

Corina Mohorianu

Adina Balmuş

*Elemente de geometrie afină şi
euclidiană multidimensională*

Note de curs şi exerciţii

Februarie 2016, Iaşi

Universitatea "Alexandru Ioan Cuza" din Iaşi
Facultatea de Matematică

Notății

$\in, \subset, \cup, \cap$ - notațiile uzuale din teoria mulțimilor

$\text{char } \mathbb{K}$ - caracteristica corpului $\mathbb{K}$

V - $\mathbb{K}$ -spațiu liniar

V_n - $\mathbb{K}$ -spațiu liniar n dimensional

span - înfășurătoarea liniară

$L(V, W)$ - mulțimea aplicațiilor liniare de la V la W

$L_2S(V)$ - mulțimea formelor biliniare simetrice pe V

$\mathcal{P}(V)$ - mulțimea formelor pătratice pe V

$\mathcal{A} = (X, \overrightarrow{X}, \phi)$ - spațiu afin

$\mathcal{A}_n$ - spațiu afin de dimensiune finită n

$A, B, C, \dots$ - puncte

$\overline{u}, \overline{v}, \overline{w}, \dots$ - vectori

$\langle \rangle_{\text{af}}$ - înfășurătoarea afină

$\mathcal{R}$ - reper afin, $\mathcal{R}$ - reper cartezian

AB - dreapta AB , ABC - planul ABC

$\langle A_0, A_1, \dots, A_m \rangle$ - m -simplexul cu vârfurile $A_0, A_1, \dots, A_m$

$(A_0; \overline{a}_1, \dots, \overline{a}_m)$ - m -paralelipipedul cu vârf A_0 și muchii $\overline{a}_1, \dots, \overline{a}_m$

$\mathcal{E} = (E, \overrightarrow{E}, \phi)$ - spațiu afin euclidian

$\mathcal{E}_n$ - spațiu afin euclidian de dimensiune finită n

$\langle \overline{u}, \overline{v} \rangle$ - produsul scalar al vectorilor $\overline{u}$ și $\overline{v}$

$\overline{u} \times \overline{v}$ - produsul vectorial al vectorilor $\overline{u}$ și $\overline{v}$

$(\overline{u}, \overline{v}, \overline{w})$ - produsul mixt al vectorilor $\overline{u}, \overline{v}$ și $\overline{w}$

Cuprins

1. Spații afine	1
1.1 Introducere	1
1.2 Definiție. Proprietăți. Exemple	2
1.3 Exerciții	6
1.4 Subspații afine	12
1.5 Exerciții	17
1.6 Suma (uniunea) subspațiilor afine. Teorema dimensiunii pentru subspații afine	31
1.7 Exerciții	32
1.8 Spații afine de dimensiune finită. Repere afine. Repere carteziene	38
1.9 Exerciții	43
1.10 Morfisme afine. Translații. Omotetii	53
1.11 Paralelismul subspațiilor afine. Proiecții și simetrii	59
1.12 Teoreme fundamentale de geometrie afină	61
1.13 Exerciții	62
2. Geometrie afină pătratică	83
2.1 Introducere	83
2.2 Forme afine, biafine, pătratice afine în spații afine de dimensiune finită	83
2.3 Exerciții	91
2.4 Varietăți pătratice	96
2.5 Conice afine	104
2.6 Cuadrice afine	106
2.7 Exerciții	109

Capitolul **1**

Spații afine

1.1 Introducere

În acest capitol este introdusă noțiunea de spațiu afin peste un corp comutativ, sunt prezentate proprietățile fundamentale ale acestei noțiuni rezultate din teoria spațiilor liniare și sunt enumerate unele exemple clasice.

Sunt studiate subspațiile afine și morfismele afine, cu atenție deosebită pentru translații, omotetii, proiecții și simetrii.

Este abordată problematica specifică cu privire la spații afine finit dimensionale: repere carteziane și afine, p -plane, morfisme afine.

Capitolul se încheie cu trei teoreme clasice de geometrie afină: Teorema lui Thales, Teorema lui Pappus, Teorema lui Desargues, demonstrabile folosind atât calculul baricentric cât și dilatările afine.

1.2 Definiție. Proprietăți. Exemple

Definiția 1.1

Se numește *spațiu afin* peste un câmp $\mathbb{K}$ un triplet $\mathcal{A} = (X, \vec{X}, \phi)$, unde X este o mulțime nevidă, $\vec{X}$ este un $\mathbb{K}$ -spațiu vectorial și

$$\begin{aligned}\phi : X \times X &\longrightarrow \vec{X}, \\ (P, Q) &\longmapsto \phi(P, Q) = \overrightarrow{PQ},\end{aligned}$$

este o aplicație pentru care sunt satisfăcute următoarele axiome:

(A1) există $O \in X$ astfel încât

$$\begin{aligned}\phi_O : X &\longrightarrow \vec{X}, \\ P &\longmapsto \phi_O(P) = \phi(O, P)\end{aligned}$$

este o aplicație bijectivă,

(A2) *Relația lui Chasles*

$$\phi(P, Q) + \phi(Q, R) = \phi(P, R),$$

pentru orice $P, Q, R \in X$.

Elementele mulțimii X se numesc *puncte*, spațiul vectorial $\vec{X}$ se numește *spațiul vectorial director al spațiului afin* $\mathcal{A}$, iar aplicația ϕ se numește *morfismul de structură al spațiului afin* $\mathcal{A}$.

Propoziția 1.2

Fie $\mathcal{A} = (X, \vec{X}, \phi)$ un $\mathbb{K}$ -spațiu afin. Pentru fiecare punct P din X există o structură de $\mathbb{K}$ -spațiu vectorial pe X astfel încât aplicația

$$\begin{aligned}\phi_P : X &\longrightarrow \vec{X}, \\ Q &\longmapsto \phi_P(Q) = \phi(P, Q)\end{aligned}$$

este izomorfism de spații vectoriale.

Spațiul vectorial obținut se notează $T_P(X)$ și se numește *spațiul vectorial tangent la X în P* . Această structură nu este canonică deoarece depinde de alegerea punctului P .

Demonstrație

Operațiile de adunare și înmulțire cu scalar sunt

$$A + B = \phi_P^{-1}(\phi_P(A) + \phi_P(B)), \quad A, B \in X,$$

$$a \cdot A = \phi_P^{-1}(a \cdot \phi_P(A)), \quad A \in X, a \in \mathbb{K}.$$

Atunci $(X, +, \cdot)$ este un $\mathbb{K}$ -spațiu vectorial notat $T_P(X)$. $\square$

Teorema 1.3 (Caracterizarea spațiilor afine)

Fie $\mathcal{A} = (X, \vec{X}, \phi)$ un $\mathbb{K}$ -spațiu afin. Aplicația definită prin

$$\begin{aligned} + : X \times \vec{X} &\longrightarrow X, \\ (P, \bar{u}) &\longmapsto P + \bar{u} = \phi_P^{-1}(\bar{u}), \end{aligned}$$

are următoarele proprietăți:

- (i) $P + (\bar{u} + \bar{v}) = (P + \bar{u}) + \bar{v}$, pentru orice $P \in X$, $\bar{u}, \bar{v} \in \vec{X}$,
- (ii) $P + \bar{u} = P$ dacă și numai dacă $\bar{u} = \bar{0}$,
- (iii) pentru orice $P, Q \in X$ există și este unic $\bar{u} \in \vec{X}$ astfel încât $Q = P + \bar{u}$.

Reciproc, dată o aplicație “+” cu proprietățile (i), (ii), (iii), există o structură de $\mathbb{K}$ -spațiu afin pe X cu spațiul vectorial director $\vec{X}$.

Demonstrație

Proprietățile (i), (ii), (iii) se verifică imediat, ținând cont de Definiția 1.1.

Reciproc, dată o aplicație “+” cu proprietățile (i), (ii), (iii), se definește

$$\begin{aligned} \phi : X \times X &\longrightarrow \vec{X}, \\ (P, Q) &\longmapsto \phi(P, Q) = \bar{u}, \end{aligned}$$

unde $Q = P + \bar{u}$. Pentru tripletul $(X, \vec{X}, \phi)$ astfel obținut se verifică axiomele din Definiția 1.1. $\square$

Definiția 1.4

Fie G un grup și X o mulțime nevidă. Notăm cu $\mathcal{S}(X)$ grupul substituțiilor mulțimii X , $\mathcal{S}(X) = \{f : X \rightarrow X / f \text{ bijectie}\}$.

Se numește *G-acțiune pe X* un homomorfism de grupuri

$$\begin{aligned} \varphi : G &\longrightarrow \mathcal{S}(X), \\ g &\longmapsto \varphi(g), \quad \varphi(g)(x) = g \cdot x, x \in X. \end{aligned}$$

Astfel,

- (i) $\varphi(g_1 \cdot g_2) = \varphi(g_1) \circ \varphi(g_2)$, pentru orice $g_1, g_2 \in G$,

(ii) $\varphi(e_G) = \text{id}_X$, unde e_G notează elementul neutru al grupului G .

Acțiunea se numește *tranzitivă* dacă, pentru orice $x, y \in G$, există $g \in G$ astfel încât $g \cdot x = y$.

Acțiunea se numește *simplu tranzitivă* dacă, pentru orice $x, y \in G$, există și este unic $g \in G$ astfel încât $g \cdot x = y$.

Acțiunea se numește *fidelă* dacă $\text{Ker } \varphi = \{e_G\}$.

Observația 1.5

Dacă G este un grup comutativ, atunci orice acțiune fidelă și tranzitivă este simplu tranzitivă.

Teorema 1.6 (Caracterizarea spațiilor afine folosind acțiuni de grupuri)

Fie $\mathcal{A} = (X, \vec{X}, \phi)$ un $\mathbb{K}$ -spațiu afin și $G = (\vec{X}, +)$ grupul comutativ obținut din structura de spațiu vectorial. Atunci există o G -acțiune fidelă și tranzitivă indusă de morfismul de structură ϕ .

Reciproc, fie $\vec{X}$ un $\mathbb{K}$ -spațiu vectorial și $\varphi : \vec{X} \rightarrow \mathcal{S}(X)$ o acțiune fidelă și tranzitivă pe mulțimea nevidă X . Atunci X poate fi înzestrată cu o structură de $\mathbb{K}$ -spațiu afin cu spațiul vectorial director $\vec{X}$ și morfismul de structură indus de aplicația φ .

Demonstrație

Se definește

$$\begin{aligned} \varphi : \vec{X} &\longrightarrow \mathcal{S}(X), \\ \bar{u} &\longmapsto \varphi(\bar{u}), \quad \varphi(\bar{u})(P) = P + \bar{u}, \quad P \in X. \end{aligned}$$

Se verifică faptul că φ este bine definită, adică $\varphi(\bar{u}) \in \mathcal{S}(X)$, pentru orice $\bar{u} \in \vec{X}$ și faptul că φ este o acțiune fidelă și tranzitivă (vezi Teorema 1.3).

Reciproc, dat φ se definește

$$\begin{aligned} + : X \times \vec{X} &\longrightarrow X, \\ (P, \bar{u}) &\longmapsto P + \bar{u} = \varphi(\bar{u})(P) \end{aligned}$$

și se verifică condițiile (i), (ii), (iii) din Teorema 1.3. □

Definiția 1.7

Se numește *dimensiunea unui $\mathbb{K}$ -spațiu afin* $\mathcal{A} = (X, \vec{X}, \phi)$, dimensiunea

spațiului vectorial director asociat,

$$\dim \mathcal{A} = \dim \vec{X}.$$

Un spațiu afin cu un singur punct are dimensiunea 0. Un spațiu afin de dimensiune 1 se numește *dreaptă afină*, iar un spațiu afin de dimensiune 2 se numește *plan afin*.

Exemple

1. Planul geometric este un spațiu afin de dimensiune 2.
2. Spațiul geometric este un spațiu afin de dimensiune 3.

Exemple de spații afine

1. **Structura afină canonică a unui spațiu vectorial.** Fie V un $\mathbb{K}$ -spațiu vectorial și

$$\begin{aligned} \phi : V \times V &\longrightarrow V \\ (\bar{u}, \bar{v}) &\longmapsto \bar{v} - \bar{u}. \end{aligned}$$

Atunci (V, V, ϕ) este un $\mathbb{K}$ -spațiu afin.

2. **Spațiul afin produs** (vezi Exercițiul 1.2). Dacă $\mathcal{A}' = (X', \vec{X}', \phi')$ și $\mathcal{A}'' = (X'', \vec{X}'', \phi'')$ sunt două $\mathbb{K}$ -spații afine, atunci

$$\mathcal{A}' \times \mathcal{A}'' = (X' \times X'', \vec{X}' \times \vec{X}'', \phi)$$

este un $\mathbb{K}$ -spațiu afin, unde

$$\begin{aligned} \phi = \phi' \times \phi'' : (X' \times X'') \times (X' \times X'') &\longrightarrow \vec{X}' \times \vec{X}'' \\ ((P', P''), (Q', Q'')) &\longmapsto (\phi'(P', Q'), \phi''(P'', Q'')). \end{aligned}$$

3. **Spațiul afin cât** (vezi Exercițiul 1.3). Fie $\mathcal{A} = (X, \vec{X}, \phi)$ un $\mathbb{K}$ -spațiu afin și V un subspațiu vectorial al lui $\vec{X}$. Definim pe X următoarea relație binară: pentru $P, Q \in X$, $P \sim Q$ dacă și numai dacă $\overrightarrow{PQ} \in V$. Relația $\sim$ este o relație de echivalență pe X și notăm cu X/V mulțimea cât. Aplicația

$$\begin{aligned} \hat{\phi} : X/V \times X/V &\longrightarrow \vec{X}/V, \\ (\hat{P}, \hat{Q}) &\longmapsto \overrightarrow{PQ} + V, \end{aligned}$$

este bine definită și $\mathcal{A}/V = (X/V, \vec{X}/V, \hat{\phi})$ este un $\mathbb{K}$ -spațiu afin.

1.3 EXERCIȚII

Spații afine. Exemple

Exercițiul 1.1

Fie $\mathcal{A} = (X, \vec{X}, \phi)$ un $\mathbb{K}$ -spațiu afin.

- (1) Să se verifice că morfismul de structură $\phi : X \times X \rightarrow \vec{X}$ este o aplicație surjectivă.
- (2) Să se arate că, în general, morfismul de structură nu este o aplicație injectivă?

Soluție. Pentru (1), prin definiție, pentru $P \in X$, fixat, aplicația $\phi_P : X \rightarrow \vec{X}$ este bijectivă. De aici, pentru orice $\bar{u} \in \vec{X}$ există $Q \in X$ astfel încât $\phi_P(Q) = \bar{u}$, adică $\phi(P, Q) = \bar{u}$, deci ϕ este surjectivă.

Pentru (2), dacă există cel puțin două puncte distincte $P, Q \in X$, atunci $\phi(P, P) = \phi(Q, Q) = \bar{0}$, dar $(P, P) \neq (Q, Q)$. $\square$

Exercițiul 1.2 (Spațiul afin produs de spații afine)

Fie $\mathcal{A}' = (X', \vec{X}', \phi')$ și $\mathcal{A}'' = (X'', \vec{X}'', \phi'')$ două $\mathbb{K}$ -spații afine. Să se arate că $\mathcal{A}' \times \mathcal{A}'' = (X' \times X'', \vec{X}' \times \vec{X}'', \phi)$ este un $\mathbb{K}$ -spațiu afin, unde

$$\begin{aligned} \phi &= \phi' \times \phi'' : (X' \times X'') \times (X' \times X'') \longrightarrow \vec{X}' \times \vec{X}'' \\ ((P', P''), (Q', Q'')) &\longmapsto (\phi'(P', Q'), \phi''(P'', Q'')). \end{aligned}$$

Soluție. Vom verifica mai întâi axioma (A1) din Definiția 1.1. Fie $(P', P'') \in X' \times X''$, fixat arbitrar. Deoarece $\phi'_{P'} : X' \rightarrow \vec{X}'$ și $\phi''_{P''} : X'' \rightarrow \vec{X}''$ sunt bijective, rezultă că pentru orice $(\bar{u}', \bar{u}'') \in \vec{X}' \times \vec{X}''$ există unic $(Q', Q'') \in X' \times X''$, astfel încât $(\phi'_{P'}(Q'), \phi''_{P''}(Q'')) = (\bar{u}', \bar{u}'')$. Avem astfel că $(\phi' \times \phi'')_{(P', P'')} : X' \times X'' \rightarrow \vec{X}' \times \vec{X}''$ este bijectivă, pentru orice $(P', P'') \in X' \times X''$.

Pentru a verifica (A2), fie $P = (P', P'')$, $Q = (Q', Q'')$ și $R = (R', R'')$ fixate arbitrar în $X' \times X''$. Avem

$$\begin{aligned} \phi(P, Q) + \phi(R, Q) &= (\phi'(P', Q'), \phi''(P'', Q'')) + (\phi'(Q', R'), \phi''(Q'', R'')) \\ &= (\phi'(P', Q') + \phi'(Q', R'), \phi''(P'', Q'') + \phi''(Q'', R'')) \\ &= (\phi'(P', R'), \phi''(P'', R'')) = \phi(P, R), \end{aligned}$$

și putem concluziona. $\square$

Exercițiul 1.3 (Spațiul afin cât)

Fie $\mathcal{A} = (X, \vec{X}, \phi)$ un $\mathbb{K}$ -spațiu afin și V un subspațiu vectorial al lui $\vec{X}$. Definim pe X următoarea relație binară: pentru $P, Q \in X$, $P \sim Q$ dacă și numai dacă $P\vec{Q} \in V$.

- (1) Să se arate că relația $\sim$ este o relație de echivalență pe X .
- (2) Dacă notăm cu X/V mulțimea cât indusă de relația $\sim$, să se arate că aplicația

$$\begin{aligned}\hat{\phi} : X/V \times X/V &\longrightarrow \overrightarrow{X}/V, \\ (\hat{P}, \hat{Q}) &\longmapsto \overrightarrow{PQ} + V,\end{aligned}$$

este bine definită.

- (3) Să se verifice că $\mathcal{A}/V = (X/V, \overrightarrow{X}/V, \hat{\phi})$ este un spațiu afin.

Soluție. Pentru (1), vom verifica proprietățile din definiția noțiunii de relație de echivalență.

Reflexivitatea. Evident, $\overrightarrow{PP} = \bar{0} \in V$, deci $P \sim P$, pentru orice $P \in X$.

Simetria. Dacă $P \sim Q$, atunci $\overrightarrow{PQ} \in V$. De aici, cum $V \subset \overrightarrow{X}$, avem $-\overrightarrow{PQ} \in V$.

Astfel, $\overrightarrow{QP} \in V$, deci $Q \sim P$.

Tranzitivitatea. Dacă $P \sim Q$ și $Q \sim R$, atunci $\overrightarrow{PQ}, \overrightarrow{QR} \in V$, deci $\overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{QR} \in V$. Astfel, $\overrightarrow{PR} \in V$, adică $P \sim R$.

Pentru (2), vom arăta că definiția lui $\hat{\phi}$ nu depinde de reprezentanți.

Fie $(\hat{P}_1, \hat{Q}_1) = (\hat{P}_2, \hat{Q}_2)$. Trebuie să arătăm că $\overrightarrow{P_1Q_1} + V = \overrightarrow{P_2Q_2} + V$, sau echivalent $\overrightarrow{P_1Q_1} - \overrightarrow{P_2Q_2} \in V$.

Din $\hat{P}_1 = \hat{P}_2$ și $\hat{Q}_1 = \hat{Q}_2$, rezultă că $\overrightarrow{P_1P_2}, \overrightarrow{Q_1Q_2} \in V$. De aici,

$$\begin{aligned}\overrightarrow{P_1Q_1} - \overrightarrow{P_2Q_2} &= \overrightarrow{P_1P_2} + \overrightarrow{P_2Q_1} - \overrightarrow{P_2Q_1} - \overrightarrow{Q_1Q_2} \\ &= \overrightarrow{P_1P_2} - \overrightarrow{Q_1Q_2} \in V.\end{aligned}$$

Pentru (3), fie $\hat{P} \in X/V$, fixat arbitrar. Vom arăta mai întâi că $\hat{\phi}_{\hat{P}} : X/V \rightarrow \overrightarrow{X}/V$ este injectivă. Fie $\hat{Q}_1, \hat{Q}_2 \in X/V$, astfel încât $\hat{\phi}_{\hat{P}}(\hat{Q}_1) = \hat{\phi}_{\hat{P}}(\hat{Q}_2)$. Atunci $\overrightarrow{PQ_1} - \overrightarrow{PQ_2} = \overrightarrow{Q_2Q_1} \in V$, adică $\hat{Q}_1 = \hat{Q}_2$.

Pentru a arăta că $\hat{\phi}_{\hat{P}}$ este surjectivă fie $\bar{u} + V$ fixat arbitrar în $\overrightarrow{X}/V$. Cum $\phi_P : X \rightarrow \overrightarrow{X}$ este surjectivă, rezultă că există $Q \in X$ astfel încât $\overrightarrow{PQ} = \bar{u}$. De aici, $\hat{\phi}_{\hat{P}}(\hat{Q}) = \overrightarrow{PQ} + V = \bar{u} + V$, deci $\hat{\phi}_{\hat{P}}$ este surjectivă.

De asemenea, dacă $\hat{P}, \hat{Q}, \hat{R} \in X/V$, atunci

$$\begin{aligned}\hat{\phi}(\hat{P}, \hat{Q}) + \hat{\phi}(\hat{Q}, \hat{R}) &= (\overrightarrow{PQ} + V) + (\overrightarrow{QR} + V) \\ &= (\overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{QR}) + V = \overrightarrow{PR} + V \\ &= \hat{\phi}(\hat{P}, \hat{R}).\end{aligned}$$

□

Exercițiul 1.4

Fie mulțimile

$$X = \{(x^1, x^2) \in \mathbb{R}^2 / ax^1 + bx^2 = c\},$$

$$V = \{(\lambda^1, \lambda^2) \in \mathbb{R}^2 / a\lambda^1 + b\lambda^2 = 0\},$$

unde $a, b, c \in \mathbb{R}$, $a^2 + b^2 \neq 0$.

- (1) Să se verifice că V este un spațiu vectorial real de dimensiune 1.
- (2) Să se arate că X poate fi organizat ca spațiu afin cu spațiul vectorial director V .
- (3) Să se generalizeze problema, considerând $X \subset \mathbb{R}^n$, $n \geq 3$.

Soluție.

- (1) Vom arăta că V este un subspațiu vectorial real de dimensiune 1 în $\mathbb{R}^2$. În adevăr,

$$\theta : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, \quad \theta(\lambda^1, \lambda^2) = a\lambda^1 + b\lambda^2,$$

este o formă liniară, iar $V = \text{Ker } \theta$, deci $V \subset \mathbb{R}^2$ s.v.. Din $a^2 + b^2 \neq 0$ rezultă că $\dim \text{Im } \theta = 1$, deci $\dim V = \dim \text{Ker } \theta = 1$.

- (2) Observăm că dacă $(x^1, x^2) \in X$ și $(\lambda^1, \lambda^2) \in V$, atunci $(x^1 + \lambda^1, x^2 + \lambda^2) \in X$. Putem considera astfel aplicația

$$+ : X \times V \rightarrow X, \quad (x^1, x^2) + (\lambda^1, \lambda^2) = (x^1 + \lambda^1, x^2 + \lambda^2).$$

Se verifică imediat faptul că aceasta definește o acțiune simplu tranzitivă a lui V pe X (vezi Teorema 1.3 și Teorema 1.6).

- (3) Pentru a generaliza problema se consideră

$$X = \{(x^1, \dots, x^n) \in \mathbb{R}^n / \sum_{j=1}^n a_j^i x^j = c^i, i = 1, \dots, m\},$$

$$V = \{(\lambda^1, \dots, \lambda^n) \in \mathbb{R}^n / \sum_{j=1}^n a_j^i \lambda^j = 0, i = 1, \dots, m\},$$

unde $\text{rang}(a_j^i)_{i,j} = k$. Cu un raționament similar celui de la (1) și (2) rezultă că X poate fi înzestrată cu o structură de spațiu afin $(n - k)$ -dimensional, având ca spațiu vectorial director pe V .

□

Exercițiul 1.5

Să se arate că, în fiecare caz, următoarele aplicații induc o structură de spațiu afin pe mulțimea X :

- (1)

$$\begin{aligned} X \times \mathbb{R}^2 &\longrightarrow X, \\ ((x, y), (\alpha, \beta)) &\longmapsto (x + \alpha, e^\beta y), \end{aligned}$$

unde $X = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / y > 0\}$.

(2)

$$\begin{aligned}
X \times \mathbb{R}^2 &\longrightarrow X, \\
((x, y, z), (\alpha, \beta)) &\longmapsto (x + \alpha z + \beta y + \alpha\beta, y + \alpha, z + \beta),
\end{aligned}$$

unde $X = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x = yz\}$.

(3)

$$\begin{aligned}
X \times \mathbb{R}^2 &\longrightarrow X, \\
((x, y, z), (\alpha, \beta)) &\longmapsto (x, y, z) + \alpha(1, -1, 0) + \beta(1, 0, -1),
\end{aligned}$$

unde $X = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x + y + z = 1\}$.

(4)

$$\begin{aligned}
X \times \mathbb{R}^2 &\longrightarrow X, \\
((x, y, z), (\alpha, \beta)) &\longmapsto (x + \alpha, y + \beta, (x + \alpha)^2 + (y + \beta)^2),
\end{aligned}$$

unde $X = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x^2 + y^2 - z = 0\}$.

Soluție. Se verifică mai întâi că definițiile sunt corecte. Este ușor de verificat că fiecare dintre aceste aplicații definește o acțiune simplu tranzitivă a lui $\mathbb{R}^2$ pe X (vezi Teorema 1.3 și Teorema 1.6). $\square$

Exercițiul 1.6

Fie $T : V \rightarrow W$ o aplicație liniară surjectivă, unde V și W sunt două $\mathbb{K}$ -spații vectoriale, iar W are dimensiune finită $\dim W = m > 0$.

- (1) Să se arate că T admite o *secțiune*, adică există o aplicație liniară $S : W \rightarrow V$ astfel încât $T \circ S = \text{id}_W$.
- (2) Să se arate că mulțimea secțiunilor surjecției liniare T ,

$$\mathcal{S} = \{S \in L(W, V) / T \circ S = \text{id}_W\},$$

admite o structură de $\mathbb{K}$ -spațiu afin având spațiul vectorial director $L(W, \text{Ker } T)$, spațiul aplicațiilor liniare de la W la $\text{Ker } T$.

- (3) Să se determine $\dim \mathcal{S}$ atunci când V este de dimensiune finită n .

Soluție. Pentru a verifica (1), vom construi efectiv o secțiune S pentru T . Fie $\mathcal{B}_W = \{\bar{f}_1, \dots, \bar{f}_m\}$ o bază în W . Cum T este surjectivă, rezultă că există $\bar{e}_i \in V$ astfel încât $T(\bar{e}_i) = \bar{f}_i$, $i = 1, \dots, m$. Considerăm aplicația liniară $S : W \rightarrow V$ definită de condiția $S(\bar{f}_i) = \bar{e}_i$, $i = 1, \dots, m$. Avem

$$(T \circ S)\left(\sum_{i=1}^m y^i \bar{f}_i\right) = \sum_{i=1}^m y^i T(S(\bar{f}_i)) = \sum_{i=1}^m y^i T(\bar{e}_i) = \sum_{i=1}^m y^i \bar{f}_i,$$

adică $T \circ S = \text{id}_W$. Observăm faptul că această construcție depinde de alegerea bazei $\mathcal{B}_W$, deci S nu este, în mod necesar, unic cu proprietățile cerute.

Pentru a verifica (2), pentru $S \in \mathcal{S}$ și $K \in L(W, \text{Ker } T)$, fie $S + K : W \rightarrow V$, $(S + K)(\bar{w}) = S(\bar{w}) + K(\bar{w})$, pentru orice $\bar{w} \in W$. Vom observa mai întâi că $S + K \in \mathcal{S}$. În adevăr, din $K \in L(W, \text{Ker } T)$ avem $T \circ K = 0$ și, cum $S \in \mathcal{S}$, rezultă

$$T \circ (S + K) = T \circ S + T \circ K = \text{id}_W + 0 = \text{id}_W.$$

Putem deci considera aplicația definită prin

$$\begin{aligned} + : \mathcal{S} \times L(W, \text{Ker } T) &\longrightarrow \mathcal{S}, \\ (S, K) &\longmapsto S + K. \end{aligned}$$

Vom verifica faptul că aceasta induce o structură de spațiu afîn pe $\mathcal{S}$ (vezi Teorema 1.3).

- (i) Evident, $S + (K_1 + K_2) = (S + K_1) + K_2$, pentru orice $S \in \mathcal{S}$, $K_1, K_2 \in L(W, \text{Ker } T)$.
- (ii) De asemenea, $S + 0 = S$, pentru orice $S \in \mathcal{S}$.
- (iii) Pentru $S_1, S_2 \in \mathcal{S}$, avem $T \circ S_1 = T \circ S_2 = \text{id}_W$, deci $T \circ (S_1 - S_2) = 0$, adică $S_1 - S_2 \in L(W, \text{Ker } T)$. De asemenea, $K = S_1 - S_2$ este unic astfel încât $S_1 = S_2 + K$.

