Cursul 4

Topologia numerelor complexe

1. Şiruri şi serii în $\mathbb{C}$. Prin *distanţa* dintre $z_1 = x_1 + iy_1$ şi $z_2 = x_2 + iy_2$ înţelegem lungimea segmentului determinat de punctele z_1 şi z_2 din planul complex:

$$d(z_1, z_2) = |z_2 - z_1| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}.$$

Se verifică imediat că aplicaţia $d : \mathbb{C} \times \mathbb{C} \to \mathbb{R}$ are proprietăţile unei *metrici*:

(M_1) $\forall\, u, v \in \mathbb{C},\ d(u, v) \geq 0;\ d(u, v) = 0 \Leftrightarrow u = v;$
(M_2) $\forall\, u, v \in \mathbb{C},\ d(u, v) = d(v, u);$
(M_3) $\forall\, u, v, w \in \mathbb{C},\ d(u, v) \leq d(u, w) + d(w, v);$

şi, prin urmare, $(\mathbb{C}, d)$ este un *spaţiu metric.* Aceasta înseamnă că avem gata definite, din teoria generală a spaţiilor metrice, o serie de noţiuni legate de convergenţa şirurilor şi de continuitatea funcţiilor.

Un şir $(z_n)_n$ de numere complexe este *convergent* dacă există $z^* \in \mathbb{C}$, limita sa, astfel încât şirul distanţelor de la z_n la z^* să tindă la zero:

$$\lim_{n\to\infty} z_n = z^* \ \Leftrightarrow\ \lim_{n\to\infty} |z_n - z^*| = 0 \ \Leftrightarrow$$
$$\forall\, \varepsilon > 0,\ \exists N(\varepsilon) \in \mathbb{N} \text{ a. î. } n \geq N(\varepsilon) \Rightarrow |z_n - z^*| < \varepsilon.$$

Convergenţa şirurilor se caracterizează pe componente,

$$\lim_{n\to\infty} z_n = \lim_{n\to\infty} (x_n + iy_n) = x^* + iy^* \ \Leftrightarrow\ \lim_{n\to\infty} x_n = x^* \text{ şi } \lim_{n\to\infty} y_n = y^*,$$

datorită dublei inegalităţi

$$\max\{|\mathrm{Re}\, z|, |\mathrm{Im}\, z|\} \leq |z| \leq |\mathrm{Re}\, z| + |\mathrm{Im}\, z|.$$

Orice şir convergent este mărginit, fără ca reciproca să aibe loc.

Un şir care nu este convergent este numit şir *divergent.* Despre un şir spunem că *tinde la infinit* dacă şirul modulelor sale tinde la plus infinit:

$$\lim_{n\to\infty} z_n = \infty \ \Leftrightarrow\ \lim_{n\to\infty} |z_n| = +\infty.$$

Atenţie la limitele infinite: la şirurile de numere reale există limitele $-\infty$ şi $+\infty$, în $\mathbb{C}$ avem numai ∞ fără semn!

Şirurile care tind la infinit sunt nemărginite, deci divergente, dar nu toate şirurile nemărginite tind la infinit.

Exemplu. Să se studieze şirul puterilor unui număr complex $\omega \in \mathbb{C}$.

Rezolvare. Fie $\omega = \rho(\cos\theta + i\sin\theta)$. Atunci $\omega^n = \rho^n(\cos n\theta + i \sin n\theta)$ şi deci, dacă $|\omega| = \rho < 1$ atunci $\omega^n \to 0$ deoarece

$$\rho^n \cos n\theta \to 0 \ \text{ şi } \rho^n \sin n\theta \to 0,$$

dacă $\rho > 1$ atunci $\omega^n \to \infty$ deoarece $|\omega^n| = \rho^n \to +\infty$, iar dacă $|\rho| = 1$ şirul rămâne pe cercul unitate, fiind convergent numai în cazul în care este constant, adică pentru $\omega = 1$, în rest fiind periodic (când raportul π/θ este raţional) sau dens distribuit pe cercul unitate. Reţinem:

$$\lim_{n\to\infty} \omega^n = \begin{cases} \infty \ \text{ pentru } |\omega| > 1; \\ 0 \ \text{ pentru } |\omega| < 1; \\ 1, \ \text{ pentru } \omega = 1; \\ \nexists \text{ pentru } |\omega| = 1 \text{ cu } \omega \neq 1; \end{cases}$$

