

Curbe remarcabile în plan



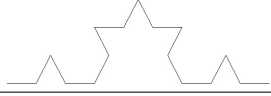
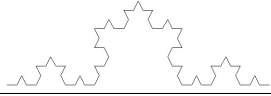
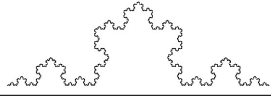
§1. Curba lui Koch. Definiție

Prezentăm aici o curbă remarcabilă introdusă de matematicianul suedez Helge von Koch în 1904 într-un articol intitulat *Sur une courbe continue sans tangente, obtenue par une construction géométrique élémentaire*.

Pornim cu un segment oarecare, de lungime ℓ , pe care îl împărțim în trei părți egale. Înlocuim segmentul din mijloc cu alte două segmente de aceeași lungime cu acesta și care formează între ele unghi de 60° . Am obținut o linie poligonală formată din 4 laturi de lungime $\ell/3$. Pentru fiecare latură aplicăm procedura descrisă, având grijă să construim unghiurile mereu pe aceeași parte. Obținem o linie poligonală cu 4^2 laturi, fiecare latură având lungimea $\ell/3^2$. Repetăm această procedură la nesfârșit.

Von Koch a arătat, în articolul menționat, că acest șir de linii poligonale converge (într-un sens bine precizat) la o curbă continuă care nu are tangentă în nici un punct. În plus, această curbă este un exemplu de arc Jordan neregabil.

Notăm cu \mathcal{P}_n linia poligonală obținută la pasul n , formată din N_n laturi toate de aceeași lungime ℓ_n . Avem:

n	\mathcal{P}_n	N_n	ℓ_n	$L(\mathcal{P}_n)$	A
0		1	ℓ	ℓ	$A < 1 \cdot \frac{\pi}{4} \cdot 1^2$
1		4	$\frac{\ell}{3}$	$\frac{4}{3}\ell$	$A < 4^1 \cdot \frac{\pi}{4} \cdot \left(\frac{1}{3^1}\right)^2$
2		4^2	$\frac{\ell}{3^2}$	$\left(\frac{4}{3}\right)^2 \ell$	$A < 4^2 \cdot \frac{\pi}{4} \cdot \left(\frac{1}{3^2}\right)^2$
3		4^3	$\frac{\ell}{3^3}$	$\left(\frac{4}{3}\right)^3 \ell$	$A < 4^3 \cdot \frac{\pi}{4} \cdot \left(\frac{1}{3^3}\right)^2$
\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	
n		4^n	$\frac{\ell}{3^n}$	$\left(\frac{4}{3}\right)^n \ell$	$A < 4^n \cdot \frac{\pi}{4} \cdot \left(\frac{1}{3^n}\right)^2$
\downarrow	\downarrow	\downarrow	\downarrow	\downarrow	\downarrow
∞	Curba lui Koch	∞	0	∞	0

Din tabelul de mai sus rezultă că șirul lungimilor liniilor poligonale tinde la infinit și, deoarece vârfurile liniilor poligonale aparțin curbei limită, așa cum vom arăta mai târziu, urmează că lungimea curbei lui Koch este infinită, deși mulțimea punctelor curbei este mărginită, fiind imaginea printr-o funcție continuă a unui interval $[a, b] \subset \mathbb{R}$.

În ultima coloană am arătat că, dacă acoperim fiecare linie poligonală cu discuri de diametru cât latura, centrate în mijlocul laturilor, obținem un șir de acoperiri cu aria tinzând la zero. Deoarece curba lui Koch este evident (!) inclusă în fiecare dintre aceste acoperiri, rezultă că aria sa este zero.

§2. Metoda motivelor iterate

Definiția curbei lui Koch se încadrează într-o metodă generală de construcție iterativă a unor figuri geometrice din plan, numită *metoda motivelor iterate* și care constă în repetarea la infinit a unei anumite reguli de generare, prin care o figură inițială, numită *baza*, este înlocuită cu o alta, numită *motiv*, și în care se regăsește de mai multe ori figura de bază, eventual redusă la scară, rotită, simetrizată sau translatată.

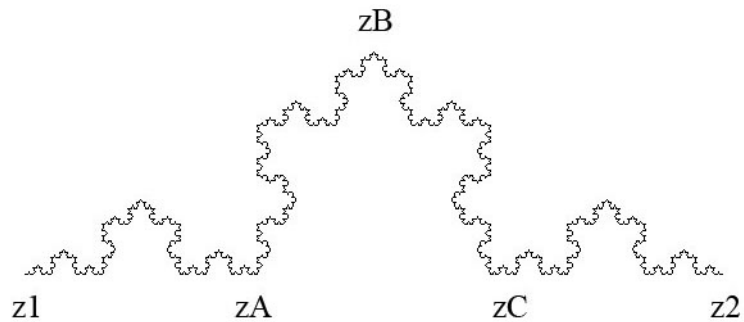


În cazul curbei lui Koch, baza este un segment iar motivul este format din alte 4 segmente și fiecare dintre aceste 4 segmente vor deveni baze în etapa următoare. Aplicăm această metodă în programul Python de mai jos, memorând la fiecare etapă vârfurile liniei poligonale într-o listă de numere complexe.

La fiecare etapă apelăm funcțiile `transforma()` și `traseaza()`.

În `transforma()` parcurgem lista primită și fiecare pereche de puncte consecutive z_1, z_2 este înlocuită, în lista returnată, de punctele z_1, z_A, z_B, z_C și z_2 . Altfel spus, înlocuim baza formată din segmentul z_1z_2 , cu motivul format din segmentele z_1z_A, z_Az_B, z_Bz_C și z_Cz_2 .

