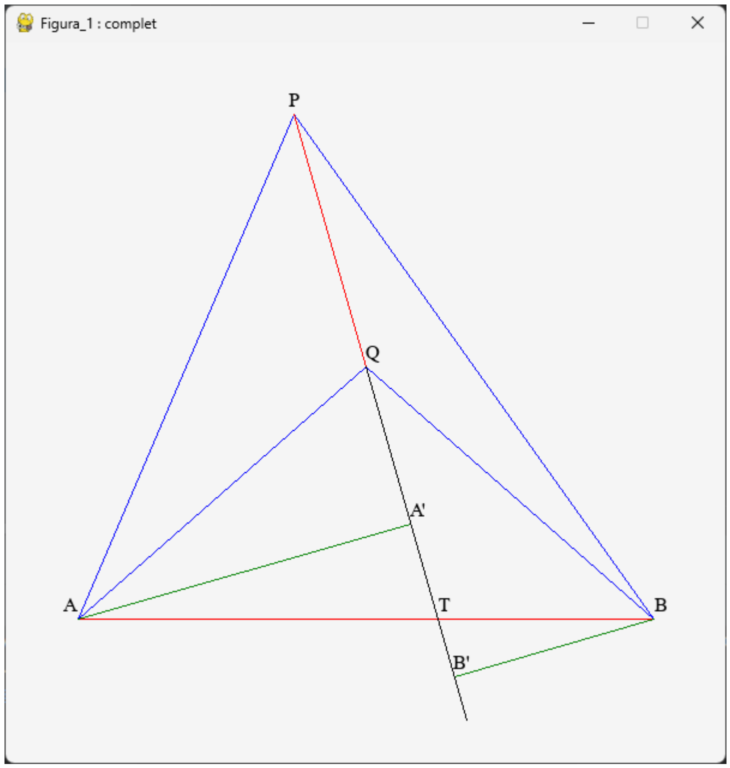
Intersecţia a două drepte

Considerăm în plan două perechi de puncte distincte A, B şi P, Q, date prin afixele lor z_A, z_B, z_P, z_Q, şi vrem să aflăm afixul z_T al punctului T de intersecţie a dreptelor AB şi PQ, dacă acesta există.



Vom folosi următoarele rezultate:

Propoziţia 1. *Raportul în care dreapta PQ împarte segmentul AB este egal cu rapotul ariilor triunghiurilor ΔAQP şi ΔPQB, mai precis*

$$\frac{AT}{TB} = \frac{\sigma_{\Delta AQP}}{\sigma_{\Delta PQB}}.$$

Demonstraţia este imediată. Fie A' şi B' proiecţiile ortogonale ale punctelor A şi B pe PQ. Avem:

$$\frac{\sigma_{\Delta AQP}}{\sigma_{\Delta PQB}} = \frac{\frac{1}{2}PQ \cdot AA'}{\frac{1}{2}PQ \cdot BB'} = \frac{AA'}{BB'} = \frac{AT}{TB}.$$

Propoziţia 2. *Aria unui triunghi oarecare ΔABC poate fi calculată cu formula*

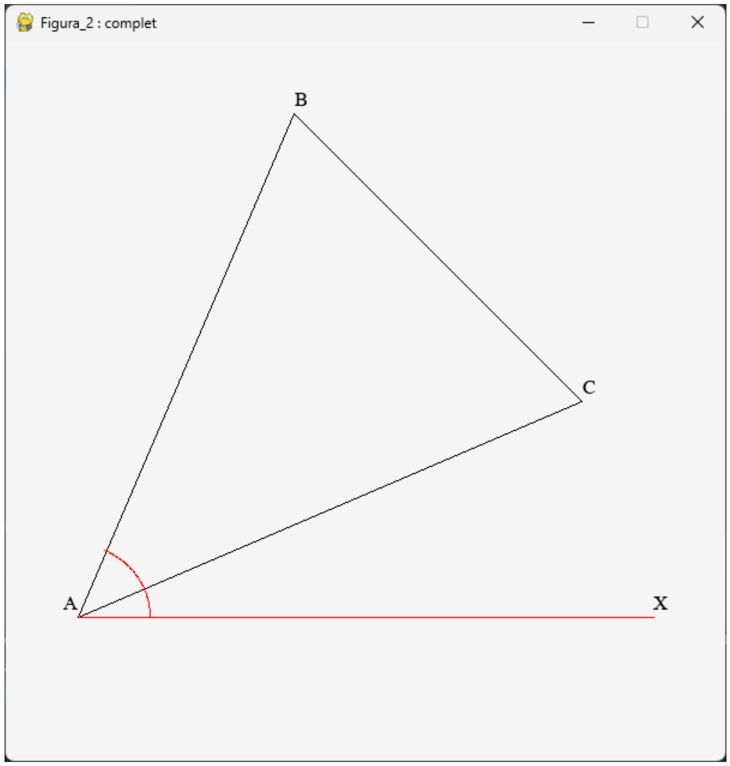
$$\sigma_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}\,\mathrm{Im}\,(z_B - z_A)\overline{(z_C - z_A)}$$