Pentru (3), ținând cont de faptul că T este o aplicație liniară surjectivă, avem $\dim \text{Ker } T = n - m$. Astfel, $\dim \mathcal{S} = \dim L(W, \text{Ker } T) = m(n - m)$. $\square$

Exercițiul 1.7

Fie X un $\mathbb{K}$ -spațiu afîn cu spațiul vectorial director V și fie $T : W \rightarrow V$ un izomorfism de spații vectoriale. Să se arate că X poate fi înzestrat cu o structură de spațiu afîn cu spațiul vectorial director W , indusă de T .

Soluție. *Metoda I.* Dacă $\phi : X \times X \rightarrow V$ notează morfismul de structură al spațiului afîn X peste V , definim

$$\psi : X \times X \rightarrow W, \quad \psi = T^{-1} \circ \phi$$

și arătăm că (X, W, ψ) este un spațiu afîn. Pentru $P \in X$, fixat arbitrar, avem $\psi_P = T^{-1} \circ \phi_P$. Cum ϕ_P și T sunt bijecții, rezultă că ψ_P este bijectie.

Ținând cont de faptul că T^{-1} este o aplicație liniară și aplicând relația lui Chasles pentru ϕ , avem

$$\begin{aligned} \psi(P, Q) + \psi(Q, R) &= T^{-1}(\phi(P, Q)) + T^{-1}(\phi(Q, R)) = T^{-1}(\phi(P, Q) + \phi(Q, R)) \\ &= T^{-1}(\phi(P, R)) \\ &= \psi(P, R), \end{aligned}$$

pentru orice $P, Q, R \in X$.

Metoda II. Presupunem că spațiul afîn X peste V este definit de acțiunea $+_V : X \times V \rightarrow X$. Vom arăta că aplicația definită prin

$$\begin{aligned} +_W : X \times W &\longrightarrow X, \\ (P, \bar{w}) &\longmapsto P +_W \bar{w} = P +_V T(\bar{w}), \end{aligned}$$

determină o structură de spațiu afîn pe X cu spațiul vectorial director W (vezi Teorema 1.3).

(i) Folosind proprietățile acțiunii $+_v$ și faptul că T este o aplicație liniară, avem

$$\begin{aligned} P +_w (\bar{w}_1 + \bar{w}_2) &= P +_v T(\bar{w}_1 + \bar{w}_2) \\ &= P +_v (T(\bar{w}_1) + T(\bar{w}_2)) = (P +_v T(\bar{w}_1)) +_v T(\bar{w}_2) \\ &= (P +_w \bar{w}_1) +_w \bar{w}_2, \end{aligned}$$

pentru orice $P \in X$ și $\bar{w}_1, \bar{w}_2 \in W$.

(ii) Evident, $P +_w \bar{0} = P +_v T(\bar{0}) = P +_v \bar{0} = P$, pentru orice $P \in X$.

(iii) Trebuie să mai arătăm că pentru orice $P, Q \in X$, există și este unic $\bar{w} \in W$ astfel încât $Q = P +_w \bar{w}$.

Fie $P, Q \in X$, fixate arbitrar. Știm că există și este unic $\bar{v} \in V$ astfel încât $Q = P +_v \bar{v}$. De aici rezultă că $\bar{w} = T^{-1}(\bar{v})$ satisface $Q = P +_w \bar{w}$. Mai mult, dacă $P +_w \bar{w}' = Q$, atunci $P +_v T(\bar{w}') = Q$. Din unicitatea lui $\bar{v}$ avem $\bar{v} = T(\bar{w}')$, adică $\bar{w}' = T^{-1}(\bar{v}) = \bar{w}$.

□

Exercițiul 1.8

Fie X un $\mathbb{K}$ -spațiu afin cu spațiul vectorial director V . Considerăm o mulțime Y astfel încât există o funcție bijectivă $g : X \rightarrow Y$. Să se arate că Y poate fi înzestrat cu o structură de spațiu afin cu spațiul vectorial director V , indusă de g .

Soluție. Metoda I. Dacă $\phi : X \times X \rightarrow V$ notează morfismul de structură al spațiului afin X peste V , definim

$$\psi : Y \times Y \rightarrow V, \quad \psi(P, Q) = \phi(g^{-1}(P), g^{-1}(Q))$$

și arătăm că (Y, V, ψ) este un spațiu afin.

Pentru $P \in Y$, fixat arbitrar, avem $\psi_P = \phi_{g^{-1}(P)} \circ g^{-1}$. Cum $\phi_{g^{-1}(P)}$ și g^{-1} sunt bijecții, rezultă că ψ_P este bijecție.

Ținând cont de relația lui Chasles pentru ϕ , avem

$$\begin{aligned} \psi(P, Q) + \psi(Q, R) &= \phi(g^{-1}(P), g^{-1}(Q)) + \phi(g^{-1}(Q), g^{-1}(R)) \\ &= \phi(g^{-1}(P), g^{-1}(R)) \\ &= \psi(P, R), \end{aligned}$$

pentru orice $P, Q, R \in Y$.

Metoda II. Dacă spațiul afin X peste V este definit de acțiunea $+: X \times V \rightarrow X$, vom arăta că aplicația

$$\begin{aligned} +_g : Y \times V &\longrightarrow Y, \\ (Q, \bar{u}) &\longmapsto Q +_g \bar{u} = g(g^{-1}(Q) + \bar{u}), \end{aligned}$$

determină o structură de spațiu afin pe Y cu spațiul vectorial director V (vezi Teorema 1.3).

(i) Ținând cont de faptul că

$$g^{-1}(Q +_g \bar{u}) = g^{-1}(Q) + \bar{u}$$

și folosind proprietățile acțiunii $+: X \times V \rightarrow X$, avem

$$\begin{aligned} Q +_g (\bar{u}_1 + \bar{u}_2) &= g(g^{-1}(Q) + (\bar{u}_1 + \bar{u}_2)) = g((g^{-1}(Q) + \bar{u}_1) + \bar{u}_2) \\ &= g(g^{-1}(Q +_g \bar{u}_1) + \bar{u}_2) \\ &= (Q +_g \bar{u}_1) +_g \bar{u}_2, \end{aligned}$$

pentru orice $Q \in Y$ și $\bar{u}_1, \bar{u}_2 \in V$.

(ii) Evident,

$$Q +_g \bar{0} = g(g^{-1}(Q) + \bar{0}) = g(g^{-1}(Q)) = Q,$$

pentru orice $Q \in Y$.

(iii) Trebuie să mai arătăm că pentru orice $P, Q \in X$, există și este unic $\bar{v} \in V$ astfel încât $Q = P +_g \bar{v}$.

Fie $P, Q \in Y$, fixate arbitrar. Știm că există și este unic $\bar{v} \in V$ astfel încât $g^{-1}(Q) = g^{-1}(P) + \bar{v}$. De aici, aplicând g , rezultă că $Q = g(g^{-1}(P) + \bar{v}) = P +_g \bar{v}$. Mai mult, dacă $P +_g \bar{v}' = Q$, atunci $g(g^{-1}(P) + \bar{v}') = g(g^{-1}(P) + \bar{v})$ și, cum g este o bijecție, avem $g^{-1}(P) + \bar{v}' = g^{-1}(P) + \bar{v} = Q$. Dar $\bar{v}$ era unic cu această proprietate, deci $\bar{v}' = \bar{v}$.

□

1.4 Subspații afine. Calcul baricentric

Definiția 1.8

Fie $\mathcal{A} = (X, \vec{X}, \phi)$ un $\mathbb{K}$ -spațiu afin. O submulțime nevidă Y a lui X se numește *subspațiu afin (varietate liniară)* dacă există un subspațiu vectorial $V \subset \vec{X}_{s.v.}$ astfel încât $(Y, V, \phi|_{Y \times V})$ este un $\mathbb{K}$ -spațiu afin.

Teorema 1.9 (Caracterizarea subspațiilor afine)

Fie $\mathcal{A} = (X, \vec{X}, \phi)$ un $\mathbb{K}$ -spațiu afin.

- (i) Dacă $\emptyset \neq Y \subset X$ este subspațiu afin cu $V = \vec{Y}$ ca spațiu vectorial director, atunci $Y = P + \vec{Y}$, pentru orice punct $P \in Y$.
- (ii) Dacă Y este o submulțime nevidă a lui X și $Y = P + V$, unde $P \in Y$ și V este un subspațiu vectorial în $\vec{X}$, atunci Y este subspațiu afin în X .

Exemple de subspații afine

1. Orice subspațiu vectorial al unui spațiu vectorial este subspațiu afin.

2. Orice intersecție nevidă de subspații afine ale unui spațiu afın dat este un subspațiu afın.
3. Fie $\mathbb{K}$ -spațiile afine $\mathcal{A} = (X, \vec{X}, \phi)$, $\mathcal{B} = (Y, \vec{Y}, \psi)$. Considerăm o aplicație $f : X \rightarrow Y$ pentru care există o aplicație liniară $\vec{f} : \vec{X} \rightarrow \vec{Y}$ astfel încât

$$\overrightarrow{f(P)f(Q)} = \vec{f}(\overrightarrow{PQ}), \quad \forall P, Q \in X.$$

- (i) Imaginea unui subspațiu afın al lui X prin aplicația f este un subspațiu afın în Y .
- (ii) Contraimagea unui subspațiu afın al lui Y prin aplicația f (dacă este nevidă) este subspațiu afın în X .
- (iii) Dacă $f : X \rightarrow \mathbb{K}$, atunci f se numește *formă afină*. Nucleul $\text{Ker } f = f^{-1}(0)$ unei forme afine $f : X \rightarrow \mathbb{K}$ este subspațiu afın în X și se numește *hiperplan al lui X determinat de f* .

Calcul baricentric

Definiția 1.10

Fie $\mathcal{A} = (X, \vec{X}, \phi)$ un $\mathbb{K}$ -spațiu afın și $S \subset X$ o submulțime nevidă. Subspațiul afın $[S]_{\text{af}}$ definit prin

$$[S]_{\text{af}} = \bigcap_{\substack{S \subset X' \subset X \\ \text{s.a.}}} X'$$

se numește *subspațiul afın generat de S* .

Subspațiul afın $[S]_{\text{af}}$ este cel mai mic subspațiu afın din X , în sensul incluziunii, care conține pe S .

Propoziția 1.11

Fie $\mathcal{A} = (X, \vec{X}, \phi)$ un $\mathbb{K}$ -spațiu afın și $S, S_1, S_2 \subset X$ submulțimi nevide. Au loc:

- (i) $S \subseteq [S]_{\text{af}}$, iar $S = [S]_{\text{af}}$ dacă și numai dacă $S \subset X$ s.a.
- (ii) $[[S]_{\text{af}}]_{\text{af}} = [S]_{\text{af}}$,
- (iii) dacă $S_1 \subset S_2$, atunci $[S_1]_{\text{af}} \subset [S_2]_{\text{af}}$ s.a.

Propoziția 1.12

Fie $\mathcal{A} = (X, \vec{X}, \phi)$ un $\mathbb{K}$ -spațiu afin, $S = \{A_i\}_{i=1}^n$ o submulțime de puncte din X și $\{\lambda^i\}_{i=1}^n \subset \mathbb{K}$ astfel încât $\sum_{i=1}^n \lambda^i = 1$. Atunci există unic $P \in X$ astfel încât

$$\vec{OP} = \sum_{i=1}^n \lambda^i \vec{OA_i},$$

pentru orice $O \in X$.

Definiția 1.13

Punctul $P \in X$ se numește *baricentrul (combinație afină de puncte ale) sistemului S cu ponderile $\{\lambda^i\}_{i=1}^n$* și se notează

$$P = \sum_{i=1}^n \lambda^i A_i, \quad \sum_{i=1}^n \lambda^i = 1. \quad (1.1)$$

Punctul $P \in X$ se numește *echibaricentrul sistemului S* dacă în (1.1) toate ponderile sunt egale.

Observația 1.14

Observăm că se au în vedere doar combinații afine pentru sisteme finite de puncte. Noțiunea se poate extinde la un sistem oarecare de puncte $S \subset X$, P fiind numit combinație afină de puncte din S dacă există un subsistem finit al lui S astfel încât P să fie o combinație afină de puncte ale acestuia.

Definiția 1.15

Un sistem oarecare de puncte $S \subset X$ se numește *sistem de generatori pentru $\mathbb{K}$ -spațiul afin $\mathcal{A} = (X, \vec{X}, \phi)$* dacă orice punct din X este o combinație afină de puncte din S .

Propoziția 1.16

Fie $S = \{A_1, \dots, A_p, A_{p+1}, \dots, A_n\}$ un sistem de puncte în $\mathbb{K}$ -spațiul afin $\mathcal{A} = (X, \vec{X}, \phi)$ și $P = \sum_{i=1}^n \lambda^i A_i$, $\sum_{i=1}^n \lambda^i = 1$. Dacă $\lambda = \sum_{j=1}^p \lambda^j \neq 0$, atunci

$$P = \lambda Q + \sum_{k=p+1}^n \lambda^k A_k, \quad \lambda + \sum_{k=p+1}^n \lambda^k = 1,$$

unde Q este baricentrul subsistemului $\{A_1, \dots, A_p\}$ cu ponderile $\{\frac{\lambda^1}{\lambda}, \dots, \frac{\lambda^p}{\lambda}\}$.

Reciproc, dacă $P \in X$,

$$P = \lambda Q + \sum_{k=p+1}^n \lambda^k A_k, \quad \lambda + \sum_{k=p+1}^n \lambda^k = 1,$$

și $Q = \sum_{j=1}^p \mu^j A_j$, $\sum_{j=1}^p \mu^j = 1$, atunci P este baricentrul sistemului de puncte $\{A_1, \dots, A_p, A_{p+1}, \dots, A_n\}$, cu ponderile $\{\lambda\mu^1, \dots, \lambda\mu^p, \lambda^{p+1}, \dots, \lambda^n\}$.

Definiția 1.17

Fie $\mathcal{A} = (X, \vec{X}, \phi)$ un $\mathbb{K}$ -spațiu afin și $S \subset X$ o submulțime nevidă. Mulțimea tuturor baricentrelor, cu orice ponderi, care se pot forma cu submulțimi finite ale lui S ,

$$\langle S \rangle_{\text{af}} = \left\{ \sum_{i=1}^m \lambda^i P_i : P_i \in S, \lambda^i \in \mathbb{K}, i = 1, \dots, m, \sum_{i=1}^m \lambda^i = 1, m \in \mathbb{N} \right\},$$

se numește *înfășurătoarea afină a lui S (în X)*.

Propoziția 1.18

Fie $\mathcal{A} = (X, \vec{X}, \phi)$ un $\mathbb{K}$ -spațiu afin și $S \subset X$ o submulțime nevidă. Atunci subspațiul afin generat de S coincide cu înfășurătoarea afină a lui S , adică $[S]_{\text{af}} = \langle S \rangle_{\text{af}}$.

Caracterizarea subspațiilor afine folosind calculul baricentric

Propoziția 1.19

Fie $\mathcal{A} = (X, \vec{X}, \phi)$ un $\mathbb{K}$ -spațiu afin și $Y \subset X$ o submulțime nevidă. Atunci Y este subspațiu afin în X dacă și numai dacă orice combinație afină finită de puncte din Y aparține lui Y , adică $Y = \langle Y \rangle_{\text{af}}$.

Propoziția 1.20

Fie $\mathcal{A} = (X, \vec{X}, \phi)$ un $\mathbb{K}$ -spațiu afin și $Y \subset X$ o submulțime nevidă.

(i) Dacă $\text{char } \mathbb{K} \neq 2$, atunci următoarele afirmații sunt echivalente:

1. Y este subspațiu afin în X ,

2. dreapta afină determinată de orice două puncte ale lui Y este conținută în Y ($\langle P, Q \rangle_{\text{af}} \subset Y$, pentru orice $P, Q \in Y$).
- (ii) Dacă $\text{char } \mathbb{K} = 2$, atunci următoarele afirmații sunt echivalente:
1. Y este subspațiu afin în X ,
 2. echibaricentrul oricărui sistem de trei puncte din Y aparține lui Y ($P + Q + R \in Y$, pentru orice $P, Q, R \in Y$).

Dependență și independență afină

Definiția 1.21

Fie $\mathcal{A} = (X, \vec{X}, \phi)$ un $\mathbb{K}$ -spațiu afin.

- (i) Un sistem de puncte $\{P_1, \dots, P_n\} \subset X$ se numește *afin dependent* dacă există $i \in \{1, \dots, n\}$ astfel încât P_i este baricentrul cu anumite ponderi ale celorlalte puncte din sistem.
- (ii) Un sistem finit de puncte care conține un singur punct, sau care nu este afin dependent se numește *afin independent*.

Observația 1.22

1. Orice două puncte distincte sunt afin independente.
2. Orice sistem afin dependent conține cel puțin trei puncte distincte.

Propoziția 1.23

Sistemul de puncte $\{P_1, \dots, P_n\}$ este afin dependent (respectiv afin independent) dacă și numai dacă sistemul de $n - 1$ vectori $\{\overrightarrow{P_1 P_2}, \dots, \overrightarrow{P_1 P_n}\}$ este liniar dependent (respectiv liniar independent). În acest caz sistemul de vectori $\{\overrightarrow{P_i P_1}, \dots, \overrightarrow{P_i P_{i-1}}, \overrightarrow{P_i P_{i+1}}, \dots, \overrightarrow{P_i P_n}\}$ este liniar dependent (respectiv liniar independent) pentru $i = 1, \dots, n$.

Corolarul 1.24

1. Sistemul de puncte $S = \{P_1, \dots, P_n\}$ este afin dependent dacă și numai dacă există P_j astfel încât $\langle S \rangle_{\text{af}} = \langle S \setminus \{P_j\} \rangle_{\text{af}}$.
2. Fie două submulțimi finite de puncte $S_1, S_2 \subset X$, astfel încât $S_1 \subseteq S_2$. Dacă S_1 este afin dependent, atunci S_2 este afin dependent.

Dacă S_2 este afin independent, atunci S_1 este afin independent.

3. Dacă sistemul de puncte $\{P_1, \dots, P_n\}$ este afin independent și

$$\sum_{i=1}^n \alpha_i P_i = \sum_{i=1}^n \beta_i P_i, \quad \sum_{i=1}^n \alpha_i = \sum_{i=1}^n \beta_i = 1,$$

atunci $\alpha_i = \beta_i$, pentru $i = 1, \dots, n$.

4. În planul geometric, trei puncte sunt afin independente dacă și numai dacă sunt necoliniare.

În spațiul geometric, patru puncte sunt afin independente dacă și numai dacă sunt necoplanare.

1.5 EXERCIȚII

Combinații afine. Calcul baricentric

Exercițiul 1.9 (Raportul simplu)

Fie $\mathcal{A} = (X, \vec{X}, \phi)$ un spațiu afin real și $A, B, C \in X$ trei puncte coliniare distincte. Se numește *raport simplu*¹ al punctelor A, B, C , unicul scalar notat $\lambda = (A, B; C)$, $\lambda \neq -1, 0$, pentru care

$$\vec{AC} = \lambda \vec{CB}.$$

- (1) Să se verifice că $(A, B; C) = \lambda$ dacă și numai dacă $C = \frac{1}{1+\lambda}A + \frac{\lambda}{1+\lambda}B$.

- (2) Să se arate că următoarele condiții sunt echivalente:

$$\begin{aligned} (A, B; C) &= \lambda, & (B, C; A) &= -\frac{1+\lambda}{\lambda}, \\ (A, C; B) &= -(1+\lambda), & (C, A; B) &= -\frac{1}{1+\lambda}, \\ (B, A; C) &= \frac{1}{\lambda}, & (C, B; A) &= -\frac{\lambda}{1+\lambda}. \end{aligned}$$

Soluție. Pentru (1), folosind relația lui Chasles, rezultă că

$$\begin{aligned} (A, B; C) = \lambda &\Leftrightarrow \vec{AC} = \lambda \vec{CB} \Leftrightarrow \vec{AC} = \lambda(\vec{AB} - \vec{AC}) \Leftrightarrow \vec{AC} = \frac{\lambda}{1+\lambda} \vec{AB} \\ &\Leftrightarrow C = \frac{1}{1+\lambda}A + \frac{\lambda}{1+\lambda}B. \end{aligned}$$

¹ Noțiunea de raport simplu a trei puncte poate să difere de la autor la autor.

Folosind (1), avem

$$\begin{aligned}(A, B; C) = \lambda &\Leftrightarrow \overrightarrow{CB} = \frac{1}{1+\lambda} \overrightarrow{AB} \\ &\Leftrightarrow (A, C; B) = -(1+\lambda).\end{aligned}$$

Analog, se demonstrează toate echivalențele cerute. $\square$

Exercițiul 1.10 (Biraportul)

Fie $\mathcal{A} = (X, \overrightarrow{X}, \phi)$ un spațiu afin real și $A, B, C, D \in X$ patru puncte coliniare distincte. Se numește *biraportul punctelor* A, B, C, D scalarul notat

$$\gamma = (A, B; C, D) = \frac{(A, B; C)}{(A, B; D)}, \quad \gamma \neq 0, 1.$$

(1) Să se arate că

$$(A, B; C, D) = (B, A; D, C) = (C, D; A, B) = (D, C; B, A).$$

(2) Să se arate că următoarele condiții sunt echivalente:

$$\begin{aligned}(A, B; C, D) = \gamma, & & (A, C; D, B) = \frac{1}{1-\gamma}, \\ (A, B; D, C) = \frac{1}{\gamma}, & & (A, D; B, C) = 1 - \frac{1}{\gamma}, \\ (A, C; B, D) = 1 - \gamma, & & (A, D; C, B) = 1 - \frac{\gamma}{1-\gamma}.\end{aligned}$$

Soluție. Notăm $(A, B; C) = \alpha$, $(A, B; D) = \beta$, $\alpha, \beta \neq -1, 0$. Folosind Exercițiul 1.9 rezultă că

$$(B, A; C) = \frac{1}{\alpha}, \quad (B, A; D) = \frac{1}{\beta}, \quad (C, D; A) = -\frac{\alpha(1+\beta)}{(1+\alpha)\beta}, \quad (C, D; B) = -\frac{1+\beta}{1+\alpha}.$$

Cu acestea, se verifică imediat (1) și (2). $\square$

Exercițiul 1.11

Fie $\mathcal{A} = (X, \overrightarrow{X}, \phi)$ un spațiu afin real, $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{\pm 1\}$ și $A, B, C, D \in X$ astfel încât $(A, B; C) = \lambda$ și $(A, B; D) = -\lambda$. Dacă M este mijlocul segmentului orientat (C, D) , adică $(C, D; M) = 1$, să se arate că $(A, B; M) = -\lambda^2$.

Soluție. Din ipoteză avem $C = \frac{1}{1+\lambda}A + \frac{\lambda}{1+\lambda}B$, $D = \frac{1}{1-\lambda}A - \frac{\lambda}{1-\lambda}B$ și $M = \frac{1}{2}C + \frac{1}{2}D$. Astfel

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AM} &= \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AD} = \frac{\lambda}{2(1+\lambda)}\overrightarrow{AB} - \frac{\lambda}{2(1-\lambda)}\overrightarrow{AB} \\ &= -\frac{\lambda^2}{1-\lambda^2}\overrightarrow{AB}.\end{aligned}$$

Analog,

$$\begin{aligned}\overrightarrow{MB} &= \frac{1}{2}\overrightarrow{CB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{DB} = \frac{1}{2(1+\lambda)}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2(1-\lambda)}\overrightarrow{AB} \\ &= \frac{1}{1-\lambda^2}\overrightarrow{AB},\end{aligned}$$

deci $\overrightarrow{AM} = -\lambda^2\overrightarrow{MB}$ și concluzionăm. $\square$

Exercițiul 1.12

Fie $\mathcal{A} = (X, \overrightarrow{X}, \phi)$ un spațiu afin real și $A, B, C \in X$, distincte două câte două.

- (1) Să se arate că dacă $M, N, P \in X$ astfel încât $(B, C; M) = (C, A; N) = (A, B; P) = \lambda$, atunci $\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{BN} + \overrightarrow{CP} = \vec{0}$.
- (2) Fie $M, N, P \in X \setminus \{A, B, C\}$ astfel încât M, N , respectiv P , sunt coliniare cu B și C , C și A , respectiv A și B . Dacă A, B, C sunt afin independente și $\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{BN} + \overrightarrow{CP} = \vec{0}$, atunci $(B, C; M) = (C, A; N) = (A, B; P)$.
- (3) În condițiile de la (1), fie O un punct fixat în X și $Q, R \in X$ definite prin condițiile $\overrightarrow{OQ} = 2\overrightarrow{CP}$ și $\overrightarrow{OR} = 2\overrightarrow{NB}$. Să se arate că mijlocul S al segmentului orientat (Q, R) verifică relația

$$\overrightarrow{OS} = \frac{1-\lambda}{1+\lambda}\overrightarrow{CA} + \frac{1+2\lambda}{1+\lambda}\overrightarrow{CB}, \quad \lambda \neq -1.$$

Soluție. Pentru a verifica (1), din $(B, C; M) = (C, A; N) = (A, B; P) = \lambda$ rezultă

$$M = \frac{1}{1+\lambda}B + \frac{\lambda}{1+\lambda}C, \quad N = \frac{1}{1+\lambda}C + \frac{\lambda}{1+\lambda}A, \quad P = \frac{1}{1+\lambda}A + \frac{\lambda}{1+\lambda}B.$$

De aici

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{BN} + \overrightarrow{CP} &= \frac{1}{1+\lambda}\overrightarrow{AB} + \frac{\lambda}{1+\lambda}\overrightarrow{AC} \\ &\quad + \frac{1}{1+\lambda}\overrightarrow{BC} + \frac{\lambda}{1+\lambda}\overrightarrow{BA} \\ &\quad + \frac{1}{1+\lambda}\overrightarrow{CA} + \frac{\lambda}{1+\lambda}\overrightarrow{CB} \\ &= \frac{1-\lambda}{1+\lambda}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA}) \\ &= \vec{0}.\end{aligned}$$

Pentru (2), din condițiile de coliniaritate rezultă că există $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$ astfel încât

$$M = \alpha B + (1 - \alpha)C, \quad N = \beta C + (1 - \beta)A, \quad P = \gamma A + (1 - \gamma)B.$$

Avem

$$\overrightarrow{AM} = \alpha \overrightarrow{AB} + (1 - \alpha) \overrightarrow{AC}, \quad \overrightarrow{BN} = \beta \overrightarrow{BC} + (1 - \beta) \overrightarrow{BA}, \quad \overrightarrow{CP} = \gamma \overrightarrow{CA} + (1 - \gamma) \overrightarrow{CB}$$

și din $\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{BN} + \overrightarrow{CP} = \vec{0}$ obținem

$$\begin{aligned} \vec{0} &= (\alpha + \beta - 1) \overrightarrow{AB} + (-\alpha - \gamma + 1) \overrightarrow{AC} + (\beta + \gamma - 1) \overrightarrow{BC} \\ &= (\alpha - \gamma) \overrightarrow{AB} + (\beta - \alpha) \overrightarrow{AC}. \end{aligned}$$

De aici, cum A, B, C sunt afin independente, rezultă că $\alpha = \beta = \gamma$ și $(B, C; M) = (C, A; N) = (A, B; P) = \frac{1 - \alpha}{\alpha}$.

Pentru (3), avem $S = \frac{1}{2}Q + \frac{1}{2}R$, deci

$$\begin{aligned} \overrightarrow{OS} &= \frac{1}{2}(\overrightarrow{OQ} + \overrightarrow{OR}) = \overrightarrow{CP} + \overrightarrow{NB} \\ &= \left(\frac{1}{1 + \lambda} \overrightarrow{CA} + \frac{\lambda}{1 + \lambda} \overrightarrow{CB} \right) + \left(\frac{1}{1 + \lambda} \overrightarrow{CB} + \frac{\lambda}{1 + \lambda} \overrightarrow{AB} \right) \\ &= \frac{1 - \lambda}{1 + \lambda} \overrightarrow{CA} + \frac{1 + 2\lambda}{1 + \lambda} \overrightarrow{CB}. \end{aligned}$$

□

Exercițiul 1.13

Fie $\mathcal{A} = (X, \overrightarrow{X}, \phi)$ un spațiu afin real și $A_1, A_2, A_3, A_4 \in X$, distincte.

(1) Fie M_1, M_2, M_3, M_4 mijloacele segmentelor (A_1, A_2) , (A_2, A_3) , (A_3, A_4) , respectiv (A_4, A_1) . Să se arate că $\overrightarrow{M_1 M_2} = \overrightarrow{M_4 M_3}$.

(2) Fie $P, Q \in X$ astfel încât $(A_1, A_2; P) = (A_3, A_4; Q) = \lambda$, $\lambda \neq -1, 0$. Să se verifice că $\overrightarrow{PQ} = \frac{1}{1 + \lambda} \overrightarrow{A_1 A_3} + \frac{\lambda}{1 + \lambda} \overrightarrow{A_2 A_4}$.

Soluție. Pentru (1) avem $M_1 = \frac{1}{2}A_1 + \frac{1}{2}A_2$, $M_2 = \frac{1}{2}A_2 + \frac{1}{2}A_3$, deci

$$\begin{aligned} \overrightarrow{M_1 M_2} &= \frac{1}{2}(\overrightarrow{A_1 M_2} + \overrightarrow{A_2 M_2}) = \frac{1}{4}(\overrightarrow{A_1 A_2} + \overrightarrow{A_1 A_3} + \overrightarrow{A_2 A_3}) \\ &= \frac{1}{2} \overrightarrow{A_1 A_3}. \end{aligned}$$

Analog se arată că $\overrightarrow{M_4 M_3} = \frac{1}{2} \overrightarrow{A_1 A_3}$.