Şirul $(z_n)_n$ se numeşte *şir Cauchy* dacă:

$$\forall\, \varepsilon > 0,\ \exists N(\varepsilon) \in \mathbb{N} \text{ a. î. } n, m \geq N(\varepsilon) \Rightarrow |z_n - z_m| < \varepsilon.$$

Spaţiul metric $(\mathbb{C}, d)$ coincide cu $\mathbb{R}^2$ dotat cu metrica uzuală, deducem că $\mathbb{C}$ este *complet*: orice şir Cauchy de numere complexe este convergent.

Deoarece convergenţa este caracterizată pe componente iar operaţiile în $\mathbb{C}$ au fost definite pe componente, deducem imediat că din $u_n \to u^* \in \mathbb{C}$ şi $z_n \to z^* \in \mathbb{C}$ rezultă

(a) $u_n + z_n \to u^* + z^*$;
(b) $u_n z_n \to u^* z^*$;
(c) $\overline{z}_n \to \overline{z^*}$;
(d) $|z_n| \to |z^*|$;
(e) $u_n/z_n \to u^*/z^*$ (aici se cere $z^* \neq 0$ şi $\forall n,\ z_n \neq 0$);

Să observăm că reciproca implicaţiei $z_n \to z^* \ \Rightarrow |z_n| \to |z^*|$, are loc numai în cazul $z^* = 0$.

Analog cazului real, pot fi formulate şi unele reguli de calcul cu limite infinite, de exemplu

$$\frac{1}{\infty} = 0, \quad \text{adică: } z_n \to \infty \ \Rightarrow \ \frac{1}{z_n} \to 0.$$

Atenţie, nu toate regulile din $\mathbb{R}$ sunt valabile în $\mathbb{C}$, de exemplu acum $\infty + \infty$ este caz de nedeterminare. În plus, apar reguli noi, cum ar fi:

$$\frac{1}{0} = \infty, \quad \text{adică: } z_n \to 0 \ \Rightarrow \ \frac{1}{z_n} \to \infty.$$

În concluzie, deoarece convergenţa în $\mathbb{C}$ este compatibilă cu operaţiile, unele limite de şiruri pot fi stabilite prin calcul, analog cazului real.

Exemplu. Să se calculeze

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(1+i)^n + 1}{(1+i)^n - 1}.$$

Rezolvare. Notăm $\omega = 1 + i$. Deoarece $|\omega| = \sqrt{2} > 1$ avem $\omega^n \to \infty$, prin urmare

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\omega^n + 1}{\omega^n - 1} = \lim_{n\to\infty} \frac{\cancel{\omega^n}\left(1 + \frac{1}{\omega^n}\right)}{\cancel{\omega^n}\left(1 - \frac{1}{\omega^n}\right)} = \frac{1 + \frac{1}{\infty}}{1 - \frac{1}{\infty}} = \frac{1+0}{1-0} = 1.$$

Fie $(z_n)_n$ un şir de numere complexe. Exact ca în cazul seriilor de numere reale, spunem că *seria*

$$\sum_{n=0}^{\infty} z_n = z_0 + z_1 + z_2 + \cdots + z_n + \cdots ,$$

are *suma* s, cu $s \in \mathbb{C}$ sau $s = \infty$, dacă *şirul sumelor sale parţiale*

$$s_n = z_0 + z_1 + \cdots + z_n$$

are limita s, adică

$$\sum_{n=0}^{\infty} z_n = \lim_{n\to\infty} (z_0 + z_1 + \cdots + z_n) = s.$$

Seria este *convergentă* dacă are sumă finită (adică $s \in \mathbb{C}$), altfel este *divergentă*. Din proprietatea de completitudine, rezultă că seria dată este convergentă dacă şi numai dacă satisface condiţia de tip Cauchy:

$$\forall\, \varepsilon > 0,\ \exists N(\varepsilon) \in \mathbb{N} \text{ a. î. } \forall n \geq N(\varepsilon), \forall p \geq 1 \text{ avem } \sum_{k=1}^{p} z_{n+k} < \varepsilon.$$

