Tema 9

Pseudospirale

Spiralele centrate în origine sunt curbele care admit o reprezentare parametrică $z=z(t)$de forma

$$z(t) = \rho(t) e^{i\omega t}, \quad t \in (-\infty, +\infty),$$

sau, pe componente,

$$\begin{cases} x(t) = \rho(t) \cos \omega t \\ y(t) = \rho(t) \sin \omega t, \end{cases} \quad t \in (-\infty, +\infty),$$

cu $\rho=\rho(t)$ o funcţie netedă de clasă C^∞, pozitivă şi strict monotonă. Parametrul real $\omega \neq 0$ este viteza unghiulară de rotaţie a punctului curent în jurul originii, iar $\rho=\rho(t)$ reprezintă legea de variaţie a distanţei de la origine la punctul curent. Monotonia strictă a funcţiei ρ asigură faptul că spirala este o curbă simplă, care nu se autointersectează.

Dintre exemplele deja întâlnite amintim: spirala lui Arhimede (vezi Tema 2)

$$\begin{cases} x(t) = t \cos t \\ y(t) = t \sin t, \end{cases} \quad t \in (-\infty, +\infty),$$

şi spirala logaritmică (vezi Tutorialul 9)

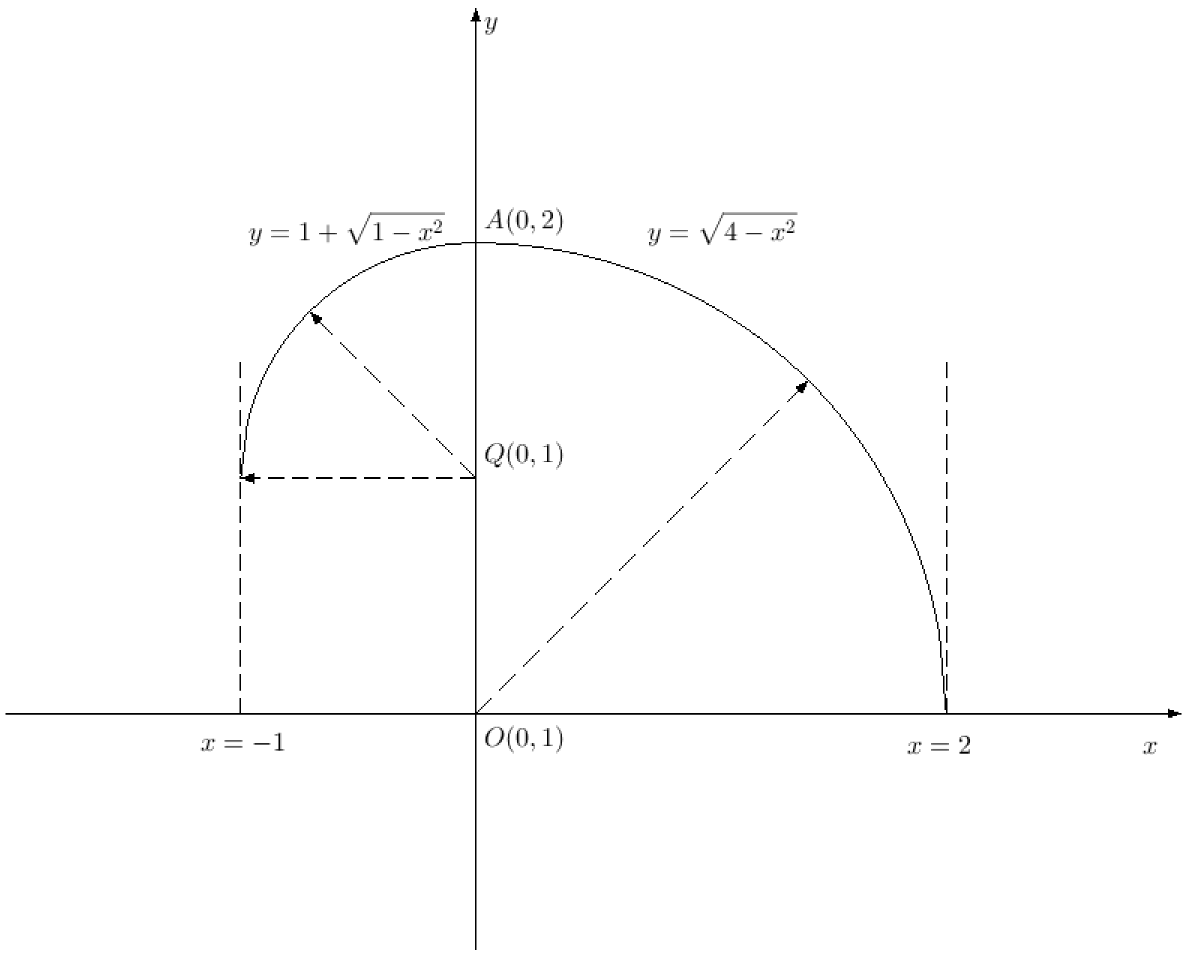
$$\begin{cases} x(t) = e^{at} \cos bt \\ y(t) = e^{at} \sin bt, \end{cases} \quad t \in (-\infty, +\infty).$$