Pentru (2), din ipoteză avem $P = \frac{1}{1+\lambda}A_1 + \frac{\lambda}{1+\lambda}A_2$, $Q = \frac{1}{1+\lambda}A_3 + \frac{\lambda}{1+\lambda}A_4$. Astfel,

$$\begin{aligned}\overrightarrow{PQ} &= \frac{1}{1+\lambda}\overrightarrow{A_1Q} + \frac{\lambda}{1+\lambda}\overrightarrow{A_2Q} \\ &= \frac{1}{(1+\lambda)^2}(\overrightarrow{A_1A_3} + \lambda\overrightarrow{A_1A_4} + \lambda\overrightarrow{A_2A_3} + \lambda^2\overrightarrow{A_2A_4}) \\ &= \frac{1}{1+\lambda}\overrightarrow{A_1A_3} + \frac{\lambda}{1+\lambda}\overrightarrow{A_2A_4}.\end{aligned}$$

□

Exercițiul 1.14

Fie P_1, P_2, P_3, P_4 , respectiv Q_1, Q_2, Q_3, Q_4 , puncte ale unui spațiu afin real $\mathcal{A} = (X, \vec{X}, \phi)$, astfel încât $\overrightarrow{P_1P_2} = \overrightarrow{P_4P_3}$ și $\overrightarrow{Q_1Q_2} = \overrightarrow{Q_4Q_3}$, iar $P_i \neq Q_i$, pentru $i = 1, \dots, 4$. Fie punctele $R_i \in X$ astfel încât $(P_i, Q_i; R_i) = \lambda$, $\lambda \neq -1, 0$, pentru $i = 1, \dots, 4$.

(1) Să se arate că $\overrightarrow{R_1R_2} = \overrightarrow{R_4R_3}$.

(2) Să se arate că dacă

$$O = \frac{1}{2}P_1 + \frac{1}{2}P_3, \quad O' = \frac{1}{2}Q_1 + \frac{1}{2}Q_3, \quad O'' = \frac{1}{2}R_1 + \frac{1}{2}R_3,$$

atunci $(O, O'; O'') = \lambda$.

Soluție. Pentru (1), avem $\overrightarrow{P_1R_1} = \lambda\overrightarrow{R_1Q_1}$ și $\overrightarrow{P_2R_2} = \lambda\overrightarrow{R_2Q_2}$. Făcând diferența celor două relații obținem

$$\begin{aligned}\overrightarrow{P_1R_1} - \overrightarrow{P_2R_2} &= \lambda(\overrightarrow{R_1Q_1} - \overrightarrow{R_2Q_2}) \Leftrightarrow \overrightarrow{P_1P_2} - \overrightarrow{R_1R_2} = \lambda(\overrightarrow{R_1R_2} - \overrightarrow{Q_1Q_2}) \\ &\Leftrightarrow (1+\lambda)\overrightarrow{R_1R_2} = \overrightarrow{P_1P_2} + \lambda\overrightarrow{Q_1Q_2}.\end{aligned}$$

Analog, $(1+\lambda)\overrightarrow{R_4R_3} = \overrightarrow{P_4P_3} + \lambda\overrightarrow{Q_4Q_3}$ și, cum $\overrightarrow{P_1P_2} = \overrightarrow{P_4P_3}$ și $\overrightarrow{Q_1Q_2} = \overrightarrow{Q_4Q_3}$, rezultă că $\overrightarrow{R_1R_2} = \overrightarrow{R_4R_3}$.

Pentru (2), avem

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OO''} &= \frac{1}{2}(\overrightarrow{P_1O''} + \overrightarrow{P_3O''}) = \frac{1}{4}(\overrightarrow{P_1R_1} + \overrightarrow{P_1R_3} + \overrightarrow{P_3R_1} + \overrightarrow{P_3R_3}) \\ &= \frac{1}{4}(\overrightarrow{P_1R_1} + \overrightarrow{P_1R_3} + \overrightarrow{R_1R_3} + \overrightarrow{P_3R_3} + \overrightarrow{R_3R_1} + \overrightarrow{P_3R_3}) \\ &= \frac{1}{2}(\overrightarrow{P_1R_1} + \overrightarrow{P_3R_3}) = \frac{1}{2}\lambda(\overrightarrow{R_1Q_1} + \overrightarrow{R_3Q_3}).\end{aligned}$$

Analog,

$$\begin{aligned}\overrightarrow{O''O'} &= \frac{1}{2}(\overrightarrow{R_1O'} + \overrightarrow{R_3O'}) = \frac{1}{4}(\overrightarrow{R_1Q_1} + \overrightarrow{R_1Q_3} + \overrightarrow{R_3Q_1} + \overrightarrow{R_3Q_3}) \\ &= \frac{1}{2}(\overrightarrow{R_1Q_1} + \overrightarrow{R_3Q_3}).\end{aligned}$$

□

Exercițiul 1.15

Fie $\mathcal{A} = (X, \vec{X}, \phi)$ un $\mathbb{K}$ -spațiu afin, $A_1, \dots, A_n \in X$, $\lambda^1, \dots, \lambda^n \in \mathbb{K}$ cu $\sum_{i=1}^n \lambda^i = 0$ și aplicația

$$f : X \rightarrow \vec{X}, \quad f(M) = \sum_{i=1}^n \lambda^i \overrightarrow{MA_i}, \quad M \in X.$$

Să se arate că aplicația f este constantă.

Soluție. Fie $O \in X$, fixat. Folosind relația lui Chasles și $\sum_{i=1}^n \lambda^i = 0$, avem

$$\begin{aligned} f(M) &= \sum_{i=1}^n \lambda^i \overrightarrow{MA_i} = \sum_{i=1}^n \lambda^i (\overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OA_i}) = \left(\sum_{i=1}^n \lambda^i \right) \overrightarrow{MO} + \sum_{i=1}^n \lambda^i \overrightarrow{OA_i} \\ &= \sum_{i=1}^n \lambda^i \overrightarrow{OA_i} = f(O), \end{aligned}$$

pentru orice $M \in X$. Astfel f este constantă, adică vectorul $\sum_{i=1}^n \lambda^i \overrightarrow{MA_i}$ nu depinde de alegerea punctului M . $\square$

Exercițiul 1.16

Fie $\mathcal{A} = (X, \vec{X}, \phi)$ un $\mathbb{K}$ -spațiu afin, $\lambda^1, \dots, \lambda^n \in \mathbb{K}$ cu $\sum_{i=1}^n \lambda^i = \lambda \neq 0$ și sistemul de puncte $\mathcal{S} = \{A_1, \dots, A_n\} \subset X$. Să se arate că P este baricentrul sistemului $\mathcal{S}$ cu ponderile $\lambda^{-1}\lambda^1, \dots, \lambda^{-1}\lambda^n$ dacă și numai dacă $\sum_{i=1}^n \lambda^i \overrightarrow{PA_i} = \vec{0}$.

Soluție. Dacă P este baricentrul sistemului $\mathcal{S}$ cu ponderile $\lambda^{-1}\lambda^1, \dots, \lambda^{-1}\lambda^n$, atunci $P = \sum_{i=1}^n (\lambda^{-1}\lambda^i) A_i$, deci $\vec{0} = \lambda^{-1} \sum_{i=1}^n \lambda^i \overrightarrow{PA_i}$, adică $\sum_{i=1}^n \lambda^i \overrightarrow{PA_i} = \vec{0}$.

Reciproc, fie $M \in X$, fixat arbitrar. Din $\sum_{i=1}^n \lambda^i \overrightarrow{PA_i} = \vec{0}$ rezultă că

$$\vec{0} = \sum_{i=1}^n \lambda^i (\overrightarrow{MA_i} - \overrightarrow{MP}) = \sum_{i=1}^n \lambda^i \overrightarrow{MA_i} - \lambda \overrightarrow{MP}.$$

De aici, $\overrightarrow{MP} = \sum_{i=1}^n (\lambda^{-1}\lambda^i) \overrightarrow{MA_i}$, pentru orice $M \in X$ și, cum $\sum_{i=1}^n (\lambda^{-1}\lambda^i) = 1$, rezultă că $P = \sum_{i=1}^n (\lambda^{-1}\lambda^i) A_i$. $\square$

Exercițiul 1.17

Fie $\mathcal{A} = (X, \vec{X}, \phi)$ un $\mathbb{K}$ -spațiu afin, $P_i, Q_i \in X$, $\lambda^i \in \mathbb{K}$, $i = 1, \dots, n$, astfel încât $P_i \neq Q_i$, pentru orice i , $\sum_{i=1}^n \lambda^i = 1$, iar

$$\sum_{i=1}^n \lambda^i P_i = \sum_{i=1}^n \lambda^i Q_i = A.$$

Să se arate că dacă $R_i \in X$ astfel încât $(P_i, Q_i; R_i) = \lambda$, pentru $i = 1, \dots, n$, atunci $\sum_{i=1}^n \lambda^i R_i = A$.

Soluție. Metoda 1. Din $(P_i, Q_i; R_i) = \lambda$ avem $\overrightarrow{P_i R_i} = \lambda \overrightarrow{R_i Q_i}$, pentru orice $i = 1, \dots, n$. Pentru $M \in X$ fixat arbitrar avem

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n \lambda^i \overrightarrow{P_i R_i} &= \lambda \sum_{i=1}^n \lambda^i \overrightarrow{R_i Q_i} \Leftrightarrow \\ \sum_{i=1}^n \lambda^i \overrightarrow{M R_i} - \sum_{i=1}^n \lambda^i \overrightarrow{M P_i} &= \lambda \sum_{i=1}^n \lambda^i \overrightarrow{M Q_i} - \lambda \sum_{i=1}^n \lambda^i \overrightarrow{M R_i} \Leftrightarrow \\ (1 + \lambda) \sum_{i=1}^n \lambda^i \overrightarrow{M R_i} &= (1 + \lambda) \overrightarrow{M A} \Leftrightarrow \\ \sum_{i=1}^n \lambda^i \overrightarrow{M R_i} &= \overrightarrow{M A}. \end{aligned}$$

De aici $\sum_{i=1}^n \lambda^i R_i = A$.

Metoda 2. Din ipoteză avem $R_i = \frac{1}{1+\lambda} P_i + \frac{\lambda}{1+\lambda} Q_i$, pentru $i = 1, \dots, n$, deci, folosind Propoziția 1.16, obținem

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n \lambda^i R_i &= \sum_{i=1}^n \lambda^i \left(\frac{1}{1+\lambda} P_i + \frac{\lambda}{1+\lambda} Q_i \right) \\ &= \frac{1}{1+\lambda} \sum_{i=1}^n \lambda^i P_i + \frac{\lambda}{1+\lambda} \sum_{i=1}^n \lambda^i Q_i = A. \end{aligned}$$

□

Exercițiul 1.18

Fie $\mathcal{A} = (X, \vec{X}, \phi)$ un $\mathbb{K}$ -spațiu afin, $P_i, Q_i, R_i \in X$, $i = 1, \dots, n$, astfel încât

$(P_i, Q_i; R_i) = \lambda$, pentru orice i . Dacă $\lambda^i \in \mathbb{K}$, $i = 1, \dots, n$, cu $\sum_{i=1}^n \lambda^i = 1$ și

$$P = \sum_{i=1}^n \lambda^i P_i, \quad Q = \sum_{i=1}^n \lambda^i Q_i, \quad R = \sum_{i=1}^n \lambda^i R_i,$$

atunci $(P, Q; R) = \lambda$.

Soluție. Din ipoteză avem $\overrightarrow{P_i R_i} = \lambda \overrightarrow{R_i Q_i}$, pentru orice $i = 1, \dots, n$, și

$$\begin{aligned} \overrightarrow{PR} &= \sum_{i=1}^n \lambda^i \overrightarrow{P_i R_i} = \sum_{i=1}^n \lambda^i (\overrightarrow{P_i P_i} + \overrightarrow{P_i R_i}) = \sum_{i=1}^n \lambda^i \overrightarrow{P_i R_i} = \sum_{i=1}^n (\lambda^i \lambda) \overrightarrow{R_i Q_i} \\ &= \lambda \sum_{i=1}^n \lambda^i (\overrightarrow{R_i R_i} + \overrightarrow{R_i Q_i}) = \lambda \sum_{i=1}^n \lambda^i \overrightarrow{R_i Q_i} \\ &= \lambda \overrightarrow{RQ}. \end{aligned}$$

Exercițiul se poate rezolva și folosind combinații afine (vezi Propoziția 1.16) $\square$

Exercițiul 1.19

Fie $\mathcal{A} = (X, \overrightarrow{X}, \phi)$ un spațiu afin real și $A_1, \dots, A_n \in X$. Fie $B_1, \dots, B_n, C_1, \dots, C_n \in X$ și $\alpha \in \mathbb{R}$ astfel încât

$$\alpha B_1 + (1 - \alpha) C_1 = \alpha A_1 + (1 - \alpha) A_2,$$

$$\alpha B_2 + (1 - \alpha) C_2 = \alpha A_2 + (1 - \alpha) A_3,$$

$$\vdots$$

$$\alpha B_n + (1 - \alpha) C_n = \alpha A_n + (1 - \alpha) A_1.$$

Dacă $G = \sum_{i=1}^n \frac{1}{n} A_i$, $G' = \sum_{i=1}^n \frac{1}{n} B_i$ și $G'' = \sum_{i=1}^n \frac{1}{n} C_i$, să se arate că $G = \alpha G' + (1 - \alpha) G''$.

Soluție. Fie $M \in X$, fixat arbitrar. Din ipoteză avem

$$\alpha \overrightarrow{MB_1} + (1 - \alpha) \overrightarrow{MC_1} = \alpha \overrightarrow{MA_1} + (1 - \alpha) \overrightarrow{MA_2},$$

$$\alpha \overrightarrow{MB_2} + (1 - \alpha) \overrightarrow{MC_2} = \alpha \overrightarrow{MA_2} + (1 - \alpha) \overrightarrow{MA_3},$$

$$\vdots$$

$$\alpha \overrightarrow{MB_n} + (1 - \alpha) \overrightarrow{MC_n} = \alpha \overrightarrow{MA_n} + (1 - \alpha) \overrightarrow{MA_1}$$

și sumând aceste relații obținem

$$\alpha \sum_{i=1}^n \overrightarrow{MB_i} + (1 - \alpha) \sum_{i=1}^n \overrightarrow{MC_i} = \sum_{i=1}^n \overrightarrow{MA_i},$$

adică

$$\alpha \overrightarrow{MG'} + (1 - \alpha) \overrightarrow{MG''} = \overrightarrow{MG}.$$

□

Exercițiul 1.20

Fie $\mathcal{A} = (X, \overrightarrow{X}, \phi)$ un spațiu afin real și $A_1, \dots, A_n, B_1, \dots, B_n \in X$. Dacă $G = \sum_{i=1}^n \frac{1}{n} A_i$, $G' = \sum_{i=1}^n \frac{1}{n} B_i$, să se arate că $\sum_{i=1}^n \overrightarrow{A_i B_i} = n \overrightarrow{GG'}$.
În particular, două sisteme de puncte $\{A_1, \dots, A_n\}$ și $\{B_1, \dots, B_n\}$ din X au același baricentru dacă și numai dacă $\sum_{i=1}^n \overrightarrow{A_i B_i} = \vec{0}$.

Soluție. Fie $M \in X$, fixat arbitrar. Din ipoteză avem

$$\sum_{i=1}^n \overrightarrow{MA_i} = n \overrightarrow{MG}, \quad \sum_{i=1}^n \overrightarrow{MB_i} = n \overrightarrow{MG'}.$$

Astfel

$$\sum_{i=1}^n \overrightarrow{A_i B_i} = \sum_{i=1}^n (\overrightarrow{MB_i} - \overrightarrow{MA_i}) = n(\overrightarrow{MG'} - \overrightarrow{MG}) = n \overrightarrow{GG'}.$$

□

Exercițiul 1.21

Fie $\mathcal{A} = (X, \overrightarrow{X}, \phi)$ un spațiu afin real.

- (1) Fie $P_1, P_2, P_3 \in X$ trei puncte distincte. Dacă $Q_1, Q_2, Q_3 \in X$ astfel încât $(P_2, P_3; Q_1) = (P_3, P_1; Q_2) = (P_1, P_2; Q_3)$, atunci

$$\frac{1}{3}P_1 + \frac{1}{3}P_2 + \frac{1}{3}P_3 = \frac{1}{3}Q_1 + \frac{1}{3}Q_2 + \frac{1}{3}Q_3.$$

- (2) Reciproc, fie P_1, P_2, P_3 afin independente, iar Q_1, Q_2 , respectiv Q_3 , coliniare cu punctele P_2 și P_3 , P_3 și P_1 , respectiv P_1 și P_2 . Dacă

$$\frac{1}{3}P_1 + \frac{1}{3}P_2 + \frac{1}{3}P_3 = \frac{1}{3}Q_1 + \frac{1}{3}Q_2 + \frac{1}{3}Q_3,$$

atunci $(P_2, P_3; Q_1) = (P_3, P_1; Q_2) = (P_1, P_2; Q_3)$.

(3) Fie $P_1, \dots, P_n \in X$ și fie

$$\begin{aligned} Q_1 &= \lambda^1 P_1 + \lambda^2 P_2 + \dots + \lambda^{n-1} P_{n-1} + \lambda^n P_n, \\ Q_2 &= \lambda^1 P_2 + \lambda^2 P_3 + \dots + \lambda^{n-1} P_n + \lambda^n P_1, \\ Q_3 &= \lambda^1 P_3 + \lambda^2 P_4 + \dots + \lambda^{n-1} P_1 + \lambda^n P_2, \\ &\vdots \\ Q_{n-1} &= \lambda^1 P_{n-1} + \lambda^2 P_n + \dots + \lambda^{n-1} P_{n-3} + \lambda^n P_{n-2}, \\ Q_n &= \lambda^1 P_n + \lambda^2 P_1 + \dots + \lambda^{n-1} P_{n-2} + \lambda^n P_{n-1}, \end{aligned}$$

unde $\sum_{i=1}^n \lambda^i = 1$. Atunci

$$\sum_{i=1}^n \frac{1}{n} P_i = \sum_{i=1}^n \frac{1}{n} Q_i.$$

Soluție. Pentru (1), din $(P_2, P_3; Q_1) = (P_3, P_1; Q_2) = (P_1, P_2; Q_3) = \lambda$, rezultă că

$$\overrightarrow{P_2 Q_1} = \frac{\lambda}{1+\lambda} \overrightarrow{P_2 P_3}, \quad \overrightarrow{P_3 Q_2} = \frac{\lambda}{1+\lambda} \overrightarrow{P_3 P_1}, \quad \overrightarrow{P_1 Q_3} = \frac{\lambda}{1+\lambda} \overrightarrow{P_1 P_2}.$$

Astfel, pentru $M \in X$ fixat arbitrar, utilizând relația lui Chasles, avem

$$\begin{aligned} \frac{1}{3}(\overrightarrow{MP_1} + \overrightarrow{MP_2} + \overrightarrow{MP_3}) &= \frac{1}{3}(\overrightarrow{MQ_3} + \overrightarrow{Q_3 P_1} + \overrightarrow{MQ_1} + \overrightarrow{Q_1 P_2} + \overrightarrow{MQ_2} + \overrightarrow{Q_2 P_3}) \\ &= \frac{1}{3}(\overrightarrow{MQ_1} + \overrightarrow{MQ_2} + \overrightarrow{MQ_3}) \\ &\quad - \frac{\lambda}{3(1+\lambda)}(\overrightarrow{P_1 P_2} + \overrightarrow{P_2 P_3} + \overrightarrow{P_3 P_1}) \\ &= \frac{1}{3}(\overrightarrow{MQ_1} + \overrightarrow{MQ_2} + \overrightarrow{MQ_3}). \end{aligned}$$

Pentru (2), fie $M \in X$ fixat arbitrar. Prin ipoteză avem,

$$\overrightarrow{MP_1} + \overrightarrow{MP_2} + \overrightarrow{MP_3} = \overrightarrow{MQ_1} + \overrightarrow{MQ_2} + \overrightarrow{MQ_3},$$

deci $\overrightarrow{P_1 Q_1} + \overrightarrow{P_2 Q_2} + \overrightarrow{P_3 Q_3} = \vec{0}$. Concluzia urmează analog cu Exercițiul 1.12 (2).

Pentru (3), fie $M \in X$ fixat arbitrar. Din ipoteză avem

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n \overrightarrow{MQ_i} &= \lambda^1 \sum_{i=1}^n \overrightarrow{MP_i} + \lambda^2 \sum_{i=1}^n \overrightarrow{MP_i} + \dots + \lambda^n \sum_{i=1}^n \overrightarrow{MP_i} = \sum_{k=1}^n \lambda^k \sum_{i=1}^n \overrightarrow{MP_i} \\ &= \sum_{i=1}^n \overrightarrow{MP_i}. \end{aligned}$$

□

Exercițiul 1.22 (Teorema lui Thales)

Fie $\mathcal{A} = (X, \vec{X}, \phi)$ un $\mathbb{K}$ -spațiu afin, $\dim \mathcal{A} \geq 2$, și fie $A, B, C \in X$ trei puncte afin independente.

- (1) Să se arate că dacă $P, Q \in X$ astfel încât $(A, B; P) = (A, C; Q)$, atunci vectorii $\overrightarrow{PQ}$ și $\overrightarrow{BC}$ sunt coliniari.
- (2) Să se arate că dacă $P, Q \in X \setminus \{A, B, C\}$ astfel încât P , respectiv Q , este colinar cu A și B , respectiv A și C , iar vectorii $\overrightarrow{PQ}$ și $\overrightarrow{BC}$ sunt coliniari, atunci $(A, B; P) = (A, C; Q)$.

Soluție. Pentru (1), dacă $(A, B; P) = (A, C; Q) = \lambda$, atunci

$$P = \frac{1}{1+\lambda}A + \frac{\lambda}{1+\lambda}B, \quad Q = \frac{1}{1+\lambda}A + \frac{\lambda}{1+\lambda}C,$$

deci

$$\begin{aligned} \overrightarrow{PQ} &= \overrightarrow{AQ} - \overrightarrow{AP} = \frac{\lambda}{1+\lambda}(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}) \\ &= \frac{\lambda}{1+\lambda}\overrightarrow{BC}. \end{aligned}$$

Pentru (2), fie $P = \alpha_1 A + (1 - \alpha_1)B$, $Q = \alpha_2 A + (1 - \alpha_2)C$, $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$.
Avem

$$\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{AQ} - \overrightarrow{AP} = (1 - \alpha_2)\overrightarrow{AC} - (1 - \alpha_1)\overrightarrow{AB}.$$

Dar $\overrightarrow{PQ} = \alpha\overrightarrow{BC} = \alpha\overrightarrow{AC} - \alpha\overrightarrow{AB}$ și, cum A, B, C sunt afin independente, rezultă că $1 - \alpha_1 = 1 - \alpha_2 = \alpha$. Astfel $(A, B; P) = (A, C; Q) = \frac{\alpha}{1 - \alpha}$. $\square$

Exercițiul 1.23 (Teorema lui Menelaus)

Fie $\mathcal{A}_{n-1} = (X, \vec{X}, \phi)$ un $\mathbb{K}$ -spațiu afin de dimensiune $n - 1$, $n \geq 2$. Fie $A_1, A_2, \dots, A_n \in X$ puncte afin independente și $B_1, B_2, \dots, B_n \in X$ astfel încât

$$(A_1, A_2; B_1) = \lambda_1, \quad (A_2, A_3; B_2) = \lambda_2, \quad \dots, \quad (A_n, A_1; B_n) = \lambda_n.$$

Să se arate că $B_1, B_2, \dots, B_n$ sunt afin dependente dacă și numai dacă

$$\lambda_1 \lambda_2 \dots \lambda_n = (-1)^n.$$

Soluție. Pentru a demonstra implicația directă, din ipoteză avem

$$\begin{aligned} B_1 &= \frac{1}{1+\lambda_1}A_1 + \frac{\lambda_1}{1+\lambda_1}A_2, \\ B_2 &= \frac{1}{1+\lambda_2}A_2 + \frac{\lambda_2}{1+\lambda_2}A_3, \\ &\vdots \\ B_{n-1} &= \frac{1}{1+\lambda_{n-1}}A_{n-1} + \frac{\lambda_{n-1}}{1+\lambda_{n-1}}A_n, \\ B_n &= \frac{1}{1+\lambda_n}A_n + \frac{\lambda_n}{1+\lambda_n}A_1. \end{aligned}$$

Cum $B_1, B_2, \dots, B_n$ sunt afin dependente, putem presupune, fără a restrânge generalitatea, că

$$B_1 = \alpha_2 B_2 + \alpha_3 B_3 + \dots + \alpha_n B_n, \quad \sum_{j=2}^n \alpha_j = 1. \quad (1.2)$$

Avem astfel

$$\frac{1}{1+\lambda_1}A_1 + \frac{\lambda_1}{1+\lambda_1}A_2 = \frac{\alpha_2}{1+\lambda_2}A_2 + \frac{\alpha_2\lambda_2}{1+\lambda_2}A_3 + \dots + \frac{\alpha_n}{1+\lambda_n}A_n + \frac{\alpha_n\lambda_n}{1+\lambda_n}A_1. \quad (1.3)$$

Cum $A_1, \dots, A_n$ sunt afin independente, folosind Corolarul 1.24 (3), rezultă că

$$\alpha_2 = \frac{\lambda_1(1+\lambda_2)}{1+\lambda_1}, \alpha_3 = -\frac{\lambda_1\lambda_2(1+\lambda_3)}{1+\lambda_1}, \dots, \alpha_n = (-1)^n \frac{\lambda_1\lambda_2 \dots \lambda_{n-1}(1+\lambda_n)}{1+\lambda_1} \quad (1.4)$$

și

$$\alpha_n = \frac{1+\lambda_n}{\lambda_n(1+\lambda_1)}. \quad (1.5)$$

Egalând valorile lui α_n din (1.4) și (1.5), obținem

$$\lambda_1\lambda_2 \dots \lambda_n = (-1)^n.$$

Reciproc, dacă $\lambda_1\lambda_2 \dots \lambda_n = (-1)^n$ și considerăm scalarii $\alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_n$ ca în relația (1.4), atunci va rezulta că aceștia satisfac $\sum_{j=2}^n \alpha_j = 1$. Cu acești scalari, se obține relația (1.3), adică (1.2), deci punctele $B_1, B_2, \dots, B_n$ sunt afin dependente. $\square$

Exercițiul 1.24 (Teorema lui Ceva)

Fie $\mathcal{A}_{n-1} = (X, \vec{X}, \phi)$ un spațiu afin real, $\dim \mathcal{A} = n-1$, $n \geq 3$. Fie $A_1, A_2, \dots, A_n \in X$ puncte afin independente și $M_1, M_2, \dots, M_n \in X$ astfel încât M_1 este diferit de $A_2, \dots, A_n$, M_2 este diferit de $A_1, A_3, \dots, A_n$, ..., res-

pectiv M_n este diferit de $A_1, \dots, A_{n-1}$ și

$$\begin{aligned}\overrightarrow{A_2 M_1} &= \lambda_1^1 \overrightarrow{M_1 A_3} + \lambda_1^2 \overrightarrow{M_1 A_4} + \dots + \lambda_1^{n-3} \overrightarrow{M_1 A_{n-1}} + \lambda_1^{n-2} \overrightarrow{M_1 A_n}, \\ \overrightarrow{A_3 M_2} &= \lambda_2^1 \overrightarrow{M_2 A_4} + \lambda_2^2 \overrightarrow{M_2 A_5} + \dots + \lambda_2^{n-3} \overrightarrow{M_2 A_n} + \lambda_2^{n-2} \overrightarrow{M_2 A_1}, \\ &\vdots \\ \overrightarrow{A_1 M_n} &= \lambda_n^1 \overrightarrow{M_n A_2} + \lambda_n^2 \overrightarrow{M_n A_3} + \dots + \lambda_n^{n-3} \overrightarrow{M_n A_{n-2}} + \lambda_n^{n-2} \overrightarrow{M_n A_{n-1}}.\end{aligned}$$

- (1) Să se arate că dacă dreptele $A_1 M_1, A_2 M_2, \dots, A_n M_n$ au un punct comun, atunci au loc următoarele $n(n-3)+1$ relații

$$\begin{aligned}\lambda_1^1 \cdot \lambda_2^1 &= \lambda_1^2, \lambda_1^1 \cdot \lambda_2^2 = \lambda_1^3, \dots, \lambda_1^1 \cdot \lambda_2^{n-3} = \lambda_1^{n-2}, \\ \lambda_2^1 \cdot \lambda_3^1 &= \lambda_2^2, \lambda_2^1 \cdot \lambda_3^2 = \lambda_2^3, \dots, \lambda_2^1 \cdot \lambda_3^{n-3} = \lambda_2^{n-2}, \\ &\vdots \\ \lambda_{n-1}^1 \cdot \lambda_n^1 &= \lambda_{n-1}^2, \lambda_{n-1}^1 \cdot \lambda_n^2 = \lambda_{n-1}^3, \dots, \lambda_{n-1}^1 \cdot \lambda_n^{n-3} = \lambda_{n-1}^{n-2}, \\ \lambda_n^1 \cdot \lambda_1^1 &= \lambda_n^2, \lambda_n^1 \cdot \lambda_1^2 = \lambda_n^3, \dots, \lambda_n^1 \cdot \lambda_1^{n-3} = \lambda_n^{n-2}, \\ \lambda_1^1 \cdot \lambda_2^1 \cdot \dots \cdot \lambda_n^1 &= 1.\end{aligned}$$

- (2) Să se arate că dacă dreptele $A_1 M_1, A_2 M_2, \dots, A_n M_n$ nu sunt paralele două câte două și au loc relațiile de la (1), atunci cele n drepte au un punct comun.