Din caracterizarea pe componente a convergenţei în $\mathbb{C} = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, rezultă că seria $\sum\limits_{n=0}^{\infty} z_n = \sum\limits_{n=0}^{\infty} (x_n + iy_n)$ este convergentă dacă şi numai dacă ambele serii de numere reale $\sum\limits_{n=0}^{\infty} x_n$ şi $\sum\limits_{n=0}^{\infty} y_n$ sunt convergente, caz în care are loc egalitatea

$$\sum_{n=0}^{\infty} (x_n + iy_n) = \sum_{n=0}^{\infty} x_n + i \sum_{n=0}^{\infty} y_n.$$

Exemplu. Să se studieze convergenţa *seriei geometrice*

$$1 + \omega + \omega^2 + \omega^3 + \cdots + \omega^n + \cdots$$

în mulţimea numerelor complexe.

Rezolvare. Şirul sumelor parţiale este dat de formula

$$s_n = 1 + \omega + \omega^2 + \cdots + \omega^n = \begin{cases} \dfrac{1-\omega^{n+1}}{1-\omega} & \text{pentru } \omega \neq 1, \\ n+1 & \text{pentru } \omega = 1, \end{cases}$$

şi este convergent numai dacă $|\omega| < 1$, caz în care limita este $\frac{1}{1-\omega}$.

Reţinem: în mulţimea numerelor complexe, seria geometrică cu raţia ω este convergentă numai dacă $|\omega| < 1$, şi atunci are suma

$$1 + \omega + \omega^2 + \cdots + \omega^n + \cdots = \frac{1}{1-\omega},$$

rezultat analog cazului real.

Seria $\sum_{n=0}^{\infty} z_n$ se numeşte *absolut convergentă* dacă seria de numere reale cu termeni pozitivi $\sum_{n=0}^{\infty} |z_n|$ este convergentă. Din proprietatea de completitudine, rezultă că orice serie absolut convergentă este convergentă, dar reciproca nu are loc.

Exemplu. Să se arate că seria

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{i^n}{n}$$

este convergentă fără să fie absolut convergentă.

Rezolvare. Notăm $z_n = \frac{i^n}{n} = \frac{1}{n}\left(\cos\frac{n\pi}{2} + i\sin\frac{n\pi}{2}\right)$. Avem

$$\sum_{n=0}^{\infty} |z_n| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = +\infty,$$

deci seria nu este absolut convergentă, în timp ce atât seria părţilor reale

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}\cos\frac{n\pi}{2} = -\frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{6} + \cdots,$$

cât şi seria părţilor imaginare

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}\sin\frac{n\pi}{2} = \frac{1}{1} - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \cdots,$$

sunt, conform criteriului lui Leibniz, convergente.

2. Mulţimi deschise şi mulţimi închise în $\mathbb{C}$. Fie $z_0 \in \mathbb{C}$ şi $r > 0$. Notăm cu

$$D(z_0, r) = \{z \in \mathbb{C} \ \text{ pentru care } \ |z - z_0| < r\}$$

discul deschis de centru z_0 şi rază r. Mulţimea $V \subset \mathbb{C}$ se numeşte *vecinătate* pentru $z_0 \in \mathbb{C}$ dacă există $r > 0$ astfel încât $D(z_0, r) \subset V$, caz în care spunem că z_0 este *punct interior* lui V. Mulţimea punctelor interioare unei mulţimi A se notează cu $\mathring{A}$.

Mulţimea $D \subset \mathbb{C}$ se numeşte *deschisă* dacă $D = \emptyset$ sau dacă D este vecinătate pentru orice $z \in D$, altfel spus, dacă $D = \mathring{D}$. Se verifică imediat că mulţimea $\mathbb{C}$ este deschisă, că intersecţia a două mulţimi deschise este deschisă şi că reuniunea oricărei familii de mulţimi deschise este deschisă. Amintim că acestea sunt proprietăţile definitorii pentru clasa mulţimilor deschise ale unui *spaţiu topologic*.