Prin *pseudospirală* înţelegem o curbă care aproximează o spirală dată, curbă construită de regulă prin racordarea unor arce de cerc astfel încât în punctele de racordare tangentele să fie în prelungire, ceea ce presupune ca punctul de racordare să fie pe linia centrelor. Rezultatul obţinut este o curbă de clasă C^1, nicidecum C^∞.

Exerciţiul 1. Se consideră funcţia $f:(-1,2) \to (0,+\infty)$ definită de

$$f(x) = \begin{cases} 1+\sqrt{1-x^2}, & x \in (-1,0) \\ 0, & x = 0, \\ \sqrt{4-x^2}, & x \in (0,2) \end{cases}$$

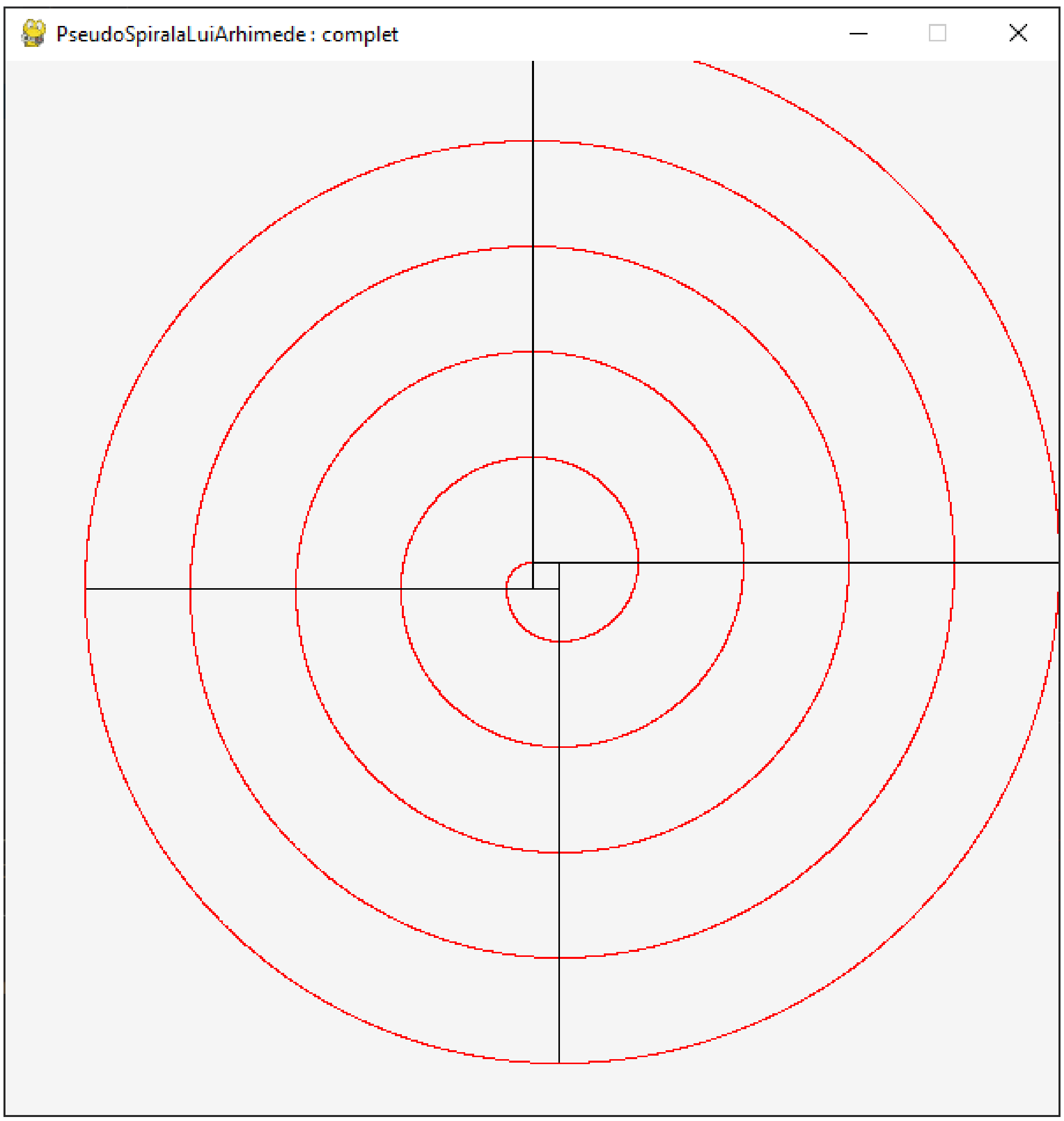
care are graficul din figura următoare, format prin racordarea în punctul $A(0,2)$ a două sferturi de cerc cu centrele în $Q(0,1)$ şi $O(0,0)$. Arătaţi că *f* este derivabilă cu derivata continuă, dar nu este şi de două ori derivabilă în $x=0$.