Soluție. Pentru (1), să presupunem că dreptele $A_1 M_1, A_2 M_2, \dots, A_n M_n$ au un punct comun

$$M = \alpha_i A_i + (1 - \alpha_i) M_i, \quad i = 1, \dots, n. \quad (1.6)$$

Din ipoteză avem că $\alpha_i \notin \{0, 1\}$, $i = 1, \dots, n$. Vom determina, în continuare, coordonatele baricentrice ale lui M în raport cu sistemul de puncte afin independente $\{A_1, \dots, A_n\}$.

Din ipoteză avem că

$$M_i = \frac{1}{\mu_i} A_{i+1} + \sum_{j=1}^{n-2} \frac{\lambda_i^j}{\mu_i} A_{i+j+1}, \quad (1.7)$$

unde $\mu_i = 1 + \sum_{k=1}^{n-2} \lambda_i^k$, iar $A_{n+h} = A_h$, pentru orice $h = 1, \dots, n-1$. Deducem că

$$M = \alpha_i A_i + \frac{1 - \alpha_i}{\mu_i} A_{i+1} + \sum_{j=1}^{n-2} \frac{(1 - \alpha_i) \lambda_i^j}{\mu_i} A_{i+j+1}, \quad i = 1, \dots, n. \quad (1.8)$$

Ținând cont de unicitatea coordonatelor baricentrice ale lui M în raport cu sistemul de puncte afin independente $\{A_1, \dots, A_n\}$, vezi Corolarul 1.24 (3), obținem

$$\alpha_{i+1} = \frac{1 - \alpha_i}{\mu_i}, \quad \lambda_i^j = \frac{\alpha_{i+j+1}}{\alpha_{i+1}}, \quad i = 1, \dots, n, \quad j = 1, \dots, n-2, \quad (1.9)$$

unde $\alpha_{n+i} = \alpha_i$, pentru orice $i = 1, \dots, n$. De aici,

$$\lambda_i^1 \cdot \lambda_{i+1}^j = \frac{\alpha_{i+j+2}}{\alpha_{i+1}} = \lambda_i^{j+1}, \quad i = 1, \dots, n, \quad j = 1, \dots, n-3.$$

De asemenea,

$$\lambda_1^1 \cdot \lambda_2^1 \cdot \dots \cdot \lambda_n^1 = \frac{\alpha_3}{\alpha_2} \cdot \frac{\alpha_4}{\alpha_3} \cdot \dots \cdot \frac{\alpha_2}{\alpha_1} = 1.$$

Pentru (2), din ipoteză rezultă că există $(\alpha_i)_{i=1}^n$, soluție unică a sistemului (1.9). Cu aceasta este verificată (1.8) care, ținând cont de (1.7), este echivalentă cu (1.6). Astfel, punctul M dat de (1.6) se găsește la intersecția dreptelor $A_1M_1, A_2M_2, \dots, A_nM_n$. $\square$

Exercițiul 1.25 (Dreapta Newton-Gauss)

Fie $\mathcal{A}_2 = (X, \vec{X}, \phi)$ un $\mathbb{K}$ -plan afin, $\text{char } \mathbb{K} \neq 2$ și fie $A, B, C \in X$, puncte afin independente. Fie $E, F \in X$, astfel încât A, B, F (respectiv A, C, E) sunt coliniare distincte, iar dreptele afine BE și CF au un punct comun D . Să se arate că mijloacele segmentelor orientate (A, D) , (E, F) și (B, C) sunt afin dependente.

Soluție. Fie $F = (1 - \alpha)A + \alpha B$ și $E = (1 - \beta)A + \beta C$, $\alpha, \beta \in \mathbb{K} \setminus \{0, 1\}$. Cum dreptele afine BE și CF au un punct comun D , rezultă că există $\gamma, \delta \in \mathbb{K}$ astfel încât

$$D = (1 - \gamma)B + \gamma E = (1 - \delta)C + \delta F.$$

De aici $\overrightarrow{AD} = (1 - \gamma)\overrightarrow{AB} + \gamma\beta\overrightarrow{AC} = \delta\alpha\overrightarrow{AB} + (1 - \delta)\overrightarrow{AC}$ și, cum A, B, C sunt afin independente, obținem $(1 - \alpha\beta)\gamma = 1 - \alpha$ și $(1 - \alpha\beta)\delta = 1 - \beta$. Cum $\alpha, \beta \neq 1$, rezultă că $1 - \alpha\beta \neq 0$, deci

$$\gamma = \frac{1 - \alpha}{1 - \alpha\beta}, \quad \delta = \frac{1 - \beta}{1 - \alpha\beta},$$

adică

$$D = \frac{(1 - \alpha)(1 - \beta)}{1 - \alpha\beta}A + \frac{\alpha(1 - \alpha)}{1 - \alpha\beta}B + \frac{\beta(1 - \alpha)}{1 - \alpha\beta}C.$$

Notăm cu $M = \frac{1}{2}A + \frac{1}{2}D$, $N = \frac{1}{2}E + \frac{1}{2}F$, $P = \frac{1}{2}B + \frac{1}{2}C$. Avem

$$\overrightarrow{NP} = \overrightarrow{AP} - \overrightarrow{AN} = \frac{1 - \alpha}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1 - \beta}{2}\overrightarrow{AC}.$$

De asemenea,

$$\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{AN} - \overrightarrow{AM} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AE} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AF} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AD} = \frac{\alpha\beta(1 - \alpha)}{2(1 - \alpha\beta)}\overrightarrow{AB} + \frac{\alpha\beta(1 - \beta)}{2(1 - \alpha\beta)}\overrightarrow{AC}.$$

Evident, $\overrightarrow{MN} = \frac{\alpha\beta}{1 - \alpha\beta}\overrightarrow{NP}$, deci M, N, P sunt coliniare. $\square$

1.6 Suma (uniunea) subspațiilor afine. Teorema dimensiunii pentru subspații afine

Definiția 1.25

Se numește *suma* (*uniunea*) a două subspații afine X', X'' ale unui $\mathbb{K}$ -spațiu afin $\mathcal{A} = (X, \vec{X}, \phi)$ cel mai mic subspațiu afin ce conține $X' \cup X''$, adică

$$X' + X'' = [X' \cup X'']_{\text{af}}.$$

Lema 1.26

Fie X', X'' două subspații afine ale unui $\mathbb{K}$ -spațiu afin $\mathcal{A} = (X, \vec{X}, \phi)$ și $P \in X', Q \in X''$. Atunci $X' \cap X'' \neq \emptyset$ dacă și numai dacă $\overrightarrow{PQ} \in \vec{X}' + \vec{X}''$.

Lema 1.27

Fie X', X'' două subspații afine ale unui $\mathbb{K}$ -spațiu afin $\mathcal{A} = (X, \vec{X}, \phi)$ și $P \in X', Q \in X''$. Atunci

$$\overrightarrow{X' + X''} = \vec{X}' + \vec{X}'' + \text{span}\{\overrightarrow{PQ}\}.$$

Propoziția 1.28

Dacă X', X'' sunt două subspații afine ale unui $\mathbb{K}$ -spațiu afin $\mathcal{A} = (X, \vec{X}, \phi)$, atunci

$$\overrightarrow{X' + X''} = \begin{cases} \vec{X}' + \vec{X}'', & \text{dacă } X' \cap X'' \neq \emptyset \\ \vec{X}' + \vec{X}'' + \text{span}\{\overrightarrow{PQ}\}, & \text{dacă } X' \cap X'' = \emptyset, \end{cases}$$

unde $P \in X'$ și $Q \in X''$, fixați arbitrar.

Teorema 1.29 (Teorema dimensiunii)

Fie X', X'' două subspații afine de dimensiune finită ale unui $\mathbb{K}$ -spațiu afin $\mathcal{A} = (X, \vec{X}, \phi)$. Atunci $X' + X''$ este un subspațiu afin de dimensiune finită și

$$\dim(X' + X'') = \begin{cases} \dim X' + \dim X'' - \dim(X' \cap X''), & \text{dacă } X' \cap X'' \neq \emptyset \\ \dim X' + \dim X'' - \dim(\vec{X}' \cap \vec{X}'') + 1, & \text{dacă } X' \cap X'' = \emptyset. \end{cases}$$

Demonstrație

Demonstrația se bazează pe Teorema lui Grassmann pentru dimensiunea spațiului vectorial sumă a două subspații vectoriale. $\square$

Consecințe

1. Fie X', X'' două subspații afine ale unui $\mathbb{K}$ -spațiu afin $\mathcal{A} = (X, \vec{X}, \phi)$ finit dimensional. Dacă $\vec{X} = \vec{X}' \oplus \vec{X}''$, atunci $X' \cap X''$ constă dintr-un singur punct.
2. Dacă $\dim X' = k_1$, $\dim X'' = k_2$ și $X' \cap X'' = \emptyset$, atunci $\dim(X' + X'') > \max\{k_1, k_2\}$.
3. Dacă $\dim X' = k$, $X'' = \{P\}$ și $P \notin X'$, atunci $\dim(X' + X'') = k + 1$. De exemplu, spațiul afin sumă dintre o dreaptă și un punct exterior ei este un plan afin.

1.7 EXERCIȚII

Subspații afine. Teorema dimensiunii

Exercițiul 1.26

Fie $\mathcal{A} = (X, \vec{X}, \phi)$ un K -spațiu afin și $Y \subset X$, $Y \neq \emptyset$. Să se arate că următoarele afirmații sunt echivalente:

- (1) $Y \subset X$.
s.a.
- (2) Există $P \in Y$ astfel încât $\phi_P(Y) \subset \vec{X}$.
s.v.
- (3) Pentru orice $Q \in Y$ are loc $\phi_Q(Y) \subset \vec{X}$.
s.v.
- (4) Există $P \in Y$ astfel încât $Y \subset T_P(X)$.
s.v.
- (5) Pentru orice punct $Q \in Y$ are loc $Y \subset T_Q(X)$.
s.v.

Soluție. Avem imediat (3) $\Leftrightarrow$ (5), deoarece $\phi_Q : T_Q(X) \rightarrow \vec{X}$ este un izomorfism de spații vectoriale pentru orice $Q \in X$. Cu aceeași argumentare, (2) $\Leftrightarrow$ (4).

Implicațiile (1) $\Rightarrow$ (3) $\Rightarrow$ (2) $\Rightarrow$ (1) rezultă imediat aplicând Teorema 1.9. Pentru (1) $\Rightarrow$ (3), se arată că $\phi_Q(Y) = \vec{Y}$. Implicația (3) $\Rightarrow$ (2) este evidentă. Pentru (2) $\Rightarrow$ (1), se utilizează faptul că $Y = P + \phi_P(Y)$. $\square$

Exercițiul 1.27

Fie X_1, X_2 două K -spații afine și $Y_1 \subset X_1$, $Y_2 \subset X_2$. Să se arate că $Y_1 \times Y_2 \subset X_1 \times X_2$.

Soluție. Dacă $Y_i \subset X_i$, atunci $Y_i = P_i + \vec{Y}_i$, $P_i \in Y_i$, $\vec{Y}_i \subset \vec{X}_i$, $i = 1, 2$. Se verifică imediat că

$$Y_1 \times Y_2 = (P_1, P_2) + (\vec{Y}_1 \times \vec{Y}_2),$$

iar $\vec{Y}_1 \times \vec{Y}_2 \subset \vec{X}_1 \times \vec{X}_2$. □

Exercițiul 1.28

Fie X un K -spațiu afin și $V \subset \vec{X}$. Notăm cu X/V spațiul afin cât determinat de V . Să se arate că dacă $Y \subset X$, atunci $Y_{/V \cap \vec{Y}} \subset X/V$.

Soluție. Dacă $Y \subset X$, atunci $Y = P + \vec{Y}$, $P \in Y$, $\vec{Y} \subset \vec{X}$. Are loc $V \cap \vec{Y} \subset \vec{Y}$ și se verifică imediat că

$$Y_{/V \cap \vec{Y}} = \hat{P} + V \cap \vec{Y}.$$

□

Exercițiul 1.29

Să se determine poziția relativă a două drepte într-un spațiu afin n -dimensional.

Soluție. Fie d_1, d_2 două drepte într-un spațiu afin n -dimensional X .
Avem:

- (I) Dacă $d_1 \cap d_2 \neq \emptyset$, atunci $d_1 \cap d_2 \subset d_1$, deci $\dim(d_1 \cap d_2) \leq 1$.
 - (I.a) Dacă $\dim(d_1 \cap d_2) = 1$, atunci $d_1 \cap d_2 = d_1 = d_2$, deci cele două drepte coincid.
 - (I.b) Dacă $\dim(d_1 \cap d_2) = 0$, atunci $d_1 \cap d_2 = \{P\}$, deci cele două drepte sunt concurente.
- (II) Dacă $d_1 \cap d_2 = \emptyset$, atunci considerăm $\vec{d}_1 \cap \vec{d}_2 \subset \vec{d}_1$, deci $\dim(\vec{d}_1 \cap \vec{d}_2) \leq 1$.
 - (II.a) Dacă $\dim(\vec{d}_1 \cap \vec{d}_2) = 1$, atunci $\vec{d}_1 \cap \vec{d}_2 = \vec{d}_1 = \vec{d}_2$ și cele două drepte sunt paralele.
 - (II.b) Dacă $\dim(\vec{d}_1 \cap \vec{d}_2) = 0$, atunci $\dim(d_1 + d_2) = \dim \vec{d}_1 + \dim \vec{d}_2 + 1 = 3$. Astfel, dacă $n = 2$ acest caz nu apare. Dacă $n \geq 3$, în acest caz cele două drepte sunt oarecare.

□

Exercițiul 1.30

Fie d_1 și d_2 două drepte ale unui $\mathbb{K}$ -spațiu afin 3-dimensional $\mathcal{A} = (X, \vec{X}, \phi)$.

- (1) Care sunt posibilele valori ale $\dim(d_1 + d_2)$?

(2) Să se verifice că $d_1 \cap d_2 = \emptyset$ și $\vec{d}_1 \neq \vec{d}_2$ dacă și numai dacă $d_1 + d_2 = X$.

Soluție. Pentru (1),

(I) $d_1 \cap d_2 \neq \emptyset$.

(I.a) Dacă dreptele coincid, adică $d_1 = d_2$, atunci

$$\dim(d_1 + d_2) = \dim d_1 + \dim d_2 - \dim(d_1 \cap d_2) = 1.$$

(I.b) Dacă dreptele sunt concurente, adică $d_1 \cap d_2 = \{P\}$, atunci

$$\dim(d_1 + d_2) = \dim d_1 + \dim d_2 - \dim(d_1 \cap d_2) = 2.$$

(II) $d_1 \cap d_2 = \emptyset$.

(II.a) Dacă dreptele sunt paralele, adică $\vec{d}_1 = \vec{d}_2$, atunci

$$\dim(d_1 + d_2) = \dim d_1 + \dim d_2 - \dim(\vec{d}_1 \cap \vec{d}_2) + 1 = 2.$$

(II.b) Dacă dreptele sunt oarecare ($n \geq 3$), atunci

$$\dim(d_1 + d_2) = \dim \vec{d}_1 + \dim \vec{d}_2 - \dim(\vec{d}_1 \cap \vec{d}_2) + 1 = 3.$$

Pentru (2), condiția $d_1 + d_2 = X$ este echivalentă cu $\dim(d_1 + d_2) = \dim X = 3$. Ținând cont de cazul (II.b), concluzionăm. $\square$

Exercițiul 1.31

Să se arate că într-un spațiu afin 3-dimensional dacă două plane se intersectează, atunci fie coincid, fie intersecția lor este o dreaptă.

Soluție. Fie π_1, π_2 două plane cu $\pi_1 \cap \pi_2 \neq \emptyset$ în spațiul afin X .

Dacă $\pi_1 = \pi_2$, atunci concluzionăm.

Dacă $\pi_1 \neq \pi_2$, atunci $\pi_1 \cap \pi_2 \subset_{\text{s.a.}} \pi_1, \pi_1 \cap \pi_2 \neq \pi_1$, deci $\dim(\pi_1 \cap \pi_2) \leq 1$. Să presupunem prin absurd că $\dim(\pi_1 \cap \pi_2) = 0$. Atunci, din Teorema dimensiunilor,

$$\dim(\pi_1 + \pi_2) = \dim \pi_1 + \dim \pi_2 - \dim(\pi_1 \cap \pi_2) = 4,$$

dar $\pi_1 + \pi_2 \subset_{\text{s.a.}} X$, iar $\dim X = 3$, deci avem o contradicție. De aici, concluzionăm că $\dim(\pi_1 \cap \pi_2) = 1$. $\square$

Exercițiul 1.32

Fie spațiul $\mathbb{R}^4$ dotat cu structura afină canonică și submulțimile în $\mathbb{R}^4$ date de ecuațiile:

$$(1) \begin{cases} x + y - z - 2t = 0 \\ 3x - y + z + 4t = 1 \\ 2y - 2z - 5t = -1/2, \end{cases} \quad (2) \begin{cases} -z + t = 1 \\ 2x + y + z - t = 0 \\ 4x + 2y + 2z + t = 3, \end{cases}$$

$$\begin{aligned}
(3) \quad & \begin{cases} 2x - y + t = -1 \\ 2x - y + t = -1 \\ -x + 2y + z - 2t = 2, \end{cases} & (5) \quad & \begin{cases} -x + 2y + z - 2t = 2 \\ 3x + z = 0, \end{cases} \\
(4) \quad & \{ 3x + z = 0, & (6) \quad & \begin{cases} 2x - y + t = -1 \\ -x + 2y + z - 2t = 2 \\ 3x + z + t = 4. \end{cases}
\end{aligned}$$

Să se arate că aceste submulțimi definesc subspații afine în $\mathbb{R}^4$, scriindu-le sub forma $P + \vec{Y}$, $P \in \mathbb{R}^4$ și $\vec{Y} \underset{\text{s.v.}}{\subset} \mathbb{R}^4$, și furnizând explicit punctul P și o bază în $\vec{Y}$.

Soluție. Punctul P reprezintă o soluție particulară a sistemului neomogen din enunț, iar $\vec{Y}$ este reprezentat de mulțimea soluțiilor sistemului omogen asociat acestuia.

- (1) $P(1/4, -1/4, 0, 0)$, $\vec{Y} = \{(-\mu, \lambda + 5\mu, \lambda, 2\mu) : \lambda, \mu \in \mathbb{R}\}$, o bază în $\vec{Y}$ fiind dată de $\vec{f}_1 = (0, 1, 1, 0)$, $\vec{f}_2 = (-1, 5, 0, 2)$.
- (2) $P(1/2, 0, 0, 1)$, $\vec{Y} = \{(\lambda, -2\lambda, 0, 0) : \lambda \in \mathbb{R}\}$, o bază în $\vec{Y}$ fiind dată de $\vec{f}_1 = (1, -2, 0, 0)$.
- (3) $P(0, 1, 0, 0)$, $\vec{Y} = \{(0, \lambda, 0, \lambda) : \lambda \in \mathbb{R}\}$, o bază în $\vec{Y}$ fiind dată de $\vec{f}_1 = (0, 1, 0, 1)$.
- (4) $P(0, 0, 0, 0)$, $\vec{Y} = \{(\lambda, \mu, -3\lambda, \nu) : \lambda, \mu, \nu \in \mathbb{R}\}$, o bază în $\vec{Y}$ fiind dată de $\vec{f}_1 = (1, 0, -3, 0)$, $\vec{f}_2 = (0, 1, 0, 0)$, $\vec{f}_3 = (0, 0, 0, 1)$.
- (5) $P(0, 1, 0, 0)$, $\vec{Y} = \{(\lambda, 2\lambda + \mu, -3\lambda, \mu) : \lambda, \mu \in \mathbb{R}\}$, o bază în $\vec{Y}$ fiind dată de $\vec{f}_1 = (1, 2, -3, 0)$, $\vec{f}_2 = (0, 1, 0, 1)$.
- (6) $P(0, 5, 0, 4)$, $\vec{Y} = \{(\lambda, 2\lambda, -3\lambda, 0) : \lambda \in \mathbb{R}\}$, o bază în $\vec{Y}$ fiind dată de $\vec{f}_1 = (1, 2, -3, 0)$.

□

Exercițiul 1.33

Fie spațiul $\mathbb{R}^4$ dotat cu structura afină canonică și subspațiile afine date de

$$\begin{aligned}
X_1 : \quad & \{ -2x + 3y + 4z + t = 5, \\
X_2 : \quad & \begin{cases} x - y + 2z - 2t = 7 \\ 3x + z + t = 7 \\ x - y + 5z + 6t = 0 \\ -2x - y + z - 3t = 0, \end{cases} \\
X_3 : \quad & \begin{cases} -2x + 3y + 4z + t = 5 \\ -x + 4y + z - 5t = 8. \end{cases}
\end{aligned}$$

Să se determine $X_1 \cap X_2$, $X_2 \cap X_3$. Să se utilizeze teorema dimensiunii pentru a determina $X_2 + X_3$.

Soluție. Rangul matricei sistemului de ecuații ce determină X_2 este 3 și

$$X_2 : \begin{cases} x - y + 2z - 2t = 7 \\ 3x + z + t = 7 \\ x - y + 5z + 6t = 0, \end{cases}$$

cele trei ecuații fiind independente.

Avem

$$X_1 \cap X_2 : \begin{cases} -2x + 3y + 4z + t = 5 \\ x - y + 2z - 2t = 7 \\ 3x + z + t = 7 \\ x - y + 5z + 6t = 0, \end{cases}$$

iar rangul matricei sistemului este 4, deci intersecția este un punct. Analog, analizând sistemul reprezentat de ecuațiile ce determină X_2 și X_3 , deducem că $X_2 \cap X_3 = \emptyset$.

Notăm că $\dim X_2 = 1$ și $\dim X_3 = 2$. Avem

$$\vec{X}_2 \cap \vec{X}_3 : \begin{cases} x - y + 2z - 2t = 0 \\ 3x + z + t = 0 \\ x - y + 5z + 6t = 0 \\ -2x + 3y + 4z + t = 0 \\ -x + 4y + z - 5t = 0, \end{cases}$$

sistem care admite doar soluția banală. Astfel, $\dim(\vec{X}_2 \cap \vec{X}_3) = 0$, și

$$\dim(X_2 + X_3) = \dim(X_2) + \dim(X_3) - \dim(\vec{X}_2 \cap \vec{X}_3) + 1 = 4,$$

deci $X_2 + X_3 = \mathbb{R}^4$. □

Exercițiul 1.34

Fie, în spațiul afin $\mathbb{R}^4$, planul afin π dat de

$$\pi : \begin{cases} 2x + y - z = 2 \\ 4x + t = 5. \end{cases}$$

Să se determine toate dreptele d ce trec prin $(0, 1, 0, 1)$ și astfel încât $\pi + d = \mathbb{R}^4$.

Soluție. Avem următoarele situații:

(I) dacă $\pi \cap d \neq \emptyset$, atunci

$$\dim(\pi + d) = \dim \pi + \dim d - \dim(\pi \cap d) \leq 3.$$

(II) dacă $\pi \cap d = \emptyset$, atunci

$$\dim(\pi + d) = \dim \pi + \dim d - \dim(\vec{\pi} \cap \vec{d}) + 1 = 4 - \dim(\vec{\pi} \cap \vec{d})$$

Astfel, $\pi + d = \mathbb{R}^4$ dacă și numai dacă $\pi \cap d = \emptyset$ și $\vec{\pi} \cap \vec{d} = \{\vec{0}\}$.

Se obține imediat că $\vec{\pi} = \text{span}\{(1, 0, 2, -4), (0, 1, 1, 0)\}$, deci $\vec{\pi} \cap \vec{d} = \{\vec{0}\}$ dacă și numai dacă $\vec{d} \subset \text{span}\{(0, 0, 1, 0), (0, 0, 0, 1)\}$. Deducem că

$$d = (0, 1, 0, 1) + \text{span}\{(0, 0, \alpha, \beta)\}, \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \alpha^2 + \beta^2 \neq 0.$$

Acum condiția $\pi \cap d = \emptyset$ devine $\beta \neq -4\alpha$, deci soluția este

$$d: \begin{cases} x = 0 \\ y = 1 \\ \beta z - \alpha t = -\alpha, \end{cases}$$

unde $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $\alpha^2 + \beta^2 \neq 0$, $\beta \neq -4\alpha$. □

Exercițiul 1.35

Fie X_1 și X_2 subspațiile afine ale spațiului afin $\mathbb{R}^4$ date de

$$\begin{aligned} X_1 &= \{(a + 3\lambda + 2\mu, 1 - \lambda - \mu, 4 + \lambda, 6 + 5\lambda + 2\mu) / \lambda, \mu \in \mathbb{R}\}, \\ X_2 &= \{(2 + \alpha + 2\beta, 1, 1 + \alpha + \beta, 3\alpha) / \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}. \end{aligned}$$

Să se determine $a \in \mathbb{R}$ astfel încât $X_1 \cap X_2 \neq \emptyset$. Pentru această valoare a lui a , să se determine $X_1 \cap X_2$ și $X_1 + X_2$.

Soluție. Condiția $X_1 \cap X_2 \neq \emptyset$ este echivalentă cu condiția de compatibilitate a sistemului

$$\begin{cases} 3\lambda + 2\mu - \alpha - 2\beta = 2 - a, \\ \lambda + \mu = 0, \\ \lambda - \alpha - \beta = -3, \\ 5\lambda + 2\mu - 3\alpha = -6, \end{cases}$$

în necunoscutele λ, μ, α și β . Rangul matricei sistemului este 3, iar compatibilitatea este echivalentă cu $a = 6$.

Rezolvând sistemul pentru $a = 6$, se obține $\lambda = -2 + k, \mu = 2 - k, \alpha = k, \beta = 1$, deci

$$X_1 \cap X_2 = \{(4 + k, 1, 2 + k, 3k) / k \in \mathbb{R}\}.$$

Avem

$$X_1 + X_2 = P + (\vec{X}_1 + \vec{X}_2),$$

unde $P \in X_1 + X_2$. Putem considera $P(2, 1, 1, 0) \in X_2 \subset X_1 + X_2$. Ținând cont de

$$\vec{X}_1 = \text{span}\{(3, -1, 1, 5), (2, -1, 0, 2)\},$$

$$\vec{X}_2 = \text{span}\{(1, 0, 1, 3), (2, 0, 1, 0)\},$$

avem $\{(2, -1, 0, 2), (1, 0, 1, 3), (2, 0, 1, 0)\}$ bază în $\vec{X}_1 + \vec{X}_2$. Putem exprima astfel

$$X_1 + X_2 = \{(2 + 2\gamma + \delta + 2\tau, 1 - \gamma, 1 + \delta + \tau, 2\gamma + 3\delta) / \gamma, \delta, \tau \in \mathbb{R}\}.$$

□

Exercițiul 1.36

Fie X_1 și X_2 subspațiile afine ale spațiului afin $\mathbb{R}^4$ date de

$$\begin{aligned} X_1 &= \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 / x + y = 4, z + t = a\}, \\ X_2 &= \{(3 + \lambda, 2 - 2\lambda, 2\lambda, -1 + \lambda) / \lambda \in \mathbb{R}\}. \end{aligned}$$

Să se determine $a \in \mathbb{R}$ astfel încât $X_1 + X_2$ să aibă dimensiunea minimă.

Soluție. Din ipoteze rezultă că

$$\vec{X}_1 = \{(\alpha, -\alpha, \beta, -\beta) \in \mathbb{R}^4 : \alpha, \beta \in \mathbb{R}\},$$

cu o bază formată din $\vec{f}_1 = (1, -1, 0, 0)$, $\vec{f}_2 = (0, 0, 1, -1)$, iar

$$\vec{X}_2 = \{(\lambda, -2\lambda, 2\lambda, \lambda) \in \mathbb{R}^4 : \lambda \in \mathbb{R}\},$$

cu o bază formată din $\vec{f}_3 = (1, -2, 2, 1)$. Observăm că $\text{rang}\{\vec{f}_1, \vec{f}_2, \vec{f}_3\} = 3$, deci $\dim(\vec{X}_1 + \vec{X}_2) = 3$. Cum $\dim \vec{X}_1 = 2$ și $\dim \vec{X}_2 = 1$, din Teorema lui Grassman avem $\dim(\vec{X}_1 \cap \vec{X}_2) = 0$.

Dacă $X_1 \cap X_2 = \emptyset$, atunci

$$\dim(X_1 + X_2) = \dim X_1 + \dim X_2 - \dim(\vec{X}_1 \cap \vec{X}_2) + 1 = 4.$$

Dacă $X_1 \cap X_2 \neq \emptyset$, atunci

$$\dim(X_1 + X_2) = \dim X_1 + \dim X_2 - \dim(\vec{X}_1 \cap \vec{X}_2) = 3,$$

deci $X_1 + X_2$ are dimensiunea minimă dacă și numai dacă $X_1 \cap X_2 \neq \emptyset$. Această condiție este echivalentă cu compatibilitatea sistemului

$$\begin{cases} x + y = 4 \\ z + t = a \\ x = 3 + \lambda \\ y = 2 - 2\lambda \\ z = 2\lambda \\ t = -1 + \lambda, \end{cases}$$

adică $a = 2$. □

1.8 Spații afine de dimensiune finită. Repere afine. Repere carteziane

Definiția 1.30

Se numește *reper cartezian* pentru un $\mathbb{K}$ -spațiu afin $\mathcal{A} = (X, \vec{X}, \phi)$ o pereche de forma $\mathcal{R} = \{O; \mathcal{B}\}$, unde O este un punct fixat în X și $\mathcal{B}$ este o bază în spațiul vectorial director $\vec{X}$.

Punctul O se numește *originea reperului cartezian* $\mathcal{R}$.

