

Ecuția polinomială de gradul trei

Ne propunem să rezolvăm ecuația

$$P(z) = az^3 + bz^2 + cz + d = 0, \quad (1)$$

unde coeficienții a, b, c și d sunt numere oarecare, reale sau complexe, cu $a \neq 0$.

După cum este bine cunoscut, ca o consecință a Teoremei Fundamentale a Algebrei¹, în corpul numerelor complexe orice polinom P de grad trei poate fi descompus sub forma

$$P(z) = a(z - z_0)(z - z_1)(z - z_2)$$

unde rădăcinile² z_0, z_1 și z_2 sunt numere reale sau complexe, distincte sau nu.

Începem prin a rezolva cazurile cele mai simple.

§1. Rădăcinile cubice ale unității. Ecuția

$$z^3 = 1 \quad (2)$$

se rezolvă imediat prin calcul algebric:

$$z^3 - 1 = 0 \Leftrightarrow (z - 1)(z^2 + z + 1) = 0 \Leftrightarrow z_0 = 1, \quad z_{1,2} = -\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}i.$$

Peste tot în cele ce urmează vom nota cu ε următoarea rădăcină a ecuației (2)

$$\varepsilon = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i = \cos \frac{2\pi}{3} + i \sin \frac{2\pi}{3}. \quad (3)$$

Am determinat astfel *mulțimea rădăcinilor cubice ale unității*:

$$\mathcal{U}_3 = \{z \in \mathbb{C} \mid z^3 = 1\} = \{1, \varepsilon, \bar{\varepsilon}\} = \left\{ \cos \frac{2k\pi}{3} + i \sin \frac{2k\pi}{3}, k = -1, 0, 1 \right\}.$$

Să observăm că

$$\varepsilon^2 = \cos \frac{4\pi}{3} + i \sin \frac{4\pi}{3} = \cos \left(-\frac{2\pi}{3} \right) + i \sin \left(-\frac{2\pi}{3} \right) = \bar{\varepsilon},$$

prin urmare mulțimea \mathcal{U}_3 poate fi scrisă și ca

$$\mathcal{U}_3 = \{1, \varepsilon, \varepsilon^2\} = \left\{ \cos \frac{2k\pi}{3} + i \sin \frac{2k\pi}{3}, k = 0, 1, 2 \right\}.$$

¹vezi <https://mathscholar.org/2018/09/simple-proofs-the-fundamental-theorem-of-algebra/>

²Termenul de *rădăcină* este strâns legat de *radical* (din latinescul *radix*) și desemnează, în mod strict, soluțiile ecuațiilor de forma $z^n = a$. Denumirea s-a extins însă la orice ecuație polinomială, cuvintele *soluție* și *rădăcină* fiind în acest caz sinonime. Pentru o funcție numerică oarecare f , soluțiile ecuației $f(z) = 0$ se numesc *zerourile funcției*. Numai pentru funcții polinomiale zerourile se numesc rădăcini.

§2. Rădăcinile cubice ale unui număr real. Fie r un număr real oarecare, pozitiv sau nu. După cum știm de la studiul funcțiilor reale, se notează cu $\sqrt[3]{r}$, prin definiție, singura soluție reală a ecuației

$$z^3 = r.$$

Prin verificare directă se constată că, pe lângă $z_0 = \sqrt[3]{r}$, celelalte două rădăcini sunt

$$z_1 = \sqrt[3]{r}\varepsilon = \frac{\sqrt[3]{r}(-1 + \sqrt{3}i)}{2}$$

și

$$z_2 = \bar{z}_1 = \sqrt[3]{r}\bar{\varepsilon} = \frac{\sqrt[3]{r}(-1 - \sqrt{3}i)}{2}.$$

În concluzie, mulțimea rădăcinilor cubice ale numărului real $r \in \mathbb{R}$ este

$$\{z \in \mathbb{C} \mid z^3 = r\} = \{z_0, z_1, z_2\} = \{\sqrt[3]{r}, \sqrt[3]{r}\varepsilon, \sqrt[3]{r}\bar{\varepsilon}\} = \{\sqrt[3]{r}, \sqrt[3]{r}\varepsilon, \sqrt[3]{r}\varepsilon^2\}.$$