Exercițiul 2. Spirala lui Arhimede este caracterizată de faptul că distanța dintre două spire consecutive, măsurată pe raza vectoare, este constantă. Programul următor construiește o pseudospirală de acest gen, racordând pe rând semicercuri având diametrele pe axa verticală și schimbând pe rând centrele, când în sus și când în jos, cu distanța dintre centre egală cu unitatea de măsură. Modificați programul pentru a obține o pseudospirală din sferturi de cerc.

```
import ComplexPygame as C
import Color
import math

def PseudoSpiralaLuiArhimede():
    nrPuncte = 1000
    alfa = math.pi
    omega = C.fromRhoTheta(1, alfa / nrPuncte)

    def traseazaArc(q, delta):
        for k in range(nrPuncte):
            delta *= omega
            C.setPixel(q + delta, Color.Red)
        versor = delta / C.rho(delta)
        q -= versor
        delta += versor
```

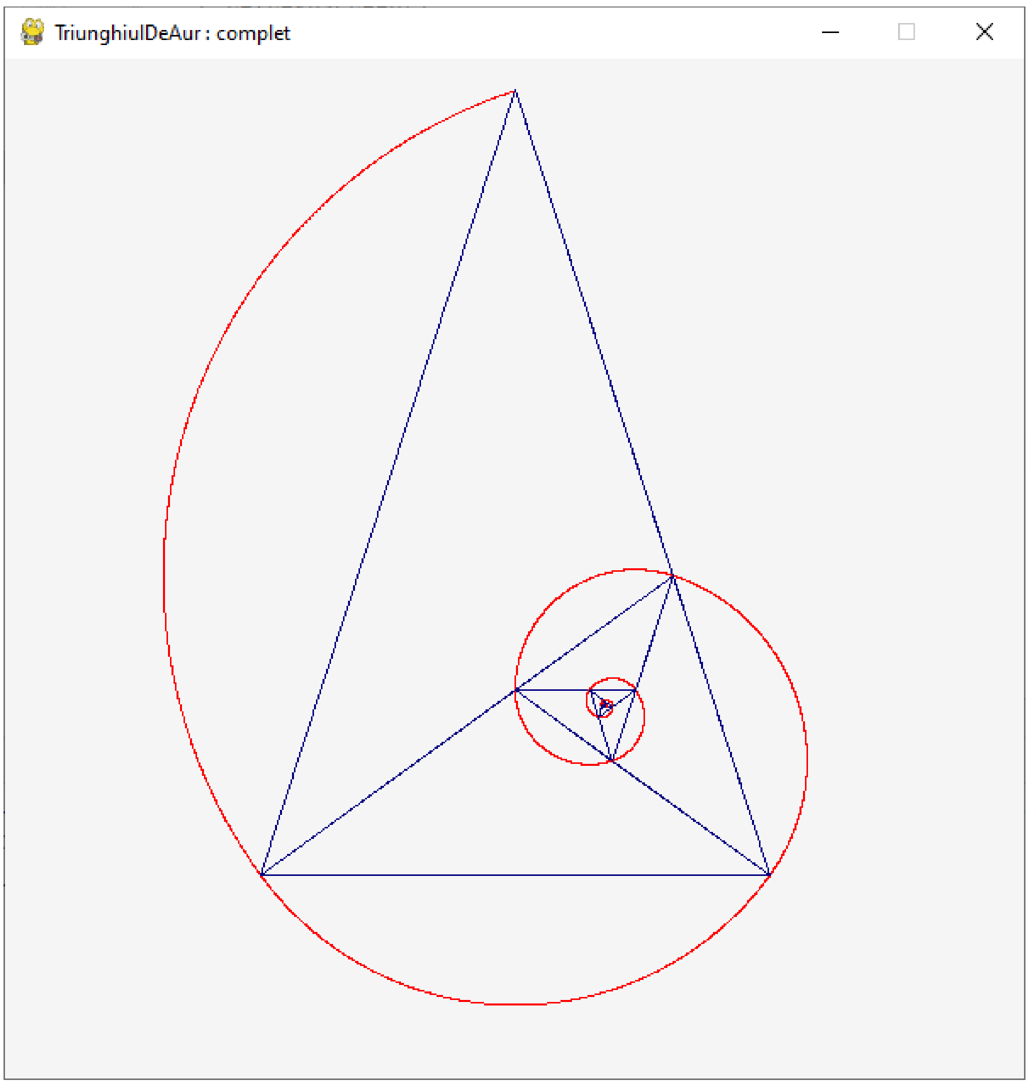
```
        C.drawLine(q, q + delta, Color.Black)
        return q, delta

    lat = 20
    C.setXminXmaxYminYmax(-lat, lat, -lat, lat)
    q = 0
    delta = 1j
    for k in range(20):
        q, delta = traseazaArc(q, delta)
    C.refreshScreen()


if __name__ == '__main__':
    C.initPygame()
    C.run(PseudoSpiralaLuiArhimede)
```