Observația 1.31

Fie $\mathcal{A}_n = (X, \vec{X}, \phi)$ un $\mathbb{K}$ -spațiu afin de dimensiune finită n . Atunci mulțimea $\mathcal{R} = \{O; \vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n\}$ este reper cartezian dacă și numai dacă sistemul de $n + 1$ puncte $\{O, P_1, \dots, P_n\}$, cu P_i unic definite de $\vec{OP}_i = \vec{e}_i$, $i = 1, \dots, n$, este un

sistem afın independent.

În acest caz, sistemul ordonat de puncte $\mathcal{R} = \{O, P_1, \dots, P_n\}$ se numește *reperul afın* asociat reperului cartezian $\mathcal{R}$.

Fiecărui punct $P \in X$ i se asociază scalarii $x^0, x^1, \dots, x^n$, $\sum_{i=0}^n x^i = 1$, astfel încât

$$P = x^0 O + x^1 P_1 + \dots + x^n P_n,$$

iar $(x^i)_{i=0}^n$ se numesc *coordonatele baricentrice ale punctului P în reperul afın $\mathcal{R}$* .

De asemenea,

$$\overrightarrow{OP} = x^1 \overrightarrow{OP_1} + \dots + x^n \overrightarrow{OP_n},$$

iar $(x^j)_{j=1}^n$ se numesc *coordonatele carteziene ale punctului P în reperul cartezian $\mathcal{R}$* .

Trecerea de la un reper afın la cel cartezian asociat se face considerând primul punct al reperului afın ca origine a reperului cartezian.

Schimbarea reperelor afine

Fie reperele afine $\mathcal{R} = \{A_0, A_1, \dots, A_n\}$ și $\mathcal{R}' = \{A'_0, A'_1, \dots, A'_n\}$ într-un spațiu afın de dimensiune finită n , $\mathcal{A}_n = (X, \vec{X}, \phi)$. Schimbarea reperului afın $\mathcal{R}$ în $\mathcal{R}'$ este dată de matricele $S_0 \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$, $S \in \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{K})$, unde S_0 este matricea coordonatelor vectorului de poziție al noii origini față de reperul cartezian asociat reperului afın $\mathcal{R}$, iar S este matricea schimbării de bază de la $\mathcal{B} = \{\overrightarrow{A_0 A_i}\}_{i=1}^n$ la $\mathcal{B}' = \{\overrightarrow{A'_0 A'_i}\}_{i=1}^n$. Astfel,

$$S_0 = \begin{pmatrix} s^1 \\ \vdots \\ s^n \end{pmatrix},$$

unde $\overrightarrow{A_0 A_0} = \sum_{i=1}^n s^i \overrightarrow{A_0 A_i}$, iar

$$S = \begin{pmatrix} s_1^1 & \dots & s_n^1 \\ \vdots & & \vdots \\ s_1^n & \dots & s_n^n \end{pmatrix},$$

unde $\mathcal{B}' = S(\mathcal{B})$, adică $\overrightarrow{A'_0 A'_i} = \sum_{j=1}^n s_i^j \overrightarrow{A_0 A_j}$, $i = 1, \dots, n$.

La o schimbare de repere afine, dacă $P(x^1, \dots, x^n)$ în raport cu reperul cartezian $\mathcal{R}$ și $P(x'^1, \dots, x'^n)$ în raport cu reperul cartezian $\mathcal{R}'$, atunci

$$x^i = \sum_{j=1}^n s_j^i x'^j + s^i, \quad i = 1, \dots, n,$$

adică, în notație matriceală,

$$X = SX' + S_0, \quad (1.10)$$

unde X notează matricea coloană a coordonatelor lui P în $\mathcal{R}$, iar X' notează matricea coloană a coordonatelor lui P în $\mathcal{R}'$.

Ecuția (1.10) este echivalentă cu

$$\begin{pmatrix} X \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} S & S_0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X' \\ 1 \end{pmatrix}, \quad (1.11)$$

matricea $M(\mathcal{R}', \mathcal{R}) = \begin{pmatrix} S & S_0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ fiind numită *matricea schimbării de repere afine* de la $\mathcal{R}$ la $\mathcal{R}'$.

Propoziția 1.32 (Ecuțiile implicite ale unui subspațiu afîn)

Fie $\mathcal{A}_n = (X, \vec{X}, \phi)$ un $\mathbb{K}$ -spațiu afîn de dimensiune finită n raportat la un reper afîn al său $\mathcal{R} = \{A_0, A_1, \dots, A_n\}$. Fie $\mathbb{A} \in \mathcal{M}_{n-p,n}(\mathbb{K})$, $\mathbb{A}_0 \in \mathcal{M}_{n-p,1}(\mathbb{K})$, $p \leq n$, $\text{rang } \mathbb{A} = n - p$. Atunci locul geometric al punctelor $P \in X$ pentru care matricea coordonatelor carteziene $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ verifică ecuația matriceală

$$\mathbb{A}X + \mathbb{A}_0 = 0,$$

este un subspațiu afîn $Y \subset X$, $\dim Y = p$, cu subspațiul vectorial director $\vec{Y}$ de ecuație matriceală $\mathbb{A}\vec{X} \stackrel{\text{s.a.}}{=} 0$.

Reciproc, orice subspațiu afîn de dimensiune p din X_n , $p \leq n$, este dat în raport cu un reper afîn printr-o ecuație matriceală

$$\mathbb{A}X + \mathbb{A}_0 = 0,$$

unde $\mathbb{A} \in \mathcal{M}_{n-p,n}(\mathbb{K})$, $\mathbb{A}_0 \in \mathcal{M}_{n-p,1}(\mathbb{K})$, $\text{rang } \mathbb{A} = n - p$.

Corolarul 1.33

1. Orice hiperplan $Y_{n-1} \subset X_n$ se exprimă într-un reper afîn printr-o ecuație s.a.

$$a_1 x^1 + \dots + a_n x^n + a_0 = 0, \quad (a_1)^2 + \dots + (a_n)^2 \neq 0.$$

2. Orice subspațiu afîn de dimensiune p este intersecția a $n - p$ hiperplane liniar independente.

Reprezentările analitice ale unui p -plan (subspațiu afîn p -dimensional)

Fie $\mathcal{A}_n = (X_n, \vec{X}_n, \phi)$ un $\mathbb{K}$ -spațiu afîn de dimensiune finită n raportat la un reper cartezian $\mathcal{R} = \{O; \vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n\}$.

Un subspațiu afîn p -dimensional $Y_p \subset X_n$ poate fi determinat:

1. **printr-un punct și spațiul vectorial director al său** (sau printr-un reper cartezian al său).

Dacă $M_0 \in Y$ și $\{\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_p\}$ reprezintă o bază în spațiul vectorial director $\vec{Y}$, avem $Y = P + \vec{Y}$, deci

$$M = P + \sum_{k=1}^p t^k \vec{u}_k, \quad t^k \in \mathbb{K}, k = 1, \dots, p,$$

pentru orice punct $M \in Y$. Dacă, în raport cu reperul $\mathcal{R}$, avem $M_0(x_0^1, \dots, x_0^n)$, $M(x^1, \dots, x^n)$ și $\vec{u}_k = \sum_{i=1}^n \lambda_k^i \vec{e}_i$, deducem *ecuațiile parametrice scalare ale lui Y*,

$$x^i = x_0^i + \sum_{k=1}^p t^k \lambda_k^i, \quad i = 1, \dots, n.$$

Dacă folosim scrierea matriceală și notăm $X = (x^i)_{i=1}^n$, $X_0 = (x_0^i)_{i=1}^n$ și $U_k = (\lambda_k^i)_{i=1}^n$, deducem *ecuația parametrică matriceală a lui Y*,

$$X = X_0 + \sum_{k=1}^p t^k U_k.$$

2. **printr-un sistem de $p+1$ puncte afîn independente** $\{A_0, A_1, \dots, A_p\} \subset Y$ (sau printr-un reper afîn al său).

Avem $A_0 \in Y$ și $\vec{Y} = \text{span}\{\vec{u}_k = \overrightarrow{A_0 A_k}\}_{k=1}^p$, iar problema se reduce la (i).

Cazul $p = 1$ corespunde dreptelor afine.

1. Dacă o dreaptă afînă trece prin $M_0(x_0^1, \dots, x_0^n)$ și are drept vector director

$$\vec{u} = \sum_{i=1}^n \lambda^i \vec{e}_i, \text{ atunci } \textit{ecuațiile parametrice} \text{ ale acesteia sunt}$$

$$x^i = x_0^i + t \lambda^i, \quad i = 1, \dots, n.$$

Acestea pot fi scrise sub *forma canonică*

$$\frac{x^1 - x_0^1}{\lambda^1} = \frac{x^2 - x_0^2}{\lambda^2} = \dots = \frac{x^n - x_0^n}{\lambda^n}.$$

2. Dacă o dreaptă afină este determinată de un reper afin $\{A_0, A_1\}$ al său, $A_0(x_0^1, \dots, x_0^n)$, $A_1(x_1^1, \dots, x_1^n)$, atunci *ecuațiile parametrice* ale acesteia sunt

$$x^i = x_0^i + t(x_1^i - x_0^i), \quad i = 1, \dots, n.$$

Acestea pot fi scrise sub *forma canonică*

$$\frac{x^1 - x_0^1}{x_1^1 - x_0^1} = \frac{x^2 - x_0^2}{x_1^2 - x_0^2} = \dots = \frac{x^n - x_0^n}{x_1^n - x_0^n}.$$

Cazul $p = n - 1$ corespunde hiperplanelor afine.

1. Dacă un hiperplan afin conține punctul $M_0(x_0^1, \dots, x_0^n)$ și are o bază $\{\bar{u}_k = \sum_{i=1}^n \lambda_k^i \bar{e}_i\}_{k=1}^{n-1}$ a spațiului vectorial director, atunci *ecuațiile parametrice* ale acestuia sunt

$$x^i = x_0^i + t^1 \lambda_1^i + \dots + t^{n-1} \lambda_{n-1}^i, \quad i = 1, \dots, n.$$

Acestea pot fi scrise sub *formă de determinant*

$$\begin{vmatrix} x^1 - x_0^1 & \lambda_1^1 & \dots & \lambda_{n-1}^1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x^n - x_0^n & \lambda_1^n & \dots & \lambda_{n-1}^n \end{vmatrix} = 0.$$

Dezvoltarea determinantului după prima coloană conduce la *ecuația implicită*

$$a_1 x^1 + \dots + a_n x^n + a_0 = 0, \quad (a_1)^2 + \dots + (a_n)^2 \neq 0.$$

2. Dacă un hiperplan afin este determinat de un reper afin $\{A_0, A_1, \dots, A_{n-1}\}$ al său, $A_\alpha(x_\alpha^1, \dots, x_\alpha^n)$, $\alpha = 0, \dots, n-1$, atunci *ecuația sub formă de determinant* a acestuia este

$$\begin{vmatrix} x^1 - x_0^1 & x_1^1 - x_0^1 & \dots & x_{n-1}^1 - x_0^1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x^n - x_0^n & x_1^n - x_0^n & \dots & x_{n-1}^n - x_0^n \end{vmatrix} = 0,$$

echivalentă cu

$$\begin{vmatrix} x^1 & x_0^1 & \dots & x_{n-1}^1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x^n & x_0^n & \dots & x_{n-1}^n \\ 1 & 1 & \dots & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

1.9 EXERCIIII

Spații afine de dimensiune finită. Repere afine. Repere carteziane

Exercițiul 1.37

Fie $\mathcal{A}_4 = (X, \vec{X}, \phi)$ un spațiu afin real 4-dimensional raportat la un reper cartezian $\mathcal{R} = \{O; B\}$.

- (1) Fie punctele $A_1(0, 0, -1, -1)$, $A_2(1, 1, 0, -1)$, $A_3(2, 0, -1, 0)$, $A_4(1, -1, -2, 1)$, $A_5(-3, 2, 3, -2) \in X$. Să se verifice că sistemul de puncte $\{A_1, A_2, \dots, A_5\}$ este afin independent.
- (2) Fie punctele $B_1(0, -2, 2, 3)$, $B_2(1, 0, 1, 0)$, $B_3(-2, -1, 6, 8)$, $B_4(-1, 6, 7, 4) \in X$. Să se verifice că sistemul de puncte $\{B_1, B_2, B_3, B_4\}$ este afin dependent și să se determine ponderile lui B_1 în raport cu $\{B_2, B_3, B_4\}$.
- (3) Fie $C_1(0, -2, 2, 1)$, $C_2(1, 0, -1, -1)$, $C_3(-1, -4, 5, 3)$, $C_4(2, 2, -4, -3)$. Să se verifice că $\{C_1, C_2, C_3, C_4\}$ este un sistem de puncte coliniare și să se determine raportul simplu $(C_2, C_4; C_3)$.

Soluție. Pentru (1), avem $\overrightarrow{A_1A_2} = (1, 1, 1, 0)$, $\overrightarrow{A_1A_3} = (2, 0, 0, 1)$, $\overrightarrow{A_1A_4} = (1, -1, -1, 2)$, $\overrightarrow{A_1A_5} = (-3, 2, 4, -1)$, și cum

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & -3 \\ 1 & 0 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \end{vmatrix} = 4 \neq 0,$$

putem concluziona că sistemul de vectori $\{\overrightarrow{A_1A_2}, \overrightarrow{A_1A_3}, \overrightarrow{A_1A_4}, \overrightarrow{A_1A_5}\}$ este liniar independent, adică sistemul de puncte $\{A_1, A_2, \dots, A_5\}$ este afin independent.

Pentru (2), avem $\overrightarrow{B_1B_2} = (1, 2, -1, -3)$, $\overrightarrow{B_1B_3} = (-2, 1, 4, 5)$, $\overrightarrow{B_1B_4} = (-1, 8, 5, 1)$, și cum

$$\text{rang} \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 2 & 1 & 8 \\ -1 & 4 & 5 \\ -3 & 5 & 1 \end{pmatrix} = 2,$$

putem concluziona că sistemul de vectori $\{\overrightarrow{B_1B_2}, \overrightarrow{B_1B_3}, \overrightarrow{B_1B_4}\}$ este liniar dependent, adică sistemul de puncte $\{B_1, B_2, B_3, B_4\}$ este afin dependent.

Pentru a determina ponderile lui B_1 în raport cu B_2, B_3, B_4 , determinăm $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ pentru care $B_1 = \alpha B_2 + \beta B_3 + \gamma B_4$, $\alpha + \beta + \gamma = 1$. Se obține $B_1 = \frac{3}{4}B_2 + \frac{1}{2}B_3 - \frac{1}{4}B_4$.

Pentru (3), avem $\overrightarrow{C_1C_3} = -\overrightarrow{C_1C_2}$ și $\overrightarrow{C_1C_4} = 2\overrightarrow{C_1C_2}$. De asemenea, $\overrightarrow{C_2C_3} = -\frac{2}{3}\overrightarrow{C_3C_4}$. $\square$

Exercițiul 1.38

Fie $\mathcal{A}_3 = (X, \vec{X}, \phi)$ un spațiu afin real 3-dimensional raportat la un reper

cartezian $\mathcal{R}_0 = \{O; \bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3\}$. Se consideră punctele $A_0(0, 1, 1)$, $A_1(-1, 3, 0)$, $A_2(0, 2, 2)$, $A_3(-2, 1, 0) \in X$.

- (1) Să se verifice că sistemul de puncte $\mathcal{R} = \{A_0, A_1, A_2, A_3\}$ determină un reper afin în $\mathcal{A}_3$ și să se determine coordonatele baricentrice ale punctului $P(7, 0, 11)$ în raport cu $\mathcal{R}$.
- (2) Să se scrie, în raport cu reperul cartezian $\mathcal{R}$ asociat lui $\mathcal{R}$, ecuația dreptei determinate de punctele A_2 și A_3 .
- (3) În raport cu reperul cartezian $\mathcal{R}$, se consideră planul de ecuație $2x'^1 + x'^2 + x'^3 - 3 = 0$. Să se determine o bază pentru subspațiul vectorial director al acestui plan.
- (4) Să se descrie schimbarea de coordonate carteziene la înlocuirea lui $\mathcal{R}_0$ cu $\mathcal{R}$.

Soluție. Pentru (1), în raport cu baza $\mathcal{B}_0 = \{\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3\}$, avem $\overrightarrow{A_0A_1} = (-1, 2, -1)$, $\overrightarrow{A_0A_2} = (0, 1, 1)$, $\overrightarrow{A_0A_3} = (-2, 0, -1)$, și cum

$$\begin{vmatrix} -1 & 0 & -2 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = -5 \neq 0,$$

putem concluziona că sistemul de vectori $\{\overrightarrow{A_0A_1}, \overrightarrow{A_0A_2}, \overrightarrow{A_0A_3}\}$ este liniar independent, adică sistemul de puncte $\{A_0, A_1, A_2, A_3\}$ este afin independent. De asemenea, avem $\overrightarrow{A_0P} = (7, -1, 10)$. Exprimat în baza reperului $\mathcal{R}$, adică $\overrightarrow{A_0P} = \alpha \overrightarrow{A_0A_1} + \beta \overrightarrow{A_0A_2} + \gamma \overrightarrow{A_0A_3}$, conduce la sistemul

$$\begin{cases} -\alpha - 2\gamma = 7 \\ 2\alpha + \beta = -1 \\ -\alpha + \beta - \gamma = 10, \end{cases}$$

cu soluțiile $\alpha = -3$, $\beta = 5$, $\gamma = -2$. Astfel, $P = A_0 - 3A_1 + 5A_2 - 2A_3$.

Pentru (2), notăm cu (x'^1, x'^2, x'^3) coordonatele în raport cu reperul $\mathcal{R}$. Dreapta căutată trece prin A_2 , care în reperul $\mathcal{R}$ are coordonatele $(0, 1, 0)$, și are drept vector director $\overrightarrow{A_2A_3} = -\overrightarrow{A_0A_2} + \overrightarrow{A_0A_3}$, deci ecuațiile parametrice ale sale în raport cu $\mathcal{R}$

$$\text{sunt } \begin{cases} x'^1 = 0 \\ x'^2 = 1 - t \\ x'^3 = t. \end{cases}$$

Pentru (3), ecuațiile parametrice ale planului sunt $\begin{cases} x'^1 = t^1 \\ x'^2 = t^2 \\ x'^3 = -2t^1 - t^2 + 3 \end{cases}$, deci

spațiul vectorial director al acestuia este subspațiul vectorial generat de $\bar{u}_1 = \overrightarrow{A_0A_1} - 2\overrightarrow{A_0A_3}$ și $\bar{u}_2 = \overrightarrow{A_0A_2} - \overrightarrow{A_0A_3}$.

Pentru (4), matricea translației originii este $S_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, iar matricea schimbării

de bază de la $\mathcal{R}_0$ la $\mathcal{R}$ este

$$S = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -2 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad \text{cu} \quad S^{-1} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ -2 & 1 & 4 \\ -3 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Astfel,

$$\begin{cases} x^1 = -x'^1 - 2x'^3 \\ x^2 = 2x'^1 + x'^2 + 1 \\ x^3 = -x'^1 + x'^2 - x'^3 + 1, \end{cases} \quad \text{sau} \quad \begin{cases} x'^1 = \frac{1}{5}(x^1 + 2x^2 - 2x^3) \\ x'^2 = \frac{1}{5}(-2x^1 + x^2 + 4x^3 - 5) \\ x'^3 = \frac{1}{5}(-3x^1 - x^2 + x^3). \end{cases}$$

□

Exercițiul 1.39

Fie spațiul $\mathbb{R}^3$ dotat cu structura afină canonică și raportat la reperul cartezian canonic. Se consideră punctul $M_0(1, -3, 5)$, vectorii

$$\bar{f}_1 = (1, 2, 0), \quad \bar{f}_2 = (0, 1, 2), \quad \bar{f}_3 = (2, 0, 1)$$

și punctele

$$A_0(1, -2, -2), \quad A_1(1, 1, -5), \quad A_2(-2, -1, 3), \quad A_3(6, 1, 2).$$

- (1) Să se arate că $\mathcal{R} = \{M_0; \bar{f}_1, \bar{f}_2, \bar{f}_3\}$ este un reper cartezian și să se determine reperul afin $\mathcal{R}$ asociat lui $\mathcal{R}$.
- (2) Să se arate că $\mathcal{R}' = \{A_0, A_1, A_2, A_3\}$ este un reper afin și să se determine reperul cartezian $\mathcal{R}'$ cu originea în A_0 asociat lui $\mathcal{R}'$.
- (3) Să se determine schimbarea de coordonate la înlocuirea reperului $\mathcal{R}$ cu $\mathcal{R}'$.
- (4) Să se scrie ecuațiile dreptei determinate de M_0 și A_0 în raport cu reperul $\mathcal{R}'$.
- (5) Să se scrie ecuația planului determinat de A_0, A_1, A_2 în raport cu reperul $\mathcal{R}$.

Soluție. Pentru (1) avem

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 9 \neq 0,$$

deci $\{\bar{f}_1, \bar{f}_2, \bar{f}_3\}$ este un sistem de vectori liniar independent, adică $\mathcal{R}$ este un reper cartezian. Reperul afin asociat lui $\mathcal{R}$ este

$$\mathcal{R} = \{M_0(1, -3, 5), M_1(2, -1, 5), M_2(1, -2, 7), M_3(3, -3, 6)\}.$$

Pentru (2) avem

$$\bar{g}_1 = \overrightarrow{A_0A_1} = (0, 3, -3), \quad \bar{g}_2 = \overrightarrow{A_0A_2} = (-3, 1, 5), \quad \bar{g}_3 = \overrightarrow{A_0A_3} = (5, 3, 4),$$

iar

$$\begin{vmatrix} 0 & -3 & 5 \\ 3 & 1 & 3 \\ -3 & 5 & 4 \end{vmatrix} = 153 \neq 0,$$

deci $\mathcal{R}'$ este un reper afin.

Reperul cartezian cu originea în A_0 asociat lui $\mathcal{R}'$ este $\mathcal{R}' = \{A_0; \bar{g}_1, \bar{g}_2, \bar{g}_3\}$.

Pentru (3), vom nota cu S_0 matricea translației originii și cu S matricea schimbării de bază, în trecerea de la reperul $\mathcal{R}$ la reperul $\mathcal{R}'$. Avem $\overrightarrow{M_0A_0} = (0, 1, -7)$. Exprimat în baza reperului $\mathcal{R}$, adică $\overrightarrow{M_0A_0} = \alpha\bar{f}_1 + \beta\bar{f}_2 + \gamma\bar{f}_3$, conduce la sistemul

$$\begin{cases} \alpha + 2\gamma = 0 \\ 2\alpha + \beta = 1 \\ 2\beta + \gamma = -7, \end{cases}$$

cu soluția $\alpha = 2, \beta = -3, \gamma = -1$. Astfel, $\overrightarrow{M_0A_0} = 2\bar{f}_1 - 3\bar{f}_2 - \bar{f}_3$, adică $S_0 = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ -1 \end{pmatrix}$.

Avem matricea schimbării de bază de la bază canonică la baza $\mathcal{B}$ a reperului $\mathcal{R}$,

$$S_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \text{ și matricea schimbării de bază de la baza canonică la baza } \mathcal{B}' \text{ a}$$

reperului $\mathcal{R}'$, $S_2 = \begin{pmatrix} 0 & -3 & 5 \\ 3 & 1 & 3 \\ -3 & 5 & 4 \end{pmatrix}$. Atunci matricea schimbării de bază de la $\mathcal{B}$ la $\mathcal{B}'$ este

$$S = S_1^{-1}S_2 = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 3 & 1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Notând cu x^1, x^2, x^3 , respectiv x'^1, x'^2, x'^3 , coordonatele în raport cu $\mathcal{R}$, respectiv $\mathcal{R}'$, și ținând cont de relația matriceală $X = SX' + S_0$, obținem

$$\begin{cases} x^1 = 2x'^1 - x'^2 + x'^3 + 2 \\ x^2 = -x'^1 + 3x'^2 + x'^3 - 3 \\ x^3 = -x'^1 - x'^2 + 2x'^3 - 1. \end{cases} \quad (1.12)$$

Pentru (4), este suficient, spre exemplu, să determinăm coordonatele punctului M_0 în reperul $\mathcal{R}'$. Cum coordonatele lui M_0 în $\mathcal{R}$ sunt $(0, 0, 0)$, din (1.12) deducem că M_0 are coordonatele $(-\frac{15}{17}, \frac{10}{17}, \frac{6}{17})$ în raport cu $\mathcal{R}'$. Astfel, cum $A_0(0, 0, 0)$ în $\mathcal{R}'$, ecuațiile dreptei determinate de A_0 și M_0 sunt

$$\frac{x'^1}{-15} = \frac{x'^2}{10} = \frac{x'^3}{6}.$$

Pentru (5), folosind S , avem $\overrightarrow{A_0A_1} = \bar{g}_1 = 2\bar{f}_1 - \bar{f}_2 - \bar{f}_3$ și $\overrightarrow{A_0A_2} = \bar{g}_2 = -\bar{f}_1 + 3\bar{f}_2 - \bar{f}_3$. De asemenea, $\overrightarrow{M_0A_0} = 2\bar{f}_1 - 3\bar{f}_2 - \bar{f}_3$, deci ecuația planului determinat

de A_0, A_1, A_2 față de reperul $\mathcal{R}$ este

$$\begin{vmatrix} x^1 - 2 & 2 & -1 \\ x^2 + 3 & -1 & 3 \\ x^3 + 1 & -1 & -1 \end{vmatrix} = 0, \quad \text{sau} \quad 4x^1 + 3x^2 + 5x^3 + 6 = 0.$$

□

Exercițiul 1.40

Fie $\mathcal{A}_3$ un spațiu afin real 3-dimensional raportat la un reper cartezian $\mathcal{R} = \{O; \bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3\}$.

- (1) Să se scrie ecuația vectorială și sistemul ecuațiilor parametrice ale dreptei ce trece prin $A_0(1, -1, 2)$ și are direcția $\bar{u} = -\bar{e}_1 + 2\bar{e}_2 + 2\bar{e}_3$.
- (2) Să se scrie ecuațiile canonice ale dreptei ce trece prin punctul $A_1(3, 0, -2)$ și are parametrii directori $(-1, -2, 4)$.
- (3) Să se scrie ecuațiile canonice ale dreptei ce trece prin punctele $A_2(1, 0, 1)$ și $A_3(0, 2, -2)$.
- (4) Să se scrie ecuațiile dreptelor ce trec prin O și au ca vectori directori respectiv pe $\bar{e}_1, \bar{e}_2$ și $\bar{e}_3$.

Soluție.

- (1) Ecuația vectorială a dreptei este dată de

$$\begin{aligned} \bar{r} &= \bar{r}_0 + t\bar{u} = \bar{e}_1 - \bar{e}_2 + 2\bar{e}_3 + t(-\bar{e}_1 + 2\bar{e}_2 + 2\bar{e}_3) \\ &= (1-t)\bar{e}_1 + (-1+2t)\bar{e}_2 + (2+2t)\bar{e}_3, \quad t \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Dacă (x^1, x^2, x^3) notează coordonatele în reperul $\mathcal{R}$, ecuațiile parametrice ale dreptei sunt

$$\begin{cases} x^1 = 1 - t \\ x^2 = -1 + 2t \\ x^3 = 2 + 2t. \end{cases}$$

- (2) $\frac{x^1 - 3}{-1} = \frac{x^2}{-2} = \frac{x^3 + 2}{4}$.
- (3) $\frac{x^1 - 1}{-1} = \frac{x^2}{2} = \frac{x^3 - 1}{-3}$.
- (4) $x^2 = x^3 = 0, x^1 = x^3 = 0, x^1 = x^2 = 0$.

□

Exercițiul 1.41

Fie $\mathcal{A}_3$ un spațiu afin 3-dimensional real raportat la un reper cartezian $\mathcal{R} = \{O; \bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3\}$. Să se scrie ecuațiile parametrice, ecuația sub formă de determinant și ecuația generală a planului afin în fiecare din următoarele cazuri:

- (1) planul trece prin O și are subspațiul vectorial director generat de vectorii $\bar{u}_1 = -\bar{e}_1 + 2\bar{e}_2 + \bar{e}_3$ și $\bar{u}_2 = \bar{e}_1 - 2\bar{e}_2 + \bar{e}_3$;
- (2) planul trece prin $P_0(-1, 2, -1)$ și are direcția planară determinată de vectorii $\bar{v}_1 = 3\bar{e}_1 + 2\bar{e}_2 + \bar{e}_3$ și $\bar{v}_2 = 2\bar{e}_1 - \bar{e}_2 - \bar{e}_3$;
- (3) planul trece prin $Q_0(2, -4, 5)$ și este paralel cu planul $x^1 O x^2$;
- (4) planul trece prin $R_0(2, -3, 1)$ și este paralel cu dreptele afine

$$\frac{x^1 + 5}{3} = \frac{x^2 - 7}{2} = \frac{x^3 + 12}{-3}, \quad \frac{x^1 - 10}{3} = \frac{x^2 + 2}{4} = \frac{x^3 - 5}{2};$$

- (5) planul conține dreapta afină $\frac{x^1 - 2}{2} = \frac{x^2 + 1}{-3} = \frac{x^3 - 2}{5}$ și este paralel cu dreapta afină $\frac{x^1 + 10}{3} = \frac{x^2 - 4}{5} = \frac{x^3 - 1}{2}$;
- (6) planul trece prin dreapta afină $\begin{cases} x^1 + x^2 + x^3 - 1 = 0, \\ 2x^1 - x^2 - 2 = 0, \end{cases}$ și este paralel cu dreapta afină $\frac{x^1 - 1}{1} = \frac{x^2 + 1}{-1} = \frac{x^3 - 2}{2}$;
- (7) planul este determinat de dreptele afine

$$\begin{cases} x^1 = 3 - 5t \\ x^2 = -5 - t \\ x^3 = -1 + 3t \end{cases} \quad \text{și} \quad \begin{cases} x^1 = -1 + 4s \\ x^2 = -7 + 2s \\ x^3 = -2 + 1s \end{cases}$$

- (8) planul trece prin punctul $S_0(2, 1, 0)$ și este paralel cu planul afin de ecuații parametrice $\begin{cases} x^1 = 5 + 2t^1 - 2t^2 \\ x^2 = 3 - t^1 + 3t^2 \\ x^3 = -2 - 3t^1 - 2t^2; \end{cases}$
- (9) planul este paralel cu planul afin $x^1 - 2x^2 + x^3 - 1 = 0$ și conține dreapta afină $\frac{x^1 + 3}{1} = \frac{x^2 - 2}{1} = \frac{x^3 - 1}{1}$;
- (10) planul trece prin punctele O , $P_1(2, 1, -3)$, $P_2(1, -1, 0)$;
- (11) planul trece prin mijlocul segmentului orientat (Q_1, Q_2) , unde $Q_1(1, 3, -1)$, $Q_2(3, -1, -5)$, și conține dreapta afină $\frac{x^1}{3} = \frac{x^2 - 2}{2} = \frac{x^3 + 2}{1}$;
- (12) planul trece prin punctul $R_1(-1, 0, 1)$ și prin intersecția planelor afine $x^1 - x^2 + x^3 + 1 = 0$ și $x^1 + x^2 - x^3 - 3 = 0$;
- (13) planul trece prin punctul $Q_0(2, -4, 2)$ și prin axa Ox^3 .