În program, parametrul $\theta = \frac{\pi}{6}$ este mărimea unghiului $\angle z_Bz_1z_2$, iar numărul complex z_B este calculat astfel încât triunghiul $\Delta z_1z_Bz_2$ să fie isoscel. Parametrul real $\lambda = \frac{1}{3}$ reprezintă raportul dintre lungimea lui z_1z_A și z_1z_2 . Punctul z_C este astfel calculat încât $z_1z_A = z_Cz_2$. Schimbând valorile parametrilor θ și λ se pot construi *curbe Koch generalizate*.



```

import ComplexPygame as C
import Color
import math
def VonKoch():
    theta = math.pi / 6
    rho = 0.5 / math.cos(theta)
    w = C.fromRhoTheta(rho, theta)
    Lambda = 1 / 3.0

def transforma(li): # VonKoch
    rez = [li[0]]
    for k in range(1, len(li)):
        z1 = li[k - 1]
        z2 = li[k]
        delta = z2 - z1
        # Segmentul z1_z2 este inlocuit cu
        # z1_zA, zA_zB, zB_zC si zC_z2, unde
        # zA=z1 + Lambda* (z2 - z1)
        # zB=z1 + w * (z2 - z1)
        # zC=z1 + (1-Lambda) * (z2 - z1).
        rez.append(z1 + Lambda * delta)
        rez.append(z1 + w * delta)
        rez.append(z2 - Lambda * delta)
        rez.append(z2)
    return rez

def traseaza(li):
    C.fillScreen()
    for k in range(1, len(li)):
        C.drawLine(li[k - 1], li[k], Color.Black)
    C.refreshScreen()
    C.wait(50)

C.setXminXmaxYminYmax(-1.1, 1.1, -0.5, 1.5)
# segmentul initial
fig = [-1, 1]
for k in range(6):
    fig = transforma(fig)

```

```

traseaza(fig)
if C.mustClose():
    return

if __name__ == '__main__':
    C.initPygame()
    C.run(VonKoch)

```

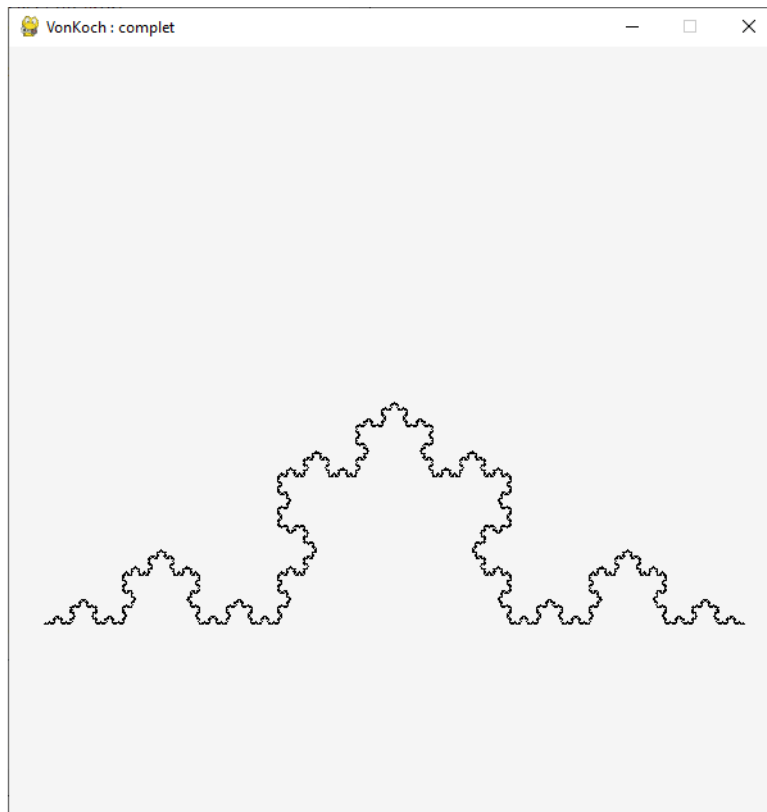


FIGURA 1. VonKoch()

§3. Curba lui Koch. Proprietăți

Să revenim acum la definiția a curbei lui Koch și să definim riguros procesul de convergență al șirului de linii poligonale \mathcal{P}_n construit prin metoda indicată. Pentru aceasta va trebui să precizăm pentru fiecare linie poligonală \mathcal{P}_n o parametrizare continuă $z = z_n(t)$, $t \in [a, b]$, și să arătăm că șirul de funcții (z_n) este convergent, măcar punctual, la o funcție continuă $z = \gamma(t)$, $t \in [a, b]$.

Fiind dat un interval $[t_1, t_2] \subset \mathbb{R}$ și două puncte z_1, z_2 în planul complex, notăm cu

$$\varphi_{z_1, z_2}^{t_1, t_2} : [t_1, t_2] \rightarrow \mathbb{C}$$

legea orară a unui punct care pleacă din z_1 la momentul t_1 și ajunge în z_2 la momentul t_2 , parcurgând cu viteză constantă segmentul z_1z_2 . Este ușor de văzut că funcția $\varphi_{z_1, z_2}^{t_1, t_2}$ este dată de formula

$$\varphi_{z_1, z_2}^{t_1, t_2}(t) = \frac{t_2 - t}{t_2 - t_1} z_1 + \frac{t - t_1}{t_2 - t_1} z_2, \quad t \in [t_1, t_2].$$

Fixăm, fără să restrângem generalitatea, intervalul $[a, b] = [0, 1]$. Considerăm z_a și z_b două puncte distincte oarecare din planul complex și construim curba lui Koch care are ca bază inițială segmentul $z_a z_b$.

Vom alege acum, pentru fiecare linie poligonală \mathcal{P}_n , parametrizarea $z_n : [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}$ care descrie mișcarea unui punct care pleacă din z_a la momentul $t = 0$, parcurge linia poligonală cu viteză constantă în modul și ajunge în z_b la momentul $t = 1$.