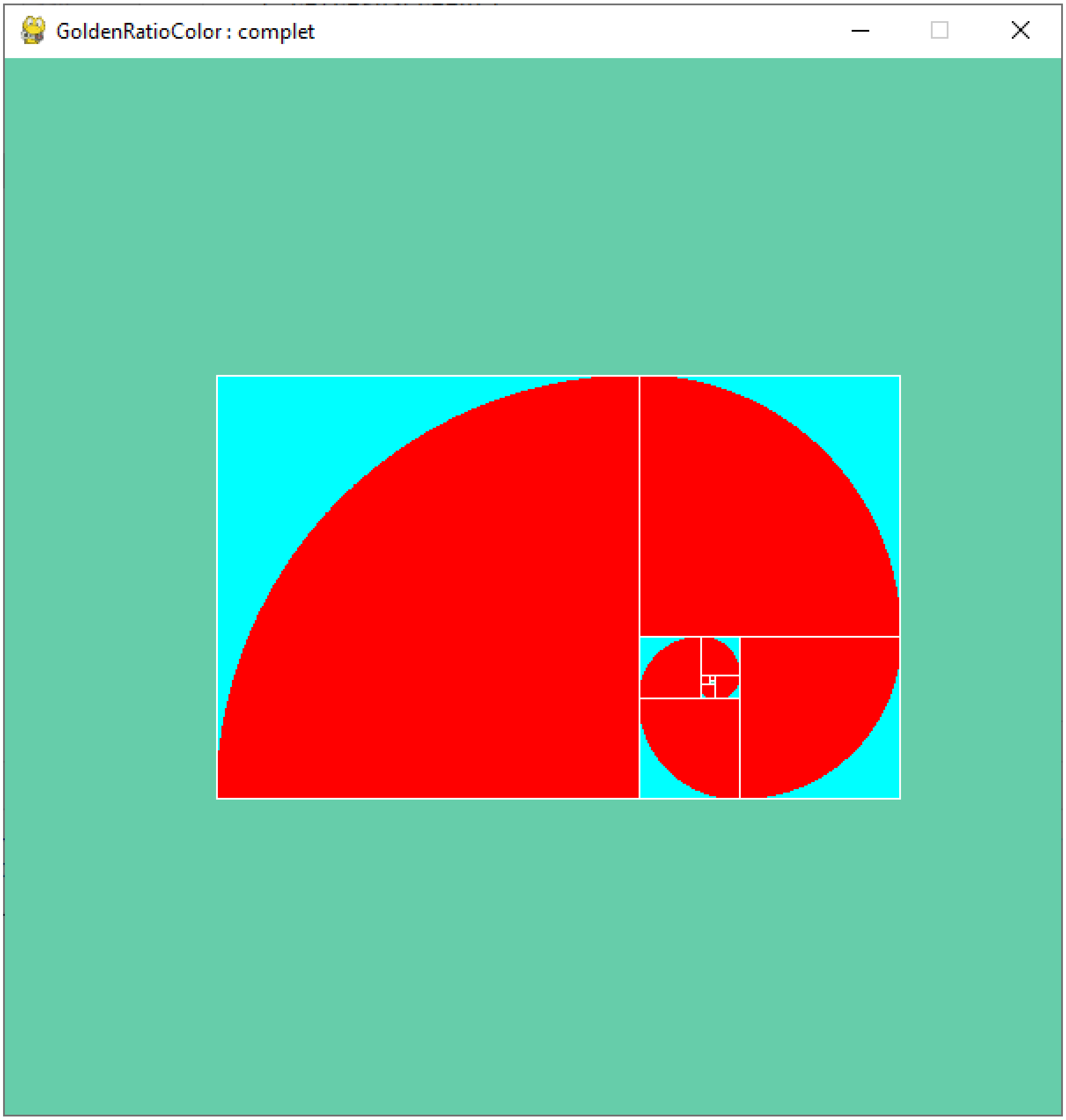
Indicație. Funcția **traseazaArc** primeşte ca argument centrul **q** al arcului de cerc care trebuie trasat, un semicerc aici, şi tot ca argument raza vectoare **delta** a punctului iniţial al arcului. În ciclul **for** din corpul funției vectorul **delta** este rotit puţin câte puţin pentru a pune cu **setPixel** punctele pe cerc, care au afixele de forma **q+delta**. În final, după ieşirea din **for**, centrul **q** este mutat cu o lungime egală cu unitatea de măsură pe direcţia finală a vectorului **delta,** folosind versorul acestuia**,** şi apoi este actualizată şi valoarea lui **delta**, astfel încât la următorul apel noul arc să pornească din ultimul punct trasat acum.

In program trebuie modificat un singur lucru: măsura arcului trasat, din semicerc în sfert de cerc.

Exerciţiul 3. Triunghiul de aur (colţul pentagramei) a fost prezentat în tutorialul ataşat de unde aţi aflat că el poate fi secţionat într-o spirală de triunghiuri care pot fi înscrise pe spirală logaritmică adevărată. Acum vi se cere să trasaţi pseudospirala din figura alăturată, alcătuită din arce de 108°, şi apoi să trasaţi spre comparaţie, cu altă culoare, şi spirala logaritmică circumscrisă aceleiaşi linii poligonale.



Exerciţiul 4. Modificaţi clasa GoldenRatio prezentată la curs (vezi *planul de curs*) astfel încât să coloraţi un dreptunghi de aur:

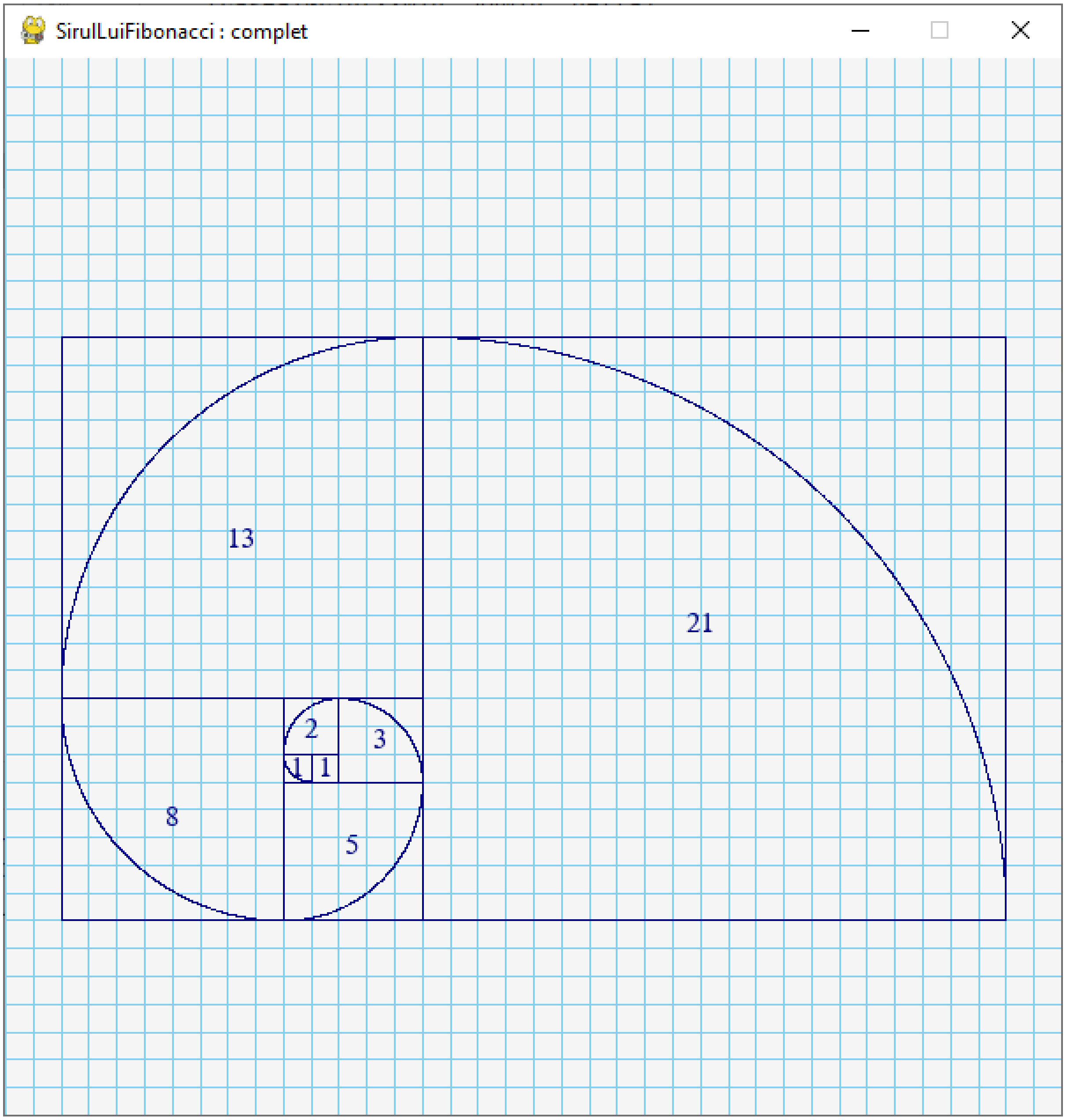


Exerciţiul 5. Şirul lui Fibonacci este bine-cunoscut, la fel şi legătura lui cu numărul de aur[1]. Construiţi acum spirala de pătrate din figura de mai jos şi trasaţi şi pseodospirala aferentă.

Indicaţie. Începeţi cu cele două pătrate de latură 1 din interior, apoi îl construiţi pe cel de latură 2, şi aşa mai departe. Dacă notăm de fiecare dată cu *abcd* pătratul nou construit, trebuie avut

