Cursul 5

Funcţii olomorfe

§1. Derivabilitatea funcţiilor complexe

Vom considera în cele ce urmează că $D \subset \mathbb{C}$ este o mulţime deschisă, nevidă şi conexă, adică un *domeniu*, altfel studiul se realizează pe fiecare componentă conexă a lui D.

Definiţie. Fie $f : D \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ şi $z_0 \in D$.

– Prin *derivata* lui f în z_0 înţelegem limita, finită sau nu,

$$f'(z_0) = \lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0},$$

atunci când există ;

– Funcţia f se numeşte *derivabilă în* z_0 dacă $f'(z_0) \in \mathbb{C}$;

– Spunem că f este *olomorfă* în D dacă este derivabilă în orice punct din D ;

– Spunem că f este *diferenţiabilă* în z_0 dacă există $A \in \mathbb{C}$ şi $\omega : D \to \mathbb{C}$, cu $\lim\limits_{z \to z_0} \omega(z) = \omega(z_0) = 0$, astfel încât

$$f(z) = f(z_0) + A(z - z_0) + \omega(z)(z - z_0),$$

pentru orice $z \in D$.

Din definiţia derivatei, dacă f este derivabilă în z_0 atunci are loc aproximarea

$$f(z) \approx f(z_0) + f'(z_0)(z - z_0) \text{ pentru } z \approx z_0,$$

care arată că local, în vecinătatea lui z_0, f se comportă ca o funcţie *afină.*

Propoziţie. *Funcţia f este derivabilă în z_0 dacă şi numai dacă este diferenţiabilă în z_0, caz în care $A = f'(z_0)$.*

Demonstraţie. Raţionamentul este acelaşi ca la funcţii reale, se utilizează egalitatea

$$\omega(z) = \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} - A.$$

Propoziţie. *Dacă f este derivabilă în z_0 atunci este şi continuă în z_0; reciproca nu are loc.*

Demonstraţie. Dacă există $f'(z_0) \in \mathbb{C}$ atunci

$$f(z) = f(z_0) + f'(z_0)(z - z_0) + \omega(z)(z - z_0)$$

cu ω funcţie continuă în z_0, deci şi f este continuă în z_0.

Pentru a arăta că reciproca nu are loc, este suficient următorul exemplu: funcţia $f(z) = \overline{z}$ este continuă în 0 fără să fie derivabilă în 0. Într-adevăr, în acest caz raportul incrementar

$$\frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = \frac{\overline{z}}{z} = \cos 2\theta - i \sin 2\theta,$$

nu depinde de modulul lui $z = \rho(\cos\theta + i\sin\theta)$ şi, judecând pe şiruri, poate avea ca limită orice punct de pe cercul unitate când $z_n \to 0$.

Propoziţie. *Au loc următoarele* reguli de derivare*:*

(i) *Dacă $f, g : D \to \mathbb{C}$ sunt derivabile în z_0, atunci $f + g$, fg şi, dacă $g(z_0) \neq 0$, $\dfrac{f}{g}$ sunt derivabile în z_0 şi au loc formulele*

$$(f+g)'(z_0) = f'(z_0) + g'(z_0),$$
$$(fg)'(z_0) = f'(z_0)g(z_0) + f(z_0)g'(z_0),$$
$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'(z_0)g(z_0) - f(z_0)g'(z_0)}{g^2(z_0)};$$

(ii) *Dacă $f : D \to E \subset \mathbb{C}$ este derivabilă în $z_0 \in D$ iar $g : E \to \mathbb{C}$ este derivabilă în $f(z_0)$, atunci $g \circ f$ este derivabilă în z_0 şi*

$$(g \circ f)'(z_0) = g'(f(z_0))f'(z_0);$$

(iii) *Fie $f : D \to E \subset \mathbb{C}$ funcţie bijectivă şi $g : E \to D$ inversa sa. Dacă f este derivabilă în $f(z_0)$ cu $f'(z_0) \neq 0$ iar g este continuă în $f(z_0)$, atunci g este derivabilă în $f(z_0)$ şi*

$$g'(f(z_0)) = \frac{1}{f'(z_0)};$$

Demonstraţie. (i) Verificările sunt identice cu cazul real. (ii) In relaţia

$$g(f(z)) - g(f(z_0)) = g'(f(z_0))[f(z) - f(z_0)] + \omega_g(f(z))[f(z) - f(z_0)]$$

efectuăm înlocuirea

$$f(z) - f(z_0) = f'(z_0)(z - z_0) + \omega_f(z_0)(z - z_0)$$

şi obţinem

$$g(f(z)) - g(f(z_0)) = g'(f(z_0))f'(z_0) + \tilde{\omega}(z)(z - z_0)$$

cu $\tilde{\omega}$ continuă în z_0 şi $\tilde{\omega}(z_0) = 0$.