Mulţimea $F \subset \mathbb{C}$ se numeşte *închisă* dacă $\mathbb{C} \setminus F$ este deschisă. Din legile lui De Morgan rezultă imediat că intersecţia oricărei familii de mulţimi închise este închisă. Urmează că pentru fiecare mulţime $A \subset \mathbb{C}$ există o cea mai mică (în sensul incluziunii) mulţime închisă care conţine pe A, mulţime notată cu $\overline{A}$ şi numită *închiderea* mulţimii A. Mai precis, dacă notăm cu $\mathcal{F}_A$ familia mulţimilor închise care conţin mulţimea A, atunci

$$\overline{A} = \bigcap_{F \in \mathcal{F}_A} F.$$

Închiderea $\overline{A}$ este formată din limitele şirurilor de elemente din A, altfel spus: $a^* \in \overline{A}$ dacă şi numai dacă există un şir $(a_n)_n$ din A astfel încât $a_n \to a^*$. Elementele lui $\overline{A}$ se numesc *puncte aderente* mulţimii A.

Frontiera mulţimii A se notează

$$\partial A = \overline{A} \cap \overline{\mathbb{C} \setminus A},$$

şi este formată, aşadar, din punctele aderente atât mulţimii A cât şi complementarei sale.

Numărul complex $a^* \in \mathbb{C}$ se numeşte *punct de acumulare* pentru mulţimea $A \subset \mathbb{C}$ dacă este punct aderent mulţimii $A \setminus \{a^*\}$, adică dacă există un şir $(a_n)_n$ din $A \setminus \{a^*\}$ astfel încât $a_n \to a^*$. Dacă $a^* \in A$, dar a^* nu este punct de acumulare pentru A, atunci a^* se numeşte *punct izolat* al mulţimii A.

Până acum, în toate definiţiile şi caracterizările din această secţiune, am lucrat numai cu şiruri convergente, adică cu şiruri care au limita finită. Pentru a lucra şi cu şiruri care tind la infinit, este comod să adăugăm la mulţimea numerelor complexe $\mathbb{C}$ încă un element, notat cu simbolul ∞ şi numit *punctul de la infinit*. Mulţimea $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$ este numită *planul complex extins* şi se notează cu $\overline{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$, notaţie care sugerează că punctul de la infinit este punct de acumulare pentru mulţimea $\mathbb{C}$. Vom topologiza mulţimea $\overline{\mathbb{C}}$ astfel încât această afirmaţie să fie adevărată, definind vecinătăţile punctului de la infinit astfel: mulţimea $V \subset \overline{\mathbb{C}}$ se numeşte *vecinătate a punctului* ∞ dacă există $r > 0$ astfel încât $\mathbb{C} \setminus D(0, r) \subset V$.

Utilizând definiţia cu vecinătăţi a limitelor, este uşor de văzut că un şir $(z_n)_n$ din $\mathbb{C}$ are limita ∞ în această topologie, dacă şi numai dacă $|z_n| \to +\infty$, aşa cum ne-am propus.

Planul complex extins are o interpretare geometrică remarcabilă, dată de *proiecţia stereografică* a unei sfere pe un plan care trece prin centrul sferei. Mai precis, considerăm

$$\mathcal{S} = \{(x, y, u) \in \mathbb{R}^3 \text{ pentru care } x^2 + y^2 + u^2 = 1\}$$

sfera unitate din $\mathbb{R}^3$ centrată în origine şi o înzestrăm cu topologia de subspaţiu din $\mathbb{R}^3$. Cu alte cuvinte, o mulţime $U \subset \mathcal{S}$ este deschisă în topologia lui $\mathcal{S}$ dacă şi numai dacă există o submulţime deschisă $D \subset \mathbb{R}^3$ astfel încât $U = D \cap \mathcal{S}$.

Notăm cu π planul xOy, de ecuaţie $u = 0$, şi cu $N(0, 0, 1)$ punctul numit *polul nord* al sferii unitate. Fie $P(x_P, y_P, u_P) \in \mathcal{S}$ cu $P \neq N$, şi fie $Z(x_Z, y_Z, 0)$ punctul de intersecţie al dreptei NP cu planul π. Corespondenţa $P \to Z$ este clar o bijecţie între $\mathcal{S} \setminus \{N\}$ şi planul π, pe care o putem scrie chiar explicit.