[1] vezi, de exemplu, https://en.wikipedia.org/wiki/Fibonacci_number

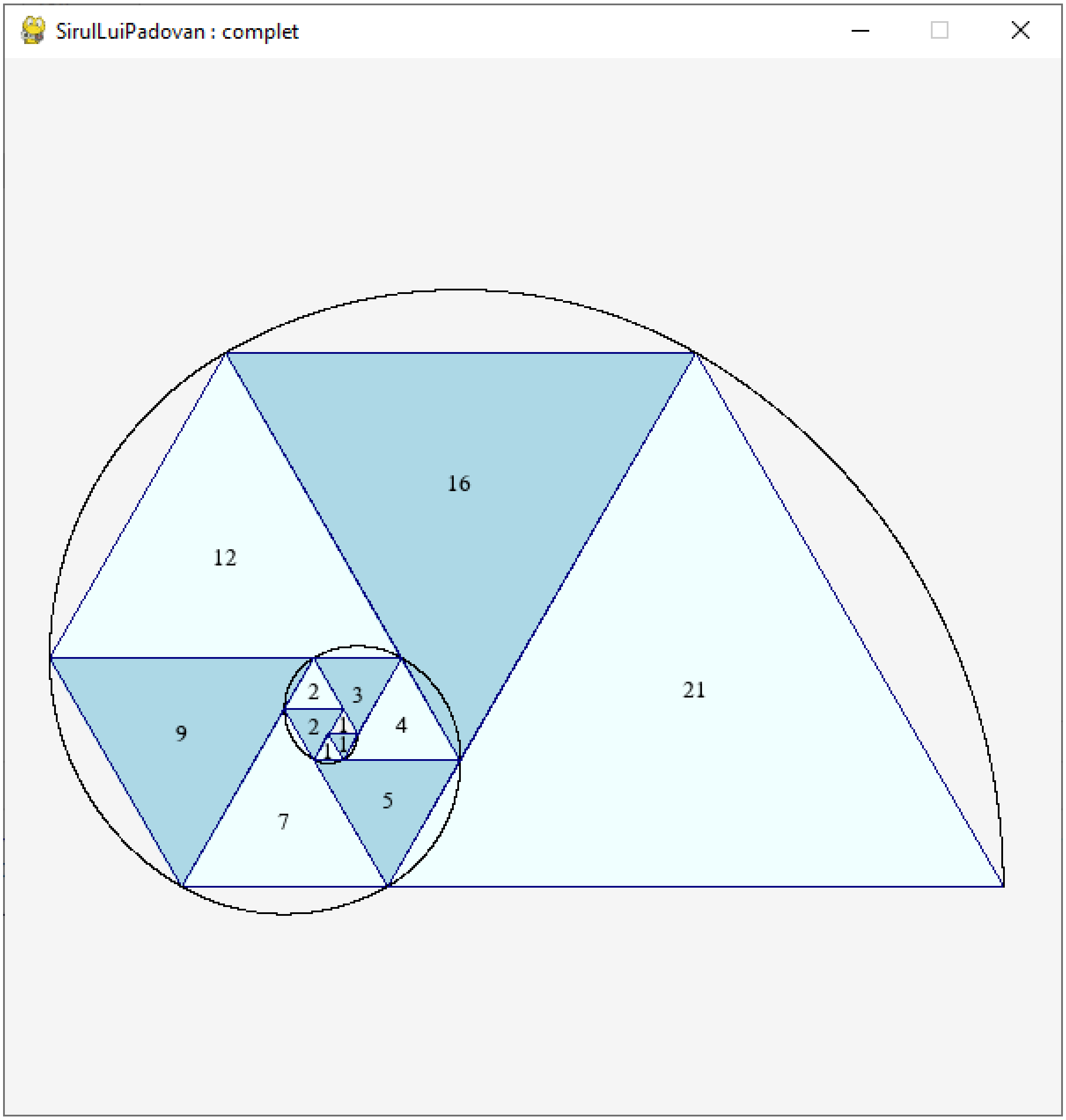
grijă pătratele să fie astfel orientate încât spirala să intre mereu prin acelaşi vârf, *a* să zicem, şi să iasă mereu prin *c*.



Exercițiul 6. Șirul lui Padovan este aproape necunoscut[2]. Este definit tot de o recurență liniară cu coeficienți constanți, ca și în cazul lui Fibonacci, dar acum recurența este de ordin 3:

$$\begin{cases} p_{n+1} = p_{n-1} + p_{n-2}, \quad n = 2, 3, \ldots \\ p_0 = 1, \ p_1 = 1, \ p_2 = 1. \end{cases}$$