§3. Rădăcinile cubice ale unui număr complex. Fie acum w un număr complex oarecare, real sau nu. În acest caz general ecuația

$$z^3 = w$$

poate fi rezolvată numai cu forma trigonometrică a numărului w , fie aceasta

$$w = \rho(\cos \theta + i \sin \theta).$$

Definim numărul complex

$$\delta = \sqrt[3]{\rho} \left(\cos \frac{\theta}{3} + i \sin \frac{\theta}{3} \right)$$

și, folosind formula lui Moivre, constatăm că $\delta^3 = w$. Mai departe, din

$$(\delta\varepsilon)^3 = \delta^3\varepsilon^3 = w$$

și

$$(\delta\bar{\varepsilon})^3 = \delta^3\bar{\varepsilon}^3 = w,$$

urmează că mulțimea rădăcinilor cubice ale lui $w \in \mathbb{C}$,

$$\{z \in \mathbb{C} \mid z^3 = w\} = \{z_0, z_1, z_2\} = \{\delta, \delta\varepsilon, \delta\bar{\varepsilon}\} = \{\delta, \delta\varepsilon, \delta\varepsilon^2\}$$

este dată de formula

$$\{z \in \mathbb{C} \mid z^3 = w\} = \left\{ \sqrt[3]{\rho} \left(\cos \left(\frac{\theta}{3} + \frac{2k\pi}{3} \right) + i \sin \left(\frac{\theta}{3} + \frac{2k\pi}{3} \right) \right), k = 0, 1, 2 \right\}. \quad (4)$$

Exemplu. Să se rezolve ecuația:

$$z^3 = -2 + 2i.$$

Rezolvare. Avem $w = x + yi = -2 + 2i = \rho(\cos \theta + i \sin \theta)$ unde

$$\rho = |w| = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{8}$$

și

$$\theta = \arccos \frac{x}{\rho} = \arccos \left(-\frac{\sqrt{2}}{2} \right) = \frac{3\pi}{4}$$

Obținem

$$\delta = \sqrt[3]{\rho} \left(\cos \frac{\theta}{3} + i \sin \frac{\theta}{3} \right) = \sqrt[3]{8} \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right) = \sqrt{2} \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i \frac{\sqrt{2}}{2} \right) = 1 + i$$

Prin urmare, rădăcinile cubice ale lui $w = -2 + 2i$ sunt

$$z_0 = 1 + i,$$

$$z_1 = z_0 \varepsilon = \frac{-1 - \sqrt{3}}{2} + \frac{-1 + \sqrt{3}}{2} i$$

și

$$z_2 = z_0 \varepsilon^2 = \frac{-1 + \sqrt{3}}{2} + \frac{-1 - \sqrt{3}}{2} i$$

Observație. În exemplul de mai sus în rezultatul final nu mai apare funcția cosinus, se impune întrebarea: oare nu există în locul formulei (4) o altă formulă de rezolvare care să furnizeze rădăcinile sub formă algebrică utilizând cel mult radicali din numere reale?

Răspunsul este nu³: se știe că în corpul numerelor complexe ecuațiile polinomiale până la gradul patru inclusiv sunt rezolvabile prin radicali, dar această afirmație este valabilă numai dacă sunt admiși și radicali din numere complexe.

Este important de menționat că, în analiza complexă, radicalul unui număr complex este o *multifuncție*, mai precis

$$\sqrt[n]{w} = \{z \in \mathbb{C} \mid z^n = w\} = \{z_0, z_1, \dots, z_{n-1}\},$$

unde, pentru $w = x + iy = \rho(\cos \theta + i \sin \theta)$, avem

$$z_k = \sqrt[n]{\rho} \left(\cos \frac{\theta + 2k\pi}{n} + i \sin \frac{\theta + 2k\pi}{n} \right), \quad k = 0, 1, \dots, n-1.$$

Pentru fiecare $k \in \{0, 1, \dots, n-1\}$ fixat, funcția $w \rightarrow z_k$ definește o *ramură* a radicalului, care este o funcție bine definită în tot planul complex dar discontinuă în punctele de pe semiaxa reală negativă, deoarece în acele puncte $\theta = \arg w$ are un salt de la $-\pi$ la $+\pi$.