(iii) Calculăm limita

$$g'(f(z_0)) = \lim_{w \to f(z_0)} \frac{g(w) - g(f(z_0)}{w - f(z_0)}$$

cu schimbarea de variabilă $w = f(z) \Leftrightarrow z = g(w)$. Din continuitatea lui g în $f(z_0)$ avem $z = g(w) \to g(f(z_0)) = z_0$, şi obţinem

$$g'(f(z_0)) = \lim_{w \to f(z_0)} \frac{g(w) - g(f(z_0)}{w - f(z_0)} = \lim_{z \to z_0} \frac{z - z_0}{f(z) - f(z_0)} = \frac{1}{f'(z_0)}.$$

Exemplu. Să se arate că orice *funcţie raţională*

$$f(z) = \frac{P(z)}{Q(z)} = \frac{a_n z^n + \cdots + a_2 z^2 + a_1 z + a_0}{b_m z^m + \cdots + b_2 z^2 + b_1 z + b_0,}, \quad a_n, b_m \neq 0,$$

este olomorfă pe $D = \mathbb{C} \backslash \{z_1, \ldots, z_k\}$, unde $z_1, \ldots, z_k$ sunt rădăcinile polinomului Q.

Rezolvare. Este clar că orice funcţie constantă $z \mapsto a_0$ este olomorfă şi are derivata nulă, iar funcţia identitate $z \mapsto z$ are ca derivată funcţia constantă 1. Urmează, aplicând regulile de derivare, că orice funcţie polinomială este olomorfă în $\mathbb{C}$ şi, mai departe, orice funcţie raţională este olomorfă în domeniul ei maxim de definiţie.

§2. Condiţiile Cauchy-Riemann

Orice funcţie complexă $f : D \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ este formată din două funcţii reale $u, v : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ date de descompunerea

$$f(z) = f(x, y) = u(x, y) + iv(x, y),\ (x, y) \in D.$$

De exemplu, aplicaţia $z \mapsto z^3$ are descompunerea

$$f(z) = z^3 = (x + iy)^3 = (x^3 - 3xy^2) + i(3x^2 y - y^3),$$

deci în acest caz $u(x, y) = x^3 - 3xy^2$ şi $v(x, y) = 3x^2 y - y^3$.

Ştim că limitele şi continuitatea unei funcţii complexe se caracterizează pe componente, dar, aşa cum vom arăta în continuare, derivabilitatea nu se mai reduce doar la diferenţiabilitatea celor două componente reale.

Fie $z_0 = x_0 + iy_0 \in D \subset \mathbb{C}$ un punct în care f este derivabilă. Calculăm limita

$$f'(z_0) = \lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$$

considerând trasee orizontale de forma $z = z_0 + \Delta x$, cu $\Delta x \to 0$ în $\mathbb{R}$. Obţinem că u şi v admit derivatele parţiale $\dfrac{\partial u}{\partial x}$ şi $\dfrac{\partial v}{\partial x}$ în $z_0 = (x_0, y_0) \in D \subset \mathbb{R}^2$ şi

$$f'(z_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{u(x_0 + \Delta x, y_0) - u(x_0, y_0)}{\Delta x} + i \lim_{\Delta x \to 0} \frac{v(x_0 + \Delta x, y_0) - v(x_0, y_0)}{\Delta x}$$

$$= \frac{\partial u}{\partial x}(x_0, y_0) + i \frac{\partial v}{\partial x}(x_0, y_0).$$

Considerăm acum trasee verticale de forma $z = z_0 + i\Delta y$ şi găsim

$$f'(z_0) = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{u(x_0, y_0 + \Delta y) - u(x_0, y_0)}{i\Delta y} + i \lim_{\Delta y \to 0} \frac{v(x_0, y_0 + \Delta y) - v(x_0, y_0)}{i\Delta y}$$

$$= \frac{1}{i}\left[\frac{\partial u}{\partial y}(x_0, y_0)x + i\frac{\partial v}{\partial y}(x_0, y_0)\right] = \frac{\partial v}{\partial y}(x_0, y_0) - i\frac{\partial u}{\partial y}(x_0, y_0).$$

Comparând cele două rezultate deducem că următoarele egalităţi, numite *condiţiile Cauchy-Riemann*, sunt necesare pentru derivabilitatea funcţiei f în z_0:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x}(x_0, y_0) = +\dfrac{\partial v}{\partial y}(x_0, y_0) \\ \dfrac{\partial u}{\partial y}(x_0, y_0) = -\dfrac{\partial v}{\partial x}(x_0, y_0). \end{cases} \tag{$\mathcal{CR}$}$$

Pentru suficienţa acestor condiţii, avem nevoie ca u şi v să fie chiar *diferenţiabile* în (x_0, y_0), ca funcţii reale. Amintim că u, de exemplu, este diferenţiabilă în (x_0, y_0) dacă exista $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ şi $\omega : D \to \mathbb{R}$ continuă, cu $\omega(x_0, y_0) = 0$, astfel încât

$$u(x, y) = u(x_0, y_0) + \alpha(x - x_0) + \beta(y - y_0) + \omega(x, y)\|(x, y) - (x_0, y_0)\|,$$

unde $\|(x, y)\| = \sqrt{x^2 + y^2}$. În acest caz, u are derivate parţiale în (x_0, y_0) şi

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x_0, y_0) = \alpha, \ \frac{\partial u}{\partial y}(x_0, y_0) = \beta,$$

dar simpla existenţă a derivatelor parţiale într-un punct (x_0, y_0) nu este suficientă pentru diferenţiabilitatea lui u în acel punct.

