Cursul 7

Formula integrală a lui Cauchy

Am demonstrat în cursul precedent că, dacă $D \subset \mathbb{C}$ un domeniu simplu conex şi $f : D \to \mathbb{C}$ o funcţie olomorfă cu f' continuă pe D, atunci, pe orice curbă rectificabilă şi închisă $\gamma \subset D$,

$$\int_\gamma f(z)dz = 0.$$

Acest rezultat fundamental din analiza complexă este valabil şi în condiţii mai puţin restrictive. Se poate renunţa la cerinţa ca f' să fie continuă, iar simpla conexiune a domeniului poate fi înlocuită cu cerinţa ca γ să fie o *curbă omotopă cu un punct*, adică să poată fi deformată continuu în D până se reduce la un singur punct. Mai precis, are loc următorul rezultat, pe care îl prezentăm fără demonstraţie:

Teorema fundamentală a lui Cauchy. *Fie $f : D \to \mathbb{C}$ o funcţie olomorfă pe domeniul $D \subset \mathbb{C}$ şi γ o curbă închisă omotopă în D cu un punct. Atunci*

$$\int_\gamma f(z)dz = 0.$$

Există şi o variantă cu cerinţe chiar mai reduse, utilă în aplicaţii:

Teorema *Fie $D \subset \mathbb{C}$ un domeniu, fie $z_0 \in D$ şi fie $f : D \to \mathbb{C}$ o funcţie continuă pe D şi olomorfă în $D \setminus \{z_0\}$. Atunci, pe orice curbă închisă γ omotopă cu un punct în D, avem*

$$\int_\gamma f(z)dz = 0.$$

Consecinţă. *Integrala oricărei funcţii olomorfe pe un domeniu simplu conex este independentă de drum, iar funcţia admite primitive în acel domeniu.*

§1. Integrale cu parametru

Fie $\gamma \subset D$ o curbă rectificabilă în domeniul $D \subset \mathbb{C}$ şi fie $g : D \times \gamma \to \mathbb{C}$ o funcţie de două variabile, presupusă continuă. În acest caz, pentru fiecare valoare fixată a *parametrului* $z \in D$, funcţia $u \mapsto g(z, u)$ este continuă şi, prin urmare, există integrala

$$G(z) = \int_\gamma g(z, u)du.$$

Teoremă. *În ipotezele precizate, integrala G este continuă în raport cu parametrul z.*

Pentru demonstraţie, avem nevoie de următorul rezultat auxiliar:

Lemă. *Pentru orice funcţie continuă f şi orice curbă rectificabilă γ*

$$\left|\int_\gamma f(z)dz\right| \leq L(\gamma)\sup_{z\in\gamma}|f(z)|,$$

unde $L(\gamma) < +\infty$ reprezintă lungimea curbei γ.

Justificarea lemei este imediată: considerăm un şir de diviziuni $\Delta_n : a = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = b$ cu $\nu(\Delta_n) \leq \frac{1}{n}$ şi, pentru o alegere (τ_k) oarecare a punctelor intermediare, majorăm suma Riemann-Stieltjes

$$\sigma_{\Delta_n}(f,\gamma,\tau) = \sum_k f(\gamma(\tau_k))\Delta\gamma(t_k)$$

astfel

$$\left|\sum_k f(\gamma(\tau_k))\Delta\gamma(t_k)\right| \leq \sum_k |f(\gamma(\tau_k))||\Delta\gamma(t_k)| \leq M\sum_k |\Delta\gamma(t_k)| \leq ML(\gamma),$$

unde $M = \sup_{z\in\gamma}|f(z)| < +\infty$. Ştim că integrala

$$I = \int_\gamma f(z)dz$$

există, f fiind continuă, deci pentru orice $\varepsilon > 0$ există un $n \geq 1$ astfel încât

$$|I| \leq |I - \sigma_{\Delta_n}(f,\gamma,\tau)| + |\sigma_{\Delta_n}(f,\gamma,\tau)| \leq \varepsilon + ML(\gamma),$$

de unde urmează concluzia lemei.

Pentru a demonstra teorema, fixăm arbitrar un $z_0 \in D$ şi un $r > 0$ astfel încât $\overline{D}(z_0,r) \subset D$. Pentru orice $z \in D(z_0,r)$, avem

$$|G(z) - G(z_0)| = \left|\int_\gamma (g(z,u) - g(z_0,u))du\right| \leq L(\gamma)M(z,z_0),$$

unde $M(z,z_0) = \sup_{u\in\gamma}|g(z,u) - g(z_0,u)|$. Din uniforma continuitate a funcţiei g pe compactul $\gamma \times \overline{D}(z_0,r)$ rezultă că $M(z,z_0) \to 0$ pentru $z \to z_0$, şi astfel rezultă că $G(z) \to G(z_0)$ pentru $z \to z_0$.

