Cursul 9

Teorema reziduurilor

§1. Serii Laurent

Am văzut că orice funcţie olomorfă într-un disc $D(0,R)$ este dezvoltabilă în serie de puteri, mai precis,

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}z^n,$$

pentru orice $z\in D(0,R)$, iar acest rezultat a fost stabilit cu formula integrală a lui Cauchy,

$$f(z_0)=\frac{1}{2\pi i}\int_{|z|=r}\frac{f(z)}{z-z_0}dz,\ \ r<R,$$

dezvoltând în serie de puteri, pe baza seriei geometrice, fracţia $\dfrac{1}{z-z_0}$.

Studiem acum cazul în care ştim numai că f este olomorfă într-o coroană circulară:

Teoremă. *Dacă f este o funcţie olomorfă în domeniul*

$$K(r,R)=\{z\in\mathbb{C}:\ \ 0\le r<|z|<R\},$$

atunci există şi sunt unic determinaţi coeficienţii $(a_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ astfel încât

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nz^n+\sum_{n=1}^{\infty}a_{-n}z^{-n},$$

pentru orice $z\in K(r,R)$.

Demonstraţie. Fie $z_0\in K(r,R)$, şi fie r_0 şi R_0 astfel încât

$$r<r_0<|z_0|<R_0<R.$$

Analog demonstraţiei menţionate, vom folosi acum formula integrală a lui Cauchy pentru coroana circulară $K(r_0,R_0)$,

$$f(z_0)=\frac{1}{2\pi i}\left[\int_{|z|=R_0}\frac{f(z)}{z-z_0}dz-\int_{|z|=r_0}\frac{f(z)}{z-z_0}dz\right].$$

Pentru orice z cu $|z|=r_0$ avem $\left|\dfrac{z}{z_0}\right|=\dfrac{r_0}{|z_0|}<1$ şi atunci

$$\frac{1}{z-z_0}=-\frac{1}{z_0}\cdot\frac{1}{1-\dfrac{z}{z_0}}=-\frac{1}{z_0}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z}{z_0}\right)^n=-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{z_0^{n+1}},$$

seria fiind uniform convergentă pe cercul de ecuaţie $|z| = r_0$.

Analog, pe cercul $|z| = R_0$ avem dezvoltarea în serie uniform convergentă

$$\frac{1}{z - z_0} = \frac{1}{z} \cdot \frac{1}{1 - \dfrac{z_0}{z}} = \frac{1}{z} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z_0}{z}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z_0^n}{z^{n+1}}.$$

Introducem aceste dezvoltări în formula lui Cauchy menţionată mai sus şi, comutând seriile cu integralele, obţinem pentru $f(z_0)$ o dezvoltare de forma dorită:

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \left[\sum_{n=0}^{\infty} \left(\int_{|z|=R_0} \frac{f(z)}{z^{n+1}}\, dz \right) z_0^n + \sum_{n=0}^{\infty} \left(\int_{|z|=r_0} f(z) z^n \, dz \right) \frac{1}{z_0^{n+1}} \right] =$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \left[\sum_{n=0}^{\infty} \left(\int_{|z|=R_0} \frac{f(z)}{z^{n+1}}\, dz \right) z_0^n + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\int_{|z|=r_0} f(z) z^{n-1} \, dz \right) \frac{1}{z_0^{n}} \right] =$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \left[\sum_{n=0}^{\infty} \left(\int_{|z|=R_0} \frac{f(z)}{z^{n+1}}\, dz \right) z_0^n + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\int_{|z|=r_0} \frac{f(z)}{z^{-n+1}} \, dz \right) z_0^{-n} \right].$$

Justificăm acum unicitatea acestei dezvoltări. Fie $(a_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ astfel încât

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n + \sum_{n=1}^{\infty} a_{-n} z^{-n},$$

pentru orice $z \in K(r, R)$ şi fie $\rho > 0$ cu $r < \rho < R$. Atunci, pentru orice $k \in \mathbb{Z}$,

$$\int_{|z|=\rho} \frac{f(z)}{z^{k+1}}\, dz = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \int_{|z|=\rho} z^{n-k-1}\, dz + \sum_{n=1}^{\infty} a_{-n} \int_{|z|=\rho} z^{-n-k-1}\, dz.$$

Deoarece

$$\int_{|z|=\rho} z^m \, dz = \begin{cases} 0, \ m \neq -1 \\ 2\pi i, m = -1 \end{cases},$$

