Cursul 8

Funcţii analitice

Vom studia acum comportarea şirurilor şi seriilor de funcţii olomorfe, cu scopul de a dezvălui o proprietate esenţială a acestor funcţii: analiticitatea. Ştim deja că, spre deosebire de cazul funcţiilor reale unde există funcţii f derivabile cu derivata f' nederivabilă, în complex orice funcţie f olomorfă într-un domeniu D este în mod necesar indefinit derivabilă pe D. Vom arăta că, mai mult, f este chiar *analitică* pe D, adică dezvoltabilă în serie de puteri în orice $z_0 \in D$. Mai precis, pentru orice $z_0 \in D$ există $\rho > 0$ astfel încât egalitatea

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(z - z_0)^n,$$

are loc pentru orice z cu $|z - z_0| < \rho$.

Această echivalenţă între derivabilitate şi analiticitate este specifică funcţiilor complexe, şi arată că întreaga teorie a funcţiilor olomorfe poate fi construită pornind de la definirea lor ca sume de serii de puteri, exact calea istorică de dezvoltare a analizei complexe.

§1. Şiruri de funcţii olomorfe

Fie $D \subset \mathbb{C}$ un domeniu (mulţime deschisă şi conexă) şi fie $f_n : D \to \mathbb{C}$ un şir de funcţii.

Definiţie. Şirul de funcţii (f_n) *converge punctual* la funcţia $f : D \to \mathbb{C}$ dacă, pentru fiecare $z \in D$,

$$\lim_{n \to +\infty} f_n(z) = f(z).$$

Funcţia f se numeşte *limita punctuală* a şirului (f_n).

Şirurile de funcţii (f_n) sunt utilizate, de regulă, pentru a defini funcţii noi, necunoscute, ca limite punctuale ale unor şiruri de funcţii cunoscute, şi suntem interesaţi să stabilim proprietăţile funcţiilor f_n care se transferă la funcţia limită.

După cum este bine ştiut din cazul real, convergenţă punctuală este prea slabă: ea nu păstrează nici măcar continuitatea funcţiilor f_n. De exemplu, următorul şir de funcţii continue

$$f_n(z) = \frac{z}{1 + (z + \bar{z})^{2n}}, \ f_n : \mathbb{C} \to \mathbb{C},$$

are ca limită punctuală funcţia discontinuă

$$f(z) = \begin{cases} 0, & \operatorname{Re} z \in \big(-\infty, -\dfrac{1}{2} \big) \cup \big(\dfrac{1}{2}, +\infty \big), \\ \dfrac{z}{2}, & \operatorname{Re} z = \pm \dfrac{1}{2}, \\ z, & \operatorname{Re} z \in \big(-\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{2} \big). \end{cases}$$

Pentru a formula un concept de convergenţă mai adecvat scopului nostru, să observăm că (f_n) este punctual convergent la f dacă şi numai dacă:

$$\forall\, z \in D,\ \forall\, \varepsilon > 0,\ \exists\, n(\varepsilon, z) \in \mathbb{N} \text{ a. î. } n \geq n(\varepsilon) \Rightarrow |f_n(z) - f(z)| < \varepsilon.$$

Vom cere acum ca rangul $n(\varepsilon, z)$ să poată fi ales acelaşi pentru toţi $z \in D$.

Definiţie. Şirul de funcţii (f_n) *converge uniform* la funcţia $f : D \to \mathbb{C}$ dacă:

$$\forall\, \varepsilon > 0,\ \exists\, n(\varepsilon) \in \mathbb{N} \text{ a. î. } n \geq n(\varepsilon) \Rightarrow |f_n(z) - f(z)| < \varepsilon,\ \forall\, z \in D.$$

Convergenţa uniformă implică convergenţa punctuală, evident, şi, exact ca în cazul funcţiilor reale, transferă continuitatea:

Teoremă. *Dacă şirul de funcţii continue $f_n : D \to \mathbb{C}$ converge uniform la funcţia $f : D \to \mathbb{C}$, atunci f este continuă pe D.*

Demonstraţie. Fie $z_0 \in D$ fixat arbitrar. Pentru orice $z \in D$ şi $n \in \mathbb{N}$, avem majorarea

$$|f(z) - f(z_0)| \leq |f(z) - f_n(z)| + |f_n(z) - f_n(z_0)| + |f_n(z_0) - f(z_0)|.$$

Fie $\varepsilon > 0$. Din uniforma convergenţă pe D a şirului (f_n), deducem că există un $n_0 = n_0(\varepsilon)$ pentru care primul şi ultimul termen al sumei sunt $< \varepsilon/3$, *pentru orice* $z \in D$, iar din continuitatea funcţiei f_{n_0} obţinem existenţa unui $\delta(\varepsilon) > 0$ astfel încât termenul din mijloc al sumei este $< \varepsilon/3$ pentru orice z cu $|z - z_0| < \delta$.