Teoremă. *Funcţia $f = u + iv$ este derivabilă în z_0 dacă şi numai dacă u şi v sunt* (*real*) *diferenţiabile în (x_0, y_0) şi au loc condiţiile* ($\mathcal{CR}$). *În plus, în aceste condiţii*

$$f'(z_0) = \frac{\partial u}{\partial x}(x_0, y_0) + i\frac{\partial v}{\partial x}(x_0, y_0).$$

Demonstraţie. Notăm $f'(z_0) = a + ib$. Presupunem că f este derivabilă, deci diferenţiabilă, în z_0, şi atunci rezultă

$$f(z) = f(z_0) + (a + ib)(z - z_0) + \omega(z)(z - z_0),$$

cu $\lim_{z\to z_0} \omega(z) = 0$. Trecând pe componente, avem

$$u(x, y) = u(x_0, y_0) + a(x - x_0) - b(y - y_0) + \omega_1(x, y)\|(x, y) - (x_0, y_0)\|$$

şi

$$v(x, y) = v(x_0, y_0) + b(x - x_0) + a(y - y_0) + \omega_2(x, y)\|(x, y) - (x_0, y_0)\|,$$

cu $\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} \omega_{1,2}(x, y) = 0$. Deducem că u şi v sunt diferenţiabile în (x_0, y_0) şi

$$a = \frac{\partial u}{\partial x}(x_0, y_0) = \frac{\partial v}{\partial y}(x_0, y_0); \ b = -\frac{\partial u}{\partial y}(x_0, y_0) = \frac{\partial v}{\partial x}(x_0, y_0).$$

Reciproc, din relaţiile de mai sus rezultă imediat diferenţiabilitatea lui f, ca şi exprimarea derivatei.

Observaţie. Dacă funcţia $f = u+iv$ este derivabilă în z_0, cu $f'(z_0) = a+ib$, atunci

$$f(z) \approx f(z_0) + (a + ib)(z - z_0),$$

relaţie care poate fi scrisă *matriceal* sub forma

$$\begin{pmatrix} u(x,y) \\ v(x,y) \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} u(x_0,y_0) \\ v(x_0,y_0) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x-x_0 \\ y-y_0 \end{pmatrix}.$$

Funcţia $f = u + iv$ poate fi privită ca fiind aplicaţia reală

$$(x,y) \in D \subset \mathbb{R}^2 \mapsto \begin{pmatrix} u(x,y) \\ v(x,y) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2,$$

iar pentru aceste aplicaţii rolul derivatei în (x_0, y_0) îl joacă matricea jacobiană

$$J(x_0,y_0) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial u}{\partial x}(x_0,y_0) & \dfrac{\partial u}{\partial y}(x_0,y_0) \\ \dfrac{\partial v}{\partial x}(x_0,y_0) & \dfrac{\partial v}{\partial y}(x_0,y_0) \end{pmatrix},$$

mai precis, în cazul în care aplicaţia este diferenţiabilă în (x_0, y_0), atunci

$$\begin{pmatrix} u(x,y) \\ v(x,y) \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} u(x_0,y_0) \\ v(x_0,y_0) \end{pmatrix} + J(x_0,y_0) \begin{pmatrix} x-x_0 \\ y-y_0 \end{pmatrix}.$$

Comparând cele două relaţii, apare clar de ce numai diferenţiabilitatea lui f, ca funcţie de la $\mathbb{R}^2$ la $\mathbb{R}^2$, nu este suficientă pentru derivabilitatea ei ca funcţie de la $\mathbb{C}$ la $\mathbb{C}$, şi, mai mult, ţinând cont că submulţimea matricelor pătratice de ordin 2

$$\mathcal{K} = \left\{ \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \ \text{cu} \ \ a, b \in \mathbb{R} \right\}$$

formează cu operaţiile matriceale un corp izomorf cu $\mathbb{C}$, înţelegem de ce condiţiile Cauchy-Riemann, scrise în forma matriceală

$$J(x_0,y_0) = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix},$$

au, prin acest izomorfism, semnificaţia $J(x_0, y_0) \in \mathbb{C}$, cu $J(x_0, y_0) = f'(z_0)$.

Consecinţă. *Dacă u şi v sunt de clasă C^1 pe domeniul D, adică au derivate parţiale de ordinul întâi continue pe D, iar condiţiile $(\mathcal{CR})$ sunt satisfăcute în orice punct din D, atunci funcţia $f = u + iv$ este olomorfă pe D.*

Demonstraţie. Se aplică criteriul de diferenţiabilitate corespunzător de la câmpuri scalare. Reciproca acestui criteriu nu are loc, de exemplu funcţia

$$f(z) = \begin{cases} z^2 \sin \dfrac{1}{|z|^2} & \text{pentru} \ \ z \neq 0, \\ 0, \ \ \text{pentru} \ \ z \neq 0, \end{cases}$$

este derivabilă în 0, cu $f'(0) = 0$, fără ca $u = \operatorname{Re} f$ şi $v = \operatorname{Im} f$ să fie de clasă C^1.

Exemplu. Să se verifice condiţiile Cauchy-Riemann pentru $f(z) = z^3$ şi $g(z) = \overline{z}$.

Rezolvare. Pentru $f(z) = z^3$ avem $u(x, y) = x^3 - 3xy^2$ şi $v(x, y) = 3x^2y - y^3$, deci

$$\frac{\partial}{\partial x}(x^3 - 3xy^2) = 3x^2 - 3y^2 = \frac{\partial}{\partial y}(3x^2y - y^3)$$

şi

$$\frac{\partial}{\partial y}(x^3 - 3xy^2) = -6xy = -\frac{\partial}{\partial x}(3x^2y - y^3).$$

Rezultă că f este derivabilă în orice z, deci olomorfă pe $\mathbb{C}$, cu

$$f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x} = 3(x^2 - y^2) - 6xyi = 3z^2,$$

aşa cum ştiam aplicând regulile de derivare.