în membrul drept din formula precedentă toate integralele sunt nule cu excepţia uneia singure, şi anume aceea pentru care $n - k - 1 = -1$, dacă $k \geq 0$, sau aceea pentru care $-n-k-1 = -1$, dacă $k < 0$. Analizând aceste două cazuri, obţinem în final formula de calcul a coeficienţilor a_k:

$$a_k = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=\rho} \frac{f(z)}{z^{k+1}}\, dz, \ \forall\, k \in \mathbb{Z},$$

în care, datorită olomorfiei integrandului, valoarea integralei nu depinde de raza $\rho \in (r, R)$. □

Observaţie. În general, se preferă ca o dezvoltare de forma

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z^*)^n + \sum_{n=1}^{\infty} a_{-n} (z - z^*)^{-n},$$

să fie scrisă condensat ca o *serie Laurent*

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z - z^*)^n$$

înţelegând prin aceasta că atât seria

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z^*)^n,$$

numită *partea analitică* a dezvoltării, cât şi seria

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_{-n} (z - z^*)^{-n},$$

numită *partea principală*, sunt convergente.

Să observăm că partea analitică a unei dezvoltări în serie Laurent este o serie de puteri în variabila $u = z - z_0$, iar partea principală este o serie de puteri în variabila $w = \dfrac{1}{z - z_0}$ şi atunci, notând cu R_1 raza de convergenţă a seriei $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n u^n$ şi cu R_2 raza de convergenţă a seriei de puteri $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_{-n} w^n$, deducem că, dacă $\dfrac{1}{R_2} < R_1$, atunci seria Laurent $\displaystyle\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$ este convergentă în coroana circulară $\dfrac{1}{R_2} < |z - z_0| < R_1$. Mai mult, convergenţa fiind uniformă pe compacte, rezultă că suma oricărei serii Laurent este o funcţie olomorfă în coroana circulară de convergenţă.

Reciproc, dacă ştim că f este olomorfă în coroana $K(r, R)$ atunci în mod necesar

$$\frac{1}{R_2} \leq r < R \leq R_1,$$

de unde rezultă că $R_2 \geq \dfrac{1}{r}$ dacă $r > 0$ sau $R_2 = +\infty$ dacă $r = 0$.

§2. Singularităţi izolate

Vom studia acum comportarea funcţiilor complexe la frontiera domeniului de olomorfie. Cazul cel mai simplu este când frontiera se reduce, local, la un singur punct, adică atunci când f este olomorfă pe o coroană circulară $K(r, R)$ cu $r = 0$:

Definiţie. Fie $D \subset \mathbb{C}$ un domeniu, $z_0 \in D$ şi $f : D \setminus \{z_0\} \to \mathbb{C}$ o funcţie olomorfă. În această situaţie, z_0 se numeşte *punct singular izolat* pentru f.

Pentru orice punct singular izolat z_0, există $R > 0$ astfel încât $D(z_0, R) \subset D$, prin urmare f este olomorfă în coroana circulară $0 < |z - z_0| < R$, de unde deducem că f este dezvoltabilă în serie Laurent în z_0:

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z - z_0)^n,$$

pentru orice $z \in \mathbb{C}$ cu $0 < |z - z_0| < R$. Să observăm că partea analitică a dezvoltării are raza de convergenţă $\geq R$, în timp ce partea principală este absolut şi uniform convergentă pe compacte în $\mathbb{C} \setminus \{z_0\}$.

Definiţie. Pe baza dezvoltării în serie Laurent, un punct singular izolat z_0 este numit

(i) *punct singular aparent* dacă $a_{-n} = 0$ pentru orice $n \geq 1$;
(ii) *pol* (*de ordin* $p \geq 1$) dacă $a_{-p} \neq 0$ şi $a_{-n} = 0$ pentru orice $n \geq p + 1$;
(iii) *punct singular esenţial* în toate celelalte situaţii.