Am arătat astfel că, pentru orice $\varepsilon > 0$, există $\delta(\varepsilon) > 0$ astfel încât $|z - z_0| < \delta$ implică $|f(z) - f(z_0)| < \varepsilon$, deci f este continuă în punctul z_0, fixat arbitrar în D. $\square$

În demonstraţia de mai sus, pentru a stabili transferul continuităţii în z_0, este suficient ca şirul de f_n să fie uniform convergent la f doar pe un disc $D(z_0, r) \subset D$, caz în care alegând $\delta(\varepsilon) < r$ demonstraţia rămâne aceeaşi.

Continuitatea şi olomorfia sunt *proprietăţi locale*, ele se stabilesc în fiecare punct al domeniului D şi depind numai de comportamentul funcţiei pe o vecinătate a punctului studiat. Din acest motiv, pentru transferul continuităţii şi al olomorfiei convergenţa uniformă pe întreg domeniul D este prea restrictivă, vom introduce un nou concept de convergenţă, perfect adaptat scopului nostru:

Definiţie. Şirul de funcţii (f_n) *converge uniform pe compacte* la $f : D \to \mathbb{C}$ dacă $\forall\, K \subset D$, mulţime compactă, $\forall\, \varepsilon > 0$, $\exists\, n_K(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ a. î. $n \geq n_K(\varepsilon) \Rightarrow |f_n(z) - f(z)| < \varepsilon,\ \forall\, z \in K$.

Observaţie. În definiţia de mai sus este suficient să considerăm numai o familie $\{\overline{D}(z_i, r_i)\}$ de discuri închise, ale căror interioare să acopere D. În adevăr, în acest caz, pentru orice compact $K \subset D$ se poate extrage o acoperire finită

$$K \subset \overline{D}(z_{i_1}, r_{i_1}) \cup \cdots \cup \overline{D}(z_{i_k}, r_{i_k})$$

şi atunci se poate defini

$$n_K(\varepsilon) = \max\{n_{\overline{D}(z_{i_1}, r_{i_1})}(\varepsilon), \ldots, n_{\overline{D}(z_{i_k}, r_{i_k})}(\varepsilon)\}.$$

Este evident că rezultatul dat de teorema precedentă, transferul continuităţii, se păstrează şi în cazul convergenţei uniforme pe compacte.

Utilizarea mulţimilor compacte este foarte avantajoasă în cazul funcţiilor continue care, după cum ştim, sunt mărginite pe compacte: dacă $f, g : K \to \mathbb{C}$ sunt continue pe compactul $K \subset \mathbb{C}$, se poate defini *abaterea maximă* pe K

$$\|f - g\|_K = \sup_{z \in K} |f(z) - g(z)| < +\infty$$

şi avem următoarea caracterizare a convergenţei uniforme:

Propoziţie . *Şirul de funcţii continue $f_n : D \to \mathbb{C}$ converge uniform pe compacte la f dacă şi numai dacă, pentru orice compact $K \subset D$,*

$$\|f_n - f\|_K \to 0.$$

Analog şirurilor numerice, are loc şi următoarea caracterizare de tip Cauchy:

Teoremă. *Şirul de funcţii (f_n) este convergent uniform pe compacte dacă şi numai dacă $\forall\, K \subset D$ compact, $\forall\, \varepsilon > 0$, $\exists\, n_K(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ astfel încât $n \geq n_K(\varepsilon) \Rightarrow |f_{n+p}(z) - f_n(z)| < \varepsilon,\ \forall\ p \in \mathbb{N}, \forall\ z \in K$.*