Prin urmare, formula (4) definește radicalul de ordin trei dintr-un număr complex: pentru $w = x + iy = \rho(\cos \theta + i \sin \theta)$,

$$\sqrt[3]{w} = \left\{ \sqrt[3]{\rho} \left(\cos \left(\frac{\theta + 2k\pi}{3} \right) + i \sin \left(\frac{\theta + 2k\pi}{3} \right) \right), \quad k = 0, 1, 2 \right\}.$$

³vezi https://en.wikipedia.org/Cubic.equation#Trigonometric_and_hyperbolic_solutions

§4. Rezolvarea ecuației de gradul 3. Considerăm acum ecuația generală (1) scrisă sub forma

$$ax^3 + bx^2 + cx + d = 0, \quad (5)$$

și căutăm o schimbare de variabilă de tipul

$$x = z - \lambda, \quad (6)$$

astfel încât ecuația în noua variabilă z să aibă *forma redusă*

$$z^3 + pz + q = 0. \quad (7)$$

Aplicând substituția (6), ecuația (5) devine

$$a(z - \lambda)^3 + b(z - \lambda)^2 + c(z - \lambda) + d = 0,$$

$$a(z^3 - 3\lambda z^2 + 3\lambda^2 z - \lambda^3) + b(z^2 - 2\lambda z + \lambda^2) + c(z - \lambda) + d = 0,$$

$$az^3 + (-3a\lambda + b)z^2 + (3a\lambda^2 - 2b\lambda + c)z + (-a\lambda^3 + b\lambda^2 - c\lambda + d) = 0,$$

așadar pentru

$$\lambda = \frac{b}{3a},$$

ecuația capătă forma redusă (7), unde

$$p = 3\lambda^2 - \frac{2b\lambda}{a} + \frac{c}{a} = -\frac{b^2}{3a^2} + \frac{c}{a}, \quad (8)$$

și

$$q = -\lambda^3 + \frac{b\lambda^2}{a} - \frac{c\lambda}{a} + \frac{d}{a} = \frac{2b^3}{27a^3} - \frac{bc}{3a^2} + \frac{d}{a}. \quad (9)$$

Pentru rezolvarea ecuației reduse scriem formula cubului sumei

$$(u + v)^3 = u^3 + 3u^2v + 3uv^2 + v^3$$

sub forma

$$(u + v)^3 - 3uv(u + v) - (u^3 + v^3) = 0$$

și o comparăm cu ecuația (7). Observăm că dacă au loc egalitățile

$$\begin{cases} p = -3uv \\ q = -(u^3 + v^3) \end{cases} \quad (10)$$

atunci suma

$$z = u + v$$

este o soluție a ecuației. Scriem relațiile (10) sub forma unui sistem “în sumă și produs”

$$\begin{cases} u^3 + v^3 = -q \\ u^3v^3 = -\frac{p^3}{27}, \end{cases} \quad (11)$$

prin urmare u^3 și v^3 sunt soluțiile $w_{1,2}$ ecuației de gradul doi

$$w^2 + qw - \frac{p^3}{27} = 0. \quad (12)$$

Notăm cu

$$\Delta = q^2 + \frac{4p^3}{27}. \quad (13)$$

discriminantul ecuației (12) și avem

$$w_{1,2} = \frac{-q \pm \sqrt{\Delta}}{2},$$

de unde obținem rădăcinile ecuației reduse sunt forma

$$z = \sqrt[3]{\frac{-q + \sqrt{\Delta}}{2}} + \sqrt[3]{\frac{-q - \sqrt{\Delta}}{2}}. \quad (14)$$

În relația de mai sus, numită *formula lui Cardano*⁴, intervin radicali din numere complexe care, așa cum am menționat, sunt multifuncții. Cei doi radicali de ordin trei au fiecare câte trei valori, pentru formarea lui z sunt posibile șase moduri. Vom vedea în continuare cum alegem termenii sumei $z = u + v$ astfel încât să obținem numai cele trei rădăcini ale ecuației.

Metoda este următoarea: notăm cu δ_1 una dintre soluțiile ecuației $u^3 = w_1$ și cu δ_2 una dintre soluțiile ecuației $u^3 = w_2$, fixate astfel încât $\delta_1\delta_2 = -\frac{p}{3}$. Această alegere este totdeauna posibilă deoarece, pentru δ_1 fixat,

$$\left(-\frac{p}{3\delta_1}\right)^3 = -\frac{p^3}{27} \cdot \frac{1}{\delta_1^3} = w_1 w_2 \cdot \frac{1}{w_1} = w_2,$$

prin urmare

$$\delta_2 = -\frac{p}{3\delta_1} \in \sqrt[3]{w_2}$$

verifică cerințele.