Demonstraţie. Notăm $w = (z_B - z_A)\overline{(z_C - z_A)}$ şi calculăm modulul:

$$\rho = |w| = |z_B - z_A| \cdot |\overline{(z_C - z_A)}| = |z_B - z_A| \cdot |z_C - z_A| = AB \cdot AC$$

Pentru a determina argumentul lui w notăm cu X un punct oarecare pe orizontala prin A. Avem

$$\theta = \arg w = \arg(z_B - z_A) + \arg\overline{(z_C - z_A)} =$$
$$= \arg(z_B - z_A) - \arg(z_C - z_A) = \sphericalangle XAB - \sphericalangle XAC = \sphericalangle A$$



Prin urmare, pentru $w = \rho(\cos\theta + i\sin\theta)$, avem

$$\operatorname{Im} w = \rho\sin\theta = AB \cdot AC \cdot \sin A = 2\sigma_{\Delta ABC},$$

ceea ce trebuia arătat.

Observaţie: atât ariile cât şi rapoartele care intervin în aceste calcule sunt considerate cu semn, în funcţie de sensurile de parcurgere.

Propoziţia 3. *Dacă punctul T împarte segmentul AB în raportul*

$$\frac{AT}{TB} = \lambda$$

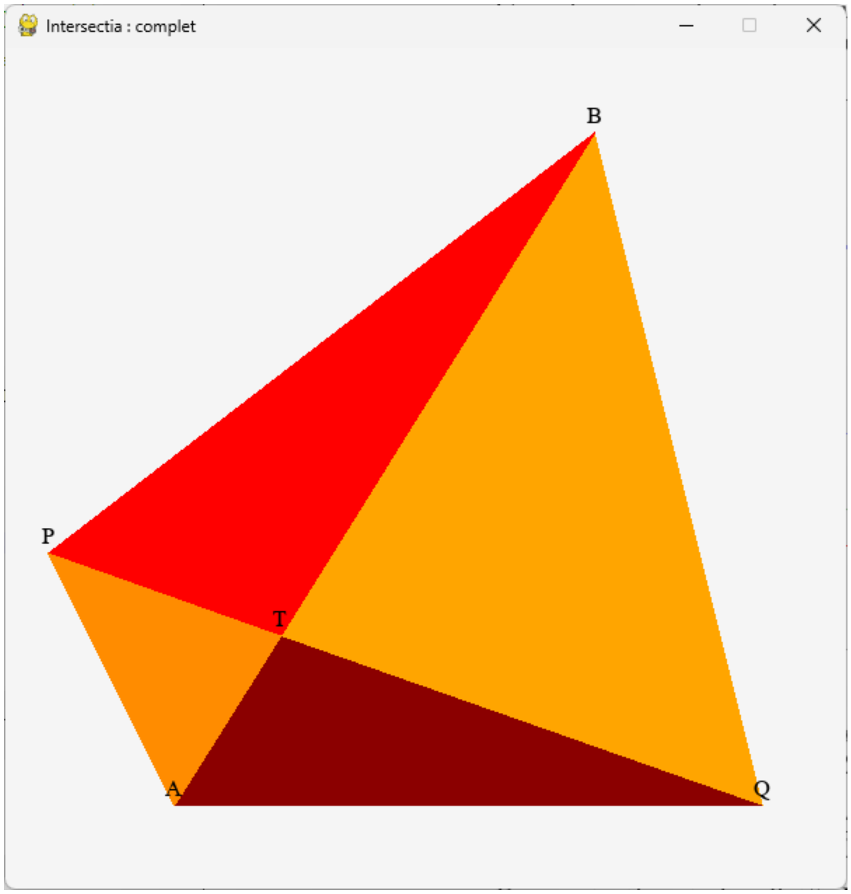
atunci afixul său este

$$z_T = \frac{1}{\lambda + 1}(z_A + \lambda z_B.)$$

Formula provine din echivalenţa

$$AT = \lambda TB \Leftrightarrow z_T - z_A = \lambda(z_B - z_T).$$

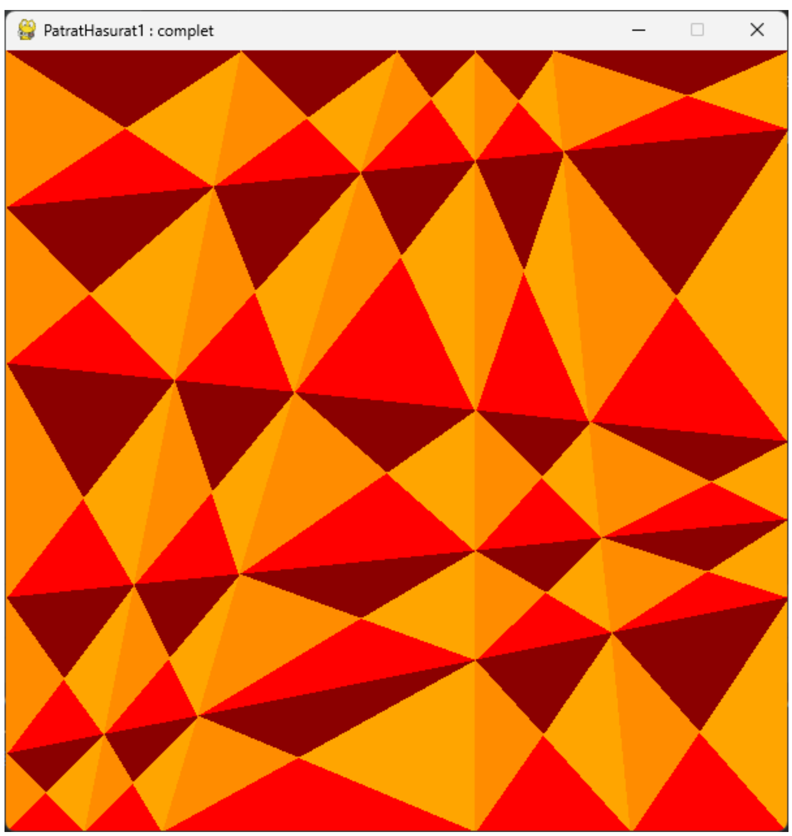
Următorul program aplică formulele de mai sus pentru a determina punctul de intersecţie a două drepte:

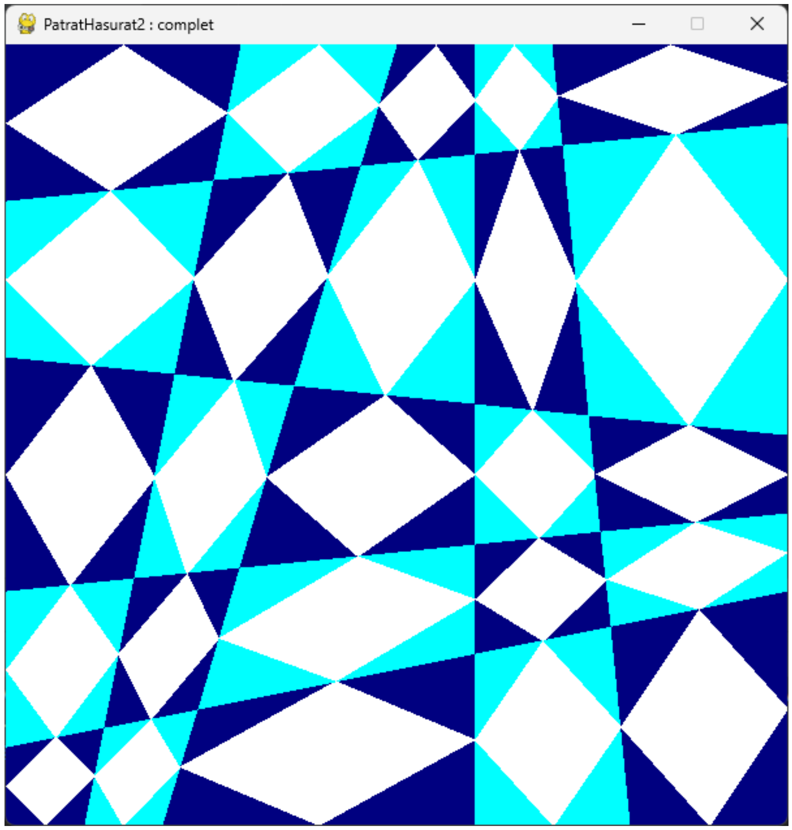


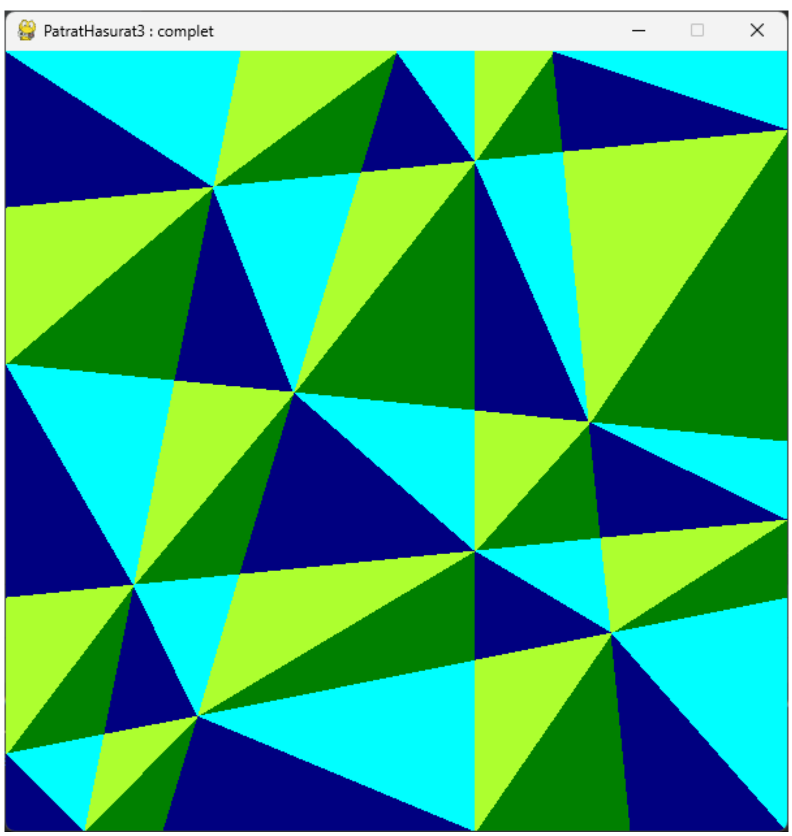

```
import ComplexPygame as C
import Color
import math

def Intersectia():
    def aria2(a, b, c):
        # dublul ariei tringhiului abc
        return ((b - a) * (c - a).conjugate()).imag

    def intersectieABcuPQ(a, b, p, q):
        aria2pqb = aria2(p, q, b)
        if aria2pqb == 0:
            return b
        Lambda = aria2(a, q, p) / aria2pqb
        if Lambda == -1:
            return None
        return (a + Lambda * b) / (1 + Lambda)

    C.setXminXmaxYminYmax(0, 10, 0, 10)
    a = 2+ 1j
    b = 7+ 9j
    q = 9 + 1j
    p = 0.5 + 4j
```

```
    t = intersectieABcuPQ(a, b, p, q)
    C.fillNgon([a, q, t], Color.Darkred)
    C.fillNgon([q, b, t], Color.Orange)
    C.fillNgon([b, p, t], Color.Red)
    C.fillNgon([p, a, t], Color.Darkorange)

    C.setText("A", a)
    C.setText("B", b)
    C.setText("P", p)
    C.setText("Q", q)
    C.setText("T", t)

if __name__ == '__main__':
    C.initPygame()
    C.run(Intersectia)
```

In final, ca exerciţiu, încercaţi să obţineţi desene cât mai asemănătore cu următoarele:




PatratHasurat2 : complet


PatratHasurat3 : complet