Teoremă. *Presupunem, în plus faţa de ipotezele precizate, că pentru fiecare $u \in \gamma$, funcţia $z \mapsto g(z,u)$ este olomorfă în D şi notăm cu $\dfrac{\partial g}{\partial z}$ derivata acestei funcţii. Dacă $\dfrac{\partial g}{\partial z} : D \times \gamma \to \mathbb{C}$ este continuă, atunci integrala G este olomorfă în raport cu parametrul $z \in D$ şi, mai mult, derivarea comută cu integrala:*

$$G'(z) = \int_\gamma \frac{\partial g}{\partial z}(z,u)du.$$

Demonstraţie. Fie $z_0 \in D$ fixat arbitrar şi $r > 0$ astfel încât $\overline{D}(z_0,r) \subset D$. Pentru orice $h \in \mathbb{C}$ cu $|h| < r$, avem

$$\frac{G(z_0+h) - G(z_0)}{h} - \int_\gamma \frac{\partial g}{\partial z}(z_0,u)du =$$

$$= \frac{1}{h}\int_\gamma \left[g(z_0+h,u) - g(z_0,u) - h\frac{\partial g}{\partial z}(z_0,u)\right] du.$$

Integrala funcţiei $\dfrac{\partial g}{\partial z}(\cdot, u)$ fiind independentă de drum, avem

$$g(z_0+h,u) - g(z_0,u) = \int_{z_0}^{z_0+h} \frac{\partial g}{\partial z}(z,u)dz.$$

Utilizăm egalitatea evidentă

$$h\frac{\partial g}{\partial z}(z_0,u) = \int_{z_0}^{z_0+h} \frac{\partial g}{\partial z}(z_0,u)dz$$

şi obţinem:

$$\frac{G(z_0+h) - G(z_0)}{h} - \int_\gamma \frac{\partial g}{\partial z}(z_0,u)du =$$

$$= \left| \frac{1}{h}\int_\gamma \left\{ \int_{z_0}^{z_0+h} \left[\frac{\partial g}{\partial z}(z,u) - \frac{\partial g}{\partial z}(z_0,u)\right] dz \right\} du \right| \leq$$

$$\leq \frac{1}{|h|} L(\gamma)|h| M(z_0,h) \leq L(\gamma)M(z_0,h),$$

unde

$$M(z_0,h) = \sup_{(z,u)\in \overline{D}(z_0,h)\times\gamma} \left| \frac{\partial g}{\partial z}(z,u) - \frac{\partial g}{\partial z}(z_0,u)\right|.$$

Deoarece $\dfrac{\partial g}{\partial z}$ este continuă pe compactul $\overline{D}(z_0,r)\times\gamma$, rezultă că este uniform continuă, prin urmare $M(z_0,h)\to 0$ pentru $h\to 0$, ceea ce încheie demonstraţia.

Exemplu. *Fie φ o funcţie continuă pe γ. Arătaţi că integrala cu parametru*

$$f(z) = \int_\gamma \frac{\varphi(u)}{u-z}du$$

defineşte o funcţie olomorfă pe $\mathbb{C}\setminus\gamma$, care este indefinit derivabilă şi

$$f^{(n)}(z) = n!\int_\gamma \frac{\varphi(u)}{(u-z)^{n+1}}du.$$

Rezolvare. Notăm

$$g(z,u) = \frac{\varphi(u)}{u-z} = \varphi(u)(u-z)^{-1}$$

şi, prin derivări succesive, obţinem:

$$\frac{\partial^n g}{\partial z^n}(z,u) = n!\varphi(u)(u-z)^{-(n+1)}.$$

Concluzia o stabilim prin inducţie, folosind teorema de derivare a integralelor cu parametru stabilită mai sus.

§2. Formula integrală a lui Cauchy

Ştim, din Teorema lui Jordan, că orice curbă simplă şi închisă, $\gamma = \gamma(t)$, are imaginea $\gamma \subset \mathbb{C}$ homeomorfă cu un cerc şi separă planul în două domenii, unul mărginit şi simplu conex, interiorul lui γ, notat cu D_γ, şi celălalt nemărginit, exteriorul lui γ, $\mathbb{C} \setminus \overline{D}_\gamma$. Mulţimea suport poate fi parcursă în două sensuri distincte, pentru a face o alegere, vom presupune implicit parcurgerea în sens trigonometric.