Știm că linia poligonală \mathcal{P}_n are $N = 4^n$ laturi, toate de aceeași lungime $\ell_n = \frac{\ell}{3^n}$ unde $\ell = |z_b - z_a|$ este distanța de la z_a la z_b . Să notăm vârfurile lor cu $z_0 = z_a, z_1, z_2, \dots, z_N = z_b$. Laturile, având lungimi egale, vor fi parcurse în durate egale, astfel că punctul curent pe linia poligonală va trece prin vârfurile z_k la momentele $t_0 = 0, t_1 = \frac{1}{4^n}, t_2 = \frac{2}{4^n}, \dots, t_N = \frac{N}{4^n} = 1$. Cu aceste notații, parametrizarea $z = z_n(t)$ este dată de formula

$$z_n(t) = \begin{cases} \varphi_{z_0, z_1}^{t_0, t_1}(t), & t \in [t_0, t_1], \\ \varphi_{z_1, z_2}^{t_1, t_2}(t), & t \in [t_1, t_2], \\ \varphi_{z_2, z_3}^{t_2, t_3}(t), & t \in [t_2, t_3], \\ \vdots \\ \varphi_{z_{N-1}, z_N}^{t_{N-1}, t_N}(t), & t \in [t_{N-1}, t_N]. \end{cases}$$

Teoremă. Șirul de funcții $z_n : [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}$ definit mai sus este un șir de funcții continue uniform convergent pe $[0, 1]$ la o funcție continuă $\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}$, numită curba lui Koch.

Demonstrație. Începem prin a evalua distanța dintre punctul curent $P_n = z_n(t)$ de pe linia poligonală \mathcal{P}_n și punctul curent $P_{n+1} = z_{n+1}(t)$ de pe următoarea linie poligonală.

La pasul $n = 0$, P_0 parcurge baza $z_a z_b$ iar P_1 parcurge motivul format din 4 segmente. Deoarece motivul este inclus în discul de diametru $z_a z_b$, ambele puncte P_0 și P_1 vor fi tot timpul în acest disc, iar distanța dintre ele va fi mai mică decât diametrul său ℓ , egal cu distanța dintre a și b . Am arătat că

$$|z_1(t) - z_0(t)| \leq \frac{\ell}{1}, \quad \forall t \in [0, 1].$$

Fie acum $n \geq 1$ fixat arbitrar. Din modul de construcție, rezultă că toate vârfurile z_k^n , $k = 0, 1, 2, \dots, 4^n$ ale liniei poligonale \mathcal{P}_n se află și pe linia poligonală \mathcal{P}_{n+1} , dispuse pe aceasta din urmă din 4 în 4. Deoarece punctele curente P_n și P_{n+1} pleacă din z_a și ajung în z_b în același timp, mergând fiecare cu viteză constantă în modul, ele vor trece în același timp prin vârfurile comune, mai precis, pentru fiecare $k = 0, 1, 2, \dots, 4^n$, vom avea egalitatea $P_n = P_{n+1}$ la momentul

$t_k^n = \frac{k}{4^n}$. Rezultă că, pentru fiecare $k = 0, 1, 2, \dots, 4^n$, în timp ce P_n parcurge baza formată din latura $z_k^n z_{k+1}^n$, punctul P_{n+1} va parcurge motivul construit pe această latură, rămânând astfel, ca și P_n , în discul de diametru $z_k^n z_{k+1}^n$.

Am arătat astfel că, pentru orice $n \in \mathbb{N}$, distanța dintre punctele curente P_n și P_{n+1} este tot timpul mai mică decât lungimea laturii $\ell_n = \frac{\ell}{3^n}$. Altfel spus,

$$|z_{n+1}(t) - z_n(t)| \leq \frac{\ell}{3^n}, \quad \forall t \in [0, 1].$$

Deoarece seria geometrică $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{3^n}$ este convergentă, aplicând pe componente criteriul lui Weierstrass de convergență uniformă pentru serii de funcții reale, obținem imediat că seria de funcții cu valori complexe

$$\sum_{k=0}^{\infty} (z_{n+1}(t) - z_n(t))$$

este uniform convergentă pe intervalul $[0, 1]$ la o funcție $z = s(t)$. Șirul sumelor parțiale ale acestei serii fiind format din sumele telescopice

$$\begin{aligned} s_n(t) &= z_1(t) - z_0(t) + z_2(t) - z_1(t) + \dots + z_{n+1}(t) - z_n(t) = \\ &= z_{n+1}(t) - z_0(t), \end{aligned}$$

urmează că șirul (z_n) converge uniform pe intervalul $[0, 1]$ la funcția $\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}$, dată de

$$\gamma(t) = s(t) + z_0(t), \quad \forall t \in [0, 1].$$

În final, deoarece convergența uniformă transferă continuitatea, din continuitatea funcțiilor z_n obținem continuitatea pe $[0, 1]$ a funcției limită γ , curba lui Koch. \square

Vom arăta în continuare că toate liniile poligonale \mathcal{P}_n au vârfurile pe curba γ , de unde vom trage concluzia că aceasta are lungimea infinită.

Teoremă. *Curba lui Koch nu este rectificabilă, având lungimea infinită. Mai precis*

$$L(\gamma) = \sup_{\Delta_n} \sum_{k=0}^{n-1} |\gamma(t_{k+1}) - \gamma(t_k)| = +\infty,$$

unde supremumul este luat după toate diviziunile $\Delta_n : t_0 = 0 < t_1 < t_2 < \dots < t_n = 1$.

Demonstrație. Fie n_0 fixat arbitrar și fie $z_k^{n_0}$ un vârf al liniei poligonale \mathcal{P}_{n_0} . Punctul curent P_{n_0} trece prin acest vârf la momentul $t_k^{n_0} = \frac{k}{4^{n_0}}$. Din demonstrația precedentă, știm că toate punctele curente P_n , cu $n \geq n_0$, vor trece prin acest vârf $z_k^{n_0}$ la același moment $t_k^{n_0}$. Altfel spus

$$z_n(t_k^{n_0}) = z_k^{n_0},$$

pentru orice $n \geq n_0$. Trecând la limită cu $n \rightarrow \infty$ obținem că

$$\gamma(t_k^{n_0}) = \lim_{n \rightarrow \infty} z_n(t_k^{n_0}) = z_k^{n_0}$$

și, prin urmare, $z_k^{n_0}$ se află pe curba lui Koch, pentru orice $k = 0, 1, \dots, N_0 = 4^{n_0}$.