Teoremă. *Dacă şirul de funcţii continue $f_n : D \to \mathbb{C}$ converge uniform pe compacte la f, iar $\gamma \subset D$ este o curbă rectificabilă, atunci*

$$\lim_{n \to \infty} \int_\gamma f_n(z) dz = \int_\gamma f(z) dz.$$

Demonstraţie. Funcţia limită f este evident continuă, deci integrabilă pe curba rectificabilă γ. Mulţimea suport $\gamma \subset D$ este imaginea funcţiei continue $\gamma = \gamma(t)$ definită pe un interval compact $[\,a, b]$, deci este mulţime compactă. Atunci, $\forall\, \varepsilon > 0$, $\exists\, n_\gamma(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ astfel încât $n \geq n_\gamma(\varepsilon) \Rightarrow |f_n(z) - f(z)| < \varepsilon,\ \forall\ z \in \gamma$, de unde obţinem

$$\left| \int_\gamma f_n(z) dz - \int_\gamma f(z) dz \right| = \left| \int_\gamma [f_n(z) dz - f(z)] dz \right| < \varepsilon L(\gamma),$$

pentru orice $n \geq n_\gamma(\varepsilon)$, de unde concluzia. $\square$

Teorema de convergenţă a lui Weierstrass. *Dacă şirul $(f_n)_n$ de funcţii olomorfe în $D \subset \mathbb{C}$ converge uniform pe compacte, atunci*

(i) funcţia limită f este olomorfă în D,

(ii) pentru orice $k \in \mathbb{N}$, şirul derivatelor de ordin k, $(f_n^{(k)})_n$, converge uniform pe compacte la $f^{(k)}$.

Demonstraţie. (i) Pentru orice curbă închisă γ omotopă cu un punct în D avem

$$\int_\gamma f_n(z)dz = 0,$$

pentru orice $n \in \mathbb{N}$. Teorema precedentă ne permite să trecem la limită sub integrală şi obţinem

$$\int_\gamma f(z)dz = 0.$$

Acum, din teorema lui Morera, deducem că f este olomorfă în D.

(ii) Fie $q \in D$ şi $r > \rho > 0$ astfel încât $\overline{D}(q, r) \subset D$. Pentru orice $z_0 \in \overline{D}(q, \rho)$, utilizând formula integrală a lui Cauchy pentru derivata de ordin k, obţinem

$$|f_n^{(k)}(z_0) - f^{(k)}(z_0)| = \frac{k!}{2\pi} \left| \int_{|z-q|=r} \frac{f_n(z) - f(z)}{(z - z_0)^{k+1}} dz \right| \leq$$

$$\leq \frac{k!}{2\pi} \cdot 2\pi r \cdot \frac{1}{(r - \rho)^{k+1}} \cdot \sup_{|z-q|=r} |f_n(z) - f(z)|,$$

de unde deducem convergenţa uniformă a şirului $(f_n^{(k)})_n$ la $f^{(k)}$ pe discul închis $\overline{D}(q, \rho)$. Cum familia $\{D(q, \rho)\}_{q \in D}$ este o acoperire deschisă a lui D, demonstraţia este încheiată. □

Fiind date funcţiile $f_n : D \to \mathbb{C}$, putem considera *seria de funcţii*

$$\sum_{n=0}^{\infty} f_n = f_0 + f_1 + \cdots + f_n + \cdots ,$$

convergenţa ei fiind dată, prin definiţie, de convergenţa şirului de funcţii

$$s_n = f_0 + f_1 + \cdots + f_n,$$

numit *şirul sumelor parţiale.*

Mai precis, vom spune că seria $\sum_{n=0}^{\infty} f_n$ este

(i) *convergentă* în D, dacă şirul de funcţii $(s_n)_n$ este punctual convergent, adică dacă seria de numere complexe $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(z)$ este convergentă $\forall\ z \in D$;

(ii) *absolut convergentă* în D, dacă seria de numere reale pozitive $\sum_{n=0}^{\infty} |f_n(z)|$ este convergentă $\forall\ z \in D$;

(iii) *uniform convergentă pe compacte* în D, dacă şirul de funcţii $(s_n)_n$ este uniform convergent pe compacte.