Pentru existenţa integralelor avem nevoie de curbe rectificabile, astfel că, în continuare, prin *curbă Jordan* vom întelege o curbă γ rectificabilă, simplă şi închisă, parcursă în sens trigonometric (adică cu interiorul D_γ pe stânga).

Exemplu. *Fie γ o curbă Jordan şi $z_0 \in \mathbb{C} \setminus \gamma$. Arătaţi că*

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{1}{z-z_0}dz = \begin{cases} 1, & \text{dacă } z_0 \in D_\gamma, \\ 0, & \text{dacă } z_0 \in \mathbb{C} \setminus \overline{D}_\gamma. \end{cases}$$

Rezolvare. Pentru a simplifica scrierea, considerăm $z_0 = 0$. Curba $\gamma = \gamma(t)$ are, în coordonate polare, o reprezentare parametrică de forma

$$\gamma(t) = \rho(t)(\cos\theta(t) + i\sin\theta(t))$$

cu $\rho(t) = |\gamma(t)| > 0$ şi $\theta : [\,a, b\,] \to \mathbb{R}$ o funcţie continuă. Curba fiind închisă, avem $\gamma(b) = \gamma(a)$, de unde rezultă $\rho(b) = \rho(a)$ şi $\theta(b) = \theta(a) + 2k\pi$, cu $k \in \mathbb{Z}$.

Deoarece γ este o curbă Jordan, punctul curent $\gamma(t)$ va parcurge mulţimea suport o singură dată, şi avem două cazuri: dacă 0 este punct în domeniul interior, raza vectoare a punctului curent va ocoli complet originea o singură dată, şi vom avea $\theta(b) = \theta(a) + 2\pi$, altfel, dacă 0 este în exterior, raza vectoare va reveni în poziţia iniţială cu $\theta(b) = \theta(a)$.

Deoarece $\gamma \subset \mathbb{C}$ este mulţime compactă iar $0 \notin \gamma$, distanţa de la 0 la γ este strict pozitivă

$$\delta = \inf_{z\in\gamma} |z| > 0.$$

Considerăm atunci o acoperire finită a lui γ cu discuri D_k cu diametrul strict mai mic decât δ. Aceste discuri nu conţin originea, deci în fiecare dintre ele $g(z) = \frac{1}{z}$ are primitive, date de determinări ale logaritmului obţinute prin racordarea prin continuitate a unor ramuri de forma

$$f_k(z) = \ln|z| + i(\arg z + 2h_k\pi),\ \ h_k \in \mathbb{Z}.$$

Considerăm o diviziune $\Delta : a = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = b$ cu norma suficient de mică astfel încât fiecare arc să fie inclus cel puţin într-un disc D_{k_j}, şi pentru fiecare j alegem în D_{k_j} determinarea logaritmului pentru care

$$\arg\gamma(t) + 2h_{k_j}\pi = \theta(t)$$

când $t \in [\,t_{j-1}, t_j\,]$. Deducem:

$$\int_\gamma \frac{dz}{z} = \sum_j \int_{\gamma_j} \frac{dz}{z} = \sum_j [\ln\rho(t_{j+1}) + i\theta(t_{j+1}) - \ln\rho(t_j) - i\theta(t_j)] =$$

$$= \ln\rho(b) - \ln\rho(a) + i(\theta(b) - \theta(a)) = \begin{cases} 2\pi i, \text{ dacă } 0 \in D_\gamma, \\ 0, \text{ dacă } 0 \in \mathbb{C} \setminus \overline{D}_\gamma. \end{cases}.$$

Observaţie. In general, pentru orice curbă rectificabilă închisă γ şi pentru orice $z_0 \notin \gamma$, se poate arăta că numărul

$$I(\gamma, z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{1}{z - z_0} dz$$

este un număr întreg, numit *indicele curbei* γ *în raport cu punctul* z_0 şi acesta numără câte rotaţii complete face raza vectoare $\overrightarrow{z_0\gamma(t)}$ în jurul punctului z_0, când t parcurge intervalul de definiţie $[\,a, b\,]$.