Soluție.

- (1) $\begin{cases} x^1 = -t^1 + t^2 \\ x^2 = 2t^1 - 2t^2 \\ x^3 = t^1 + t^2, \end{cases} \begin{vmatrix} x^1 & -1 & 1 \\ x^2 & 2 & -2 \\ x^3 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0, \quad 2x^1 + x^2 = 0.$
- (2) $\begin{cases} x^1 = -1 + 3t^1 + 2t^2 \\ x^2 = 2 + 2t^1 - t^2 \\ x^3 = -1 + t^1 - t^2, \end{cases} \begin{vmatrix} x^1 + 1 & 3 & 2 \\ x^2 - 2 & 2 & -1 \\ x^3 + 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 0, \quad -x^1 + 5x^2 - 7x^3 - 18 = 0.$
- (3) $\begin{cases} x^1 = 2 + t^1 \\ x^2 = -4 + t^2 \\ x^3 = 5, \end{cases} \begin{vmatrix} x^1 - 2 & 1 & 0 \\ x^2 + 4 & 0 & 1 \\ x^3 - 5 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0, \quad x^3 - 5 = 0.$
- (4) $\begin{cases} x^1 = 2 + 3t^1 + 3t^2 \\ x^2 = -3 + 2t^1 + 4t^2 \\ x^3 = 1 - 3t^1 + 2t^2, \end{cases} \begin{vmatrix} x^1 - 2 & 3 & 3 \\ x^2 + 3 & 2 & 4 \\ x^3 - 1 & -3 & 2 \end{vmatrix} = 0, \quad 16x^1 - 15x^2 + 6x^3 - 83 = 0.$
- (5) $\begin{cases} x^1 = 2 + 2t^1 + 3t^2 \\ x^2 = -1 - 3t^1 + 5t^2 \\ x^3 = 2 + 5t^1 + 2t^2, \end{cases} \begin{vmatrix} x^1 - 2 & 2 & 3 \\ x^2 + 1 & -3 & 5 \\ x^3 - 2 & 5 & 2 \end{vmatrix} = 0, \quad -31x^1 + 11x^2 + 19x^3 + 35 = 0.$
- (6) $\begin{cases} x^1 = t^1 + t^2 \\ x^2 = -2 + 2t^1 - t^2 \\ x^3 = 3 - 3t^1 + 2t^2, \end{cases} \begin{vmatrix} x^1 & 1 & 1 \\ x^2 + 2 & 2 & -1 \\ x^3 - 3 & -3 & 2 \end{vmatrix} = 0, \quad x^1 - 5x^2 - 3x^3 - 1 = 0.$
- (7) Punctul de intersecție al celor două drepte este $P_1(3, -5, -1)$.
 $\begin{cases} x^1 = 3 - 5t^1 + 4t^2 \\ x^2 = -5 - t^1 + 2t^2 \\ x^3 = -1 + 3t^1 + 1t^2, \end{cases} \begin{vmatrix} x^1 - 3 & -5 & 4 \\ x^2 + 5 & -1 & 2 \\ x^3 + 1 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 0, \quad -7x^1 + 17x^2 - 6x^3 + 100 = 0.$
- (8) $\begin{cases} x^1 = 2 + 2t^1 - 2t^2 \\ x^2 = 1 - 1t^1 + 3t^2 \\ x^3 = -3t^1 - 2t^2, \end{cases} \begin{vmatrix} x^1 - 2 & 2 & -2 \\ x^2 - 1 & -1 & 3 \\ x^3 & -3 & -2 \end{vmatrix} = 0, \quad 11x^1 + 10x^2 + 4x^3 - 32 = 0.$
- (9) $\begin{cases} x^1 = -3 + t^1 \\ x^2 = 2 + t^2 \\ x^3 = 1 - t^1 + 2t^2, \end{cases} \begin{vmatrix} x^1 + 3 & 1 & 0 \\ x^2 - 2 & 0 & 1 \\ x^3 - 1 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 0, \quad x^1 - 2x^2 + x^3 + 6 = 0.$
- (10) $\begin{cases} x^1 = 2t^1 + t^2 \\ x^2 = t^1 - t^2 \\ x^3 = -3t^1, \end{cases} \begin{vmatrix} x^1 & 2 & 1 \\ x^2 & 1 & -1 \\ x^3 & -3 & 0 \end{vmatrix} = 0, \quad x^1 + x^2 + x^3 = 0.$
- (11) Avem mijlocul $M_0(2, 1, -3)$ și folosim $Q_3(0, 2, -2)$, $Q_4(3, 4, -1)$ care aparțin dreptei date.
 $\begin{cases} x^1 = 2 - 2t^1 + t^2 \\ x^2 = 1 + t^1 + 3t^2 \\ x^3 = -3 + t^1 + 2t^2, \end{cases} \begin{vmatrix} x^1 - 2 & -2 & 1 \\ x^2 - 1 & 1 & 3 \\ x^3 + 3 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 0, \quad -x^1 + 5x^2 - 7x^3 - 24 = 0.$
- (12) Cele două plane afine date se intersectează după dreapta afină $\begin{cases} x^1 = 1 \\ x^2 = t \\ x^3 = -2 + t. \end{cases}$

$$(13) \quad \begin{cases} x^1 = -1 + 2t^1 \\ x^2 = t^2 \\ x^3 = 1 - 3t^1 + t^2, \end{cases} \quad \begin{vmatrix} x^1 + 1 & 2 & 0 \\ x^2 & 0 & 1 \\ x^3 - 1 & -3 & 1 \end{vmatrix} = 0, \quad 3x^1 - 2x^2 + 2x^3 + 1 = 0.$$

$$(13) \quad \begin{cases} x^1 = 2 + 2t^1 \\ x^2 = -4 - 4t^1 \\ x^3 = 2 + 2t^1 + t^2, \end{cases} \quad \begin{vmatrix} x^1 - 2 & 2 & 0 \\ x^2 + 4 & -4 & 0 \\ x^3 - 2 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 0, \quad 2x^1 + x^2 = 0.$$

□

Exercițiul 1.42

Fie $\mathcal{A}_3$ un spațiu afin 3-dimensional real raportat la un reper cartezian $\mathcal{R} = \{O; \bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3\}$. Pentru $\alpha \in \mathbb{R}$, fie d_α dreapta ce trece prin punctul $A(-1, 2, 1)$ și are direcția dată de vectorul

$$\bar{u}_\alpha = (2\alpha + 1)\bar{e}_1 + (2\alpha - 3)\bar{e}_2 - (3\alpha - 2)\bar{e}_3.$$

Să se arate că există un plan afin, a cărui ecuație să se determine, care conține d_α , pentru orice $\alpha \in \mathbb{R}$.

Soluție. Scriind ecuațiile parametrice

$$d_\alpha : \quad \begin{cases} x^1 = -1 + (2\alpha + 1)t \\ x^2 = 2 + (2\alpha - 3)t \\ x^3 = 1 - (3\alpha - 2)t, \end{cases}$$

și renotând $t^1 = \alpha t$, $t^2 = t$, deducem că planul

$$\pi : \quad \begin{cases} x^1 = -1 + 2t^1 + t^2 \\ x^2 = 2 + 2t^1 - 3t^2 \\ x^3 = 1 - 3t^1 + 2t^2, \end{cases} \quad \text{sau} \quad \pi : \quad 5x^1 + 7x^2 + 8x^3 - 17 = 0,$$

conține dreapta d_α , pentru orice $\alpha \in \mathbb{R}$.

□

Exercițiul 1.43

Fie $\mathcal{A}_3$ un spațiu afin 3-dimensional real raportat la un reper cartezian $\mathcal{R} = \{O; \bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3\}$. Se consideră dreptele

$$d_1 : \quad \begin{cases} x^1 - 3x^2 - x^3 - 2 = 0 \\ 3x^1 + x^2 + x^3 + 4 = 0, \end{cases} \quad d_2 : \quad \frac{x^1 - 1}{3} = \frac{x^2 - 4}{-2} = \frac{x^3 + 1}{1}.$$

- (1) Să se scrie ecuațiile generale ale dreptei ce se sprijină pe d_1 și d_2 și are direcția dată de vectorul $\bar{u} = 2\bar{e}_1 - \bar{e}_2 - \bar{e}_3$.
- (2) Să se scrie ecuațiile generale ale dreptei ce se sprijină pe d_1 și d_2 și trece prin punctul $A(-2, 3, -5)$.

Soluție. Pentru (1), dacă există, dreapta căutată d se află la intersecția planelor afine π_1 și π_2 , unde π_1 este determinat de d_1 și $\bar{u}$, iar π_2 este determinat de d_2 și $\bar{u}$. Astfel,

$$d: \begin{cases} 7x^1 + 9x^2 + 5x^3 + 16 = 0 \\ 3x^1 + 5x^2 + x^3 - 22 = 0. \end{cases}$$

Pentru (2), dreapta căutată d' se află la intersecția planelor afine π_3 și π_4 , unde π_3 este determinat de d_1 și A , iar π_4 este determinat de d_2 și A . Astfel,

$$(d') \quad \begin{cases} 5x^1 + 5x^2 + 3x^3 + 10 = 0 \\ x^1 + x^2 - x^3 - 6 = 0. \end{cases}$$

□

Exercițiul 1.44

Fie $\mathcal{A}_4$ un spațiu afin real 4-dimensional raportat la un reper cartezian $\mathcal{R} = \{O; \bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3, \bar{e}_4\}$. Se consideră punctele $A_0(-2, 0, 1, -2)$, $A_1(0, 1, -1, 0)$, $A_2(0, -2, -1, 0)$, $A_3(-1, 0, -2, -1)$, $A_4(0, -1, -2, -1)$.

- (1) Să se determine ecuațiile dreptei d ce trece prin punctul A_2 și este paralelă cu dreapta A_3A_4 .
- (2) Să se determine ecuațiile planului π ce trece prin punctul A_1 și este paralel cu planul $A_2A_3A_4$.
- (3) Să se determine ecuația hiperplanului H' determinat de punctele A_1 , A_2 , A_3 , A_4 .
- (4) Să se determine ecuația hiperplanului H'' ce trece prin A_0 și este paralel cu hiperplanul H' .
- (5) Să se determine ecuația hiperplanului H''' în raport cu reperul afin $\{A_0, A_1, A_2, A_3, A_4\}$.

Soluție. Pentru (1) avem $\overrightarrow{A_3A_4} = (1, -1, 0, 0)$, deci ecuațiile parametrice ale dreptei sunt $d: \begin{cases} x^1 = t \\ x^2 = -2 - t \\ x^3 = -1 \\ x^4 = 0 \end{cases}$.

Pentru (2) avem $\overrightarrow{A_2A_3} = (-1, 2, -1, -1)$ și $\overrightarrow{A_2A_4} = (0, 1, -1, -1)$, deci ecuațiile planului sunt

$$\pi: \begin{cases} x^1 = -t^1 \\ x^2 = 1 + 2t^1 + t^2 \\ x^3 = -1 - t^1 - t^2 \\ x^4 = -t^1 - t^2, \end{cases} \quad \text{sau} \quad \pi: \begin{cases} x^1 + x^2 + x^4 - 1 = 0 \\ x^3 - x^4 + 1 = 0. \end{cases}$$

Pentru (3),

$$H' : \begin{vmatrix} x^1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ x^2 & 1 & -2 & 0 & -1 \\ x^3 & -1 & -1 & -2 & -2 \\ x^4 & 0 & 0 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0, \quad \text{sau} \quad H' : x^3 - x^4 + 1 = 0.$$

Pentru (4) avem $H'' : x^3 - x^4 + \lambda = 0$ și din $A_0 \in H''$ obținem $\lambda = -3$.

Pentru (5), având în vedere faptul că spațiul vectorial director al lui H''' este generat de $\overrightarrow{A_1A_2}$, $\overrightarrow{A_1A_3}$ și $\overrightarrow{A_1A_4}$, iar $\overrightarrow{A_1A_2} = -\overrightarrow{A_0A_1} + \overrightarrow{A_0A_2}$, $\overrightarrow{A_1A_3} = -\overrightarrow{A_0A_1} + \overrightarrow{A_0A_3}$, $\overrightarrow{A_1A_4} = -\overrightarrow{A_0A_1} + \overrightarrow{A_0A_4}$, deducem că ecuația lui H''' în raport cu reperul $\{A_0, A_1, A_2, A_3, A_4\}$ este

$$H''' : \begin{vmatrix} x'^1 & -1 & -1 & -1 \\ x'^2 & 1 & 0 & 0 \\ x'^3 & 0 & 1 & 0 \\ x'^4 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0, \quad \text{sau} \quad H''' : x'^1 + x'^2 + x'^3 + x'^4 = 0.$$

□

Exercițiul 1.45

Fie $\mathcal{A}_4$ un spațiu afin real 4-dimensional raportat la un reper cartezian $\mathcal{R} = \{O; \bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3, \bar{e}_4\}$. Se consideră drepte date de ecuațiile

$$(d) \quad \begin{cases} x^1 + x^3 + 1 = 0 \\ 3x^1 - x^2 + x^3 - x^4 + 1 = 0, \\ x^1 - x^2 - 2x^3 - 3x^4 - 2 = 0 \end{cases} \quad (d') \quad x^1 = x^2 + 1 = x^3 - 1 = x^4 + 2,$$

$$(d'') \quad \begin{cases} x^1 = -2 + 2t \\ x^2 = -4 + 2t \\ x^3 = 4 - t \\ x^4 = -5 + t. \end{cases}$$

- (1) Să se verifice că punctele $A(0, -2, 0, -2)$, $B(0, 2, 0, 2)$ și dreapta d determină un hiperplan și să se scrie ecuația acestuia.
- (2) Să se determine ecuațiile subspațiului afin de dimensiune minimă care le conține pe d și d' .
- (3) Să se determine ecuațiile dreptei ce se sprijină pe d , d' și d'' .

Soluție. Pentru (1) avem, spre exemplu, $C(0, 0, -1, 0) \in d$ și $\bar{u} = (2, 3, -2, 1)$ este vectorul director al dreptei d . Cum $\overrightarrow{AB} = (0, 4, 0, 4)$, $\overrightarrow{AC} = (0, 2, -1, 2)$ și $\bar{u}$ sunt liniar independenți, rezultă că punctele $A(0, -2, 0, -2)$, $B(0, 2, 0, 2)$ și dreapta d determină un hiperplan. Ecuația hiperplanului este dată de

$$\begin{vmatrix} x^1 & 0 & 0 & 2 \\ x^2 & 1 & 2 & 3 \\ x^3 + 1 & 0 & -1 & -2 \\ x^4 & 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 0, \quad \text{sau} \quad x^1 - x^2 + x^4 = 0.$$

Pentru (2), trebuie să determinăm $d + d' = [d \cup d']_{\text{af}}$. Avem $D(0, -1, 1, -2) \in d'$ și $\bar{u}' = (1, 1, 1, 1)$ este vectorul director al dreptei d' . Observăm că $d \cap d' = \emptyset$ și d nu este paralelă cu d' . Folosind Teorema dimensiunii, deducem că $d + d'$ este un hiperplan. Putem scrie ecuația lui $d + d'$ având în vedere faptul că trece prin $C(0, 0, -1, 0)$ și are subspațiul vectorial director generat de $\overrightarrow{CD} = (0, -1, 2, -2)$, $\bar{u}$ și $\bar{u}'$,

$$d + d' : \begin{vmatrix} x^1 & 0 & 2 & 1 \\ x^2 & -1 & 3 & 1 \\ x^3 + 1 & 2 & -2 & 1 \\ x^4 & -2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0, \quad \text{sau} \quad 11x^1 - 10x^2 - 3x^3 + 2x^4 - 3 = 0.$$

Pentru (3), dacă există, dreapta căutată se găsește la intersecția subspațiilor afine $d + d'$, $d' + d''$, $d'' + d$, iar soluția este

$$\begin{cases} 11x^1 - 10x^2 - 3x^3 + 2x^4 - 3 = 0 \\ 6x^1 - 8x^2 - x^3 + 3x^4 - 1 = 0 \\ 3x^1 - 4x^2 - 4x^3 - 2x^4 - 4 = 0, \end{cases} \quad \text{sau} \quad \begin{cases} x^1 = 0 \\ x^2 = t \\ x^3 = -1 - 2t \\ x^4 = 2t. \end{cases}$$

□

1.10 Morfisme afine. Translații. Omotetii

Fie $\mathcal{A} = (X, \overrightarrow{X}, \phi)$ și $\mathcal{B} = (Y, \overrightarrow{Y}, \psi)$ două $\mathbb{K}$ -spații afine.

Definiția 1.34

O aplicație $f : X \rightarrow Y$ se numește *morfism afin* dacă există $\overrightarrow{f} \in L(\overrightarrow{X}, \overrightarrow{Y})$ astfel încât

$$\overrightarrow{f(P)f(Q)} = \overrightarrow{f}(\overrightarrow{PQ}),$$

pentru orice $P, Q \in X$.

Propoziția 1.35

O aplicație $f : X \rightarrow Y$ este un morfism afin dacă și numai dacă există $\overrightarrow{f} \in L(\overrightarrow{X}, \overrightarrow{Y})$ astfel încât

$$f(P + \bar{u}) = f(P) + \overrightarrow{f}(\bar{u}),$$

pentru orice $P \in X$, $\bar{u} \in \overrightarrow{X}$.

Propoziția 1.36 (Caracterizarea morfismelor afine folosind combinații afine)

(i) Dacă $\text{char } \mathbb{K} \neq 2$, atunci următoarele afirmații sunt echivalente:

1. $f : X \rightarrow Y$ este un morfism afin,
 2. $f(\lambda P + (1 - \lambda)Q) = \lambda f(P) + (1 - \lambda)f(Q)$, pentru orice $P, Q \in X$, $\lambda \in \mathbb{K}$.
- (ii) Dacă $\text{char } \mathbb{K} = 2$, atunci următoarele afirmații sunt echivalente:
1. $f : X \rightarrow Y$ este un morfism afin,
 2. $f(P + Q + R) = f(P) + f(Q) + f(R)$, pentru orice $P, Q, R \in X$.

Proprietăți

1. Fie $f : X \rightarrow Y$ un morfism afin cu aplicația liniară asociată $\vec{f}$. Atunci f este bijecție dacă și numai dacă $\vec{f}$ este bijecție.

Un morfism afin bijectiv $f : X \rightarrow Y$ se numește *izomorfism afin*.

2. Orice $\mathbb{K}$ -spațiu afin de dimensiune finită n este izomorf, prin fixarea unui reper cartezian, cu $\mathbb{K}^n$ cu structura afină canonică. Subliniem faptul că izomorfismul nu este canonic.
3. Fie $\mathcal{A} = (X, \vec{X}, \phi)$ un $\mathbb{K}$ -spațiu afin. Mulțimea

$$\mathcal{GA}(X) = \{f : X \rightarrow X \mid f \text{ izomorfism afin}\}$$

este grup relativ la compunerea morfismelor, deoarece

- (i) compunerea a două morfisme afine este morfism afin,
- (ii) inversa unui morfism afin bijectiv este morfism afin.

Grupul $\mathcal{GA}(X)$ se numește *grupul afin* al $\mathbb{K}$ -spațiului afin X , iar elementele acestui grup se numesc *afinități ale lui X* (sau *automorfisme afine*).

Exemple de morfisme afine

1. **Aplicația constantă** $c : X \rightarrow Y$, $c(P) = Q_0$, pentru orice $P \in X$, unde $Q_0 \in Y$ fixat, este un morfism afin cu aplicația liniară asociată nulă $\vec{c} = \vec{0}$.
2. **Aplicația identitate** $\text{id}_X : X \rightarrow X$, $\text{id}_X(P) = P$, pentru orice $P \in X$, este un morfism afin cu aplicația liniară asociată $\text{Id}_{\vec{X}}$.
3. **Translația de vector** $\vec{u} \in \vec{X}$, $t_{\vec{u}} : X \rightarrow X$, definită de una din următoarele condiții echivalente:
 - (i) $t_{\vec{u}}(P) = Q$ dacă și numai dacă $\vec{PQ} = \vec{u}$.

- (ii) $t_{\bar{u}}(P) = P + \bar{u}$, pentru orice $P \in X$.
- (iii) $\overrightarrow{Pt_{\bar{u}}(P)} = \bar{u}$, pentru orice $P \in X$.

Proprietăți

3.1. Orice translație este un izomorfism afin cu aplicația liniară asociată $\text{Id}_{\vec{X}}$.

Reciproc, orice morfism afin $f : X \rightarrow X$ cu $\vec{f} = \text{Id}_{\vec{X}}$ este o translație $t_{\bar{u}}$, unde $\bar{u}$ este unic determinat de condiția

$$\bar{u} = \overrightarrow{Pf(P)},$$

pentru un P fixat în X .

3.2. Mulțimea translațiilor,

$$\mathcal{T}(X) = \{t_{\bar{u}} : X \rightarrow X \mid \bar{u} \in \vec{X}\},$$

este grup comutativ în raport cu compunerea funcțiilor, deoarece

$$\begin{aligned} t_{\bar{u}} \circ t_{\bar{v}} &= t_{\bar{u}+\bar{v}}, \quad \forall \bar{u}, \bar{v} \in \vec{X}, \\ (t_{\bar{u}})^{-1} &= t_{-\bar{u}}, \quad \forall \bar{u} \in \vec{X}. \end{aligned}$$

3.3. $(\mathcal{T}(X), \circ)$ este izomorf cu $(\vec{X}, +)$.

3.4. $\mathcal{T}(X)$ este divizor normal în $\mathcal{GA}(X)$.

3.5. $\mathcal{GA}(X)$ este produsul semidirect dintre $\mathcal{T}(X)$ și $\mathcal{GA}_P(X)$,

$$\mathcal{GA}(X) = \mathcal{T}(X) \cdot \mathcal{GA}_P(X), \quad \forall P \in X,$$

unde $\mathcal{GA}_P(X)$ notează mulțimea izomorfismelor afine cu punct fix P , numită *mulțimea centro-afinităților de centru P* . Astfel, orice morfism afin bijectiv este compunerea dintre o translație și o centro-afinitate.

4. Omotetia de centru $P \in X$ și raport $\lambda \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$, $h_{P,\lambda} : X \rightarrow X$, definită de una din următoarele condiții echivalente:

- (i) $h_{P,\lambda}(Q) = R$ dacă și numai dacă $\overrightarrow{PR} = \lambda \overrightarrow{PQ}$.
- (ii) $h_{P,\lambda}(Q) = P + \lambda \overrightarrow{PQ}$, pentru orice $Q \in X$.
- (iii) $\overrightarrow{Ph_{P,\lambda}(Q)} = \lambda \overrightarrow{PQ}$, pentru orice $Q \in X$.

Proprietăți

- 4.1. Orice omotetie $h_{P,\lambda} : X \rightarrow X$ este un izomorfism afin cu punct fix P și aplicație liniară asociată $\overrightarrow{h_{P,\lambda}} = \lambda \text{Id}_{\overrightarrow{X}}$.

Reciproc, orice morfism afin $f : X \rightarrow X$ cu $\overrightarrow{f} = \lambda \text{Id}_{\overrightarrow{X}}$, $\lambda \in \mathbb{K} \setminus \{0, 1\}$, este o omotetie $h_{P,\lambda}$, pentru $P \in X$ unic determinat de condiția

$$P = Q + \frac{1}{1-\lambda} \overrightarrow{Qf(Q)},$$

pentru un Q fixat în X .

- 4.2. Mulțimea omotetiilor de centru P ,

$$\mathcal{H}_P(X) = \{h_{P,\lambda} : X \rightarrow X / \lambda \in \mathbb{K} \setminus \{0\}\}$$

este grup comutativ în raport cu compunerea funcțiilor, deoarece

$$h_{P,\lambda} \circ h_{P,\mu} = h_{P,\lambda\mu}, \forall P \in X, \lambda, \mu \in \mathbb{K} \setminus \{0\},$$

$$(h_{P,\lambda})^{-1} = h_{P,\lambda^{-1}}, \forall P \in X, \lambda \in \mathbb{K} \setminus \{0\}.$$

- 4.3. $\mathcal{H}_P(X)$ este subgrup în $\mathcal{GA}_P(X)$.
- 4.4. Dacă X are cel puțin două puncte, atunci $(\mathcal{H}_P(X), \circ)$ este izomorf cu $(\mathbb{K}^*, \cdot)$.
- 4.5. Compunerea a două omotetii de centre diferite este o translație sau o omotetie,

$$h_{P,\lambda} \circ h_{Q,\mu} = \begin{cases} t_{\bar{u}}, & \lambda\mu = 1 \\ h_{R,\lambda\mu}, & \lambda\mu \neq 1, \end{cases}$$

unde

$$\bar{u} = \overrightarrow{Qh_{P,\lambda}(Q)} = (\lambda - 1)\overrightarrow{PQ},$$

iar

$$R = Q + \frac{1}{1-\lambda\mu} \overrightarrow{Qh_{P,\lambda}(Q)} = \frac{1-\lambda}{1-\lambda\mu} P + \frac{\lambda(1-\mu)}{1-\lambda\mu} Q.$$

Definiția 1.37

Fie $\mathcal{A} = (X, \overrightarrow{X}, \phi)$ un $\mathbb{K}$ -spațiu afin. Se numește *dilatare* a spațiului X un automorfism afin $f \in \mathcal{GA}(X)$ care este o translație sau o omotetie. Automorfismele afine care nu sunt dilatări se numesc *antidilatări*.

Notăm

$$\begin{aligned} \mathcal{Dil}(X) &= \mathcal{T}(X) \cup \mathcal{H}(X), \\ \mathcal{GA}(X) &= \mathcal{Dil}(X) \cup \mathcal{Antidil}(X). \end{aligned}$$

4.6 Mulțimea $\mathcal{Dil}(X)$ este subgrup în $\mathcal{GA}(X)$. Reamintim doar că

$$t_{\bar{u}} \circ h_{P,\lambda} = h_{Q,\lambda}, \text{ unde } Q = P + \frac{1}{1-\lambda}\bar{u},$$

$$h_{P,\lambda} \circ t_{\bar{u}} = h_{R,\lambda}, \text{ unde } R = P + \frac{\lambda}{1-\lambda}\bar{u},$$

pentru orice $P \in X$, $\bar{u} \in \vec{X}$ și $\lambda \in \mathbb{K} \setminus \{0, 1\}$.

Morfisme afine în context finit dimensional

Fie $\mathcal{A}_n = (X, \vec{X}, \phi)$ și $\mathcal{B}_m = (Y, \vec{Y}, \psi)$ două K -spații afine de dimensiune finită n , respectiv m , și $f : X \rightarrow Y$ un morfism afîn cu aplicația liniară asociată $\vec{f}$. Considerăm reperele carteziene

$$\mathcal{R}_X = \{A_0; \mathcal{B}_{\vec{X}} = \{\bar{e}_i\}_{i=1}^n\} \quad \text{și} \quad \mathcal{R}_Y = \{B_0; \mathcal{B}_{\vec{Y}} = \{\bar{f}_j\}_{j=1}^m\}.$$

Notăm cu X matricea coordonatelor unui punct generic $P \in X$ în raport cu $\mathcal{R}_X$ și cu Y matricea coordonatelor punctului $f(P) \in Y$ în raport cu $\mathcal{R}_Y$. Ecuația matriceală a morfismului f în raport cu $\mathcal{R}_X$ și $\mathcal{R}_Y$ este dată de

$$Y = \mathbb{A}X + \mathbb{A}_0, \quad (1.13)$$

unde $\mathbb{A} = (a_i^j)_{\substack{i=\overline{1,n} \\ j=\overline{1,m}}} \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$ este matricea transformării liniare $\vec{f}$ în raport cu perechea de baze $\mathcal{B}_{\vec{X}}$ și $\mathcal{B}_{\vec{Y}}$, iar

$$\mathbb{A}_0 = \begin{pmatrix} a_0^1 \\ \vdots \\ a_0^m \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{m,1}(\mathbb{K})$$

este matricea coordonatelor punctului $f(A_0)$ în raport cu reperul $\mathcal{R}_Y$.