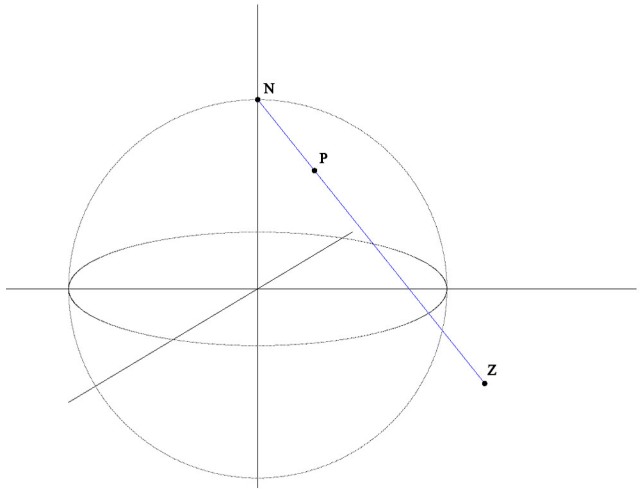


FIGURA 1. Sfera lui Riemann

Ecuaţia dreptei NP în reperul cartezian $Oxyu$ din spaţiul tridimensional $\mathbb{R}^3$ este

$$\frac{x-0}{x_P-0}=\frac{y-0}{y_P-0}=\frac{u-1}{u_P-1},$$

de unde urmează că

$$\frac{x_Z}{x_P}=\frac{y_Z}{y_P}=\frac{-1}{u_P-1},$$

deci

$$\begin{cases} x_Z=\dfrac{x_P}{1-u_P}, \\ y_Z=\dfrac{y_P}{1-u_P}. \end{cases}$$

Identificăm acum $\mathbb{C}$ cu π prin corespondenţa

$$z=x+iy\in\mathbb{C}\leftrightarrow Z(x,y,0)\in\pi,$$

şi definim aplicaţia $\varphi:\mathcal{S}\to\overline{\mathbb{C}}$ prin

$$\varphi(P)=\begin{cases} \dfrac{x_P}{1-u_P}+i\dfrac{y_P}{1-u_P}, & \text{pentru } P\neq N, \\ \infty, \quad \text{pentru } P=N. \end{cases}$$

Este uşor de văzut că aplicaţia φ, numită *proiecţia stereografică de centru N,* este un omeomorfism de la $\mathcal{S}$ la $\overline{\mathbb{C}}=\mathbb{C}\cup\{\infty\}$, adică o aplicaţie bijectivă care păstrează vecinătăţile punctelor.

Acest model geometric al lui $\overline{\mathbb{C}}=\mathbb{C}\cup\{\infty\}$ este numit *sfera lui Riemann.* Ca o consecinţă, definind distanţa dintre două elemente din $\overline{\mathbb{C}}$ ca fiind lungimea segmentului determinat de punctele corespunzătoare lor pe sfera lui Riemann, se obţine o metrică pe $\overline{\mathbb{C}}$, iar topologia indusă de această metrică coincide cu cea definită mai sus.

3. Limite de funcţii şi continuitate. Topologia lui $\mathbb{C}$ este topologia indusă de metrica $d(u,v) = |u - v|$, prin urmare noţiunile de limită şi de continuitate pentru funcţii care au argumentul sau valorile în $\mathbb{C}$ se definesc ca în cadrul spaţiilor metrice şi, în consecinţă, pot fi caracterizate cu şiruri. Deoarece şi topologia lui $\overline{\mathbb{C}}$ este indusă de o metrică, şi limita infinit poate fi caracterizată cu şiruri.

Mai mult, deoarece mulţimea numerelor complexe $\mathbb{C}$ poate fi identificată cu $\mathbb{R}^2$ şi din punct de vedere topologic, noţiunile de limită şi de continuitate pot fi caracterizate pe componente.