Teoremă (Formula integrală a lui Cauchy). *Fie $D \subset \mathbb{C}$ un domeniu, $\gamma \subset D$ o curbă Jordan omotopă cu un punct în D, $f : D \to \mathbb{C}$ o funcţie olomorfă în D. Atunci, pentru orice punct din domeniul interior curbei γ, $z_0 \in D_\gamma$, avem*

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(z)}{z - z_0} dz.$$

Demonstraţie. Funcţia $g : D \to \mathbb{C}$ definită prin

$$g(z) = \begin{cases} \dfrac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}, \text{ dacă } z \in D \setminus \{z_0\}, \\ f'(z_0), \quad\ \text{dacă } z = z_0, \end{cases}$$

este continuă pe D şi olomorfă în $D \setminus \{z_0\}$. Conform unor rezultate anterioare, urmează că

$$0 = \int_\gamma g(z)dz = \int_\gamma \frac{f(z)}{z - z_0} dz - \int_\gamma \frac{f(z_0)}{z - z_0} dz = \int_\gamma \frac{f(z)}{z - z_0} dz - 2\pi i f(z_0).$$

Consecinţă. *Funcţiile olomorfe admit derivate de orice ordin. Mai precis, cu notaţiile din teorema precedentă,*

$$f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} dz.$$

Demonstraţie. Pentru orice $z_0 \in D$ există o curbă Jordan $\gamma \subset D$ astfel încât $z_0 \in D_\gamma$, de exemplu $\gamma(t) = z_0 + re^{it}$, $t \in [\,0, 2\pi]$, cu $r > 0$ suficient de mic. Pentru această curbă γ are loc formula integrală a lui Cauchy şi, mai departe, aplicăm teorema de derivare a integralelor cu parametru.

Vom arăta acum că are loc următoarea reciprocă a teoremei fundamentale a lui Cauchy:

Teoremă (Morera). *Fie $f : D \to \mathbb{C}$ o funcţie continuă pe domeniul $D \subset \mathbb{C}$ Dacă pentru orice curbă γ închisă, omotopă în D cu un punct, avem*

$$\int_\gamma f(z)dz = 0,$$

atunci f este olomorfă în D.

Demonstraţie. Fie $z_0 \in D$ şi $r > 0$ astfel încât $D(z_0, r) \subset D$. Deoarece discul $D(z_0, r)$ este un domeniu simplu conex, orice curbă închisă $\gamma \subset D(z_0, r)$ este omotopă în $D(z_0, r)$ cu un punct, prin urmare $\int_\gamma f(z)dz = 0$. Rezultă că f admite primitive pe $D(z_0, r)$, fie F una dintre ele. Funcţia olomorfă F admite derivate de orice ordin, în particular F'', deci $f = F'$ este funcţie olomorfă în z_0.

O consecinţă importantă a teoremei lui Morera este următoarea: dacă ştim că f este continuă pe $D(z_0, r)$ şi olomorfă în $D(z_0, r) \setminus \{z_0\}$, atunci este olomorfă pe întreg discul $D(z_0, r)$, şi aceasta deoarece pentru o astfel de funcţie integrala este 0 pe orice curbă omotopă cu un punct.

Teoremă (Liouville). *Fie $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ o funcţie olomorfă şi mărginită. Atunci f este constantă.*

Demonstraţie. Arătăm că, $\forall z_0 \in \mathbb{C}$, $f'(z_0) = 0$. Avem:

$$|f'(z_0)| = \frac{1}{2\pi} \left| \int_{|z-z_0|=R} \frac{f(z)}{(z-z_0)^2} dz \right| \leq \frac{1}{2\pi} 2\pi R \frac{M}{R^2} = \frac{M}{R} \to 0,$$

pentru $R \to +\infty$.

Teorema lui Liouville furnizează o demonstraţie rapidă pentru

Teorema fundamentală a algebrei. *Orice funcţie polinomială de grad ≥ 1 are cel puţin o rădăcină în $\mathbb{C}$.*

Demonstraţie. Dacă presupunem, prin reducere la absurd, că există un polinom P cu grad $(P) \geq 1$ fără rădăcini în $\mathbb{C}$, atunci funcţia

$$f(z) = \frac{1}{P(z)}$$

este definită pentru orice $z \in \mathbb{C}$ şi este olomorfă în $\mathbb{C}$. Dar

$$\lim_{z\to\infty} P(z) = \infty \implies \lim_{z\to\infty} f(z) = 0,$$

şi prin urmare f este mărginită, iar din teorema lui Liouville rezultă că este constantă, în contradicţie cu ipoteza grad $(P) \geq 1$.

În final, prezentăm formula integrală a lui Cauchy pentru o coroană circulară.