Exemple. Funcţia $f(z) = \dfrac{e^z - 1 - z}{z^2}$ are o singularitate aparentă în $z_0 = 0$ deoarece dezvoltarea Laurent are partea principală nulă:

$$f(z) = \frac{e^z - 1 - z}{z^2} = \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} z + \frac{1}{4!} z^2 + \cdots .$$

Funcţia $f(z) = \dfrac{e^z}{(z-1)^2}$ are în $z_0 = 1$ dezvoltarea

$$f(z) = \frac{e^z}{(z-1)^2} = \frac{e \cdot e^{z-1}}{(z-1)^2} =$$

$$= \frac{e}{0!} \cdot \frac{1}{(z-1)^2} + \frac{e}{1!} \cdot \frac{1}{z-1} + \frac{e}{2!} + \frac{e}{3!} \cdot (z-1) + \frac{e}{4!} \cdot (z-1)^2 + \cdots ,$$

deci $z_0 = 1$ este pol de ordin $p = 2$.

Funcţia $f(z) = \sin \dfrac{1}{z}$ are în $z_0 = 0$ dezvoltarea Laurent

$$f(z) = \sin \frac{1}{z} = \frac{1}{1!} \cdot \frac{1}{z} - \frac{1}{3!} \cdot \frac{1}{z^3} + \frac{1}{5!} \cdot \frac{1}{z^5} - \cdots ,$$

de unde se vede că $z_0 = 0$ este o singularitate esenţială, deoarece partea principală are o infinitate de coeficienţi nenuli.

Teoremă. *Punctul singular izolat z_0 este un punct singular aparent pentru funcţia f dacă şi numai dacă există $\lim\limits_{z \to z_0} f(z) \in \mathbb{C}$.*

Demonstraţie. Dacă z_0 este un punct singular aparent atunci

$$f(z) = a_0 + a_1(z - z_0) + a_2(z - z_0)^2 + \ldots ,$$

pentru orice z cu $0 < |z - z_0| < R$, de unde $\lim\limits_{z \to z_0} f(z) = a_0$.

Reciproc, dacă există $\lim\limits_{z \to z_0} f(z) = \omega_0 \in \mathbb{C}$, atunci funcţia

$$g(z) = \begin{cases} f(z), & z \neq z_0, \\ \omega_0, & z = z_0, \end{cases}$$

este continuă pe D şi olomorfă în $D \setminus \{z_0\}$. Conform teoremei lui Morera, g este olomorfă, deci analitică, în D. Există $R > 0$ şi $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ astfel încât

$$g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n,$$

pentru orice $z \in D(z_0, R)$, cu $a_0 = \omega_0$, evident. Deoarece f coincide cu g pe coroana $0 < |z - z_0| < R$, obţinem astfel dezvoltarea Laurent a lui f în care partea principală este nulă, deci z_0 este un punct singular aparent pentru f. □

Teoremă (Riemann). *Punctul singular izolat z_0 este un punct singular aparent pentru funcţia f dacă şi numai dacă $\lim\limits_{z\to z_0} (z - z_0) f(z) = 0$.*

Demonstraţie. Dacă punctul z_0 este un punct singular aparent atunci există $\lim\limits_{z\to z_0} f(z) = \omega_0 \in \mathbb{C}$, şi astfel

$$\lim_{z\to z_0} (z - z_0) f(z) = 0 \cdot \omega_0 = 0.$$

Reciproc, presupunem că $\lim\limits_{z\to z_0} (z - z_0) f(z) = 0$ şi definim funcţia

$$g(z) = \begin{cases} (z - z_0) f(z), & z \neq z_0, \\ 0, & z = z_0, \end{cases}$$

care, exact ca în demonstraţia precedentă, este iarăşi continuă pe D şi olomorfă în $D \setminus \{z_0\}$, deci dezvoltabilă în serie de puteri în z_0

$$g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n, \ \forall\ |z - z_0| < R,$$

cu $a_0 = g(z_0) = 0$.

Din

$$(z - z_0) f(z) = g(z) = a_1(z - z_0) + a_2(z - z_0)^2 + a_3(z - z_0)^3 + \cdots,$$

urmează că

$$f(z) = a_1 + a_2(z - z_0) + a_3(z - z_0)^2 + a_4(z - z_0)^3 + \cdots,$$

pentru orice z din coroana $0 < |z - z_0| < R$ în care f coincide cu g, şi astfel am arătat că z_0 este o singularitate aparentă pentru f. □

Teoremă. *Punctul singular izolat z_0 este pol de ordin p, cu $p \geq 1$, pentru funcţia f dacă şi numai dacă există o funcţie olomorfă $g : D \to \mathbb{C}$ cu $g(z_0) \neq 0$ şi astfel încât*

$$f(z) = \frac{1}{(z - z_0)^p} \cdot g(z),$$

pentru orice $z \in D \setminus \{z_0\}$.