Amintim că absoluta convergenţă implică convergenţa simplă a unei serii, pentru convergenţa uniformă pe compacte avem următorul criteriu:

Teoremă. *Dacă pentru fiecare compact $K \subset D$, seria de numere reale pozitive $\sum_{n=0}^{\infty} \sup_{z \in K} |f_n(z)|$ este convergentă, atunci seria de funcţii $\sum_{n=0}^{\infty} f_n$ este uniform convergentă pe compacte.*

Demonstraţie. Enunţul presupune că funcţiile f_n sunt mărginite pe K, notăm $\|f_n\|_K = \sup_{z\in K} |f_n(z)| < +\infty$. Fie $\varepsilon > 0$. Pentru fiecare $z \in K$ şi $p \in \mathbb{N}$ avem majorarea

$$|s_{n+p}(z) - s_n(z)| \leq |f_{n+1}(z)| + \cdots + |f_{n+p}(z)| \leq$$
$$\leq \|f_{n+1}\| + \cdots + \|f_{n+p}\| < \varepsilon,$$

valabilă pentru orice $n \geq n_K(\varepsilon)$, unde $n_K(\varepsilon)$ este dat de convergenţa seriei cu termeni pozitivi $\sum_{n=0}^{\infty} \|f_n\|_K$ şi nu depinde nici de z, nici de p. □

Teorema de convergenţă a lui Weierstrass pentru serii. *Dacă seria* $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} f_n$ *de funcţii olomorfe în* $D \subset \mathbb{C}$ *converge uniform pe compacte, atunci*

(i) *suma seriei* $s = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} f_n$ *este olomorfă în* D*,*

(ii) *pentru orice* $k \in \mathbb{N}$*, seria derivatelor de ordin* k*,* $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} f_n^{(k)}$*, converge uniform pe compacte şi are suma* $s^{(k)}$*.*

Demonstraţie. Se aplică teorema de convergenţă a lui Weierstrass şirului de funcţii $s_n = f_0 + f_1 + \cdots + f_n$. □

§2. Serii de puteri

Dintre toate seriile de funcţii cele mai importante sunt cele mai simple: seriile de forma

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n,$$

numite *serii de puteri*. Şirul $(a_n)_n \subset \mathbb{C}$ este numit *şirul coeficienţilor* seriei, deoarece fiecare sumă parţială

$$s_n(z) = a_0 + a_1(z - z_0) + \cdots + a_n(z - z_0)^n,$$

este o funcţie polinomială cu coeficienţi complecşi, dezvoltată după puterile lui $z - z_0$. Studiul acestor serii poate fi redus, de cele mai multe ori, la cazul $z_0 = 0$, prin schimbarea de variabilă $z - z_0 \mapsto z$.

Exemplul fundamental de serie de puteri este seria geometrică, despre care ştim deja că este convergentă dacă şi numai dacă $|z| < 1$, caz în care suma ei este

$$\sum_{n=0}^{\infty} z^n = \frac{1}{1 - z}.$$

Să observăm că seria geometrică este chiar absolut convergentă pe discul $D(0, 1)$, seria modulelor fiind chiar seria geometrică din $\mathbb{R}$:

$$\sum_{n=0}^{\infty} |z^n| = \sum_{n=0}^{\infty} |z|^n = \frac{1}{1 - |z|} < +\infty.$$

Mai mult, seria este şi uniform convergentă pe compacte în discul $D(0,1)$, deoarece pentru orice compact $K \subset D(0,1)$ avem $\sup_{z\in K}|z| = \rho < 1$ şi atunci

$$\sum_{n=0}^{\infty} \sup_{z\in K}|z^n| = \sum_{n=0}^{\infty} (\sup_{z\in K}|z|)^n \leq \sum_{n=0}^{\infty} \rho^n = \frac{1}{1-\rho} < +\infty.$$

Să observăm că, deşi este uniform convergentă pe compacte, seria geometrică nu este şi uniform convergentă pe întregul disc $D(0,1)$ la suma sa, $s(z) = \frac{1}{1-z}$. Într-adevăr, abaterea maximă pe $D(0,1)$ tinde la infinit:

$$\|s_{n-1} - s\|_{D(0,1)} = \sup_{|z|<1} |s_{n-1}(z) - s(z)| = \sup_{|z|<1} \frac{|z|^n}{|1-z|} \geq \frac{(1-\frac{1}{n})^n}{\frac{1}{n}} \to +\infty.$$

În concluzie, seria geometrică este absolut şi uniform convergentă pe compacte în $D(0,1)$ şi este divergentă în orice z cu $|z| > 1$. Spunem că discul unitate $D(0,1)$ este *discul de convergenţă* al seriei geometrice. Vom arăta că situaţia aceasta este tipică: pentru orice serie de puteri există şi este unic un astfel de disc de convergenţă, $D(z_0, R)$, cu $R \in [\,0, +\infty\,]$.