Teoremă. *Fie $0 < r < R$, $q \in \mathbb{C}$ şi $K = \{z \in \mathbb{C} : \ r < |z - q| < R\}$. Dacă $f : D \to \mathbb{C}$ este olomorfă în domeniul D şi $\overline{K} \subset D$, atunci pentru orice $z_0 \in K$,*

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \left[\int_{|z-q|=R} \frac{f(z)}{z-z_0} dz - \int_{|z-q|=r} \frac{f(z)}{z-z_0} dz \right].$$

Observaţie. Dacă domeniul D este simplu conex atunci ambele circumferinţe sunt omotope în D cu un punct, şi este aplicabilă formula integrală a lui Cauchy: deoarece z_0 este în interiorul discului $D(q, R)$ dar în exteriorul discului $D(q, r)$, prima integrală este $f(z_0)$ iar a doua 0. Teorema aduce ceva nou numai în cazul în care f este olomorfă pe coroana $\overline{K}$, dar nu şi în tot discul interior.

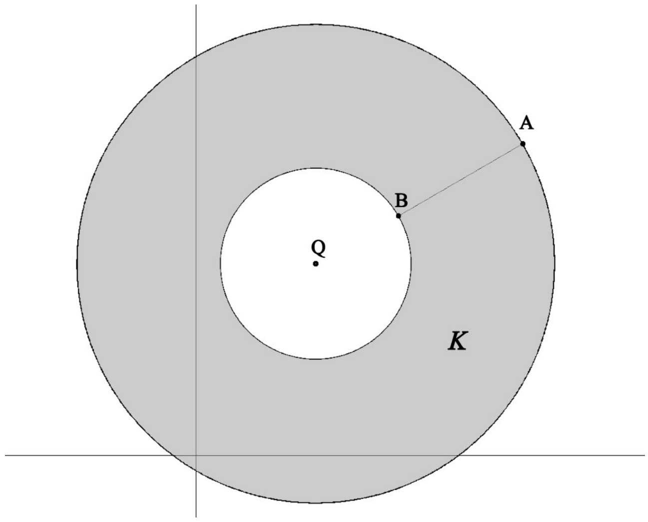

FIGURA 1. Coroana circulară

Demonstraţie. Notăm cu $\mathscr{C}_R$ şi $\mathscr{C}_r$ circumferinţele celor două discuri şi cu Q centrul lor. Fixăm un punct oarecare $A \in \mathscr{C}_R$ şi notăm cu B punctul de intersectie al segmentului QA cu $\mathscr{C}_r$.

Este evident că se poate defini o lege orară $\gamma = \gamma(t)$ pentru care punctul curent $\gamma(t)$ pleacă din $A_1 = A$, parcurge $\mathscr{C}_R$ în sens trigonometric şi ajunge din nou în $A = A_2$, parcurge apoi segmentul AB şi ajunge în $B_2 = B$, continuă pe cercul $\mathscr{C}_r$ în sens antitrigonometric şi ajunge din nou în $B = B_1$ şi, în final, revine în A_1 pe segmentul B_1A_1.

Observăm că curba γ astfel definită este o curbă rectificabilă, închisă, inclusă în domeniul D şi care, mai mult, este omotopă în D cu un punct: putem deforma continuu curba micşorând raza R până la r şi păstrînd fix segmentul final B_1A_1 în timp ce rotim în jurul lui Q segmentul de trecere A_2B_2, până restrîngem interiorul curbei la un singur punct.

Vom aplica pe curba γ teorema fundamentală a lui Cauchy pentru aceeaşi funcţie g ca în demonstrarea formulei integrale:

$$g(z) = \begin{cases} \dfrac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}, & \text{dacă } z \in D \setminus \{z_0\}, \\ f'(z_0), & \text{dacă } z = z_0. \end{cases}$$

Obţinem

$$0 = \int_\gamma g(z)dz = \int_{\mathscr{C}_R} g(z)dz - \int_{\mathscr{C}_r} g(z)dz,$$

deoarece integralele pe AB şi BA se reduc. Concluzia rezultă din

$$\int_{\mathscr{C}_R} g(z)dz = \int_{\mathscr{C}_R} \frac{f(z)}{z - z_0}dz - \int_{\mathscr{C}_R} \frac{f(z_0)}{z - z_0}dz = \int_{\mathscr{C}_R} \frac{f(z)}{z - z_0}dz - 2\pi i f(z_0)$$

şi

$$\int_{\mathscr{C}_r} g(z)dz = \int_{\mathscr{C}_r} \frac{f(z)}{z-z_0}dz - \int_{\mathscr{C}_r} \frac{f(z_0)}{z-z_0}dz = \int_{\mathscr{C}_r} \frac{f(z)}{z-z_0}dz - 0.$$