Tema 1. Ecuaţia de gradul al doilea în $\mathbb{C}$

§1. Ecuaţia redusă

Fie $z = a + ib$ un număr complex dat. Considerăm ecuaţia

$$u^2 = z, \tag{1}$$

cu necunoscuta $u \in \mathbb{C}$. Este evident că dacă $u_1 = \alpha + i\beta$ este o soluţie, atunci şi $u_2 = -(\alpha + i\beta)$ este soluţie şi, fiind o ecuaţie polinomială de grad doi, ştim că are exact două soluţii în $\mathbb{C}$, deci acestea sunt de forma

$$u_{1,2} = \pm(\alpha + i\beta).$$

a) Rezolvare cu forma algebrică

Notăm $u = x + iy$, $x, y \in \mathbb{R}$ şi (1) devine

$$(x + iy)^2 = a + ib \;\Leftrightarrow\; (x^2 - y^2) + 2xyi = a + ib,$$

de unde, identificând părţile reale şi părţile imaginare, obţinem sistemul

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = a \\ 2xy = b. \end{cases} \tag{2}$$

Metoda I. Aplicăm metoda generală de rezolvare a sistemelor omogene de grad doi, adică a sistemelor de forma

$$\begin{cases} a_1x^2 + b_1xy + c_1y^2 = d_1 \\ a_2x^2 + b_2xy + c_2y^2 = d_2. \end{cases}$$

Amplificăm prima ecuaţie cu b, a doua cu $-a$ şi le adunăm. Obţinem ecuaţia

$$bx^2 - 2axy - by^2 = 0,$$

pe care o amplificăm cu $\frac{1}{y^2}$, notăm $t = \frac{x}{y}$, şi avem ecuaţia de grad doi

$$bt^2 - 2at - b = 0$$

cu $\Delta = 4(a^2 + b^2) \geq 0$. Mai departe aflăm $t_{1,2} \in \mathbb{R}$, revenim cu substituţia $x = ty$ în a doua ecuaţie din sistemul (2) şi obţinem

$$2ty^2 = b,$$

îl aflăm pe y, apoi pe x.

Metoda a II-a. Pe lângă cele două ecuaţii ale sistemului (2), mai adăugăm una, obţinută din proprietăţile modulului unui număr complex:

$$u^2 = z \;\Rightarrow\; |u^2| = |z| \;\Rightarrow\; |u|^2 = |z|,$$

adică

$$x^2 + y^2 = \sqrt{a^2 + b^2}.$$

Prin urmare

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = a \\ x^2 + y^2 = \sqrt{a^2 + b^2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 = \frac{\sqrt{a^2+b^2}+a}{2} \\ y^2 = \frac{\sqrt{a^2+b^2}-a}{2} \end{cases}$$

Din $2xy = b$ avem că, dacă $b \geq 0$, atunci x şi y au acelaşi semn, deci

$$u_{1,2} = \pm \left(\sqrt{\frac{\sqrt{a^2 + b^2} + a}{2}} + i\sqrt{\frac{\sqrt{a^2 + b^2} - a}{2}} \right) \tag{3}$$

altfel

$$u_{1,2} = \pm \left(-\sqrt{\frac{\sqrt{a^2 + b^2} + a}{2}} + i\sqrt{\frac{\sqrt{a^2 + b^2} - a}{2}} \right) \tag{4}$$

b) Rezolvare cu forma trigonometrică

Fie

$$z = a + ib = \rho(\cos\theta + i\sin\theta).$$

Din *formula lui Moivre* rezultă imediat că cele două soluţii ale ecuaţiei

$$u^2 = \rho(\cos\theta + i\sin\theta)$$

sunt

$$u_{1,2} = \pm\sqrt{\rho}\left(\cos\frac{\theta}{2} + i\sin\frac{\theta}{2}\right) \tag{5}$$