Definiţie. *Fie $A \subset \mathbb{R}$ sau $A \subset \mathbb{C}$ şi a^* un punct de acumulare al lui A. Funcţia $f : A \to \mathbb{C}$ are limita ℓ, pentru $a \to a^*$, dacă pentru orice vecinătate V_ℓ a lui ℓ există o vecinătate V_{a^*} a lui a^* astfel încât $f(V_{a^*} \setminus \{a^*\}) \subset V_\ell$.*

În definiţia de mai sus limitele a^* şi ℓ pot fi finite sau nu. Are loc următoarea *caracterizare cu şiruri*:

$$\lim_{a \to a^*} f(a) = \ell \Leftrightarrow \Big(\forall (a_n)_n \subset A \setminus \{a^*\}, a_n \to a^* \Rightarrow f(a_n) \to \ell \Big).$$

În cazul $\ell \neq \infty$, avem *caracterizarea pe componente*: limita $\lim_{a \to a^*} f(a)$ există şi este finită dacă şi numai dacă funcţiile $x = x(a) = \operatorname{Re} f(a)$ şi $y = y(a) = \operatorname{Im} f(a)$ au limite finite, şi atunci avem

$$\lim_{a \to a^*} (x(a) + iy(a)) = \lim_{a \to a^*} x(a) + i \lim_{a \to a^*} y(a).$$

Definiţie. *Fie $A \subset \mathbb{R}$ sau $A \subset \mathbb{C}$ şi $a_0 \in A$. Funcţia $f : A \to \mathbb{C}$ este continuă în a_0 dacă: fie a_0 nu este punct de acumulare pentru A (adică este punct izolat) fie $\lim_{a \to a_0} f(a) = f(a_0)$. Funcţia f se numeşte continuă pe A dacă este continuă în orice punct din A.*

Este clar că o funcţie f cu valori complexe este continuă dacă şi numai dacă funcţiile ambele funcţii componente, $\operatorname{Re} f$ şi $\operatorname{Im} f$ sunt continue.

3.1. *Funcţii complexe de argument real.* Fie $I \subset \mathbb{R}$ un interval. O funcţie $z : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ este formată dintr-o pereche de funcţii reale x şi $y : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, date de egalitatea

$$z(t) = x(t) + iy(t), \ t \in I.$$

Astfel de funcţii sunt utilizate în descrierea mişcării unui punct în plan. De exemplu,

$$z(t) = t(\cos t + i \sin t), \ t \in [0, +\infty),$$

reprezintă *legea orară* după care un punct se deplasează pe o spirală care porneşte din origine. Cele două funcţii reale componente dau ecuaţiile parametrice ale spiralei:

$$\begin{cases} x = t \cos t, \\ y = t \sin t, \end{cases}$$

pentru $t \in [0, +\infty)$.

Fie $t_0 \in I$. După cum am văzut, limita şi continuitatea funcţiei $z = z(t)$ în t_0 se caracterizează pe componente, la fel ca derivabilitatea:

$$z'(t_0) = \lim_{t\to t_0} \frac{z(t)-z(t_0)}{t-t_0} = \lim_{t\to t_0} \frac{x(t)-x(t_0)}{t-t_0} + i \lim_{t\to t_0} \frac{y(t)-y(t_0)}{t-t_0} = x'(t_0) + iy'(t_0).$$

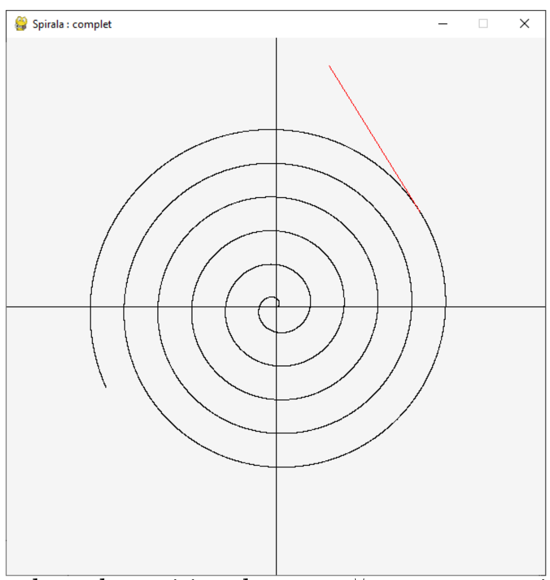
Din definiţia derivatei rezultă *aproximarea*

$$z(t) \approx z(t_0) + (t-t_0)z'(t_0) \text{ pentru } t \approx t_0,$$

care înlocuieşte mişcarea lui $z = z(t)$ cu o mişcare rectilinie uniformă cu viteza $|z'(t_0)|$ pe tangenta la traiectorie în punctul $z_0 = z(t_0)$. În concluzie, derivata unei funcţii complexe de argument real se calculează pe componente

$$z'(t) = x'(t) + iy'(t)$$

şi reprezintă *vectorul viteză instantanee* al punctului în mişcare $z = z(t)$. El dă direcţia tangentei la traiectorie în punctul curent.