Funcţia $g(z) = \bar{z} = x - iy = u(x,y) + iv(x,y)$ nu respectă prima dintre condiţiile Cauchy-Riemann:

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x,y) = 1 \neq \frac{\partial v}{\partial y}(x,y) = -1,$$

deci nu este derivabilă în nici un punct z din $\mathbb{C}$, rezultat cunoscut de noi pentru $z = 0$.

Consecinţă. *Dacă f este olomorfă pe domeniul D (mulţime deschisă şi conexă) şi $f'(z) = 0$ pentru orice z, atunci f este constantă pe D.*

Demonstraţie. Din ipoteză rezultă că $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial x} = 0$, iar din condiţiile Cauchy-Riemann urmează $\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial y} = 0$, de unde deducem că funcţiile u şi v sunt constante.

O proprietate remarcabilă a funcţiilor olomorfe este următoarea: dacă u şi v sunt de clasă C^2 iar $f = u + iv$ este olomorfă în domeniul $D \subset \mathbb{C}$, atunci u şi v sunt *funcţii armonice*, adică sunt soluţii pentru *ecuaţia lui Laplace*

$$\Delta u(x,y) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,y) + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x,y) = 0,\ \forall (x,y) \in D.$$

Verificare: deoarece pentru funcţiile de clasă C^2 derivatele mixte comută, din condiţiile $(\mathcal{CR})$ rezultă imediat că

$$\Delta u = \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial x} = 0,$$

şi

$$\Delta v = \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial u}{\partial x} = 0.$$

Operatorul liniar $\Delta : C^2(D,\mathbb{R}) \to C^0(D,\mathbb{R})$, definit mai sus, numit *operatorul lui Laplace*, sau *laplacian*, joacă un rol fundamental în teoria ecuaţiilor fizicii matematice.

§3. Păstrarea unghiurilor

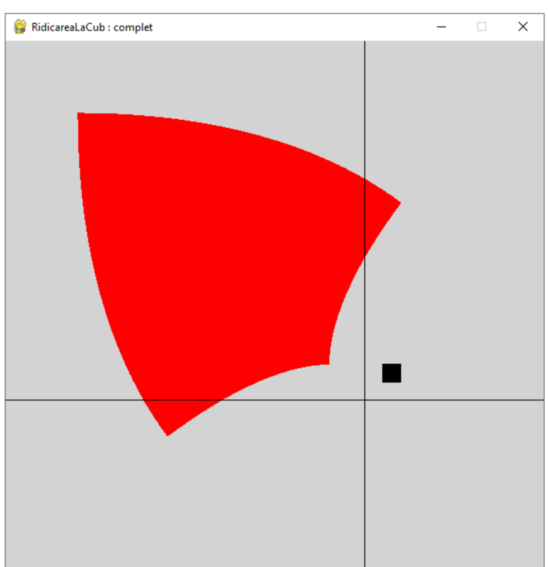
Graficul unei funcţii $f : D \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, definit de

$$\mathrm{Graf}(f) = \{(z, f(z)) \in \mathbb{C} \times \mathbb{C} \,|\, z \in D \subset \mathbb{C}\},$$

este o submulţime în $\mathbb{C} \times \mathbb{C}$ care, ca spaţiu liniar, este izomorf cu $\mathbb{R}^4$. Vederea noastră fiind tri-dimensională, nu putem vedea această suprafaţă bi-dimensională scufundată într-un spaţiu patru-dimensional. În schimb, o funcţie complexă de argument complex poate fi interpretată ca o *deformare* a planului, acţiunea ei poate fi înteleasă vizual urmărind modul în care funcţia deformează, transformă, diverse reţele de linii din plan.

Funcţia următoare colorează cu negru pătratul $[1, 2] \times [1, 2]$ din planul numerelor complexe şi cu roşu transformatul acestuia prin funcţia $f(z) = z^3$.

```
def RidicareaLaCub():
    C.setXminXmaxYminYmax(-20, 10, -10, 20)
    C.fillScreen(Color.Lightgray)
    a = 1
    b = 2
    N = 1000
    delta = (b - a) / N
    for h in range(N):
        x = a + h * delta
        for k in range(N):
            y = a + k * delta
            z = complex(x, y)
            C.setPixel(z, Color.Black)
            C.setPixel(z ** 3, Color.Red)
    C.setAxis()
```



Din definiţia derivatei, dacă f este derivabilă în z_0 atunci are loc aproximarea

$$f(z) \approx f(z_0) + f'(z_0)(z - z_0) \text{ pentru } z \approx z_0,$$

care arată că local, în vecinătatea lui z_0, deformarea produsă de f este o rotaţie de unghi $\arg f'(z_0)$ în jurul lui z_0, compusă cu o omotetie de centru z_0 şi raport $|f'(z_0)|$, urmată de o translaţie care îl duce pe z_0 în $f(z_0)$. Prin urmare, deoarece toate aceste transformări păstreaza mărimea şi orientarea unghiurilor, funcţiile olomorfe cu derivata nenulă au şi ele aceeaşi proprietate (se spune că sunt *transformări conforme*). In desenul precedent se observă că cele patru colţuri ale pătratului alb au fost transformate în cele patru colţuri roşii, păstrând mărimea lor de $90°$ (unghiul dintre două curbe este prin definiţie unghiul dintre tangentele la curbe în punctul de intersecţie).