Lema lui Abel.(i) *Dacă pentru un* $z_0 \neq 0$ *seria* $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n z_0^n$ *este convergentă, atunci seria de puteri* $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ *converge absolut şi uniform pe compacte în discul* $D(0, |z_0|)$;

(ii) *dacă seria* $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n z_0^n$ *este divergentă, atunci seria de puteri* $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ *este divergentă în orice* z *cu* $|z| > |z_0|$.

Demonstraţie. (i) Fie $K \subset D(0, |z_0|)$ un compact şi $\rho = \sup_{z\in K}|z|$. Deoarece supremumul din definiţia lui ρ este atins, avem $\rho < |z_0|$. Din convergenţa seriei $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n z_0^n$ urmează că există $M \geq 0$ astfel încât $|a_n z_0^n| \leq M$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Prin urmare, pentru orice $z \in K$,

$$|a_n z^n| = |a_n z_0^n| \left|\frac{z}{z_0}\right|^n \leq M \left(\frac{\rho}{|z_0|}\right)^n.$$

Deoarece seria geometrică cu raţia $\dfrac{\rho}{|z_0|} < 1$ este convergentă, deducem că seria

$$\sum_{n=0}^{\infty} \sup_{z\in K} |a_n z^n|$$

este convergentă, de unde rezultă atât absoluta convergenţă cât şi convergenţa uniformă pe compacte în $D(0, |z_0|)$ a seriei de puteri $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$.

(ii) Dacă am presupune, prin absurd, că există un z cu $|z| > |z_0|$ pentru care seria este convergentă, atunci, conform punctului (i), seria $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z_0^n$ ar trebui să fie convergentă, dar nu este. $\square$

Teorema razei de convergenţă. *Pentru fiecare serie de puteri* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ *există în mod unic* $R \in [0, +\infty]$*, numit* raza de convergenţă *a seriei considerate, astfel încât*

(i) *dacă* $R = 0$*, atunci seria converge numai în* $z = 0$*;*

(ii) *dacă* $R \in (0, +\infty)$*, atunci seria de puteri converge absolut şi uniform pe compacte în discul* $D(0, R)$ *şi diverge în orice* z *cu* $|z| > R$*;*

(iii) *dacă* $R = +\infty$*, atunci seria de puteri converge absolut şi uniform pe compacte în* $\mathbb{C}$*.*

Raza de convergenţă este dată de formula Cauchy-Hadamard

$$R = \frac{1}{\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}}.$$

Demonstraţie. Definim

$$R = \sup \left\{ r \geq 0 \ \text{ pentru care } \sum_{n=0}^{\infty} a_n r^n \text{ converge} \right\} \in [\,0, +\infty\,].$$

Dacă $R = 0$ demonstraţia este încheiată.

Considerăm cazul $R \in (0, +\infty)$. Pentru orice ρ cu $0 < \rho < R$ există r cu $\rho < r < R$ astfel încât seria $\sum_{n=0}^{\infty} a_n r^n$ să fie convergentă. Atunci, din lema lui Abel, seria $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ este absolut şi uniform convergentă pe compacte în $D(0, \rho)$. Obţinem că seria este absolut şi uniform convergentă pe compacte în tot discul $D(0, R)$.

Dacă ar exista z_0 cu $r_0 = |z_0| > R$ în care seria de puteri să fie convergentă, tot din lema lui Abel ar rezulta că seria e convergentă pentru orice z cu $R < |z| < r_0$, contrazicând definiţia lui R.

Cazul $R = +\infty$ este cuprins în discuţia de mai sus.

Unicitatea se justifică astfel: dacă am presupune că există două raze de convergenţa distincte, $R < R'$, în orice z_0 cu $R < |z_0| < R'$ seria ar trebui să fie convergentă şi divergentă în acelaşi timp.