Alegem acum diviziunea $\Delta_{n_0} : t_0^{n_0} = 0 < \dots < t_k^{n_0} = \frac{k}{4^{n_0}} < \dots < t_{N_0}^{n_0} = 1$ și, pentru această diviziune, avem

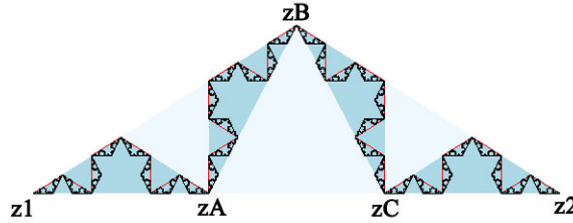
$$\sum_{k=0}^{N_0-1} |\gamma(t_{k+1}^{n_0}) - \gamma(t_k^{n_0})| = \sum_{k=0}^{N_0-1} |z_{k+1}^{n_0} - z_k^{n_0}| = N_0 \ell_{n_0} = \frac{4^{n_0}}{3^{n_0}} \ell,$$

adică exact lungimea liniei poligonale \mathcal{P}_{n_0} .

Am arătat că, pentru orice $n_0 \in \mathbb{N}$,

$$\left(\frac{4}{3}\right)^{n_0} \ell \leq L(\gamma),$$

de unde rezultă că $L(\gamma) = +\infty$. □



Pentru oricare două puncte distincte z_1 și z_2 din plan, vom nota cu $\sigma_{z_1 z_2}$ triunghiul isoscel $\Delta z_1 z_B z_2$ construit pe stânga segmentului $z_1 z_2$ și care are unghiurile de la bază de 30° .

Este evident că oricare două astfel de triunghiuri $\sigma_{z_1 z_2}$ și $\sigma_{z'_1 z'_2}$ sunt asemenea.

Amintim că o transformare $T : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ se numește *asemănare* de raport $\lambda > 0$ dacă $|T(z_1) - T(z_2)| = \lambda |z_1 - z_2|$, pentru orice $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$. Orice pereche de triunghiuri asemenea determină în mod unic o asemănare care să le suprapună. Mai mult, spunem că $\mathcal{F} \subset \mathbb{C}$ și $\mathcal{F}' \subset \mathbb{C}$ sunt *figuri asemenea* dacă există o asemănare $T : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ pentru care $T(\mathcal{F}) = \mathcal{F}'$.

Teoremă. *Pentru orice linie poligonală \mathcal{P}_n și orice latură $z_k^n z_{k+1}^n$ a acesteia, arcul γ_k^n determinat pe curba γ de punctele z_k^n și z_{k+1}^n este asemenea cu curba γ și este complet inclus în triunghiul $\sigma_{z_k^n z_{k+1}^n}$.*

Mai mult, două arce consecutive γ_k^n și γ_{k+1}^n au în comun numai punctul z_{k+1}^n , iar oricare două arce γ_k^n și γ_{k+h}^n cu $h \geq 2$ sunt disjuncte.

Demonstrație. Vom reinterpretă metoda motivelor iterate cu care am construit curba lui Koch, γ . La fiecare pas, înlocuim baza formată de un segment $z_1 z_2$ cu motivul format din patru segmente înlănțuite, $z_1 z_A, z_A z_B, z_B z_C$ și $z_C z_2$. Acum considerăm că baza este triunghiul $\sigma_{z_1 z_2}$ iar motivul este format din patru triunghiuri înlănțuite, $\sigma_{z_1 z_A}, \sigma_{z_A z_B}, \sigma_{z_B z_C}$ și $\sigma_{z_C z_2}$. Toate aceste 4 triunghiuri ale motivului devin baze la pasul următor.

Observația esențială pentru cele ce urmează este că triunghiurile motivului sunt incluse în triunghiul de bază și au, două câte două, cel mult un punct comun, fapt ușor de constatat. Prin triunghi înțelegem, aici, mulțimea punctelor aflate în interiorul sau pe laturile triunghiului.

O linie poligonală \mathcal{P}_n , cu vârfurile $\{z_k^n\}$, din construcția inițială are acum asociată o înlănțuire de triunghiuri $\{\sigma_{z_k^n z_{k+1}^n}\}$, și toate triunghiurile liniei poligonale \mathcal{P}_{n+1} sunt incluse, câte patru odată, în triunghiurile liniei poligonale \mathcal{P}_n .

Dacă fixăm un n și o latură $z_k^n z_{k+1}^n$ a lui \mathcal{P}_n , prin aplicarea acestei metode luând ca bază inițială triunghiul $\sigma_{z_k^n z_{k+1}^n}$, toate triunghiurile σ ulterioare vor fi incluse în triunghiul inițial, $\sigma_{z_k^n z_{k+1}^n}$, și o dată cu acestea și laturile liniilor poligonale \mathcal{P}_{n+h} situate între z_k^n și z_{k+1}^n . Rezultă că, pentru orice $t \in [\frac{k}{4^n}, \frac{k+1}{4^n}]$, avem

$$z_{n+h}(t) \in \sigma_{z_k^n z_{k+1}^n}$$

pentru orice $h \in \mathbb{N}$ și trecând la limită cu $h \rightarrow +\infty$ obținem

$$\gamma(t) \in \sigma_{z_k^n z_{k+1}^n},$$

pentru orice $t \in [\frac{k}{4^n}, \frac{k+1}{4^n}]$.

Am arătat astfel că $\gamma_k^n \subset \sigma_{z_k^n z_{k+1}^n}$. Să notăm cu T asemănarea care duce triunghiul inițial $\sigma_{z_a z_b}$ în $\sigma_{z_k^n z_{k+1}^n}$. Este ușor de văzut că T va duce motivul aplicat pe $z_a z_b$ în motivul aplicat pe $z_k^n z_{k+1}^n$ și, prin urmare, va duce linia poligonală \mathcal{P}_h în porțiunea dintre z_k^n și z_{k+1}^n a liniei poligonale \mathcal{P}_{n+h} , pentru orice $h \geq 1$. Trecând la limită cu $h \rightarrow +\infty$, ținând cont că T este o funcție continuă, deducem că $T(\gamma) = \gamma_k^n$.