În formula (14), scrisă sub forma

$$z = u + v = \sqrt[3]{w_1} + \sqrt[3]{w_2},$$

trebuie să avem

$$u \in \sqrt[3]{w_1} = \{\delta_1, \delta_1\varepsilon, \delta_1\varepsilon^2\}, \quad v \in \sqrt[3]{w_2} = \{\delta_2, \delta_2\varepsilon, \delta_2\varepsilon^2\}.$$

Notăm $u_k = \delta_1\varepsilon^k$ și $v_h = \delta_2\varepsilon^h$. Perechea (u_k, v_h) o vom forma astfel încât

$$u_k v_h = -\frac{p}{3}.$$

Avem următorul calcul

$$u_k v_h = \delta_1\varepsilon^k \delta_2\varepsilon^h = \delta_1\delta_2\varepsilon^{k+h} = -\frac{p}{3}\varepsilon^{k+h},$$

deci vom alege h și k astfel încât $\varepsilon^{k+h} = 1$.

⁴Această formulă a fost publicată de Gerolamo CARDANO în *Ars Magna* (1545) și atribuită lui Scipione del FERRO (1515), dar forma publicată a fost găsită de Niccolò TARTAGLIA (1541). *Ars Magna* este printre primele lucrări în care apar calcule formale cu radicali din numere negative, marcând astfel începutul dezvoltării teoriei numerelor complexe.

Obținem cele trei rădăcini ale ecuației reduse sub forma

$$\begin{cases} z_0 = \delta_1 + \delta_2, \\ z_1 = \delta_1\varepsilon + \delta_2\bar{\varepsilon}, \\ z_2 = \delta_1\bar{\varepsilon} + \delta_2\varepsilon, \end{cases} \quad (15)$$

unde am ținut cont că $\varepsilon^2 = \bar{\varepsilon}$.

În practică, pentru rezolvarea numerică a ecuației de gradul trei, se poate folosi următoarea strategie: după rezolvarea ecuației (12), notăm cu w una dintre cele două rădăcini, fixată aleator, și rezolvăm ecuația $u^3 = w$, obținând rădăcinile $\{u_0, u_1, u_2\}$, iar pe v îl determinăm din $uv = -\frac{p}{3}$. Cele trei rădăcini ale ecuației reduse vor fi calculate astfel

$$z_k = u_k - \frac{p}{3u_k}, \quad k = 0, 1, 2.$$

Dacă notăm cu w cealaltă soluție a ecuației (12), obținem aceleași rădăcini, dar în altă ordine.

Această metodă este implementată în următorul program Python:

```
import cmath
import math

def ComplexToString(z):
    x = round(z.real, 3)
    y = round(z.imag, 3)
    if y == 0:
        return f"{x:g}"
    if x == 0:
        return f"{y:g}j"
    return f"{x:g}{y:+g}j"

def RezolvareEcuatie(a, b, c, d):
    def Radix3(w):
        rho, theta = cmath.polar(w)
        return [cmath.rect(math.pow(rho, 1 / 3), (theta + 2 * k * math.pi) / 3)
                for k in range(3)]

    assert a != 0
    p = c / a - b * b / (3.0 * a * a)
    q = 2.0 * b ** 3 / (27.0 * a ** 3) - b * c / (3.0 * a * a) + d / a
    Delta = q * q + 4.0 * p ** 3 / 27.0
    w = (-q + cmath.sqrt(Delta)) / 2
    # w = (-q - cmath.sqrt(Delta)) / 2
    for k, u in enumerate(Radix3(w)):
        z = u - p / (3 * u)
        z -= b / (3.0 * a)
        print(f"z{k} = {ComplexToString(z)}")

def main():
    a = 1
```

```

b = -1 + 1j
c = 2 - 1j
d = -2
RezolvareEcuatie(a, b, c, d)

if __name__ == '__main__':
    main()

# Rezultat:
# z0 = 1
# z1 = 1j
# z2 = -2j

```

§5. Cazul coeficienților reali. Considerăm acum ecuația de gradul trei

$$az^3 + bz^2 + cz + d = 0$$

cu coeficienții a , b , c și d numere reale și suntem interesați să stabilim natura celor trei rădăcini ale acesteia.

Deoarece rădăcinile ecuației generale se obțin din cele ale ecuației reduse prin scăderea termenului $\frac{b}{3a}$, un număr real, discuția se rezumă la natura rădăcinilor ecuației reduse (7).