Pentru a stabili formula Cauchy-Hadamard, definim

$$R^* = \sup \left\{ r \geq 0 \ \text{ pentru care } \sum_{n=0}^{\infty} |a_n| r^n \text{ converge} \right\} \in [\,0, +\infty\,],$$

şi avem $R^* \leq R$, deoarece convergenţa absolută implică convergenţa simplă. Pentru orice $r < R$ punctul $z = r$ este în discul de convergenţă, urmează că $\sum_{n=0}^{\infty} a_n r^n$ este absolut convergentă, de unde deducem că $r \leq R^*$, deci $R^* = R$.

Aplicăm acum, pentru seria de numere reale pozitive

$$\sum_{n=0}^{\infty} |a_n| r^n$$

criteriul de convergenţă cu limită superioară al lui Cauchy, şi obţinem că, dacă

$$\ell = r \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} < 1,$$

atunci seria converge, iar dacă $\ell > 1$ seria diverge. Primul caz implică inegalitatea

$$\frac{1}{\limsup\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}} \leq R^*,$$

iar al doilea implică inegalitatea inversă. □

Exemplu. Verificaţi că următoarele serii de puteri au raza de convergenţă R precizată:

(i) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n^n z^n$, $R = 0$;

(ii) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} 2^n z^n$, $R = 1/2$.

(iii) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n^{-n} z^n$, $R = +\infty$;

Teoremă. *Suma* $f(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ *a unei serii de puteri cu raza de convergenţă* $R > 0$ *este olomorfă în discul de convergenţă* $D(0, R)$. *Mai mult, seria poate fi derivată termen cu termen iar coeficienţii ei sunt daţi de formula*

$$a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}, \quad \forall\, n \in \mathbb{N}.$$

Demonstraţie. Funcţiile $f_n(z) = a_n z^n$ sunt olomorfe în $\mathbb{C}$ şi din teorema de convergenţă a lui Weierstrass pentru serii de funcţii olomorfe urmează: (i), suma $f(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} f_n(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ este olomorfă în $D(0, R)$ şi (ii), pentru orice $k \in \mathbb{N}$, seria derivatelor de ordin k este uniform convergentă pe compacte în $D(0, R)$ şi are ca sumă $f^{(k)}$.

Să observăm că seriile derivatelor de ordin k

$$f^{(k)}(z) = \sum_{n=k}^{\infty} n(n-1)\cdots(n-k+1) a_n z^{n-k},$$

sunt tot o serii de puteri, şi sunt convergente în orice $z \in D(0, R)$, având prin urmare raza de convergenţă $\geq R$. Formula coeficienţilor se obţine luând $z = 0$ în aceste serii.

Vom arăta, în final, că toate seriile derivatelor au de fapt raza de convergenţă egală cu R. Este suficient să arătăm aceasta pentru seria derivatelor de ordin întâi, $f'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n z^{n-1}$. Este clar că seriile $\sum_{n=1}^{\infty} n a_n z^{n-1}$ şi $\sum_{n=0}^{\infty} n a_n z^n$ sunt convergente pentru aceeaşi $z \in \mathbb{C}$, deci au aceeaşi rază de convergenţă, iar ultima are raza

$$\frac{1}{\limsup\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n|a_n|}} = \frac{R}{\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n}} = R.$$

□

§3. Funcţii analitice

Fie D o mulţime deschisă nevidă. Funcţia $f : D \to \mathbb{C}$ se numeşte *analitică* în D dacă pentru orice $z_0 \in D$ există $r_0 > 0$ astfel încât $D(z_0, r_0) \subset D$ şi pe $D(z_0, r_0)$ funcţia f este suma unei serii de puteri

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n, \ \forall z \in D(z_0, r_0).$$

Cu această definiţie, teorema de derivare a seriilor de puteri se reformulează astfel:

Teoremă. *Dacă $f : D \to \mathbb{C}$ este analitică atunci este olomorfă în D. Mai mult, în acest caz, pentru orice $z_0 \in D$ există $r_0 > 0$ astfel încât*

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(z - z_0)^n, \ \forall z \in D(z_0, r_0).$$

Pentru a arăta că are loc şi reciproca teoremei de mai sus, avem nevoie de următoarea

Lemă. *Fie $R > 0$ şi $f : D(0, R) \to \mathbb{C}$ o funcţie olomorfă în $D(0, R)$. Atunci*

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} z^n, \ \forall z \in D(0, R).$$