Vom arăta, cu titlu de exerciţiu, ca de aici putem regăsi formulele (3) şi (4). Avem implicaţiile

$$\begin{cases} a = \rho\cos\theta \\ b = \rho\sin\theta \end{cases} \Rightarrow \cos\theta = \frac{a}{\rho} \Rightarrow \begin{cases} \cos^2\frac{\theta}{2} = \frac{1+\cos\theta}{2} = \frac{\rho+a}{2\rho} \\ \sin^2\frac{\theta}{2} = \frac{1-\cos\theta}{2} = \frac{\rho-a}{2\rho} \end{cases}$$

prin urmare, dacă $b \geq 0$ avem $\theta \in [0, \pi]$, deci $\sin\frac{\theta}{2} \geq 0$ şi $\cos\frac{\theta}{2} \geq 0$,

$$u_{1,2} = \pm\sqrt{\rho}\left(\sqrt{\frac{\rho + a}{2\rho}} + i\sqrt{\frac{\rho - a}{2\rho}}\right) = \pm\left(\sqrt{\frac{\rho + a}{2}} + i\sqrt{\frac{\rho - a}{2}}\right)$$

altfel $\sin\frac{\theta}{2} < 0$ şi $\cos\frac{\theta}{2} > 0$, deci avem

$$u_{1,2} = \pm\left(-\sqrt{\frac{\rho + a}{2}} + i\sqrt{\frac{\rho - a}{2}}\right)$$

cu $\rho = \sqrt{a^2 + b^2}$.

§2. Ecuaţia generală

Ecuaţia polinomială de gradul al doilea în $\mathbb{C}$

$$az^2 + bz + c = 0, \quad a, b, c \in \mathbb{C}, \ a \neq 0.$$

se rezolvă cu aceeaşi formulă ca în cazul coeficienţilor reali, deoarece trinomul de gradul al doilea are aceeaşi descompunere:

$$az^2 + bz + c = a\left(z^2 + \frac{b}{a}z + \frac{c}{a}\right) = a\left(z^2 + 2\frac{b}{2a}z + \frac{b^2}{4a^2} - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}\right) =$$

$$= a\left[\left(z + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2}\right],$$

unde $\Delta = b^2 - 4ac$.

Fie u una dintre rădăcinile ecuaţiei $u^2 = \Delta$. Avem mai departe

$$az^2 + bz + c = a\left[\left(z + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{u^2}{4a^2}\right] =$$

$$= a\left(z + \frac{b}{2a} - \frac{u}{2a}\right)\left(z + \frac{b}{2a} + \frac{u}{2a}\right),$$

deci ecuaţia $az^2 + bz + c = 0$ are formula de rezolvare

$$z_{1,2} = \frac{-b \pm u}{2a},$$

cu $u^2 = \Delta$.

§3. Exerciţii

Exerciţiul 1. *Rezolvaţi următoatele ecuaţii în mulţimea numerelor complexe*:

a) $z^2 = 21 - 20i$;

b) $z^4 + 7 + 24i = 0$;

c) $z^4 - 6z^2 + 25 = 0$;

d) $(1 + i)z^2 + iz + 9 - 2i = 0$;

e) $z^4 + (1 + i)z^2 + 6 - 2i = 0$;

Exerciţiul 2. *Implementaţi, folosind numerele complexe predefinite din Python, câte o variantă a funcţiei*

```
def mySqrt(z):
    pass
```

care returnează unul dintre numerele complexe u *pentru care* $u^2 = z$*,* *a)* *folosind formulele* (3) *şi* (4)*;*

b) *folosind formula* (5)*;*

c) *folosind seria binomială*

$$(1+z)^\alpha = 1 + \frac{\alpha}{1!}z + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}z^2 + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!}z^3 + \dots$$

care este convergentă pentru orice $z \in \mathbb{C}$ *cu* $|z| < 1$*, cel puţin. Aici* α *este un număr real oarecare, în cazul nostru fixăm* $\alpha = \frac{1}{2}$*.*

Rezolvare b)

```
import cmath
import math
def mySqrt(z):
    rho = abs(z)
    theta = cmath.phase(z)
    return cmath.rect(math.sqrt(rho), theta / 2)

v = 2 + 5j
z = v ** 2
print(mySqrt(z))
print(cmath.sqrt(z))
print(z ** 0.5)
# (2+5j)
# (2+5j)
# (2+5j)
```

Exerciţiul 3. *Implementaţi functia*

```
def ecGr2(a ,b ,c):
    pass
```

care returnează tuplul (z_1, z_2) *format din cele două soluţii ale ecuaţiei*

$$az^2 + bz + c = 0, \ a, b, c \in \mathbb{C}.$$

Dacă $a = 0$*,* z_2 *are valoarea* `None`.