = u_1$ şi $\widetilde{T}(z_2) = u_2$.*

Demonstraţie. Fie z un punct necoliniar cu $z_1 z_2$. Notăm $u = T(z)$. Asemănarea directă T se determină din condiţia ca triunghiul $\Delta u u_1 u_2$ să fie direct asemenea cu $\Delta z z_1 z_2$, condiţie care, după cum am văzut la interpretarea geometrică a împărţirii numerelor complexe, înseamnă

$$\frac{u - u_1}{u_2 - u_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1},$$

de unde urmează că

$$T(z) = u_1 + \frac{u_2 - u_1}{z_2 - z_1}(z - z_1).$$

Observăm că $T(z) = a + \omega z$ cu $\omega = \dfrac{u_2 - u_1}{z_2 - z_1}$ şi $a = u_1 - \omega z_1$, deci T este o asemănare directă.

Asemănarea inversă $u = \widetilde{T}(z)$ se determină din condiţia ca triunghiul $\Delta u u_1 u_2$ să fie invers-asemenea cu $\Delta z z_1 z_2$. Aceasta însemnă că $\Delta u u_1 u_2$ este direct-asemenea cu $\Delta \overline{z}\overline{z}_1\overline{z}_2$, de unde avem

$$\frac{u - u_1}{u_2 - u_1} = \frac{\bar{z} - \overline{z}_1}{\overline{z}_2 - \overline{z}_1},$$

şi, prin urmare,

$$\widetilde{T}(z) = u_1 + \frac{u_2 - u_1}{\overline{z}_2 - \overline{z}_1}(\overline{z} - \overline{z}_1).$$

În final, observăm că $\widetilde{T}(z) = a + \omega\overline{z}$, cu $\omega = \dfrac{u_2 - u_1}{\overline{z}_2 - \overline{z}_1}$ şi $a = u_1 - \omega\overline{z}_1$, deci $\widetilde{T}$ este o asemănare inversă. $\square$