Demonstraţie. Fie $z_0 \in D(0, R)$ şi $\rho \in \mathbb{R}$ cu $|z_0| < \rho < R$. Vom folosi formula integrală a lui Cauchy

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=\rho} \frac{f(z)}{z - z_0} dz.$$

Pentru orice z cu $|z| = \rho$ avem $\left|\frac{z_0}{z}\right| = \frac{|z_0|}{\rho} < 1$ şi atunci

$$\frac{1}{z - z_0} = \frac{1}{z} \cdot \frac{1}{1 - \frac{z_0}{z}} = \frac{1}{z} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z_0}{z}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z_0^n}{z^{n+1}}$$

Din aceste egalităti rezultă că seria de funcţii în variabila z, $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f(z) z_0^n}{z^{n+1}}$, este uniform convergentă pe cercul $|z| = \rho$, deci seria comută cu integrala:

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=\rho} \frac{f(z)}{z - z_0} dz = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=\rho} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f(z) z_0^n}{z^{n+1}} dz =$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \sum_{n=0}^{\infty} \int_{|z|=\rho} \frac{f(z) z_0^n}{z^{n+1}} dz = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=\rho} \frac{f(z)}{z^{n+1}} dz \right) z_0^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} z_0^n.$$

În ultima egalitate de mai sus am folosit formulele lui Cauchy pentru derivate

$$f^{(n)}(0) = \frac{n!}{2\pi i} \int_{|z|=\rho} \frac{f(z)}{z^{n+1}} dz.$$

□

Teoremă. *Dacă $f : D \to \mathbb{C}$ este olomorfă atunci este analitică în D. Mai mult, în acest caz, pentru orice $z_0 \in D$, dezvoltarea*

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} (z - z_0)^n,$$

este valabilă în cel mai mare disc centrat în z_0 şi inclus în D.

Demonstraţie. Fie $z_0 \in D$ fixat arbitrar. Notăm

$$R = d(z_0, \mathbb{C} \setminus D) \stackrel{\text{def}}{=} \inf_{z \notin D} |z - z_0|.$$

Dacă $D = \mathbb{C}$, atunci $R = +\infty$, altfel $R \in (0, +\infty)$, în orice situaţie $D(z_0, R) \subset D$.

Definim $g(z) = f(z + z_0)$, $g : D(0, R) \to \mathbb{C}$. Funcţia g este olomorfă pe $D(0, R)$ şi atunci, conform lemei, admite dezvoltarea

$$g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{g^{(n)}(0)}{n!} z^n, \ \forall z \in D(0, R).$$

Cum $g^{(n)}(0) = f^{(n)}(z_0)$, obţinem pentru f dezvoltarea din enunţul teoremei, deci f este analitică în D. □

Exemplu. Verificaţi că următoarele funcţii elementare au dezvoltările indicate:

(1) $\quad e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}, \quad \forall z \in \mathbb{C};$

(2) $$\cos z = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!}, \quad \forall z \in \mathbb{C};$$

(3) $$\sin z = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}, \quad \forall z \in \mathbb{C};$$

(4) $$\ln(1+z) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{n+1}}{n+1}, \quad |z| < 1 \text{ (determinarea principală);}$$

(5) $$(1+z)^\alpha = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!} z^n, \quad |z| < 1 \text{ (determinarea}$$
principală);

Rezolvare. Se calculează derivatele $f^{(n)}$ pe baza formulelor de derivare a funcţiilor elementare şi se aplică teorema de dezvoltare în serie a funcţiilor analitice.

§4. Principiul prelungirii analitice

Teoremă. *Dacă f este olomorfă în domeniul $D \subset \mathbb{C}$ şi nu este identic nulă, atunci, pentru fiecare $z_0 \in D$, există în mod unic un $m \in \mathbb{N}$ şi o funcţie olomorfă $g : D \to \mathbb{C}$, cu $g(z_0) \neq 0$ şi astfel încât*

$$f(z) = (z - z_0)^m g(z), \ \forall z \in D.$$

Observaţie. Numărul $m \geq 0$ se numeşte *ordinul de multiplicitate* al lui z_0 ca rădăcină a lui f şi, din demonstraţia care urmează, el se determină exact ca la polinoame: este cel mai mic ordin de derivare m pentru care $f^{(m)}(z_0) \neq 0$.