Ecuația (1.13) se mai scrie și sub forma

$$\begin{pmatrix} Y \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbb{A} & \mathbb{A}_0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ 1 \end{pmatrix},$$

matricea

$$M(f, \mathcal{R}_X, \mathcal{R}_Y) = \begin{pmatrix} \mathbb{A} & \mathbb{A}_0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

fiind numită *matricea asociată morfismului afîn f* în raport cu perechea de repere $\mathcal{R}_X$ și $\mathcal{R}_Y$.

Pe componente, ecuația matriceală (1.13) se scrie

$$y^j = a_1^j x^1 + \dots + a_n^j x^n + a_0^j, \quad j = 1, \dots, m. \quad (1.14)$$

Reciproc, dacă o aplicație $f : X \rightarrow Y$ are ecuațiile (1.13) (sau (1.14)) în raport cu perechea de repere $\mathcal{R}_X$ și $\mathcal{R}_Y$, atunci f este un morfism afîn.

Exemple

1. Aplicația constantă $c : X \rightarrow Y$, $c(P) = Q_0$, pentru orice $P \in X$, are $\vec{c} = \vec{0}$. Astfel, în raport cu perechea de repere $\mathcal{R}_X$ și $\mathcal{R}_Y$, c are matricea asociată

$$M(c, \mathcal{R}_X, \mathcal{R}_Y) = \begin{pmatrix} 0_{m,n} & \mathbb{A}_0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

unde $\mathbb{A}_0$ este matricea coordonatelor punctului Q_0 în raport cu reperul $\mathcal{R}_Y$. Ecuația matriceală este

$$Y = \mathbb{A}_0.$$

2. Identitatea, $\text{id}_X : X \rightarrow X$ are în raport cu perechea de repere $\mathcal{R}'_X = \{A'_0; \mathcal{B}'\}$ și $\mathcal{R}_X = \{A_0; \mathcal{B}\}$ matricea asociată

$$M(\text{id}_X, \mathcal{R}'_X, \mathcal{R}_X) = \begin{pmatrix} S & S_0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = M(\mathcal{R}'_X, \mathcal{R}_X),$$

unde S este matricea schimbării de bază de la $\mathcal{B}$ la $\mathcal{B}'$, iar S_0 este matricea coordonatelor punctului A'_0 în raport cu reperul $\mathcal{R}_X$ (vezi și ecuația (1.11)).

3. Translația de vector $\bar{u} \in \vec{X}$, $t_{\bar{u}} : X \rightarrow X$ are $\vec{t}_{\bar{u}} = \text{Id}_{\vec{X}}$. Astfel, în raport cu reperul $\mathcal{R}_X$ are matricea asociată

$$M(t_{\bar{u}}, \mathcal{R}_X) = \begin{pmatrix} I_n & \mathbb{A}_0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (1.15)$$

unde $\mathbb{A}_0$ este matricea coordonatelor vectorului $\overrightarrow{A_0 t_{\bar{u}}(A_0)} = \bar{u}$ în baza $\mathcal{B}_{\vec{X}}$. Ecuația matriceală este

$$Y = X + \mathbb{A}_0,$$

iar pe componente

$$y^i = x^i + u^i, \quad i = 1, \dots, n,$$

unde $\bar{u} = \sum_{i=1}^n u^i \bar{e}_i$.

4. Omotetia de centru P și raport $\lambda \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$, $h_{P,\lambda} : X \rightarrow Y$, are $\vec{h}_{P,\lambda} = \lambda \text{Id}_{\vec{X}}$. Astfel, în raport cu reperul $\mathcal{R}_X$ are matricea asociată

$$M(h_{P,\lambda}, \mathcal{R}_X) = \begin{pmatrix} \lambda I_n & (1 - \lambda)X_0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (1.16)$$

unde X_0 este matricea coordonatelor punctului P . În adevăr, $\mathbb{A}_0$ este matricea coordonatelor vectorului $\overrightarrow{A_0 h_{P,\lambda}(A_0)} = (1 - \lambda)\overrightarrow{A_0 P}$ în baza $\mathcal{B}_{\vec{X}}$, adică $\mathbb{A}_0 = (1 - \lambda)X_0$. Ecuația matriceală este

$$Y = \lambda X + (1 - \lambda)X_0.$$

5. O formă afină $f : X \rightarrow \mathbb{K}$ are matricea asociată în raport cu reperul $\mathcal{R}_X$,

$$M(f, \mathcal{R}_X) = \begin{pmatrix} \mathbb{A} & a_0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

unde $\mathbb{A} \in \mathcal{M}_{1,n}(\mathbb{K})$ este matricea asociată lui $\vec{f}$ în baza $\mathcal{B}_{\vec{X}}$, iar $a_0 = f(A_0)$. Ecuația matriceală este

$$y = \mathbb{A}X + a_0.$$

Propoziția 1.38

- (i) Matricea asociată compunerii a două morfisme afine este produsul matricelor asociate celor două morfisme. Concret, dacă $f : X \rightarrow Y$ și $g : Y \rightarrow Z$ sunt morfisme afine și fixăm reperele carteziane $\mathcal{R}_X, \mathcal{R}_Y, \mathcal{R}_Z$, atunci

$$M(g \circ f, \mathcal{R}_X, \mathcal{R}_Z) = M(g, \mathcal{R}_Y, \mathcal{R}_Z) \cdot M(f, \mathcal{R}_X, \mathcal{R}_Y).$$

- (ii) Matricea asociată inversei unui morfism afin bijectiv este inversa matricei asociate acelui morfism. Concret, dacă $f : X \rightarrow Y$ este un morfism afin bijectiv și fixăm reperele carteziane $\mathcal{R}_X, \mathcal{R}_Y$, atunci

$$M(f^{-1}, \mathcal{R}_Y, \mathcal{R}_X) = M(f, \mathcal{R}_X, \mathcal{R}_Y)^{-1}.$$

- (iii) Dacă $f : X \rightarrow Y$ este un morfism afin și fixăm reperele carteziane $\mathcal{R}_X, \mathcal{R}'_X, \mathcal{R}_Y, \mathcal{R}'_Y$, atunci

$$M(f, \mathcal{R}_X, \mathcal{R}_Y) = M(\text{id}_Y, \mathcal{R}_Y, \mathcal{R}'_Y)^{-1} \circ M(f, \mathcal{R}'_X, \mathcal{R}'_Y) \circ M(\text{id}_X, \mathcal{R}_X, \mathcal{R}'_X).$$

1.11 Paralelismul subspațiilor afine. Proiecții și simetrii

Paralelismul subspațiilor afine se definește prin analogie cu noțiunea de paralelism din spațiile geometrice cu două și trei dimensiuni.

Definiția 1.39

Fie $\mathcal{A} = (X, \vec{X}, \phi)$ un $\mathbb{K}$ -spațiu afin și X', X'' subspații afine în X .

- (i) Spunem că subspațiile afine X' și X'' sunt *paralele* și notăm $X' \parallel X''$ dacă $\vec{X'} = \vec{X''}$.

- (ii) Spunem că X' este *paralel în sens larg cu X''* și notăm $X' \triangleleft X''$ dacă $\vec{X}' \subset \vec{X}''$.
s.v.

Observația 1.40

1. Relația de paralelism pe mulțimea subspațiilor afine ale unui spațiu afın dat este o relație de echivalență.
2. Relația de paralelism în sens larg pe mulțimea subspațiilor afine ale unui spațiu afın dat este o relație de ordine parțială.

Propoziția 1.41

Fie $\mathcal{A} = (X, \vec{X}, \phi)$ un $\mathbb{K}$ -spațiu afın și X', X'' subspații afine în X .

- (i) Dacă $X' \parallel X''$, atunci $X' = X''$ sau $X' \cap X'' = \emptyset$.
- (ii) Dacă $X' \triangleleft X''$, atunci $X' \subset X''$ sau $X' \cap X'' = \emptyset$.
- (iii) Dacă $P \in X$, atunci există și este unic un subspațiu afın prin P paralel cu X' .

Observația 1.42

Într-un spațiu afın dat, un subspațiu afın și un hiperplan afın care nu se intersectează sunt paralele în sens larg.

Propoziția 1.43

Fie $\mathcal{A} = (X, \vec{X}, \phi)$ un $\mathbb{K}$ -spațiu afın și $f \in \mathcal{Dil}(X)$. Dacă Y este un subspațiu afın în X , atunci $f(Y) \parallel Y$.

Exemple de morfisme afine (continuare)

Fie $\mathcal{A} = (X, \vec{X}, \phi)$ un $\mathbb{K}$ -spațiu afın, $Y \subset X$ astfel încât există $V \subset \vec{X}$ cu $\vec{X} = V \oplus \vec{Y}$.
s.a. s.v.

5. Proiecția afınă a lui X pe Y paralelă cu V , $p : X \rightarrow Y$ este definită prin

$$\{p(A)\} = T_A \cap Y,$$

pentru orice $A \in X$, unde $T_A = A + V$. Aplicația liniară asociată este $\vec{p} = \pi_{\vec{Y}} : V \oplus \vec{Y} \rightarrow \vec{Y}$.

6. Simetria afină a lui X față de Y paralelă cu V , $s : X \rightarrow X$ este definită prin

$$s(A) = 2p(A) - A,$$

pentru orice $A \in X$.

Propoziția 1.44

- (i) Orice proiecție afină este un morfism afin *idempotent*, $p \circ p = p$.
- (ii) Orice simetrie afină este un automorfism afin *involutiv*, $s \circ s = \text{id}_X$. Mai mult, $s \circ p = p$.

1.12 Teoreme fundamentale de geometrie afină

Fie $\mathcal{A} = (X, \vec{X}, \phi)$ un $\mathbb{K}$ -spațiu afin și $A, B \in X$. Pentru simplitate, vom folosi notația AB pentru a indica dreapta afină $\langle A, B \rangle_{\text{af}}$.

Teorema 1.45 (Teorema lui Thales)

Fie $\mathcal{A}_n = (X, \vec{X}, \phi)$ un $\mathbb{K}$ -spațiu afin de dimensiune finită $n \geq 1$, $\{H_i\}_{i=1}^3$ trei hiperplane distincte, paralele și $\{d_j\}_{j \in I}$, $I \neq \emptyset$, o familie de drepte neparalele cu H_i , $i = 1, \dots, 3$. Atunci sunt bine definite punctele

$$\{A_j\} = H_1 \cap d_j, \quad \{B_j\} = H_2 \cap d_j, \quad \{C_j\} = H_3 \cap d_j,$$

$j \in I$, iar scalarii $\lambda_j \in \mathbb{K}$ pentru care $\overrightarrow{A_j B_j} = \lambda_j \overrightarrow{A_j C_j}$ sunt toți egali (nu depind de j).

Lema 1.46

Fie $\mathcal{A} = (X, \vec{X}, \phi)$ un $\mathbb{K}$ -spațiu afin și fie $f \in \text{Dil}(X)$, $f \neq \text{id}_X$, și A, B două puncte distincte în X .

- (i) Dacă $f = t_{\vec{u}}$, atunci punctul $f(B)$ este intersecția dreptei prin $f(A)$ paralelă la dreapta afină AB cu dreapta prin B paralelă la dreapta afină $Af(A)$.
- (ii) Dacă $f = h_{P, \lambda}$, atunci punctul $f(B)$, $B \neq P$, este intersecția dreptei prin $f(A)$ paralelă la dreapta afină AB cu dreapta afină PB .

Teorema 1.47 (Teorema lui Pappus)

Fie $\mathcal{A}_2 = (X, \vec{X}, \phi)$ un plan afin și d, d' două drepte distincte din plan. Fie punctele $A, B, C \in d$ și $A', B', C' \in d'$ astfel încât $AB' \parallel A'B$ și $BC' \parallel B'C$. Atunci $AC' \parallel A'C$.

Teorema 1.48 (Teorema lui Desargues)

Fie $\mathcal{A}_n = (X, \vec{X}, \phi)$ un $\mathbb{K}$ -spațiu afin de dimensiune finită $n \geq 2$, în care considerăm triunghiurile (triplele de puncte necoliniare) ABC și $A'B'C'$ astfel încât vârfurile lor sunt distincte, iar laturile lor sunt respectiv paralele: $AB \parallel A'B'$, $BC \parallel B'C'$, $CA \parallel C'A'$. Atunci dreptele AA' , BB' , CC' sunt concurente sau paralele.

Teorema 1.49 (Caracterizarea dilatărilor)

Fie $\mathcal{A} = (X, \vec{X}, \phi)$ un $\mathbb{K}$ -spațiu afin de dimensiune finită $n \geq 2$ și $f : X \rightarrow X$ o aplicație bijectivă. Atunci f este o dilatare a lui X dacă și numai dacă, pentru orice dreaptă afină d din X , $f(d)$ este o dreaptă afină în X paralelă cu d .

1.13 EXERCITII**Morfisme afine. Generalități**

Fie $\mathcal{A} = (X, \vec{X}, \phi)$ și $\mathcal{B} = (Y, \vec{Y}, \psi)$ două $\mathbb{K}$ -spații afine.

Exercițiul 1.46

Să se arate că următoarele afirmații sunt echivalente:

- (1) $f : X \rightarrow Y$ este un morfism afin,
- (2) pentru un punct $P \in X$, are loc $f_P \in L(T_P(X), T_{f(P)}(Y))$, unde $f_P(Q) = f(Q)$, pentru orice $Q \in T_P(X)$.
- (3) pentru orice punct $P \in X$, are loc $f_P \in L(T_P(X), T_{f(P)}(Y))$.

Soluție. Vom arăta că $(1) \Rightarrow (3) \Rightarrow (2) \Rightarrow (1)$.

Pentru $(1) \Rightarrow (3)$, vezi și Teorema 1.2. Fie $P \in X$, fixat arbitrar. Dacă $Q \in T_P(X) = X$, și $f_P : T_P(X) \rightarrow T_{f(P)}(Y)$, atunci

$$f_P(Q) = f(Q) = f(P + \vec{PQ}) = f(P) + \vec{f}(\vec{PQ}) = \psi_{f(P)}^{-1}(\vec{f}(\phi_P(Q))),$$

deci $f_P = \psi_{f(P)}^{-1} \circ \overrightarrow{f} \circ \phi_P$. Cum

$$\psi_{f(P)}^{-1} \in L(\overrightarrow{Y}, T_{f(P)}Y), \quad \overrightarrow{f} \in L(\overrightarrow{X}, \overrightarrow{Y}), \quad \phi_P \in L(T_PX, \overrightarrow{X}),$$

deducem că $f_P \in L(T_PX, T_{f(P)}Y)$. Cum P era fixat arbitrar, rezultă că (3) are loc.

Evident, (3) $\Rightarrow$ (2).

Pentru (2) $\Rightarrow$ (1), dacă $P \in X$ astfel încât $f_P \in L(T_PX, T_{f(P)}Y)$, atunci

$$\begin{aligned} \overrightarrow{f(R)f(S)} &= \overrightarrow{f(P)f(S)} - \overrightarrow{f(P)f(R)} = \psi_{f(P)}(f_P(S)) - \psi_{f(P)}(f_P(R)) \\ &= \psi_{f(P)}(f_P(S) - f_P(R)) = \psi_{f(P)}(f_P(S - R)) \\ &= \psi_{f(P)}(f_P(\phi_P^{-1}(\phi_P(S) - \phi_P(R)))) \\ &= \psi_{f(P)}(f_P(\phi_P^{-1}(\overrightarrow{PS} - \overrightarrow{PR}))) \\ &= \psi_{f(P)}(f_P(\phi_P^{-1}(\overrightarrow{RS}))), \end{aligned}$$

pentru orice $R, S \in X$. Cum

$$\psi_{f(P)} \in L(T_{f(P)}Y, \overrightarrow{Y}), \quad f_P \in L(T_PX, T_{f(P)}Y), \quad \phi_P^{-1} \in L(\overrightarrow{X}, T_PX),$$

rezultă că f este un morfism afin cu $\overrightarrow{f} = \psi_{f(P)} \circ f_P \circ \phi_P^{-1}$. $\square$

Exercițiul 1.47

Să se arate că dacă $f : X \rightarrow Y$ este un morfism afin, atunci transformarea liniară asociată este unică.

Soluție. Fixăm $\overline{u} \in \overrightarrow{X}$. Există $P, Q \in X$ astfel încât $\overline{u} = \overrightarrow{PQ}$. Dacă $S, T \in L(\overrightarrow{X}, \overrightarrow{Y})$ sunt transformări liniare asociate lui f (vezi Definiția 1.34), atunci

$$\begin{aligned} S(\overline{u}) &= S(\overrightarrow{PQ}) = \overrightarrow{f(P)f(Q)} = T(\overrightarrow{PQ}) \\ &= T(\overline{u}). \end{aligned}$$

Cum $\overline{u} \in \overrightarrow{X}$ este fixat arbitrar deducem că $S = T$. $\square$

Exercițiul 1.48 (Unicitatea)

Fie $f, g : X \rightarrow Y$ două morfisme afine. Să se arate că dacă există $P \in X$ astfel încât $f(P) = g(P)$ și $\overrightarrow{f} = \overrightarrow{g}$, atunci $f = g$.

Soluție. Fie $Q \in X$. Atunci

$$\begin{aligned} f(Q) &= f(P + \overrightarrow{PQ}) = f(P) + \overrightarrow{f}(\overrightarrow{PQ}) \\ &= g(P) + \overrightarrow{g}(\overrightarrow{PQ}) = g(P + \overrightarrow{PQ}) \\ &= g(Q). \end{aligned}$$

Cum Q este fixat arbitrar, rezultă că $f = g$. $\square$

Exercițiul 1.49 (Existența)

Fie $T \in L(\vec{X}, \vec{Y})$, $P \in X$ și $Q \in Y$. Să se arate că există un unic morfism afin $f : X \rightarrow Y$ astfel încât $f(P) = Q$ și $\vec{f} = T$.

Soluție. Unicitatea rezultă din Exercițiul 1.48.

Pentru existență, definim $f : X \rightarrow Y$ prin

$$f(A) = Q + T(\overrightarrow{PA}), \forall A \in X. \quad (1.17)$$

Evident, $f(P) = Q$. Mai mult, cum $T \in L(\vec{X}, \vec{Y})$, avem

$$\overrightarrow{f(A)f(B)} = \overrightarrow{Qf(B)} - \overrightarrow{Qf(A)} = T(\overrightarrow{PB}) - T(\overrightarrow{PA}) = T(\overrightarrow{AB}),$$

pentru orice $A, B \in X$.

Astfel aplicația $f : X \rightarrow Y$ definită în (1.17) este unicul morfism afin cu $f(P) = Q$ și $\vec{f} = T$. $\square$

Exercițiul 1.50

Fie $P_1, \dots, P_n$ puncte afin independente în spațiul afin X și $Q_1, \dots, Q_n \in Y$.

- (1) Să se arate că există un morfism afin $f : X \rightarrow Y$ astfel încât $f(P_i) = Q_i$, $i = 1, \dots, n$.
- (2) Să se arate că dacă $\dim X = n - 1$, atunci morfismul de la (1) este unic. În particular, dacă un morfism afin $f : X_{n-1} \rightarrow X_{n-1}$ are n puncte fixe afin independente, atunci $f = \text{id}_X$.

Soluție. Pentru (1), cum punctele $P_1, \dots, P_n$ sunt afin independente, vectorii $\overrightarrow{P_1P_2}, \dots, \overrightarrow{P_1P_n}$ sunt liniar independenți. Rezultă că există o aplicație liniară $T \in L(\vec{X}, \vec{Y})$ astfel încât

$$T(\overrightarrow{P_1P_i}) = \overrightarrow{Q_1Q_i}, \quad \forall i = 1, \dots, n.$$

Facem observația că nu este necesar ca punctele $Q_1, \dots, Q_n$ să fie afin independente sau distincte. De asemenea, în general, aplicația liniară T nu este unică cu această proprietate.

Ținând cont de Exercițiul 1.49, considerăm morfismul afin $f : X \rightarrow Y$ cu $f(P_1) = Q_1$ și $\vec{f} = T$. Avem

$$f(P_i) = f(P_1 + \overrightarrow{P_1P_i}) = f(P_1) + \vec{f}(\overrightarrow{P_1P_i}) = Q_1 + \overrightarrow{Q_1Q_i} = Q_i,$$

pentru orice $i = 1, \dots, n$.

Pentru (2), dacă $\dim X = n - 1$, atunci $\{\overrightarrow{P_1P_2}, \dots, \overrightarrow{P_1P_n}\}$ reprezintă o bază pentru $\vec{X}$. În acest caz există o unică aplicație liniară T cu

$$T(\overrightarrow{P_1P_i}) = \overrightarrow{Q_1Q_i}, \quad \forall i = 1, \dots, n.$$

Evident, orice morfism afin care transformă P_i în Q_i , $i = 1, \dots, n$, are pe T ca aplicație liniară asociată, deci din Exercițiul 1.48 rezultă unicitatea. $\square$

Exercițiul 1.51

Să se arate că dacă X_1, X_2 sunt două $\mathbb{K}$ -spații afine, atunci proiecțiile $p_i : X_1 \times X_2 \rightarrow X_i$, $i = 1, 2$, sunt morfisme afine.

Soluție. Fie $(P_1, P_2), (Q_1, Q_2) \in X_1 \times X_2$. Avem

$$\overrightarrow{p_i(P_1, P_2)p_i(Q_1, Q_2)} = \overrightarrow{P_i Q_i} = \pi_i(\overrightarrow{P_1 Q_1}, \overrightarrow{P_2 Q_2}) = \pi_i(\overrightarrow{(P_1, P_2)(Q_1, Q_2)}),$$

deci p_i este un morfism afîn, având drept aplicație liniară asociată proiecția $\pi_i : \overrightarrow{X_1} \times \overrightarrow{X_2} \rightarrow \overrightarrow{X_i}$, $i = 1, 2$. $\square$

Exercițiul 1.52

Fie X un $\mathbb{K}$ -spațiu afîn, $V \subset \overrightarrow{X}$, X/V spațiul afîn cât corespunzător și $p : X \rightarrow X/V$ proiecția canonică, $p(P) = \hat{P}$, pentru orice $P \in X$. Să se arate că:

- (1) proiecția p este un morfism afîn, având drept aplicație liniară asociată proiecția $\pi : \overrightarrow{X} \rightarrow \overrightarrow{X}/V$, $\pi(\bar{u}) = \bar{u} + V$, pentru orice $\bar{u} \in \overrightarrow{X}$.
- (2) structura afină pe X/V este unica în raport cu care p este un morfism afîn cu aplicația liniară asociată π .

Soluție. Pentru (1), fie $P, Q \in X$. Avem

$$\overrightarrow{p(P)p(Q)} = \overrightarrow{\hat{P}\hat{Q}} = \overrightarrow{PQ} + V = \pi(\overrightarrow{PQ}),$$

deci p este un morfism afîn cu $\vec{p} = \pi$.

Pentru (2), fie ψ o altă structură afină pe X/V pentru care p este un morfism afîn cu aplicația liniară asociată π . Fie $P, Q \in X$. Avem

$$\psi(\hat{P}, \hat{Q}) = \psi(p(P), p(Q)) = \vec{p}(\overrightarrow{PQ}) = \pi(\overrightarrow{PQ}) = \overrightarrow{PQ} + V = \overrightarrow{\hat{P}\hat{Q}} = \hat{\phi}(\hat{P}, \hat{Q}),$$

(vezi și Exercițiul 1.3). Cum P, Q sunt fixați arbitrar, putem concludiona. $\square$

Exercițiul 1.53

Fie $\mathcal{A} = (X, \overrightarrow{X}, \phi)$ un $\mathbb{K}$ -spațiu afîn. Un morfism afîn $p : X \rightarrow X$ idempotent ($p^2 = p$) se numește *proiector afîn*. Să se arate că orice proiector afîn este o proiecție afină.

Soluție. Se verifică imediat că dacă $p^2 = p$, atunci $\vec{p}^2 = \vec{p}$. De aici,

$$\overrightarrow{X} = \text{Ker } \vec{p} \oplus \text{Im } \vec{p},$$

orice $\bar{u} \in \overrightarrow{X}$ scriindu-se în mod unic sub forma

$$\bar{u} = (\bar{u} - \vec{p}(\bar{u})) + \vec{p}(\bar{u}). \quad (1.18)$$

Fie $Y = \text{Im } p$ și $V = \text{Ker } \vec{p}$. Folosind Exercițiul 1.48, vom arăta că p este proiecția lui X pe Y , paralelă cu V , notată $p_Y : X \rightarrow Y$.

Fie $B \in Y = \text{Im } p$, fixat. Atunci există $A \in X$ astfel încât $B = p(A)$. De aici, cum p este idempotent, $p(B) = p^2(A) = p(A) = B$, deci $p(B) = p_Y(B)$.

Să arătăm că $\vec{p} = \vec{p}_Y$. Fie $\bar{u} \in \vec{X}$, fixat arbitrar. Din (1.18) avem

$$\vec{p}_Y(\bar{u}) = \vec{p}_Y((\bar{u} - \vec{p}(\bar{u})) + \vec{p}(\bar{u})) = \vec{p}(\bar{u}),$$

și concluzionăm. □

Exercițiul 1.54

Fie $\mathcal{A} = (X, \vec{X}, \phi)$ un $\mathbb{K}$ -spațiu afin, $\text{char } \mathbb{K} \neq 2$. Să se arate că dacă $s : X \rightarrow X$ este un endomorfism afin involutiv ($s^2 = \text{id}_X$), atunci s este o simetrie afină.

Soluție. Considerăm

$$\begin{aligned} p : X &\longrightarrow X, \\ P &\longrightarrow p(P) = \frac{1}{2}P + \frac{1}{2}s(P). \end{aligned}$$

Se verifică imediat că

$$\overrightarrow{p(P)p(Q)} = \frac{1}{2}(\vec{s} + \text{Id}_{\vec{X}})(\overrightarrow{PQ}),$$

pentru orice $P, Q \in X$, deci p este un morfism afin cu $\vec{p} = \frac{1}{2}(\vec{s} + \text{Id}_{\vec{X}})$.

De asemenea, folosind $s^2 = \text{id}_X$, obținem

$$\begin{aligned} p^2(P) &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2}P + \frac{1}{2}s(P) \right) + \frac{1}{2}s \left(\frac{1}{2}P + \frac{1}{2}s(P) \right) = \frac{1}{4}P + \frac{1}{2}s(P) + \frac{1}{4}s^2(P) \\ &= \frac{1}{2}P + \frac{1}{2}s(P) = p(P), \end{aligned}$$

pentru orice $P \in X$. De aici, folosind Exercițiul 1.53, deducem că p este proiecția afină a lui X pe $Y = \text{Im } p$ paralelă cu $V = \text{Ker } \vec{p}$. Cum $\overrightarrow{Pp(P)} = \overrightarrow{p(P)s(P)}$, pentru orice $P \in X$, deducem că s este simetria afină a lui X față de Y paralelă cu V . Reamintim că

$$\begin{aligned} Y &= \{P \in X : p(P) = P\} = \{P \in X : s(P) = P\}, \\ V &= \{\bar{u} \in \vec{X} : \vec{p}(\bar{u}) = \bar{0}\} = \{\bar{u} \in \vec{X} : \vec{s}(\bar{u}) = -\bar{u}\}. \end{aligned}$$

□

Exercițiul 1.55 (Puncte fixe)

Fie $f : X \rightarrow X$ un endomorfism afin.

- (1) Să se arate că mulțimea $\text{Fix}(f)$ a punctelor fixe ale lui f este fie un subspațiu afin cu spațiul vectorial director $\text{Ker}(\vec{f} - \text{Id}_{\vec{X}})$, fie mulțimea vidă.

- (2) Să se arate că un endomorfism afin are un singur punct fix dacă și numai dacă $\vec{f}$ nu are ca autovaloare pe 1.

În particular, fie X un spațiu afin n -dimensional raportat la un reper cartezian $\mathcal{R} = \{O; \mathcal{B}\}$. Dacă ecuația matriceală a lui f în raport cu $\mathcal{R}$ este

$$Y = \mathbb{A}X + \mathbb{A}_0,$$

să se arate că f are un singur punct fix dacă și numai dacă $\det(\mathbb{A} - \mathbb{I}_n) \neq 0$.

Soluție. Pentru (1), să presupunem că $\text{Fix}(f) \neq \emptyset$, deci există $P \in X$ astfel încât $f(P) = P$. Vom arăta că

$$\text{Fix}(f) = P + \text{Ker}(\vec{f} - \text{Id}_{\vec{X}}). \quad (1.19)$$

Dacă $\bar{u} \in \text{Ker}(\vec{f} - \text{Id}_{\vec{X}})$, atunci

$$f(P + \bar{u}) = f(P) + \vec{f}(\bar{u}) = P + \bar{u},$$

deci $P + \text{Ker}(\vec{f} - \text{Id}_{\vec{X}}) \subset \text{Fix}(f)$.

Dacă $Q \in \text{Fix}(f)$, atunci $f(Q) = Q$, deci

$$\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{f(P)f(Q)} = \vec{f}(\overrightarrow{PQ}),$$

adică $\overrightarrow{PQ} \in \text{Ker}(\vec{f} - \text{Id}_{\vec{X}})$ și $Q \in P + \text{Ker}(\vec{f} - \text{Id}_{\vec{X}})$, deci $\text{Fix}(f) \subset P + \text{Ker}(\vec{f} - \text{Id}_{\vec{X}})$.

Pentru (2), să presupunem că f admite un singur punct fix P , i.e. $\text{Fix}(f) = \{P\}$.