Să observăm că aplicaţia $z \to \bar{z}$, fiind o simetrie faţă de o dreaptă, conservă unghiurile dar schimbă orientările, deci nu este conformă şi, în consecinţă, nu este derivabilă în nici un punct, după cum am văzut deja.

§4. Funcţii elementare

Până acum, am văzut cum sunt definite în $\mathbb{C}$ funcţiile polinomiale şi raţionale, şi am stabilit că ele sunt continue şi derivabile peste tot unde sunt definite, iar derivatele lor se calculează cu aceleaşi reguli de derivare ca în $\mathbb{R}$.

§4.1. Funcţia exponenţială. În $\mathbb{R}$, funcţia $f(x) = e^x$ este singura soluţie a problemei Cauchy

$$\begin{cases} f'(x) = f(x), & x \in \mathbb{R}, \\ f(0) = 1, \end{cases}$$

şi este definită de seria de puteri

$$e^x \stackrel{\text{def}}{=} 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots,$$

care are raza de convergenţă infinită.

Fie $z \in \mathbb{C}$ fixat arbitrar. Seria de numere complexe

$$1 + \frac{z}{1!} + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \frac{z^4}{4!} + \cdots, \tag{1}$$

este absolut convergentă deoarece seria modulelor este convergentă, în $\mathbb{R}$, la $e^{|z|}$. Urmează că seria (1) este convergentă pentru orice $z \in \mathbb{C}$, deci se poate defini *funcţia exponenţială* prin egalitatea

$$e^z \stackrel{\text{def}}{=} 1 + \frac{z}{1!} + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \frac{z^4}{4!} + \cdots, \tag{2}$$

pentru orice $z \in \mathbb{C}$.

Vom arăta pentru început că funcţia definită mai sus are proprietatea esenţială

$$e^{u+v} = e^u e^v,$$

pentru orice $u, v \in \mathbb{C}$. Într-adevăr,

$$e^u e^v = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{u^n}{n!} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{v^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{k=n} \frac{u^k}{k!} \frac{v^{n-k}}{(n-k)!} =$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^{k=n} C_n^k u^k v^{n-k} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(u+v)^n}{n!} = e^{u+v}$$

pentru orice $u, v \in \mathbb{C}$. Aici am aplicat formula binomului lui Newton şi teorema lui Mertens pentru produsul după Cauchy a două serii, ambele rezultate fiind valabile şi în cazul numerelor complexe.

Acum justificăm *formula lui Euler*

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta,$$

pentru orice $\theta \in \mathbb{R}$. Deoarece seria din definiţia (2) este absolut convergentă, este permisă schimbarea ordinii de sumare, şi obţinem

$$\begin{aligned} e^{i\theta} &= 1 + \frac{i\theta}{1!} + \frac{i^2\theta^2}{2!} + \frac{i^3\theta^3}{3!} + \ldots \\ &= \left(1 - \frac{\theta^2}{2!} + \frac{\theta^4}{4!} - \ldots\right) + i\left(\frac{\theta}{1!} - \frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^5}{5!} - \ldots\right) \\ &= \cos\theta + i\sin\theta. \end{aligned}$$

Aplicând această formulă, găsim în final descompunerea pe componente a funcţiei exponenţiale:

$$e^z = e^{x+iy} = e^x e^{iy} = e^x(\cos y + i\sin y),$$

pentru orice $z = x + iy$ din $\mathbb{C}$.

Teoremă. *Funcţia exponenţială $z \mapsto e^z$ este olomorfă în $\mathbb{C}$ şi $(e^z)' = e^z$.*

Demonstraţie. Funcţiile $u(x, y) = e^x \cos y$ şi $v(x, y) = e^x \sin y$ sunt de clasă C^1 şi satisfac condiţiile Cauchy-Riemann în $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ (verificaţi!). Calculăm derivata:

$$(e^z)' = \frac{\partial u}{\partial x}(x, y) + i\frac{\partial u}{\partial x}(x, y) = u(x, y) + iv(x, y) = e^z.$$

Observăm că formula de derivare a funcţiei exponenţiale se poate obţine, în mod formal deocamdată, derivând seria din definiţia (2), care este de fapt o serie o *serie de puteri* în $\mathbb{C}$. Vom studia mai târziu astfel de serii şi vom arăta că ele pot fi derivate termen cu termen, exact ca în $\mathbb{R}$, astfel că şi această cale este corectă.

Teoremă. *Funcţia exponenţială $z \mapsto e^z$ este periodică de perioadă $2\pi i$.*

Demonstraţie. Din formula lui Euler rezultă $e^{2\pi i} = \cos 2\pi + i\sin 2\pi = 1$, deci

$$e^{z+2\pi i} = e^z e^{2\pi i} = e^z$$

pentru orice $z \in \mathbb{C}$. Mai mult, au loc echivalenţele

$$e^{z_1} = e^{z_2} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = x_2 \\ \cos y_1 = \cos y_2 \\ \sin y_1 = \sin y_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = x_2 \\ y_1 = y_2 + 2k\pi, \end{cases} \Leftrightarrow z_1 = z_2 + 2k\pi i,$$

cu $k \in \mathbb{Z}$, care ne permit să spunem că $T = 2\pi i$ este *perioada principală* a funcţiei e^z.