Demonstraţie. Din dezvoltarea în serie de puteri a funcţiei analitice g,

$$(z-z_0)^p f(z) = g(z) = a_0 + a_1(z-z_0) + a_2(z-z_0)^2 + a_3(z-z_0)^3 + \cdots,$$

cu $a_0 = g(z_0) \neq 0$, obţinem dezvoltarea Laurent a lui f în z_0

$$f(z) = a_0 \cdot \frac{1}{(z-z_0)^p} + a_1 \cdot \frac{1}{(z-z_0)^{p-1}} + a_2 \cdot \frac{1}{(z-z_0)^{p-2}} + \cdots,$$

din care rezultă că z_0 este pol de ordin p. $\square$

Teoremă. *Punctul singular izolat z_0 este pol pentru funcţia f dacă şi numai dacă $\lim\limits_{z\to z_0} f(z) = \infty$.*

Demonstraţie. Dacă punctul singular z_0 este pol, atunci trecând la limită cu $z \to z_0$ în relaţia dată de teorema precedentă, obţinem

$$\lim_{z\to z_0} f(z) = \lim_{z\to z_0} \frac{1}{(z-z_0)^p} \cdot g(z) = \infty \cdot g(z_0) = \infty.$$

Reciproc, dacă presupunem că $\lim\limits_{z\to z_0} f(z) = \infty$, atunci $\lim\limits_{z\to z_0} \dfrac{1}{f(z)} = 0$, prin urmare $\dfrac{1}{f}$ are în z_0 o singularitate aparentă. Deducem că $\dfrac{1}{f}$ are dezvoltarea Laurent în z_0 cu partea principală nulă şi cu $a_0 = \lim\limits_{z\to z_0} \dfrac{1}{f(z)} = 0$. Fie $n_0 \geq 1$ primul coeficient nenul:

$$\begin{aligned}\frac{1}{f(z)} &= a_{n_0}(z-z_0)^{n_0} + a_{n_0+1}(z-z_0)^{n_0+1} + a_{n_0+2}(z-z_0)^{n_0+2} + \cdots \\ &= (z-z_0)^{n_0}\left[a_{n_0} + a_{n_0+1}(z-z_0) + a_{n_0+2}(z-z_0)^2 + \cdots\right] \\ &= (z-z_0)^{n_0} g(z),\end{aligned}$$

cu g olomorfă şi $g(z_0) = a_{n_0} \neq 0$. Există deci $r > 0$ astfel încât

$$f(z) = \frac{1}{(z-z_0)^{n_0}} \cdot \frac{1}{g(z)}$$

pentru orice z cu $0 < |z-z_0| < r$, de unde urmează concluzia. $\square$

§3. Teorema reziduurilor

Considerăm z_0 un punct singular izolat pentru o funcţie f cu dezvoltarea Laurent de forma

$$f(z) = \cdots + \frac{a_{-2}}{(z-z_0)^2} + \frac{a_{-1}}{z-z_0} + a_0 + a_1(z-z_0) + a_2(z-z_0)^2 + \ldots,$$

pentru orice z cu $0 < |z-z_0| < R$.

Definiţie. Coeficientul a_{-1} din dezvoltarea de mai sus se numeşte *reziduul* lui f în z_0 şi se notează cu

$$\operatorname{Rez}(f, z_0) \overset{def.}{=} a_{-1}.$$

Importanţa coeficientului a_{-1} este dată de demonstraţia următorului rezultat auxiliar:

Lemă. *Fie z_0 un punct singular izolat pentru funcţia f olomorfă în $D \setminus \{z_0\}$, şi fie $\gamma \subset D$ o curbă Jordan rectificabilă cu domeniul interior $D_\gamma \subset D$. Dacă $z_0 \in D_\gamma$, atunci*

$$\int_\gamma f(z)dz = 2\pi i Rez(f, z_0).$$

Demonstraţie. Notăm cu f_p partea principală din dezvoltarea Laurent a lui f în z_0. Deoarece f_p este olomorfă în $\mathbb{C} \setminus \{z_0\}$, rezultă că $g = f - f_p$ este olomorfă în $D \setminus \{z_0\}$ şi are în z_0 o singularitate aparentă. Există deci o prelungire $\tilde{g}$ a lui g olomorfă în D, pentru care

$$0 = \int_\gamma \tilde{g}(z)dz = \int_\gamma g(z)dz = \int_\gamma f(z)dz - \int_\gamma f_p(z)dz.$$