Demonstraţie. Fie $z_0 \in D$ fixat arbitrar. Arătăm că există un n_0 astfel încât $f^{(n_0)}(z_0) \neq 0$. Presupunem, prin reducere la absurd, că nu există acest n_0 şi obţinem că mulţimea

$$A = \{z \in D \text{ pentru care } f^{(n)}(z) = 0, \ \forall n \in \mathbb{N}\}$$

este nevidă. A este închisă în D ca intersecţie de mulţimi închise

$$A = \bigcap_{n=0}^{\infty} {f^{(n)}}^{-1}(\{0\}).$$

A este şi deschisă: dacă $z_1 \in A$ atunci, din dezvoltarea lui f în z_1 obţinem

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_1)}{n!} (z - z_1)^n = 0,$$

pentru orice z dintr-un disc $D(z_1, r_1) \subset D$, deci şi toate derivatele lui f sunt identic nule pe $D(z_1, r_1)$. Conexiunea domeniului D implică atunci egalitatea $A = D$, şi rezultă că f este identic nulă pe D, în contradicţie cu ipoteza teoremei.

Am arătat că există un n_0 astfel încât $f^{(n_0)}(z_0) \neq 0$. Definim m ca fiind cel mai mic număr natural cu această proprietate, deci dezvoltarea lui f în z_0 are forma

$$f(z) = \frac{f^{(m)}(z_0)}{m!}(z-z_0)^m + \frac{f^{(m+1)}(z_0)}{(m+1)!}(z-z_0)^{m+1} + \cdots =$$

$$= (z-z_0)^m \left[\frac{f^{(m)}(z_0)}{m!} + \frac{f^{(m+1)}(z_0)}{(m+1)!}(z-z_0) + \cdots \right]$$

pentru orice z dintr-un disc $D(z_0, r_0) \subset D$. Definim

$$g(z) = \begin{cases} \displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(m+k)}(z_0)}{(m+k)!}(z-z_0)^k, & \text{pentru } z \in D(z_0, r_0), \\ \dfrac{f(z)}{(z-z_0)^m}, & \text{pentru } z \in D \setminus \{z_0\}. \end{cases}$$

Funcţia g este corect definită, este olomorfă în D cu $g(z_0) = \dfrac{f^{(m)}(z_0)}{m!} \neq 0$ şi $f(z) = (z-z_0)^m g(z)$, $\forall z \in D$. □

Teoremă. *Fie f o funcţie olomorfă pe domeniul $D \subset \mathbb{C}$, $z^* \in D$ şi $(z_n)_n$ un şir din $D \setminus \{z^*\}$ convergent la z^*. Dacă $f(z_n) = 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$, atunci f este identic nulă în D.*

Demonstraţie. Presupunem că $f(z_n) = 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$, şi admitem, prin absurd, că f nu este identic nulă în D. Rezultă că ordinul de multiplicitate m este bine definit pentru orice $z \in D$, în particular pentru limita z^*.

Există deci $m \geq 0$ şi g o funcţie olomorfă în D, cu $g(z^*) \neq 0$ astfel încât $f(z) = (z-z^*)^m g(z)$, $\forall z \in D$. Din $f(z_n) = 0$ cu $z_n \neq z^*$, urmează că $g(z_n) = 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Funcţia g fiind continuă, din $z_n \to z^*$ urmează că $g(z^*) = 0$, în contradicţie cu definiţia lui g. □

Principiul prelungirii analitice afirmă că două funcţii h şi g, analitice (echivalent: olomorfe) într-un domeniu (mulţime deschisă şi conexă) D, care sunt egale pe o mulţime $A \subset D$ având cel puţin un punct de acumulare în D, sunt egale pe tot domeniul D. Într-adevăr, această concluzie rezultă din teorema de mai sus, aplicată funcţiei diferenţă $f = h - g$.

Exemplu. Arătaţi că identitatea trigonometrică

$$\sin 2z = 2 \sin z \cos z,$$

valabilă pentru $z \in \mathbb{R}$, este valabilă şi în $\mathbb{C}$.

Rezolvare. Funcţia $h(z) = \sin 2z$ coincide cu funcţia $g(z) = 2\sin z \cos z$ pe mulţimea $A = \mathbb{R}$ care, evident, are puncte de accumulare în $\mathbb{C}$, deci h coincide cu g pe întregul domeniu comun de definiţie, $D = \mathbb{C}$.