Să observăm că, atunci când argumentul $z = x + iy$ se deplasează în planul complex pe o dreaptă verticală de ecuaţie $x = x_0$, imaginea sa prin $f(z) = e^z$ se roteşte pe cercul centrat în origine de rază $r_0 = e^{x_0}$, câte o rotaţie completă la fiecare creştere cu 2π a lui y.

§4.2. Funcţia logaritmică. În general, *logaritmul* (*natural*) al unui număr z este *exponentul* w pentru care are loc egalitatea $e^w = z$. În cazul numerelor reale logaritmul există şi este unic determinat pentru fiecare $z > 0$ şi are proprietatea esenţială

$$\ln z\tilde{z} = \ln z + \ln \tilde{z},\ \forall z, \tilde{z}. \tag{3}$$

În cazul numerelor complexe, funcţia exponenţială este periodică, având loc echivalenţa

$$e^w = e^{\widetilde{w}} \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z} \text{ a. î. } w = \widetilde{w} + 2k\pi i \tag{4}$$

prin urmare logaritmul lui z, dacă există, nu mai este unic determinat, oricare dintre soluţiile ecuaţiei $e^w = z$ jucând rol de logaritm al lui z. Pentru început, să observăm că, deoarece $|e^w| = e^{|w|} > 0$, ecuaţia $e^w = 0$ nu are soluţie, altfel spus 0 nu are logaritm.

Vom considera în continuare că $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Suntem interesaţi să vedem în ce condiţii se poate face, pentru fiecare z dintr-un domeniu $D \subset \mathbb{C} \setminus \{0\}$, o alegere a lui w dintre soluţiile ecuaţiei $e^w = z$, asfel încât funcţia obţinută, $z \in D \mapsto w \in \mathbb{C}$ să fie olomorfă în D.

Definiţie. Fie $D \subset \mathbb{C} \setminus \{0\}$ un domeniu (adică o mulţime deschisă şi conexă). Funcţia $f : D \to \mathbb{C}$ se numeşte o *determinare a logaritmului* în D dacă este olomorfă în D şi $e^{f(z)} = z$, pentru orice $z \in D$.

Este clar că dacă f este o determinare a logaritmului, atunci, pentru orice $k \in \mathbb{Z}$, $\tilde{f} = f + 2k\pi i$ este şi ea o determinare în D. Reciproc, dacă f şi $\tilde{f}$ sunt două determinări ale logaritmului în D, din $e^{f(z)} = z = e^{\tilde{f}(z)}$ rezultă că $f(z) - \tilde{f}(z) \in \{2k\pi i,\ k \in \mathbb{Z}\}$ pentru orice $z \in D$, de unde urmează că există $k_0 \in \mathbb{Z}$ astfel încât $f(z) - \tilde{f}(z) = 2k_0\pi i$, pentru orice $z \in D$, deoarece $f - \tilde{f}$ este o funcţie continuă pe deschisul conex D. Obţinem de aici că oricare două determinări au aceeaşi derivată, şi anume

Propoziţie. *Dacă $f : D \to \mathbb{C}$ este o determinare a logaritmului în D atunci $f'(z) = \dfrac{1}{z}$, pentru orice $z \in D$.*

Demonstraţie. Derivăm identitatea $z = e^{f(z)}$, pentru orice $z \in D$, şi obţinem

$$1 = \left(e^{f(z)}\right)' = e^{f(z)} f'(z) = z f'(z),$$

de unde rezultă concluzia.

Subliniem că în definiţia unei determinări f a logaritmului nu se cere ca f să fie bijectivă, ci numai olomorfă. Totuşi, noi vom stabili existenţa şi forma unor determinări ale logaritmului pe baza unor restricţii inversabile ale funcţiei exponenţiale.

Analizăm ecuaţia $e^w = z$, cu $z \neq 0$. Notăm $w = x + iy$ şi $z = \rho(\cos\theta + i\sin\theta)$, şi avem

$$e^w = z,\ z \neq 0 \Leftrightarrow e^x(\cos y + i \sin y) = \rho(\cos\theta + i\sin\theta) \Leftrightarrow \begin{cases} e^x = \rho \\ y = \theta + 2k\pi \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \ln\rho \\ y = \theta + 2k\pi \end{cases} \quad \Leftrightarrow \begin{cases} x = \ln|z| \\ y = \arg z + 2k\pi \end{cases} \quad \Leftrightarrow w = \ln|z| + i(\arg z + 2k\pi)$$

cu $k \in \mathbb{Z}$ un număr întreg oarecare.

Definim *banda orizontală* $B_0 = \mathbb{R} \times (-\pi, \pi)$ şi funcţia $f_0 : \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0\,] \to B_0$ prin

$$f_0(z) = \ln|z| + i \arg z,$$

pentru orice $z \in \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0\,]$. Din expresia lui f_0 rezultă că este continuă şi că este inversa următoarei restricţii a funcţiei exponenţiale

$$w \in B_0 \mapsto e^w \in \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0\,].$$

Cum funcţia exponenţială are derivata nenulă în orice punct, din teorema de inversare locală urmează că f_0 este olomorfă, fiind deci o determinare a logaritmului în $D_0 = \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0\,]$, numită *determinarea principală a logaritmului* şi notată cu $f_0(z) = \ln z$.