Programul Python de mai jos desenează cu negru traiectoria punctului curent $z = t(\cos t + i \sin t)$ pe intervalul $t \in [0, 35]$ şi trasează cu roşu vectorul viteză la momentul $t_0 = 32$:

```
import ComplexPygame as C
import Color
from math import sin, cos
def Spirala():
    def z(t):
        return t * (cos(t) + sin(t) * 1j)

    def zprim(t):
        return cos(t) + sin(t) * 1j + t * (-sin(t) + cos(t) * 1j)
```

```
    C.setXminXmaxYminYmax(-50, 50, -50, 50)
    C.setAxis()
    for k in range(35000):
        tk = 0.001 * k
        C.setPixel(z(tk), Color.Black)
    t0 = 32
    z0 = z(t0)
    C.drawLine(z0, z0 + zprim(t0), Color.Red)

if __name__ == '__main__':
    C.initPygame()
    C.run(Spirala)
```

3.2. *Funcţii complexe de argument complex.* Orice funcţie $f : D \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ are forma

$$f(z) = f(x, y) = u(x, y) + iv(x, y),$$

pentru orice $z = x + iy \in \mathbb{C}$, cu $u, v : D \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ două funcţii reale de două variabile reale. Ştim că limitele finite şi continuitatea se caracterizează pe componente:

$$\lim_{z \to z^*} f(z) = \lim_{(x,y)\to(x^*,y^*)} u(x, y) + i \lim_{(x,y)\to(x^*,y^*)} v(x, y).$$

pentru orice punct de acumulare $z^* = x^* + iy^*$ al lui D.

Analog limitelor de şiruri, există un calcul cu limite de funcţii dat de următoarele reguli: dacă există $\lim_{z\to z^*} f_1(z) = \ell_1$ şi $\lim_{z\to z^*} f_2(z) = \ell_2$, atunci

- există $\lim_{z\to z^*} (f_1 + f_2)(z) = \ell_1 + \ell_2$, cu excepţia cazului $\ell_1 = \ell_2 = \infty$ şi cu convenţia $\ell + \infty = \infty$ pentru $\ell \in \mathbb{C}$;
- există $\lim_{z\to z^*} (f_1 f_2)(z) = \ell_1\ell_2$, cu excepţia cazului $0 \cdot \infty$ şi cu convenţia $\ell \cdot \infty = \infty$ pentru $\ell \in \overline{\mathbb{C}} \setminus \{0\}$;
- există $\lim_{z\to z^*} \left(\dfrac{f_1}{f_2}\right)(z) = \dfrac{\ell_1}{\ell_2}$, cu excepţiile $\dfrac{0}{0}$ şi $\dfrac{\infty}{\infty}$, şi cu convenţiile $\dfrac{\ell}{0} = \infty$ pentru $\ell \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ şi $\dfrac{\ell}{\infty} = 0$, $\dfrac{\infty}{\ell} = \infty$ pentru $\ell \in \mathbb{C}$;

În plus,

- dacă $f : A \to B \subset \mathbb{C}$ cu $\lim_{z\to z^*} f(z) = w^*$ şi $f(z) \neq w^*$ pentru $z \neq z^*$, iar $g : B \to \mathbb{C}$ cu $\lim_{z\to w^*} g(z) = \ell$ atunci $\lim_{z\to z^*} g(f(z)) = \ell$.

Exemplu. Să se arate că pentru orice *funcţie polinom* de grad $n \geq 1$ cu coeficienţi complecşi

$$P(z) = a_n z^n + \cdots + a_2 z^2 + a_1 z + a_0,$$

avem

$$\lim_{z\to\infty} P(z) = \infty.$$

Rezolvare. Este clar că $\lim\limits_{z\to\infty} z^n = (\lim\limits_{z\to\infty} z)^n = \infty^n = \infty$, şi astfel:

$$\lim_{z\to\infty} P(z) = \lim_{z\to\infty} z^n \cdot \lim_{z\to\infty} \left(a_n + \frac{a_{n-1}}{z} + \cdots + \frac{a_0}{z^n}\right) =$$
$$\infty \cdot \left(a_n + \frac{a_{n-1}}{\infty} + \cdots + \frac{a_0}{\infty}\right) = \infty \cdot (a_n + 0 + \cdots + 0) = \infty,$$

deoarece $a_n \neq 0$.