Am arătat astfel că

$$\int_\gamma f(z)dz = \int_\gamma f_p(z)dz.$$

Datorită uniformei convergenţe pe compacte a seriei care defineşte pe f_p, avem

$$\int_\gamma f_p(z)dz = \cdots + a_{-3} \int_\gamma \frac{dz}{(z-z_0)^3} + a_{-2} \int_\gamma \frac{dz}{(z-z_0)^2} + a_{-1} \int_\gamma \frac{dz}{z-z_0} =$$

$$= \cdots + a_{-3} \cdot 0 + a_{-2} \cdot 0 + a_{-1} \cdot 2\pi i = 2\pi i \, \mathrm{Rez}\,(f, z_0).$$

Aici am folosit faptul că, pentru $n \geq 2$, funcţiile $f_n(z) = \dfrac{1}{(z-z_0)^n}$ admit primitive în $\mathbb{C} \setminus \{z_0\}$, de exemplu $F_n(z) = \dfrac{-1}{n-1} \cdot \dfrac{1}{(z-z_0)^{n-1}}$, prin urmare $\displaystyle\int_\gamma \frac{dz}{(z-z_0)^n} = 0$, iar pentru $n = 1$, funcţia $f_1(z) = \dfrac{1}{z-z_0}$ nu admite primitive definite pe tot domeniul $\mathbb{C} \setminus \{z_0\}$, dar, conform unui rezultat din Cursul 7,

$$\int_\gamma \frac{1}{z-z_0} dz = 2\pi i,$$

deoarece $z_0 \in D_\gamma$. □

Exemplu. Să se calculeze integrala

$$\int_{|z|=1} z \cos \frac{1}{z} \, dz.$$

Rezolvare. Punctul $z_0 = 0$ este un punct singular izolat pentru funcţia $f(z) = z \cos \frac{1}{z}$. Din dezvoltarea

$$f(z) = z \cos \frac{1}{z} = \cdots - \frac{1}{6!} \cdot \frac{1}{z^5} + \frac{1}{4!} \cdot \frac{1}{z^3} - \frac{1}{2!} \cdot \frac{1}{z} + \frac{1}{0!} \cdot z,$$

rezultă că

$$\int_{|z|=1} f(z)\,dz = 2\pi i \operatorname{Rez}(f,0) = -\pi i.$$

În cazul polilor, reziduul poate fi calculat fără a efectua dezvoltarea Laurent a funcţiei:

Teoremă. *Dacă punctul singular z_0 este un pol de ordin p pentru funcţia f, atunci*

$$\operatorname{Rez}(f,z_0) = \frac{1}{(p-1)!}\lim_{z\to z_0}\frac{d^{p-1}}{dz^{p-1}}\left[(z-z_0)^p f(z)\right].$$

Observaţie. Dacă z_0 este *pol simplu*, cu $p=1$, atunci nu mai are loc nici o derivare

$$\operatorname{Rez}(f,z_0) = \lim_{z\to z_0}(z-z_0)f(z).$$

Demonstraţie. Dacă z_0 este un pol de ordin p atunci f are dezvoltarea Laurent de forma

$$f(z) = \frac{a_{-p}}{(z-z_0)^p} + \cdots + \frac{a_{-2}}{(z-z_0)^2} + \frac{a_{-1}}{z-z_0} + a_0 + a_1(z-z_0) + \ldots,$$

prin urmare funcţia analitică

$$g(z) = \begin{cases} (z-z_0)^p f(z),\ z \neq z_0 \\ a_{-p},\ z = z_0, \end{cases}$$

are dezvoltarea în serie de puteri

$$g(z) = a_{-p} + \cdots + a_{-2}(z-z_0)^{p-2} + a_{-1}(z-z_0)^{p-1} + a_0(z-z_0)^p + \ldots,$$

de unde obţinem

$$a_{-1} = \frac{1}{(p-1)!}g^{(p-1)}(z_0) = \frac{1}{(p-1)!}\lim_{z\to z_0} g^{(p-1)}(z).$$

□

Exemplu. Să se calculeze reziduul funcţiei

$$f(z) = \frac{z^5+1}{(z-i)^3}$$

în $z_0 = i$.