Observăm că în acest caz ecuația de gradul doi (12) are coeficienți reali, deci discuția va fi dată de semnul discriminantului Δ .

Cazul $\Delta > 0$. Ecuația (12) are soluțiile reale și distincte

$$w_{1,2} = \frac{-q \pm \sqrt{\Delta}}{2} \in \mathbb{R}.$$

Notăm

$$\delta_{1,2} = \sqrt[3]{w_{1,2}} = \sqrt[3]{\frac{-q \pm \sqrt{\Delta}}{2}} \in \mathbb{R}$$

Deoarece

$$\delta_1 \delta_2 = \sqrt[3]{w_1 w_2} = \sqrt[3]{-\frac{p^3}{27}} = -\frac{p}{3}$$

suntem în condițiile de aplicare a formulei de rezolvare (15) și obținem pentru ecuația redusă rădăcinile

$$z_0 = \delta_1 + \delta_2 = \sqrt[3]{\frac{-q + \sqrt{\Delta}}{2}} + \sqrt[3]{\frac{-q - \sqrt{\Delta}}{2}}, \quad (16)$$

$$z_1 = \delta_1 \varepsilon + \delta_2 \bar{\varepsilon},$$

și

$$z_2 = \delta_1 \bar{\varepsilon} + \delta_2 \varepsilon = \bar{z}_2.$$

Din (3), după efectuarea calculelor se obține

$$z_{1,2} = -\frac{\delta_1 + \delta_2}{2} \pm i \cdot \frac{(\delta_1 - \delta_2)\sqrt{3}}{2}. \quad (17)$$

În concluzie, în cazul $\Delta > 0$ ecuația are o soluție reală și două complexe conjugate și toate aceste soluții pot fi exprimate prin radicali din numere reale.

Exemplu. Să se rezolve ecuația:

$$z^3 - 3z - 4 = 0.$$

Rezolvare. Avem $p = -3$ și $q = -4$, iar din (13) obținem $\Delta = 12$, de unde urmează

$$w_{1,2} = \frac{-q \pm \sqrt{\Delta}}{2} = 2 \pm \sqrt{3}.$$

În final, ecuația are soluțiile

$$z_0 = \sqrt[3]{2 + \sqrt{3}} + \sqrt[3]{2 - \sqrt{3}},$$

și

$$z_{1,2} = -\frac{\sqrt[3]{2 + \sqrt{3}} + \sqrt[3]{2 - \sqrt{3}}}{2} \pm i \cdot \frac{(\sqrt[3]{2 + \sqrt{3}} - \sqrt[3]{2 - \sqrt{3}})\sqrt{3}}{2}$$

Cazul $\Delta = 0$. Pentru ecuația (12) avem $w_1 = w_2 = -\frac{q}{2}$, prin urmare

$$\delta_1 = \delta_2 = \sqrt[3]{-\frac{q}{2}},$$

iar din (16) și (17) urmează că

$$z_1 = 2 \cdot \sqrt[3]{-\frac{q}{2}}, \quad z_2 = z_3 = -\sqrt[3]{-\frac{q}{2}}.$$

Să observăm că pentru $p \neq 0$ avem echivalențele

$$\Delta = 0 \Leftrightarrow q^2 + \frac{4p^3}{27} = 0 \Leftrightarrow \frac{27q^2}{4p^3} = -1 \Leftrightarrow \frac{27q^3}{8p^3} = -\frac{q}{2},$$

de unde obținem

$$\sqrt[3]{-\frac{q}{2}} = \frac{3q}{2p},$$

ecuația redusă având așadar soluțiile reale

$$z_1 = \frac{3q}{p}, \quad z_2 = z_3 = -\frac{3q}{2p}.$$

Dacă $p = 0$, din $\Delta = 0$ rezultă imediat că și $q = 0$, ecuația redusă are forma $z^3 = 0$, cu rădăcinile $z_1 = z_2 = z_3 = 0$.