Orice determinare a logaritmului într-un domeniu $D \subset D_0 = \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0\,]$ este de forma $f_k = f_0 + 2k\pi i$, cu $k \in \mathbb{Z}$. Să observăm că fiecare f_k este o bijecţie de la $\mathbb{C} \setminus (-\infty, 0\,]$ la banda $B_k = B_0 + 2k\pi i$.

Pe domenii care intersectează semiaxa negativă $(-\infty, 0\,] \subset \mathbb{C}$ determinările se obţin prin racordări ale funcţiilor f_k.

Exemplu. Să se pună în evidenţă o determinare a logaritmului în discul $D(z_0, 1)$ centrat în $z_0 = -1$ şi de rază 1.

Rezolvare. Plecăm de la ecuaţia $e^w = -1 \Leftrightarrow w \in \{w_k = (2k+1)\pi i,\ k \in \mathbb{Z}\}$, şi fixăm de exemplu, soluţia $w_0 = \pi i$. Vom construi f astfel încât $f(-1) = \pi i$, astfel,

$$f(z) = \begin{cases} \ln|z| + i \arg z, \text{ pentru } z \in D(z_0, 1), \operatorname{Im} z \geq 0 \\ \ln|z| + i(\arg z + 2\pi) \text{ pentru } z \in D(z_0, 1), \operatorname{Im} z < 0. \end{cases}$$

Funcţia f a fost obţinută racordând *prin continuitate* ramurile f_0 şi f_1 ale logaritmului, în punctele $z \neq 0$ cu $\arg z = \pi$. Rezultă că f este continuă şi, prin urmare, din $e^{f(z)} = z$ pentru orice $z \in D(z_0, 1)$, rezultă că este olomorfă, fiind deci o determinare a logaritmului în discul $D(z_0, 1)$.

Să observăm că, dacă $z = x \in (\,0, +\infty) \subset \mathbb{R}$, atunci $|z| = x$ şi $\arg z = 0$, prin urmare $\ln z = \ln x$, adică ramura principală prelungeşte funcţia logaritm natural din $\mathbb{R}$.

Este important de reţinut că această prelungire nu păstrează întru totul proprietatea esenţială a logaritmilor, dată de (3).

Mai precis, fie $z_1, z_2 \in \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0\,]$ şi fie $w_1 = \ln z_1, w_2 = \ln z_2 \in B_0$. Avem

$$z_1 z_2 = e^{w_1} e^{w_2} = e^{w_1 + w_2},$$

iar de aici rezultă că

$$\ln z_1 + \ln z_2 = w_1 + w_2 = \ln z_1 z_2 + 2k\pi i,$$

unde $k = -1, 0$ sau $+1$, după cum suma $w_1 + w_2$ cade în banda B_{-1}, B_0 sau B_1.

Exemplu. Pentru $\varepsilon = e^{\frac{2\pi i}{3}}$ avem $\ln \varepsilon = \frac{2\pi i}{3} \in B_0$, deci $\ln \varepsilon + \ln \varepsilon = 2 \ln \varepsilon = \frac{4\pi i}{3} \notin B_0$, în timp ce $\varepsilon \cdot \varepsilon = e^{\frac{4\pi i}{3}} = e^{-\frac{2\pi i}{3}}$ şi, prin urmare, $\ln(\varepsilon^2) = -\frac{2\pi i}{3} \in B_0$, rezultat diferit de $2 \ln \varepsilon$.

Observaţie. Uneori se notează cu ln chiar prelungirea lui f_0 la $\mathbb{C} \setminus \{0\}$,

$$\ln z = \ln |z| + i \arg z, \ \forall z \neq 0,$$

dar în acest caz funcţia care se obţine nu mai este olomorfă pe domeniul său de definiţie, fiind discontinuă în orice punct de pe semiaxa $(-\infty, 0\,] \subset \mathbb{C}$.

Mai mult, uneori se notează cu ln orice determinare fixată a logaritmului, caz în care se spune că logaritmul este o *aplicaţie multiformă*.

§4.3. Funcţia putere. Fie $\alpha \in \mathbb{C}$ şi $D \subset \mathbb{C}$ un domeniu fixat. Pentru fiecare determinare ln a logaritmului în D, se defineşte o *determinare a funcţiei putere* prin

$$z^\alpha \stackrel{\text{def}}{=} e^{\alpha \ln z}.$$

Determinarea principală a funcţiei putere va fi, prin urmare,

$$z^\alpha = e^{\alpha(\ln|z| + i \arg z)} = |z|^\alpha e^{i\alpha \arg z},$$

pentru $z \in \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0\,]$. În cazul $\alpha \in \mathbb{R}$, recunoaştem aici o extindere a formulei lui Moivre: pentru $z = \rho(\cos\theta + i \sin\theta)$ rezultă, pe determinarea principală, că

$$z^\alpha = \rho^\alpha (\cos \alpha\theta + i \sin \alpha\theta). \tag{5}$$

Este uşor de văzut că fiecare determinare a funcţiei putere este olomorfă şi se derivează cu formula binecunoscută din cazul funcţiilor reale:

$$(z^\alpha)' = \alpha z^{\alpha - 1}.$$

Determinările logaritmului sunt de forma $f = \tilde{f} + 2k\pi i$, deci determinările funcţiei putere $F(z) = z^\alpha$ vor fi de forma

$$F(z) = e^{\alpha\ f(z)} = e^{\alpha\ \tilde{f}(z)} e^{2k\alpha\pi i} = \tilde{F}(z) e^{2k\alpha\pi i}.$$

În cazul $\alpha = n \in \mathbb{Z}$, deoarece $e^{2kn\pi i=1}$ pentru orice $k \in \mathbb{Z}$, există o singură determinare a funcţiei putere şi aceasta coincide cu definiţia puterilor cu exponent întreg prin înmulţiri şi împărţiri repetate.