Rezolvare. Punctul $z_0 = i$ este pol de ordin 3 pentru f. Notăm

$$g(z) = (z-i)^3 f(z) = z^5 + 1$$

şi avem $g'(z) = 5z^4$ şi $g''(z) = 20z^3$. Obţinem

$$\operatorname{Rez}(f,i) = \frac{1}{2!}\lim_{z\to i} g''(z) = \frac{1}{2!}g''(i) = -20i.$$

Teorema reziduurilor. *Fie $D \subset \mathbb{C}$ un domeniu, $A \subset D$ o mulţime fără puncte de acumulare în D şi $f : D \setminus A \to \mathbb{C}$ o funcţie olomorfă. Atunci pentru orice curbă Jordan rectificabilă $\gamma \subset D \setminus A$, cu domeniul interior $D_\gamma \subset D$, mulţimea $A \cap D_\gamma$ este finită şi*

$$\int_\gamma f(z)\,dz = 2\pi i \sum_{a \in A \cap D_\gamma} \mathrm{Rez}\,(f, a).$$

Demonstraţie. Dacă presupunem, prin absurd, că $A \cap D_\gamma$ este infinită, atunci se poate extrage un şir de elemente distincte $(a_n) \subset A \cap D_\gamma$. Domeniul interior al unei curbe Jordan fiind mulţime mărginită, rezultă că şirul (a_n) este mărginit şi admite, prin urmare, un subşir convergent la un $a^* \in \overline{D}_\gamma \subset D$. Se contrazice astfel ipoteza că mulţimea A nu are puncte de acumulare în D.

Am arătat că $A \cap D_\gamma$ este finită, fie $A \cap D_\gamma = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$. Punctele a_k sunt punctele singulare izolate ale lui f aflate în D_γ. Fie f_k partea principală a dezvoltării Laurent a lui f în a_k. Fiecare f_k este olomorfă în $\mathbb{C} \setminus \{a_k\}$ iar funcţia $g = f - \sum f_k$ are în fiecare a_k o singularitate aparentă. Rezultă că prelungirea prin continuitate $\tilde{g}$ a lui g în punctele a_k este olomorfă pe o vecinătate deschisă a lui D_γ, de unde, aplicând teorema fundamentală a lui Cauchy, obţinem:

$$0 = \int_\gamma \tilde{g}(z)dz = \int_\gamma g(z)dz = \int_\gamma f(z)dz - \sum_k \int_\gamma f_k(z)dz.$$

Deci

$$\int_\gamma f(z)dz = \sum_k \int_\gamma f_k(z)dz,$$

şi aplicând fiecărei funcţii f_k lema precedentă, obţinem concluzia teoremei. $\square$

Exemplu. Să se calculeze integrala

$$\int_\gamma \frac{e^z dz}{z(z^2+4)},$$

unde γ este cercul de ecuaţie $|z+i| = 2$ parcurs în sens trigonometric.

Rezolvare. Funcţia $f(z) = \dfrac{e^z}{z(z^2+4)}$ este olomorfă în $\mathbb{C} \setminus \{-2i, 0, +2i\}$, deci punctele $-2i$, 0 şi $2i$ sunt singularităţi izolate. Domeniul interior curbei γ este discul deschis de rază 2 centrat în $-i$, deci

$$D_\gamma = \{z \,:\, |z - (-i)| < 2\}.$$

În D_γ sunt situate numai singularităţile $-2i$ şi 0, prin urmare

$$\int_\gamma f(z)dz = 2\pi i \mathrm{Rez}\,(f, -2i) + 2\pi i \mathrm{Rez}\,(f, 0).$$

Punctele $-2i$ şi 0 sunt poli de ordinul 1, astfel că

$$\mathrm{Rez}\,(f, -2i) = \lim_{z \to -2i} (z+2i) f(z) = \frac{e^z}{z(z-2i)}\bigg|_{z=-2i} = \frac{e^{-2i}}{-2i \cdot (-4i)} =$$

$$= -\frac{1}{8}(\cos 2 - i \sin 2),$$

şi

$$\text{Rez}\,(f, 0) = \lim_{z\to 0}(z) f(z) = \frac{e^z}{z^2+4}\Big|_{z=0} = \frac{1}{4}.$$

Obţinem în final

$$\int_{|z+i|=2} \frac{e^z}{z(z^2+4)} = \frac{\pi i}{4}(2 - \cos 2 + i \sin 2).$$