Să observăm, în trecere, că arcul γ_k^n al curbei lui Koch construită pe segmentul inițial $z_a z_b$, coincide cu curba lui Koch construită pe segmentul $z_k^n z_{k+1}^n$ considerat ca bază inițială.

Pentru fiecare n fixat, arcele γ_k^n sunt disjuncte după cum este precizat în enunțul teoremei, deoarece triunghiurile $\sigma_{z_k^n z_{k+1}^n}$ corespunzătoare sunt disjuncte. \square

Teoremă. *Curba lui Koch este un arc Jordan.*

Demonstrație. Trebuie să arătăm că funcția continuă $z = \gamma(t)$ este injectivă. De aici va urma că imaginea lui γ , curba lui Koch, este homeomorfă cu intervalul $[0, 1]$, adică este un arc Jordan.

Fie t' și t'' în $[0, 1]$ astfel încât $\gamma(t') = \gamma(t'')$. După cum știm din demonstrația precedentă, orice arc γ_k^n este restricția curbei γ la intervalul $[\frac{k}{4^n}, \frac{k+1}{4^n}]$, iar două arce distincte γ_k^n și γ_{k+h}^n au cel mult un punct în comun. Rezultă că t' și t'' trebuie să fie în același timp într-unul dintre intervalele $[\frac{k}{4^n}, \frac{k+1}{4^n}]$. Obținem de aici că

$$|t' - t''| \leq \frac{1}{4^n},$$

pentru orice $n \in \mathbb{N}$, de unde rezultă $t' = t''$, ceea ce trebuia arătat. \square

Fiind date două puncte distincte $z_1 \neq z_2$ vom nota cu $\theta_{z_1 z_2}$ unghiul făcut de segmentul $z_1 z_2$ cu orizontala, și vom numi acest unghi *direcția* lui $z_1 z_2$. Mai

precis,

$$\theta_{z_1 z_2} = \arg(z_2 - z_1).$$

O curbă $z = \gamma(t)$ admite tangentă în $z^* = \gamma(t^*)$ dacă există și este finită

$$\lim_{t \rightarrow t^*} \theta_{z(t^*)z(t)} = \theta^*,$$

caz în care dreapta prin z^* de direcție θ^* este *tangentă la curbă* în punctul z^* .

Spunem că segmentul $\gamma(s)\gamma(d)$ este o coardă a curbei γ care *încadrează* punctul $z^* = \gamma(t^*)$ dacă $t^* \in [s, d]$.

Este ușor de văzut că, dacă o curbă $z = \gamma(t)$ admite tangentă în $z^* = \gamma(t^*)$, atunci pentru orice șir de coarde care încadrează punctul z^* , $u_n v_n = \gamma(s_n)\gamma(d_n)$, cu $s_n \leq t^* \leq d_n$, avem $\lim_{n \rightarrow +\infty} \theta_{u_n v_n} = \theta^*$, dacă $d_n - s_n \rightarrow 0$ pentru $n \rightarrow +\infty$.

Teoremă. *Curba lui Koch nu admite tangentă în nici un punct.*

Demonstrație. Vom presupune, fără a restrânge generalitatea, că baza inițială $z_a z_b$ este orizontală. În acest caz, este ușor de observat că direcțiile laturilor triunghiurilor $\sigma_{z_k^n z_{k+1}^n}$ sunt multipli de $\frac{\pi}{6}$ radiani.

Fixăm $t^* \in [0, 1]$ arbitrar și vom arăta că curba lui Koch nu are tangentă în $z^* = \gamma(t^*)$. Vom construi un șir de coarde $u_n v_n$ care încadrează punctul z^* , după cum urmează.

Prima coardă este segmentul inițial, $u_0 v_0 = z_a z_b$.

Pentru orice $n \in \mathbb{N}$, există $k \in \{0, 1, 2, \dots, 4^n\}$ astfel încât $t^* \in [\frac{k}{4^n}, \frac{k+1}{4^n}]$, și atunci z^* se află pe arcul γ_k^n determinat de punctele $z_k^n = \gamma(\frac{k}{4^n})$ și $z_{k+1}^n = \gamma(\frac{k+1}{4^n})$, arc inclus, după cum știm, în triunghiul $\sigma_{z_k^n z_{k+1}^n}$. Toate vârfurile acestui triunghi sunt pe curba γ , iar dintre laturi cel puțin două sunt coarde care încadrează punctul z^* . Dintre acestea două, sigur una are direcția diferită de $\theta_{u_{n-1} v_{n-1}}$ și pe aceasta o vom nota cu $u_n v_n$.

Obținem astfel un șir de coarde care încadrează punctul z^* , $u_n v_n = \gamma(s_n)\gamma(d_n)$, cu $s_n \leq t^* \leq d_n$, și, evident, $d_n - s_n \rightarrow 0$, pentru care șirul direcțiilor $\theta_{u_n v_n}$ are valori discrete, multipli de $\frac{\pi}{6}$. Un astfel de șir este convergent numai dacă este constant de la un loc încolo, dar, din modul de construcție, $\theta_{u_{n-1} v_{n-1}} \neq \theta_{u_n v_n}$, pentru orice $n \geq 1$. Rezultă că șirul $\theta_{u_n v_n}$ este divergent și, prin urmare, curba lui Koch nu admite tangentă în $z^* = \gamma(t^*)$. □

§4. Insula lui Koch

Dacă se construiesc trei curbe Koch pe exteriorul laturilor unui triunghi echilateral sau, în mod echivalent, șase curbe Koch pe interiorul laturilor unui hexagon regulat, se obține o curbă γ simplă și închisă, adică o curbă Jordan, a cărei domeniu interior D_γ este numit *insula lui Koch*.

Domeniul D_γ , fiind o mulțime deschisă în \mathbb{R}^2 , este măsurabilă Lebesgue și, fiind o mulțime mărginită, are arie finită. Ca un simplu exercițiu, vom calcula această arie.