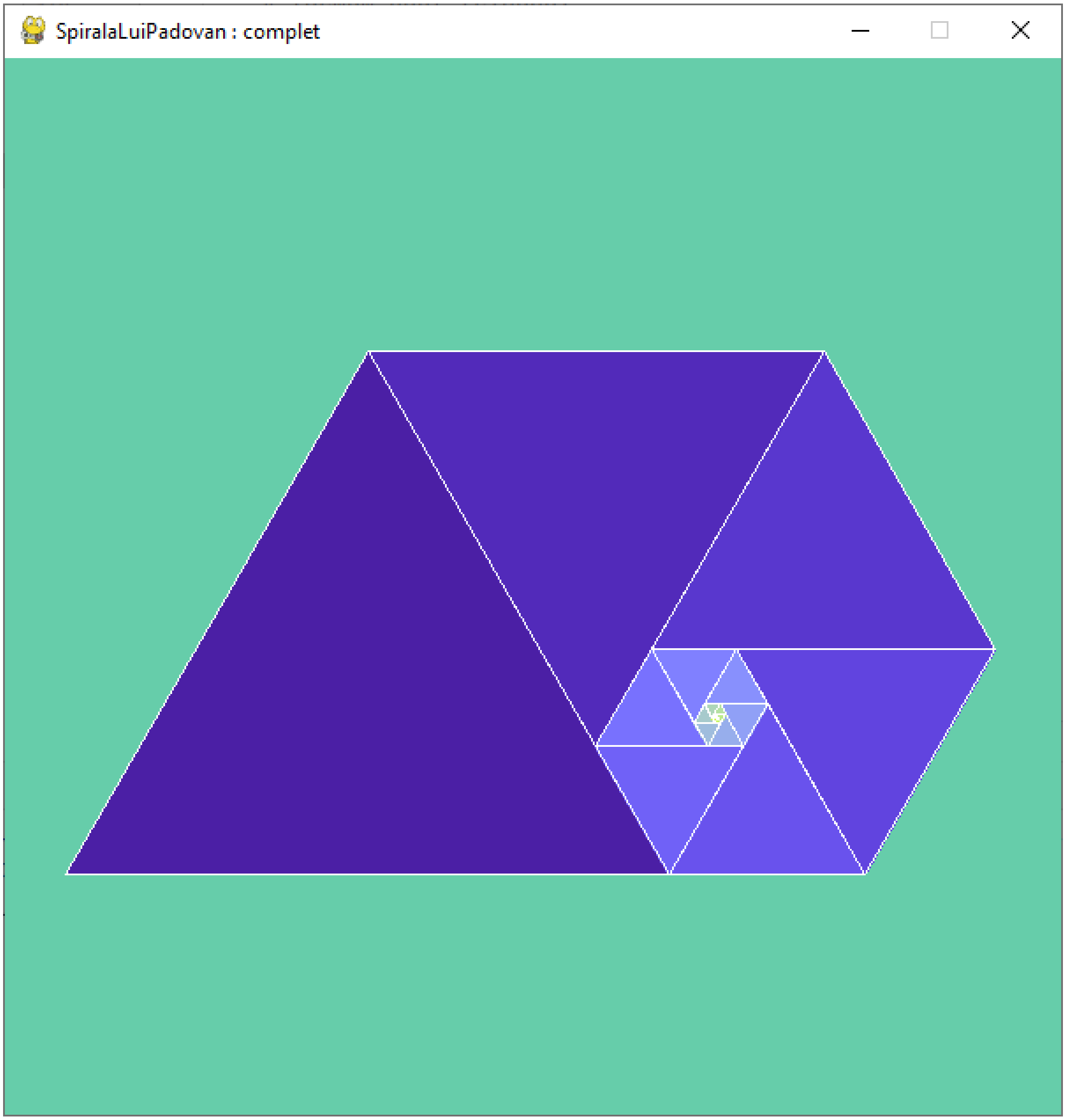
Forma specifică a recurenței permite construcția următoarei spirale de triunghiuri echilaterale, cu laturile date de termenii șirului:



[2] vezi https://en.wikipedia.org/wiki/Padovan_sequence

Încercaţi şi voi. Construcţie începe din interior, pseudospirala trasată fiind foarte utilă la trecerea de la un triunghi la următorul.

Exerciţiul 7. Următoarea spirală este formată de triunghiuri echilaterale şi poate fi înscrisă într-o spirală logaritmică, care ar trebui trasată. La fel de bine se poate trasa şi o pseudospirală.



Atenţie: construcţia începe cu triunghiul cel mai mare, dar mai înainte trebuie aflat raportul ψ dintre laturile triunghiurilor succesive, care este constant, spre deosebire de cazul exerciţiului precedent.