Dacă $\alpha = \dfrac{1}{n}$ cu $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, atunci în orice domeniu D există exact n determinări distincte ale funcţiei putere, şi acestea se obţin unele din altele prin amplificări cu cele n rădăcini ale unităţii, $\varepsilon_k = e^{\frac{2k\pi i}{n}}$, $k = 0, 1, \ldots, n-1$.

Menţionăm, în final, că nu toate proprietăţile funcţiei putere se păstrează la trecerea în planul complex, de exemplu, este posibil ca $(z^\alpha)^\beta \neq \left(z^\beta\right)^\alpha$ chiar dacă se utilizează aceeaşi determinare a funcţiei putere.

Exemplu. Programul următor, în care este implementată funcţia putere cu exponent real conform formulei (5), are rezultatul din comentariu:

```
import ComplexPygame as C
def Puteri():
    def myPow(z,alfa):
        return C.fromRhoTheta(pow(C.rho(z), alfa), C.theta(z) * alfa)
    alfa = 6.0
    beta = 1 / 3

    print(f"mypow1={myPow(myPow(1j, alfa), beta)}")
    print(f"mypow2={myPow(myPow(1j, beta), alfa)}")

    print(f"pow1={pow(pow(1j, alfa), beta)}")
    print(f"pow2={pow(pow(1j, beta), alfa)}")

    # REZULTAT:
    # mypow1=(0.5000000000000003+0.8660254037844385j)
    # mypow2=(-1+1.2246467991473532e-16j)
    # pow1=(0.5000000000000001+0.8660254037844386j)
    # pow2=(-1.0000000000000002+6.106226635438361e-16j)

if __name__ == '__main__':
    Puteri()
```

Explicaţie: Avem

$$z_1 = (i^6)^{\frac{1}{3}} = \left(\cos\frac{\pi}{2}\cdot 6 + i\sin\frac{\pi}{2}\cdot 6\right)^{\frac{1}{3}} = (\cos\pi + i\sin\pi)^{\frac{1}{3}} = \cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3},$$

în timp ce

$$z_2 = (i^{\frac{1}{3}})^6 = \left(\cos\frac{\pi}{2}\cdot\frac{1}{3} + i\sin\frac{\pi}{2}\cdot\frac{1}{3}\right)^6 = \cos\pi + i\sin\pi = -1.$$

§4.4. Funcţiile trigonometrice. Din formula lui Euler

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta,$$

obţinem $\cos\theta = \operatorname{Re} e^{i\theta} = \dfrac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2}$ şi $\sin\theta = \operatorname{Im} e^{i\theta} = \dfrac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2i}$. În mulţimea numerelor complexe, funcţiile circulare cos şi sin se definesc înlocuid în aceste formule argumentul real θ cu $z \in \mathbb{C}$. Definim

$$\cos z \stackrel{\text{def}}{=} \frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2}$$

şi

$$\sin z \stackrel{\text{def}}{=} \frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i}$$

pentru orice $z \in \mathbb{C}$.

Se observă imediat că aceste funcţii sunt olomorfe şi sunt prelungiri la $\mathbb{C}$ ale funcţiilor circulare reale corespunzătoare, având aceleaşi formule de derivare:

$$\cos' z = \sin z$$

$$\sin' z = -\cos z.$$

Mai mult, se verifică prin calcul că sunt păstrate şi formulele

$$\sin(z_1+z_2) = \sin z_1 \cos z_2 + \cos z_1 \sin z_2$$

$$\cos(z_1+z_2) = \cos z_1 \cos z_2 - \sin z_1 \sin z_2$$

şi

$$\sin^2 z + \cos^2 z = 1.$$

Spre deosebire de cazul real, în care funcţiile sin şi cos sunt mărginite, acum ele sunt nemărginite, rămânând totuşi periodice cu perioada principală $T = 2\pi$.

Ecuaţia $\cos w = z$ este echivalentă cu $2ze^{iw} = e^{2iw}+1$ de unde, luând pentru funcţia $\sqrt{z}$ determinarea principală a funcţiei putere, avem mai departe

$$\cos w = z \Leftrightarrow e^{iw} = z \pm \sqrt{z^2-1} \Leftrightarrow iw = \ln(z \pm \sqrt{z^2-1}).$$

Această echivalenţă justifică definiţia

$$\arccos z \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{i}\ln(z+\sqrt{z^2-1})$$

pentru orice $z \in \mathbb{C}$. Se verifică prin calcul că pentru $z \in (-1,1)$ $\arccos z$ coincide cu funcţia reală corespunzătoare.

În final, mai menţionăm doar definiţia lui

$$\arcsin z = \frac{1}{i}\ln(iz+\sqrt{1-z^2})$$

şi că se păstrează identitatea

$$\arcsin z + \arccos z = \frac{\pi}{2},$$

pentru orice $z \in \mathbb{C}$.