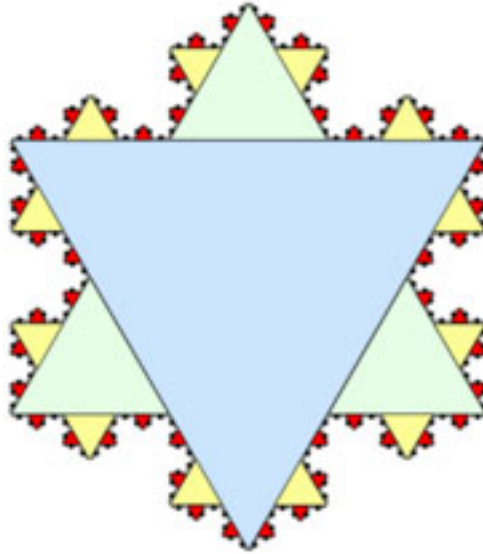


FIGURA 2. Insula lui Koch

În figura de mai sus notăm cu s aria triunghiului albastru. Aria unui triunghi verde va fi $s/9$, aria unui triunghi galben $s/9^2$, aria unui roșu $s/9^3$ și așa mai departe. Notăm cu A aria insulei lui Koch și avem:

$$\begin{aligned} A &= s + 3 \left(\frac{s}{9} + 4 \cdot \frac{s}{9^2} + 4^2 \cdot \frac{s}{9^3} + \dots \right) \\ &= s + \frac{3s}{9} \left(1 + \frac{4}{9} + \frac{4^2}{9^2} + \dots \right) = s + \frac{3s}{9} \cdot \frac{1}{1 - \frac{4}{9}} = \frac{8s}{5}. \end{aligned}$$

Insula lui Koch este un exemplu de domeniu plan cu arie finită, mărginit de o curbă Jordan cu lungime infinită.

§5. Curba lui Koch în pătrat

O imagine mult mai colorată se poate obține construind câte o curba Koch generalizată pe fiecare latură a unui pătrat, pe interior.

```
def VonKoch4():
    theta = math.pi / 4.1
    rho = 0.5 / math.cos(theta)
    w = C.fromRhoTheta(rho, theta)
    Lambda = 1 / 2.1

    def transforma(li): # VonKoch
        rez = [li[0]]
        for k in range(1, len(li)):
            z1 = li[k - 1]
            z2 = li[k]
            delta = z2 - z1
            # Segmentul z1_z2 este inlocuit cu
            # z1_zA, zA_zB, zB_zC si zC_z2, unde
            # zA=z1 + Lambda* (z2 - z1)
            # zB=z1 + w * (z2 - z1)
            # zC=z1 + (1-Lambda) * (z2 - z1).
            rez.append(z1 + Lambda * delta)
            rez.append(z1 + w * delta)
            rez.append(z2 - Lambda * delta)
            rez.append(z2)
        return rez

    def traseaza(li):

        C.fillScreen()
        for k in range(1, len(li)):
            C.drawLine(li[k - 1], li[k], Color.Index(k // 500))
        # C.wait(50)

    C.setXminXmaxYminYmax(-0.1, 1.1, -0.1, 1.1)
    # patratul initial
    fig = [0, 1, 1 + 1j, 1j, 0]
    for k in range(9):
        fig = transforma(fig)
        traseaza(fig)
    if C.mustClose():
        return
```

Rezultat pentru $\theta = \frac{\pi}{4.1}$ și $\lambda = \frac{1}{2.1}$. Succesiunea culorilor coincide cu ordinea de parcurs a curbei.

Observație: în cazul $\theta = \frac{\pi}{4}$ și $\lambda = \frac{1}{2}$ curba limită trece prin toate punctele pătratului dat, dar nu mai este o curbă Jordan deoarece are autointersecții.

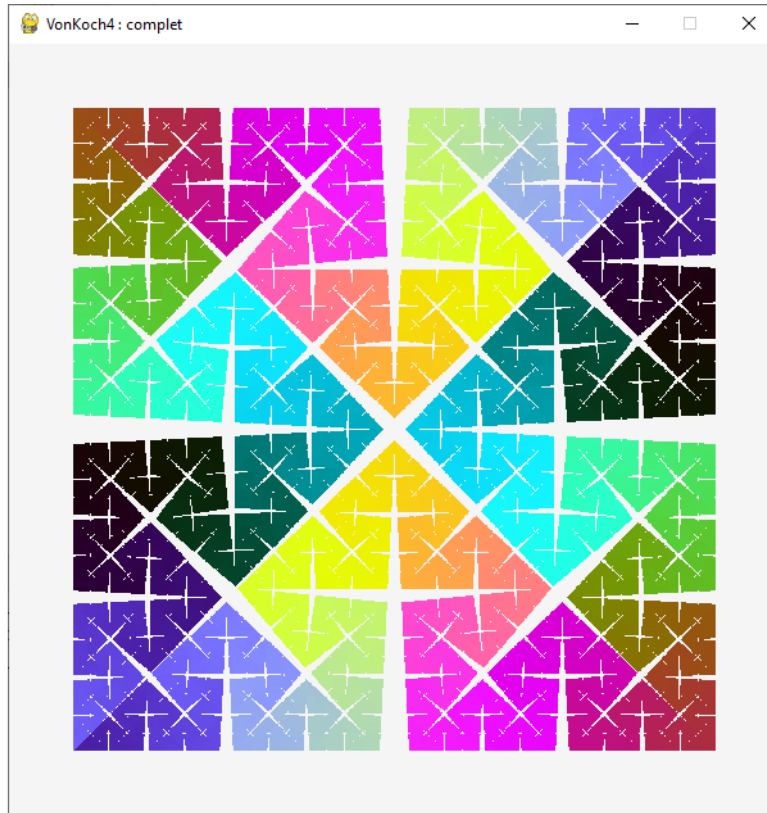


FIGURA 3. VonKoch4() $\theta = \frac{\pi}{4.1}$ și $\lambda = \frac{1}{2.1}$

§6. Curbe Koch generalizate

Vom studia acum curbele construite prin metoda motivelor iterate în cazul în care baza este un segment $z_a z_b$ iar motivul este o linie poligonală oarecare, cu vârfurile $w_0 = z_a, w_1, \dots, w_m = z_b$, unde $m \geq 2$.