Ca o consecinţă a compatibilităţii trecerii la limită cu operaţiile, şi continuitatea este compatibilă cu operaţiile: dacă f, g sunt continue pe $D \subset \mathbb{C}$, atunci şi $f + g$, fg şi $\frac{f}{g}$ sunt continue peste tot unde sunt definite în D, iar dacă $f : A \to B \subset \mathbb{C}$ şi $g : B \to \mathbb{C}$ sunt continue, atunci şi $g \circ f$ este continuă. În plus, dacă $f = u + iv$ este continuă şi conjugata sa, $\overline{f} = u - iv$, este continuă.

Este important de reţinut că pentru o funcţie $f : \overline{\mathbb{C}} \to \overline{\mathbb{C}}$, studiul limitei şi continuităţii în punctul de la infinit se poate reduce la studiul în 0 deoarece limita $\lim\limits_{z\to\infty} f(z)$ există dacă şi numai dacă există $\lim\limits_{z\to\ 0} f\left(\frac{1}{z}\right)$ şi în acest caz

$$\lim_{z\to\infty} f(z) = \lim_{z\to\ 0} f\left(\frac{1}{z}\right).$$

3.3. *Funcţii reale de argument complex.* Deoarece topologia lui $\mathbb{R}$ coincide cu urma topologiei lui $\mathbb{C}$ pe $\mathbb{R}$, funcţiile $f : D \subset \mathbb{C} \to \mathbb{R}$ pot fi considerate, din punctul de vedere al limitelor şi al continuităţii, ca fiind de forma $f(z) = f(x, y) = u(x, y) + iv(x, y)$, cu v funcţia nulă.

Funcţiile $z \mapsto \operatorname{Re} z$, $z \mapsto \operatorname{Im} z$ şi $z \mapsto |z|$ sunt continue pe $\mathbb{C}$. Funcţia argument, $z \mapsto \arg z$, este continuă în orice punct din $\mathbb{C} \setminus (-\infty, 0\,]$.

4. Mulţimi compacte, mulţimi conexe. Fie $K \subset \mathbb{C}$. Mulţimea K se numeşte *compactă* dacă sunt îndeplinite următoarele proprietăţi echivalente:

(a) K este mulţime închisă şi mărginită;
(b) orice şir din K admite un subşir convergent la un element din K;
(c) orice acoperire deschisă a lui K are o subacoperire finită;

Fie $A \subset \mathbb{C}$ o submulţime nevidă. Numim *curbă* în A o funcţie continuă $\gamma : [\,a, b\,] \to A$, cu $a < b$ două numere reale oarecare. De fapt funcţia γ este doar o *parametrizare* a unei curbe, prin abuz vom nota tot cu γ şi imaginea acestei funcţii.

Mulţimea $A \subset \mathbb{C}$ este *conexă prin arce* pentru orice u şi v din A există o curbă γ în A astfel încât $\gamma(a) = u$ şi $\gamma(b) = v$. Mulţimea A se numeşte *conexă* dacă nu există submulţimile A_1, $A_2 \subset A$, nevide, disjuncte, deschise în A şi astfel încât $A = A_1 \cup A_2$.

Pentru o mulţime deschisă D, conexiunea şi conexiunea prin arce sunt proprietăţi echivalente.

Proprietăţile de compacitate şi conexiune se conservă prin funcţii continue: dacă $f : A \to \mathbb{C}$ este continuă, iar A este compactă (respectiv conexă) atunci $f(A)$ este compactă (respectiv conexă).

Fie $a \in A$. Prin *componenta conexă* a lui a în A înţelegem mulţimea

$$C_a = \bigcup_{C \in \mathcal{C}_a} C,$$

unde cu $\mathcal{C}_a$ am notat familia submulţimilor conexe ale lui A care îl conţin pe a. Este evident că C_a este conexă, fiind chiar cea mai mare (în sensul incluziunii) submulţime conexă a lui A care îl conţine pe a.