Cazul $\Delta < 0$. Ecuația (12) are soluțiile complexe conjugate

$$w_{1,2} = \frac{-q \pm i\sqrt{-\Delta}}{2} = \rho(\cos \theta \pm i \sin \theta).$$

Definim

$$\delta = \sqrt[3]{\rho} \left(\cos \frac{\theta}{3} + i \sin \frac{\theta}{3} \right)$$

și notăm $\delta_1 = \delta$, $\delta_2 = \bar{\delta}$. Este evident că $\delta_{1,2}^3 = w_{1,2}$ și, deoarece

$$\delta_1 \delta_2 = \delta \bar{\delta} = |\delta|^2 = \sqrt[3]{\rho^2} = \sqrt[3]{w_1 w_2} = \sqrt[3]{-\frac{p^3}{27}} = -\frac{p}{3}$$

suntem iarăși în condițiile de aplicare a formulei (15), în consecință obținem pentru ecuația redusă rădăcinile reale

$$\begin{cases} z_0 = \delta + \bar{\delta} = 2 \operatorname{Re}(\delta) \\ z_1 = \delta \varepsilon + \bar{\delta} \bar{\varepsilon} = 2 \operatorname{Re}(\delta \varepsilon), \\ z_2 = \delta \bar{\varepsilon} + \bar{\delta} \varepsilon = 2 \operatorname{Re}(\delta \bar{\varepsilon}) = 2 \operatorname{Re}(\delta \varepsilon^2) \end{cases} \quad (18)$$

pe care le putem scrie compact sub forma

$$z_k = 2 \operatorname{Re}(\delta \varepsilon^k) = 2 \sqrt[3]{\rho} \cos \left(\frac{\theta}{3} + \frac{2k\pi}{3} \right), \quad k = 0, 1, 2, \quad (19)$$

unde ρ și θ sunt modulul și argumentul numărului complex w_1 .

Am arătat mai sus că

$$\rho^2 = -\frac{p^3}{27},$$

de unde găsim

$$\sqrt[3]{\rho} = \sqrt{-\frac{p}{3}}.$$

Deoarece partea imaginară a lui w_1 este strict pozitivă, rezultă că $\theta \in (0, \pi)$, prin urmare el poate fi determinat din egalitatea

$$-\frac{q}{2} = \rho \cos \theta,$$

de unde găsim

$$\theta = \arccos \left(-\frac{q}{2\rho} \right) = \arccos \left(-\frac{q}{2} \sqrt{-\frac{27}{p^3}} \right) = \arccos \left(\frac{3q}{2p} \sqrt{-\frac{3}{p}} \right).$$

În concluzie, în cazul $\Delta < 0$ ecuația redusă are toate rădăcinile reale, date formula

$$z_k = 2 \sqrt{-\frac{p}{3}} \cos \left(\frac{1}{3} \arccos \left(\frac{3q}{2p} \sqrt{-\frac{3}{p}} \right) + \frac{2k\pi}{3} \right), \quad k = 0, 1, 2. \quad (20)$$

Exemplu. Să se rezolve ecuația:

$$z^3 - 7z + 6 = 0.$$

Rezolvare. Observăm imediat că suma coeficienților este zero, deci ecuația admite rădăcina 1, iar pe celelalte două le aflăm imediat: 2 și -3. Folosim acest exemplu numai ca să verificăm formula (20).

Avem $p = -7$ și $q = 6$, iar din (13) obținem $\Delta = -\frac{400}{27}$. Suntem în cazul $\Delta < 0$, așa cum era de așteptat deoarece știm că ecuația are toate rădăcinile reale și distincte între ele, deci rădăcinile sunt date de formula (20) care devine

$$z_k = 2\sqrt{\frac{7}{3}} \cos\left(\frac{1}{3} \arccos\left(-\frac{9}{7}\sqrt{\frac{3}{7}}\right) + \frac{2k\pi}{3}\right), \quad k = 0, 1, 2.$$

Deoarece este greu de crezut că formula de mai sus are ca rezultat numerele întregi 1, 2 și -3 , o verificăm printr-un program Python:

```
import math
def VerificareDeltaMinus(p, q):
    delta = q * q + 4.0 * p ** 3 / 27.0
    assert delta < 0, "Nu suntem in cazul Delta < 0"
    theta = math.acos(3 * q * math.sqrt(-3 / p) / (2 * p))
    rho = math.sqrt(-p / 3)
    print(f"Ecuatia z**3{p:+}z{q:+}=0")
    print(f"are solutiile:")
    for k in range(3):
        zk = 2*rho*math.cos((theta + 2 * k * math.pi) / 3)
        print(f"z{k}={zk: .3g}")

if __name__ == '__main__':
    VerificareDeltaMinus(-7, 6)

# Rezultat:
# Ecuatia z**3-7z+6=0
# are solutiile:
# z0= 2
# z1=-3
# z2= 1
```