La fiecare pas n , pentru linia poligonală \mathcal{P}_n , formată din m^n laturi $\ell_k^n = z_k^n z_{k+1}^n$, considerăm parametrizarea $z_n : [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}$ pentru care punctul curent $P_n = z_n(t)$ parcurge fiecare latură ℓ_k^n cu viteză constantă, invers proporțională în modul cu lungimea acesteia, astfel încât fiecare latură este parcursă în aceeași durată de timp, $\Delta t = \frac{1}{m^n}$.

Teoremă. *Dacă toate laturile motivului sunt strict mai scurte decât baza, atunci șirul de funcții (z_n) definit mai sus este uniform convergent pe $[0, 1]$ la o funcție continuă $\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}$, numită curbă Koch generalizată.*

Demonstrație. Justificarea urmează aceeași pași ca la existența curbei lui Koch propriu-zise. Din definiția legilor orare z_n urmează că punctele curente $P_n = z_n(t)$ și $P_{n+1} = z_{n+1}(t)$ sunt sincronizate: când P_n parcurge o bază $\ell_k^n = z_k^n z_{k+1}^n$ punctul P_{n+1} parcurge motivul construit pe acea bază. Rezultă că distanța dintre P_n și P_{n+1} va fi mai mică decât diametrul mulțimii formate de punctele bazei reunite cu punctele motivului. Prin *diametrul* unei mulțimi



FIGURA 4. VonKoch4() $\theta = \frac{\pi}{4}$ și $\lambda = \frac{1}{2}$

$M \subset \mathbb{C}$ înțelegem

$$d(M) = \sup_{u,v \in M} |u - v|.$$

Deoarece motivul se aplică pe bază prin asemănare, rezultă că diametrul reuniunii dintre bază și motiv este proporțional cu lungimea bazei, constanta de proporționalitate $C > 0$ depinzând numai de forma motivului, nu și de dimensiunile acestuia. Obținem că distanța dintre P_n și P_{n+1} este mai mică decât C ori lungimea bazei parcurse de P_n .

Fie acum

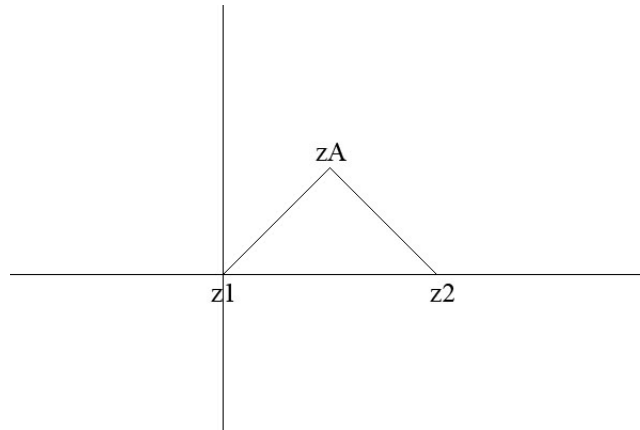
$$q = \max \frac{|w_{i+1} - w_i|}{|z_b - z_a|}$$

cel mai mare raport dintre lungimea laturilor motivului și lungimea bazei. Este ușor de arătat că toate laturile liniei poligonale \mathcal{P}_n au lungimea mai mică decât $L_0 q^n$, unde $L_0 = |z_b - z_a|$ este lungimea segmentului inițial, și, prin urmare, pentru distanța dintre P_n și P_{n+1} obținem majorarea

$$|z_{n+1}(t) - z_n(t)| \leq CL_0 q^n,$$

pentru orice $t \in [0, 1]$ și orice $n \in \mathbb{N}$. Din ipoteza teoremei avem $q \in (0, 1)$ iar mai departe concluzia decurge exact ca în demonstrația amintită. \square

§6.1. Curba lui Lévy, numită și *crabul*, este curba Koch generalizată construită în cazul în care baza, formată de un segment z_1z_2 , este înlocuită, mereu pe stânga, de motivul format din segmentele z_1z_A și z_Az_2 dispuse astfel încât $\Delta z_1z_Az_2$ să fie triunghi dreptunghic isoscel.



```
def Crab():
    i = complex(0, 1)
    theta = math.pi / 4.0
    rho = 0.5 / math.cos(theta)
    w = C.fromRhoTheta(rho, theta)

    def transforma(li): # Crab
        rez = [li[0]]
        for k in range(1, len(li)):
            z1 = li[k - 1]
            z2 = li[k]
            # Segmentul z1_z2 este inlocuit cu z1_zA si zA_z2
            # unde zA=z1+w*(z2-z1).
            rez.append(z1 + w * (z2 - z1))
            rez.append(z2)
        return rez

    def traseaza(li):
        C.fillScreen()
        C.setAxis()
        for k in range(1, len(li)):
            C.drawLine(li[k - 1], li[k], Color.Index(k // 30))
            # C.refreshScreen()
            # C.wait(50)

    C.setXminXmaxYminYmax(-1, 2, -1.5, 1.5)
    # segmentul initial
    fig = [0, 1]
    for k in range(19):
        fig = transforma(fig)
```

```
traseaza(fig)
print(k)
if C.mustClose():
    return
```

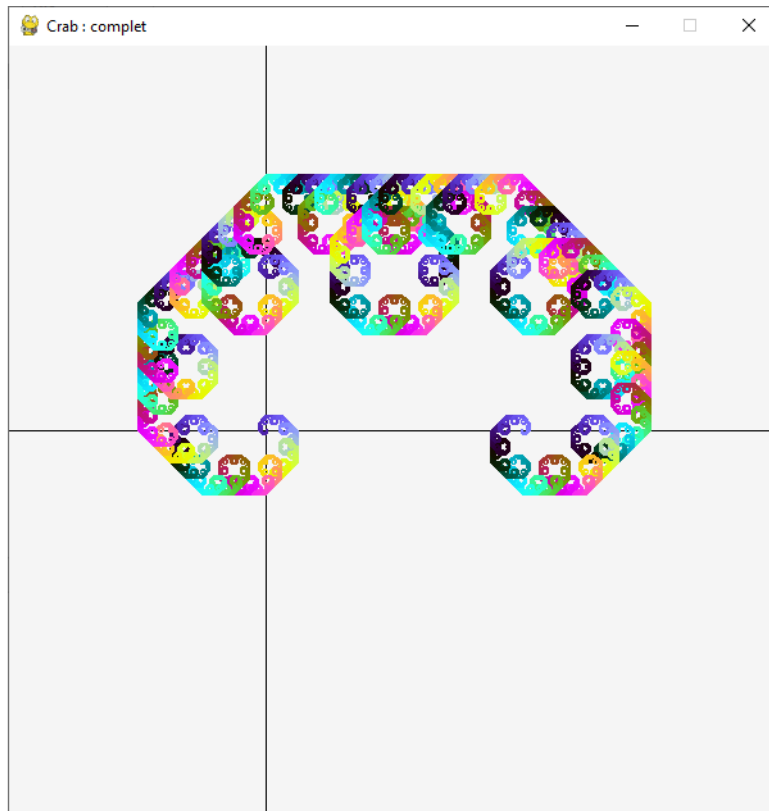
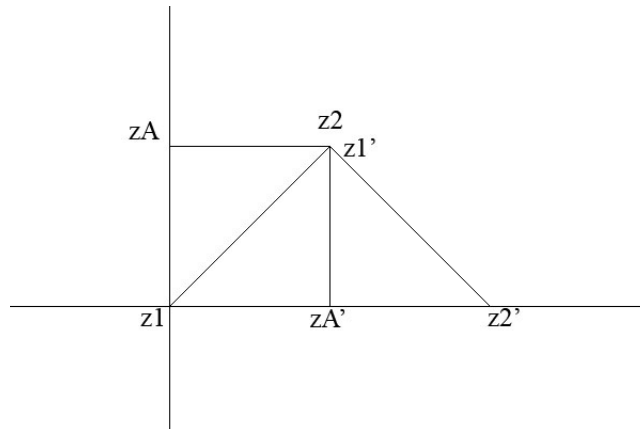


FIGURA 5. Crab()

§6.2. Curba lui Heighway, sau *dragonul*, este curba obținută dacă în construcția crabului alternăm poziționarea motivului, când pe stânga, când pe dreapta bazei.



```
def Dragon():
    i = complex(0, 1)
    theta = math.pi / 4.0
    rho = 0.5 / math.cos(theta)
    w1 = C.fromRhoTheta(rho, theta)
    w2 = C.fromRhoTheta(rho, -theta)

    def transforma(li): # Dragon
        rez = [li[0]]
        sign = 1
        for k in range(1, len(li)):
            z1 = li[k - 1]
            z2 = li[k]
            # Segmentul z1_z2 este inlocuit cu z1_zA si zA_z2
            # unde zA=z1+w*(z2-z1) cu w avand in mod
            # alternativ valoarea w1 sau w2.
            sign *= -1
            w = w2 if sign > 0 else w1
            rez.append(z1 + w * (z2 - z1))
            rez.append(z2)
        return rez

    def traseaza(li):
        C.fillScreen()
        C.setAxis()
        for k in range(1, len(li)):
            C.drawLine(li[k - 1], li[k], Color.Index(k // 30))
        C.refreshScreen()
        C.wait(50)

C.setXminXmaxYminYmax(-0.5, 1.5, -1, 1)
```

```
# segmentul initial
fig = [0, 1]
for k in range(19):

    fig = transforma(fig)
    traseaza(fig)
    if C.mustClose():
        return
```

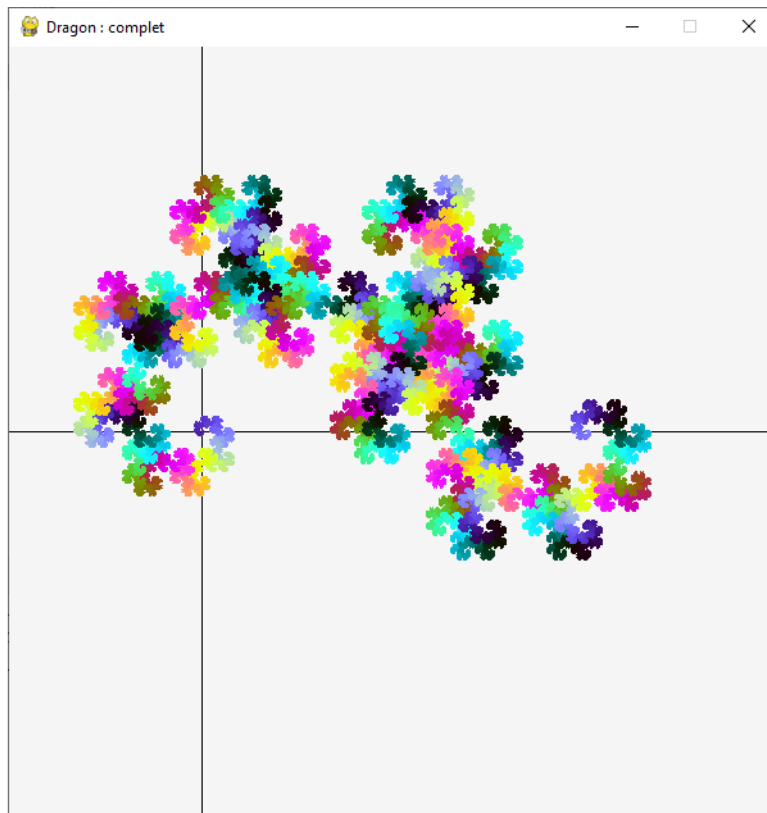


FIGURA 6. Dragon()