Ținând cont de (1), rezultă că $\text{Ker}(\vec{f} - \text{Id}_{\vec{X}}) = \{\vec{0}\}$, adică 1 nu este autovaloare pentru $\vec{f}$.

Reciproc, dacă 1 nu este autovaloare pentru $\vec{f}$, atunci $\text{Ker}(\vec{f} - \text{Id}_{\vec{X}}) = \{\vec{0}\}$. Astfel, dacă f admite un punct fix, atunci din (1.19) rezultă că acesta este unic. Mai rămâne să determinăm $P \in X$ astfel încât $f(P) = P$. Fixăm $Q \in X$ și căutăm $\bar{u} \in \vec{X}$ astfel încât $P = Q + \bar{u}$. Din $f(P) = P$ deducem

$$\overrightarrow{Qf(Q)} = -(\vec{f} - \text{Id}_{\vec{X}})(\bar{u}). \quad (1.20)$$

Cum $\text{Ker}(\vec{f} - \text{Id}_{\vec{X}}) = \{\vec{0}\}$, avem că $\vec{f} - \text{Id}_{\vec{X}}$ este inversabilă, deci există și este unic $\bar{u}$ care verifică (1.20). În concluzie, $P = Q + \bar{u}$ este unicul punct fix pentru f .

În cazul finit dimensional, ecuația mulțimii punctelor fixe este dată de

$$(\mathbb{A} - \mathbb{I}_n)X = -\mathbb{A}_0,$$

sistem ce are soluție unică dacă și numai dacă $\det(\mathbb{A} - \mathbb{I}_n) \neq 0$. □

Exercițiul 1.56

Fie $\mathcal{A} = (X, \vec{X}, \phi)$ un spațiu afin real și $f : X \rightarrow X$ un endomorfism afin. Să se arate că dacă există $n \in \mathbb{N}^*$ astfel încât f^n are un punct fix, atunci f are un punct fix.

Soluție. Fie $P \in X$ astfel încât $f^n(P) = P$. Vom arăta că echibaricentrul sistemului de puncte $\{P, f(P), \dots, f^{n-1}(P)\}$ este punct fix pentru f . În adevăr,

$$\begin{aligned} f\left(\frac{1}{n}P + \frac{1}{n}f(P) + \dots + \frac{1}{n}f^{n-1}(P)\right) &= \frac{1}{n}f(P) + \frac{1}{n}f^2(P) + \dots + \frac{1}{n}f^n(P) \\ &= \frac{1}{n}P + \frac{1}{n}f(P) + \dots + \frac{1}{n}f^{n-1}(P). \end{aligned}$$

□

EXERCITIIL (Morfisme afine în context finit dimensional)

Exercițiul 1.57

Să se verifice dacă următoarele aplicații sunt sau nu morfisme afine:

- (1) $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, $f(z) = \bar{z}$,
- (2) $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, $f(x^1, x^2) = (x^1, -x^2)$,
- (3) $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$, $f(x^1, x^2, x^3) = (1 + x^1, \sqrt{e})$.

În primul caz, se vor considera atât structura de spațiu afîn a lui $\mathbb{C}$ peste $\mathbb{C}$, cât și cea peste $\mathbb{R}$. Structurile afine considerate pe spațiile $\mathbb{R}^2$ și $\mathbb{R}^3$ sunt cele canonice.

Soluție. Pentru (1), dacă $\lambda, z_1, z_2 \in \mathbb{C}$, atunci

$$f(\lambda z_1 + (1 - \lambda)z_2) = \overline{\lambda z_1 + (1 - \lambda)z_2} \quad \text{și} \quad \lambda f(z_1) + (1 - \lambda)f(z_2) = \lambda \bar{z}_1 + (1 - \lambda)\bar{z}_2.$$

Astfel, $f(\lambda z_1 + (1 - \lambda)z_2) = \lambda f(z_1) + (1 - \lambda)f(z_2)$, pentru orice $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$, dacă și numai dacă $\lambda \in \mathbb{R}$, deci f nu este un endomorfism afîn al lui $\mathbb{C}$ peste $\mathbb{C}$, dar este un endomorfism afîn al lui $\mathbb{C}$ peste $\mathbb{R}$.

Pentru (2), ecuațiile lui f în raport cu reperul canonic pot fi scrise sub forma

$$\begin{pmatrix} y^1 \\ y^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \end{pmatrix},$$

deci f este un morfism afîn.

Pentru (3), ecuațiile lui f în raport cu reperele canonice pot fi scrise sub forma

$$\begin{pmatrix} y^1 \\ y^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{e} \end{pmatrix},$$

deci f este un morfism afîn.

□

Exercițiul 1.58

În spațiul afîn real $\mathcal{A}_3 = (X, \vec{X}, \phi)$ raportat la reperul cartezian $\mathcal{R} = \{O; \bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3\}$ se consideră punctele

$$\begin{aligned} P_1(0, -1, 0), \quad P_2(0, -2, 0), \quad P_3(-1, 0, -1), \quad P_4(0, 0, 1), \\ Q_1(2, -1, -2), \quad Q_2(2, -2, -3), \quad Q_3(3, 1, -5), \quad Q_4(2, -1, 1). \end{aligned}$$

- (1) Să se arate că există un unic morfism afin $f : X \rightarrow X$ determinat de condițiile $f(P_i) = Q_i$, $i = 1, \dots, 4$.
- (2) Să se verifice, fără a stabili ecuațiile morfismului f , că f este bijectivă.
- (3) Să se determine $\vec{f}$ și coordonatele lui $f(O)$ în reperul $\mathcal{R}$.
- (4) Să se determine matricea asociată lui f în raport cu reperul $\mathcal{R}$.
- (5) Să se determine punctele fixe ale lui f .

Soluție. Pentru (1), ținând cont de Exercițiul 1.50, este suficient să verificăm că punctele P_1, P_2, P_3, P_4 sunt afin independente. În adevăr,

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0.$$

Pentru (2) este suficient să verificăm că punctele Q_1, Q_2, Q_3, Q_4 sunt afin independente. În adevăr,

$$\begin{vmatrix} 2 & 2 & 3 & 2 \\ -1 & -2 & 1 & -1 \\ -2 & -3 & -5 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -3 \neq 0.$$

Pentru (3), avem $\vec{f}(\overrightarrow{P_1 P_i}) = \overrightarrow{Q_1 Q_i}$, $i = 2, 3, 4$, adică

$$\begin{cases} \vec{f}(0, -1, 0) &= (0, -1, -1) \\ \vec{f}(-1, 1, -1) &= (1, 2, -3) \\ \vec{f}(0, 1, 1) &= (0, 0, 3). \end{cases} \quad (1.21)$$

și deducem că matricea asociată lui $\vec{f}$ în raport cu baza $\mathcal{B} = \{\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3\}$ este

$$\mathbb{A} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Pentru a determina $f(O)$, folosim relația $\vec{f}(\overrightarrow{OP_1}) = \overrightarrow{f(O)Q_1}$ și obținem $f(O) = O'(2, 0, -1)$, deci $\mathbb{A}_0 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$.

Pentru (4), folosind $\mathbb{A}$ și $\mathbb{A}_0$, obținem că matricea asociată morfismului f în raport cu $\mathcal{R}$ este

$$M(f, \mathcal{R}) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Pentru (5), reamintim că punctele fixe ale morfismului afin f sunt soluțiile sistemului $(\mathbb{A} - \mathbb{I}_3)X = -\mathbb{A}_0$. Obținem un singur punct fix $M(1, -1, 0)$.

□

Exercițiul 1.59

În spațiul afîn real $\mathcal{A}_3 = (X, \vec{X}, \phi)$ raportat la un reper afîn $\mathcal{R} = \{E_0, E_1, E_2, E_3\}$ se consideră morfismul afîn $f : X \rightarrow X$ definit prin

$$\begin{aligned} f(E_0) &= A_0(2, 4, 2), \\ f(E_1) &= A_1(1, 4, 4), \\ f(E_2) &= A_2(2, 3, 0), \\ f(E_3) &= A_3(2, 2, 1). \end{aligned}$$

- (1) Să se arate că f este un izomorfism afîn.
- (2) Să se scrie ecuația matriceală a lui f în raport cu reperul cartezian $\mathcal{R}$.
- (3) Să se determine punctele fixe ale lui f .
- (4) Să se determine $f(d)$ și $f(\pi_\lambda)$, $\lambda \in \mathbb{R}$, unde

$$d : \frac{x^1 - 1}{1} = \frac{x^2}{-1} = \frac{x^3 + 1}{1}, \quad \pi_\lambda : \lambda x^1 + x^2 + x^3 = 0.$$

Să se verifice că $f(d)$ este paralelă cu $f(\pi_\lambda)$ dacă și numai dacă d este paralelă cu π_λ .

- (5) Să se determine translația $t_{\bar{u}}$ și centro-afinitatea g_P de centru $P(-1, 0, 1)$ pentru care $f = t_{\bar{u}} \circ g_P$.

Soluție. Pentru (1), este suficient să verificăm că $\{A_0, A_1, A_2, A_3\}$ sunt afîn independente. În adevăr,

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 & 2 \\ 4 & 4 & 3 & 2 \\ 2 & 4 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -3 \neq 0.$$

Pentru (2), din $f(E_0) = A_0(2, 4, 2)$ și

$$\begin{cases} \vec{f}(\overrightarrow{E_0 E_1}) = \overrightarrow{A_0 A_1} = (-1, 0, 2) \\ \vec{f}(\overrightarrow{E_0 E_2}) = \overrightarrow{A_0 A_2} = (0, -1, -2) \\ \vec{f}(\overrightarrow{E_0 E_3}) = \overrightarrow{A_0 A_3} = (0, -2, -1), \end{cases} \quad (1.22)$$

deducem că ecuațiile lui f în raport cu $\mathcal{R}$ sunt

$$\begin{pmatrix} y^1 \\ y^2 \\ y^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -2 \\ 2 & -2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}. \quad (1.23)$$

Pentru (3), avem $\text{Fix}(f) = \{P \in X / f(P) = P\}$ și, folosind (1.23), deducem că $\text{Fix}(f)$ este dreapta de ecuații

$$\begin{cases} x^1 - 1 = 0 \\ x^2 + x^3 - 2 = 0. \end{cases}$$

Pentru (4), cum f este un izomorfism afin, avem că dacă $\{A; \bar{u}\}$ este un reper afin pentru d , atunci $\{f(A), \vec{f}(\bar{u})\}$ este un reper afin pentru $f(d)$. Avem $A(1, 0, -1) \in d$ și $\bar{u} = (1, -1, 1)$ și, folosind ecuațiile (1.23) și (1.22), obținem $f(A) = M(1, 6, 5)$ și $\vec{f}(\bar{u}) = (-1, -1, 3)$, deci ecuațiile lui $f(d)$ în raport cu reperul $\mathcal{R}_0$ sunt

$$f(d): \quad \frac{x^1 - 1}{-1} = \frac{x^2 - 6}{-1} = \frac{x^3 - 5}{3}.$$

Analog, considerăm reperul cartezian

$$\{E_0(0, 0, 0); \bar{u}_1 = (1, 0, -\lambda), \bar{u}_2 = (0, 1, -1)\}$$

pentru π_λ și avem

$$\{f(E_0) = A_0(2, 4, 2); \vec{f}(\bar{u}_1) = (-1, 2\lambda, 2 + \lambda), \vec{f}(\bar{u}_2) = (0, 1, -1)\},$$

reper cartezian pentru $f(\pi_\lambda)$. Obținem ecuația lui $f(\pi_\lambda)$ în raport cu reperul $\mathcal{R}$,

$$f(\pi_\lambda): \quad (3\lambda + 2)x^1 + x^2 + x^3 - (6\lambda + 10) = 0.$$

Reamintim și faptul că ecuațiile pentru $f(d)$ și $f(\pi_\lambda)$ pot fi obținute folosind ecuațiile inversei f^{-1} a lui f .

Dreapta d este paralelă cu π_λ dacă și numai dacă $\bar{u}, \bar{u}_1, \bar{u}_2$ sunt liniar dependenți, adică dacă și numai dacă $\lambda = 0$. Analog, se verifică faptul că $f(d)$ este paralelă cu $f(\pi_\lambda)$ dacă și numai dacă $\lambda = 0$.

Pentru (5), din $g(P) = P$ și $f = t_{\bar{u}} \circ g_P$, avem

$$\bar{u} = \overrightarrow{Pf(P)} = (4, 2, -2).$$

De aici, cum $g_P = t_{-\bar{u}} \circ f$, deducem că ecuațiile lui g_P în raport cu reperul $\mathcal{R}_0$ sunt

$$\begin{pmatrix} y^1 \\ y^2 \\ y^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -2 \\ 2 & -2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

□

Exercițiul 1.60

În spațiul afin real $\mathcal{A}_3 = (X, \vec{X}, \phi)$ raportat la reperul cartezian $\mathcal{R} = \{O; \bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3\}$ se consideră

$$O'(2, -1, 2), \quad B(2, -4, 5), \quad C(6, -8, 1), \quad A = \frac{3}{4}B + \frac{1}{4}C$$

și $\bar{u} = (1, -1, 2)$.

- (1) Să se determine ecuațiile translației de vector $\bar{u}$, $t_{\bar{u}}: X \rightarrow X$, în raport cu reperul $\mathcal{R}$.
- (2) Să se determine ecuațiile omotetiei de centru O' și raport $\frac{5}{2}$, $h_{O', \frac{5}{2}}: X \rightarrow X$, în raport cu reperul $\mathcal{R}$.

- (3) Să se determine ecuațiile simetriei față de O' , $s_{O'} : X \rightarrow X$, în raport cu reperul $\mathcal{R}$.
- (4) Să se determine ecuațiile centro-afinității de centru O' , $f_{O'} : X \rightarrow X$, pentru care

$$\begin{aligned}\overrightarrow{f_{O'}}(\bar{e}_1) &= \bar{e}_1 + 2\bar{e}_2 - \bar{e}_3 \\ \overrightarrow{f_{O'}}(\bar{e}_2) &= 3\bar{e}_1 + \bar{e}_2 + \bar{e}_3 \\ \overrightarrow{f_{O'}}(\bar{e}_3) &= \bar{e}_1 - \bar{e}_2 + \bar{e}_3.\end{aligned}$$

- (5) Să se stabilească coordonatele punctelor $t_{\bar{u}}(A)$, $h_{O', \frac{5}{2}}(A)$, $s_{O'}(A)$ și $f_{O'}(A)$ în raport cu $\mathcal{R}$. Să se indice două moduri diferite în care se pot determina aceste coordonate.

- (6) Fie dreapta $d \subset X$ de ecuații

$$d : \frac{x^1 - 2}{2} = \frac{x^2}{3} = \frac{x^3 + 1}{-1}.$$

Să se determine $t_{\bar{u}}(d)$, $h_{O', \frac{5}{2}}(d)$, $s_{O'}(d)$ și $f_{O'}(d)$.

- (7) Fie planul $\pi \subset X$ de ecuație

$$\pi : x^1 + x^2 + x^3 - 1 = 0$$

Să se determine $t_{\bar{u}}(\pi)$, $h_{O', \frac{5}{2}}(\pi)$, $s_{O'}(\pi)$ și $f_{O'}(\pi)$.

Soluție. Pentru (1), folosind (1.15), ecuațiile translației $t_{\bar{u}}$ sunt date de

$$\begin{pmatrix} y^1 \\ y^2 \\ y^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Pentru (2), folosind (1.16), ecuațiile omotetiei în raport cu reperul dat sunt

$$\begin{pmatrix} y^1 \\ y^2 \\ y^3 \end{pmatrix} = \frac{5}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -3 \\ 3 \\ \frac{2}{-3} \end{pmatrix}.$$

Pentru (3), avem

$$s_{O'}(P) = 2O' - P, \quad \forall P \in X,$$

deci $s_{O'}(O) = O''(4, -2, 4)$, iar ecuațiile simetriei în raport cu reperul dat sunt

$$\begin{pmatrix} y^1 \\ y^2 \\ y^3 \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

Pentru (4), avem $f_{O'}(O) = O' - \overrightarrow{f(OO')} = O'''(1, -2, 3)$, iar ecuațiile centro-afinității în raport cu reperul dat sunt

$$\begin{pmatrix} y^1 \\ y^2 \\ y^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Pentru (5), $A(3, -5, 4)$ și, folosind ecuațiile determinate la (1), (2), (3) și (4), obținem

$$\begin{aligned} t_{\bar{u}}(A) &= A_1(4, -6, 6), & h_{O', \frac{5}{2}}(A) &= A_2(9/2, -11, 7), \\ s_{O'}(A) &= A_3(1, 3, 0), & f_{O'}(A) &= A_4(-7, -5, -1). \end{aligned}$$

Calculul se poate face și considerând

$$t_{\bar{u}}(A) = t_{\bar{u}}\left(\frac{3}{4}B + \frac{1}{4}C\right) = \frac{3}{4}t_{\bar{u}}(B) + \frac{1}{4}t_{\bar{u}}(C).$$

Pentru (6), considerăm $\{M(2, 0, -1); \bar{v} = (2, 3, -1)\}$ un reper cartezian pentru d . Avem

$$t_{\bar{u}}(M)(3, -1, 1), \quad h_{O', \frac{5}{2}}(M)(2, \frac{3}{2}, -\frac{11}{2}), \quad s_{O'}(M)(2, -2, 5), \quad f_{O'}(M)(2, 3, 0)$$

și

$$\overrightarrow{t_{\bar{u}}}(\bar{v}) = \bar{v}, \quad \overrightarrow{h_{O', \frac{5}{2}}}(\bar{v}) = \frac{5}{2}\bar{v}, \quad \overrightarrow{s_{O'}}(\bar{v}) = -\bar{v}, \quad \overrightarrow{f_{O'}}(\bar{v}) = (10, 8, 0),$$

deci

$$\begin{aligned} t_{\bar{u}}(d) : \quad & \frac{x^1 - 3}{2} = \frac{x^2 + 1}{3} = \frac{x^3 - 1}{-1}, \\ h_{O', \frac{5}{2}}(d) : \quad & \frac{x^1 - 2}{2} = \frac{x^2 - \frac{3}{2}}{3} = \frac{x^3 + \frac{11}{2}}{-1}, \\ s_{O'}(d) : \quad & \frac{x^1 - 2}{2} = \frac{x^2 + 2}{3} = \frac{x^3 - 5}{-1}, \\ f_{O'}(d) : \quad & \frac{x^1 - 2}{5} = \frac{x^2 - 3}{4} = \frac{x^3}{0}. \end{aligned}$$

Notăm că exercițiul se poate rezolva și folosind ecuațiile parametrice ale dreptei d și ecuațiile transformărilor date.

Pentru (7), se procedează analog cu (6), considerându-se reperul cartezian $\{N(0, 0, 1); \bar{u}_1 = (1, 0, -1), \bar{u}_2 = (0, 1, -1)\}$ pentru π .

Notăm că exercițiul se poate rezolva și folosind ecuațiile parametrice ale planului π și ecuațiile transformărilor date. $\square$

Exercițiul 1.61

În spațiul afin real $\mathcal{A}_3 = (X, \overrightarrow{X}, \phi)$ raportat la reperul cartezian $\mathcal{R} = \{O; \bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3\}$ se consideră punctele $A(1, 0, 0)$, $B(0, 2, 0)$, $C(0, 0, 3)$ și vectorul $\bar{u} = \bar{e}_1 + 2\bar{e}_2 + 2\bar{e}_3$. Pentru $M \in X$ notăm $M' = t_{\bar{u}}(M)$ și $M'' = h_{C, -1/2}(M)$.

- (1) Să se determine coordonatele punctelor A' , B' , A'' , B'' și să se verifice că $A'B'A''B''$ este un trapez.
- (2) Să se compare rezultatele compunerilor $t_{\bar{u}} \circ h_{C, -1/2}$ și $h_{C, -1/2} \circ t_{\bar{u}}$ și să se arate că $t_{\bar{u}} \circ h_{C, \lambda} = h_{C, \lambda} \circ t_{\bar{u}}$ dacă și numai dacă $\bar{u} = \bar{0}$ sau $\lambda = 1$.
- (3) Să se determine $h_{A, -1} \circ h_{B, 2} \circ h_{C, -1/2}$.

Soluție. Pentru (1), $M' = M + \bar{u}$ și $M'' = C - \frac{1}{2}\overrightarrow{CM}$, pentru orice $M \in X$, deci $A'(2, 2, 2)$, $B'(1, 4, 2)$, $A''(-1/2, 0, 9/2)$, $B''(0, -1, 9/2)$. Din Propoziția 1.43 rezultă că $\overrightarrow{A'B'} \parallel \overrightarrow{AB}$ și $\overrightarrow{A''B''} \parallel \overrightarrow{AB}$, deci $\overrightarrow{A'B'} \parallel \overrightarrow{A''B''}$. În adevăr, $\overrightarrow{A'B'} = (-1, 2, 0)$ și $\overrightarrow{A''B''} = (1/2, -1, 0)$, deci $A'B'A''B''$ este un trapez.

Pentru (2), avem

$$\begin{aligned} M(t_{\bar{u}} \circ h_{C, -1/2}) &= M(t_{\bar{u}}) \cdot M(h_{C, -1/2}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} & \frac{9}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} & \frac{13}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

și

$$\begin{aligned} M(h_{C, -1/2} \circ t_{\bar{u}}) &= M(h_{C, -1/2}) \cdot M(t_{\bar{u}}) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} & \frac{9}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & 0 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & -\frac{1}{2} & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} & \frac{7}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

deci $t_{\bar{u}} \circ h_{C, -1/2} \neq h_{C, -1/2} \circ t_{\bar{u}}$.

Cu o altă abordare,

$$t_{\bar{u}} \circ h_{C, \lambda}(M) = C + (\lambda \overrightarrow{CM} + \bar{u}),$$

iar

$$h_{C, \lambda} \circ t_{\bar{u}}(M) = C + \lambda(\overrightarrow{CM} + \bar{u}),$$

pentru orice $M \in X$, deci $t_{\bar{u}} \circ h_{C, \lambda} = h_{C, \lambda} \circ t_{\bar{u}}$ dacă și numai dacă $(1 - \lambda)\bar{u} = \vec{0}$.

Pentru (3),

$$\begin{aligned}
 M(h_{A,-1} \circ h_{B,2} \circ h_{C,-1/2}) &= M(h_{A,-1})M(h_{B,2})M(h_{C,-1/2}) \\
 &= \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} & \frac{9}{2} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{2}{1} \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -9 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},
 \end{aligned}$$

deci $h_{A,-1} \circ h_{B,2} \circ h_{C,-1/2} = t_{\bar{v}}$, unde $\bar{v} = 2\bar{e}_1 + 2\bar{e}_2 - 9\bar{e}_3$. $\square$

Exercițiul 1.62

În planul afin real $\mathcal{A}_2 = (X, \vec{X}, \phi)$ raportat la reperul cartezian $\mathcal{R}_0 = \{O; \bar{e}_1, \bar{e}_2\}$ se consideră dreptele concurente d_1 și d_2 . Notăm cu $p_1 : X \rightarrow d_2$ proiecția lui X pe d_2 paralelă cu d_1 și cu $p_2 : X \rightarrow d_1$ proiecția lui X pe d_1 paralelă cu d_2 . Să se determine expresiile analitice ale acestor proiecții în următoarele situații:

- (1) $d_1 : x^1 - x^2 - 1 = 0$ și $d_2 : x^1 - 2x^2 + 3 = 0$.
- (2) $d_1 : 2x^1 - x^2 + 1 = 0$ și $\{M_2(0, 2); \bar{u}_2 = (1, 1)\}$ este un reper cartezian al dreptei d_2 .
- (3) dreapta d_1 este dată de reperul său cartezian $\{M_1(1, 1); \bar{u}_1 = (2, -3)\}$ și dreapta d_2 de reperul său cartezian $\{M_2(2, -2); \bar{u}_2 = (1, -1)\}$

Soluție. Vom rezolva exercițiul folosind Propoziția 1.38 (iii). Dacă $d_1 \cap d_2 = \{A\}$ și $\bar{u}_1, \bar{u}_2$ reprezintă vectorii directori ai dreptelor d_1 și, respectiv d_2 , putem considera reperul $\mathcal{R} = \{A; \bar{u}_1, \bar{u}_2\}$. În raport cu acesta avem

$$M(p_1, \mathcal{R}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{și} \quad M(p_2, \mathcal{R}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Din Propoziția 1.38 (iii) avem

$$M(p_1, \mathcal{R}_0) = M(\text{id}_X, \mathcal{R}, \mathcal{R}_0) \circ M(p_1, \mathcal{R}) \circ M(\text{id}_X, \mathcal{R}_0, \mathcal{R}).$$

Mai mult, $M(\text{id}_X, \mathcal{R}, \mathcal{R}_0) = M(\mathcal{R}, \mathcal{R}_0)$ este matricea schimbării de reper de la $\mathcal{R}_0$ la $\mathcal{R}$ (vezi și (1.11)).

Pentru (1), avem $A(5, 4)$, $\bar{u}_1 = (1, 1)$, $\bar{u}_2 = (2, 1)$, deci

$$M(\mathcal{R}, \mathcal{R}_0) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 1 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{și} \quad M(\mathcal{R}_0, \mathcal{R}) = M(\mathcal{R}, \mathcal{R}_0)^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -3 \\ 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Astfel,

$$M(p_1, \mathcal{R}_0) = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 3 \\ 1 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{și} \quad M(p_2, \mathcal{R}_0) = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 2 \\ -1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Pentru (3), avem $A(5, -5)$, $\bar{u}_1 = (2, -3)$, $\bar{u}_2 = (1, -1)$ și

$$M(p_1, \mathcal{R}_0) = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ -3 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{și} \quad M(p_2, \mathcal{R}_0) = \begin{pmatrix} -2 & -2 & 5 \\ 3 & 3 & -5 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Notăm că ecuațiile proiecției p_1 se pot obține și determinând efectiv punctul de intersecție dintre d_2 și paralela printr-un punct generic din plan la d_1 . $\square$

Exercițiul 1.63

Într-un spațiu afin real $\mathcal{A}_3 = (X, \vec{X}, \phi)$ raportat la reperul cartezian $\mathcal{R} = \{O; \bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3\}$ se consideră dreapta d și planul π , $d \cap \pi = \{A\}$. Notăm cu $p_d : X \rightarrow \pi$ proiecția lui X pe π paralelă cu d și cu $p_\pi : X \rightarrow d$ proiecția lui X pe d paralelă cu π .

(1) Să se determine expresiile analitice ale proiecției p_d în următoarele situații:

- (i) $\pi : x^1 - 2x^2 - 4x^3 + 5 = 0$, iar vectorul director al dreptei d este $\bar{u} = -\bar{e}_1 + 2\bar{e}_2 - \bar{e}_3$.
- (ii) $\{M(-1, 1, -2); \bar{u}_1 = (-1, 0, 1), \bar{u}_2 = (1, -1, 0)\}$ reprezintă un reper cartezian pentru π , iar vectorul director al dreptei d este $\bar{u} = (-1, 1, 1)$.

(2) Să se determine expresiile analitice ale proiecției p_π în următoarele situații:

- (i) $d : \begin{cases} x^1 = 1 + t \\ x^2 = -1 - t \\ x^3 = 2 - t \end{cases}$ și spațiul vectorial director al lui π este generat de $\bar{u}_1 = (1, 0, 1), \bar{u}_2 = (1, -1, 0)$.
- (ii) $\{M(0, 0, 0); \bar{u} = (1, 3, 1)\}$ reprezintă un reper cartezian pentru d și spațiul vectorial director al lui π este generat de $\bar{u}_1 = (-1, -1, 0), \bar{u}_2 = (1, 0, -1)$.

Soluție. Notăm că exercițiul poate fi rezolvat într-o manieră analoagă cu Exercițiul 1.62, prin calcul matriceal. Vom prezenta aici o abordare diferită.

Pentru (1)(i), fie $P(x_0^1, x_0^2, x_0^3)$ un punct fixat arbitrar în X . Notăm cu $P' = p_d(P)$, intersecția dintre planul π și paralela d' prin P la d . Ecuațiile parametrice ale dreptei d' în raport cu reperul $\mathcal{R}$ sunt

$$d' : \begin{cases} x^1 = x_0^1 - t \\ x^2 = x_0^2 + 2t \\ x^3 = x_0^3 - t. \end{cases}$$

Introducând acestea în ecuația lui π obținem $t = x_0^1 - 2x_0^2 - 4x_0^3 + 5$, deci

$$P'(2x_0^2 + 4x_0^3 - 5, 2x_0^1 - 3x_0^2 - 8x_0^3 + 10, -x_0^1 + 2x_0^2 + 5x_0^3 - 5).$$

Astfel, ecuațiile proiecției p_d în raport cu reperul $\mathcal{R}$ sunt

$$\begin{pmatrix} y^1 \\ y^2 \\ y^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 4 \\ 2 & -3 & -8 \\ -1 & 2 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -5 \\ 10 \\ -5 \end{pmatrix}.$$

Pentru (1)(ii), ecuația planului π este

$$\pi : x^1 + x^2 + x^3 + 2 = 0$$

și, procedând analog, se obțin ecuațiile proiecției p_d ,

$$\begin{pmatrix} y^1 \\ y^2 \\ y^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -2 & -1 & -2 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Pentru (2)(i), fie $P(x_0^1, x_0^2, x_0^3)$ un punct fixat arbitrar în X . Notăm cu $P' = p_\pi(P)$, intersecția dintre dreapta d și planul paralel π' prin P la π . Ecuația planului π' este

$$\pi' : x^1 + x^2 - x^3 - x_0^1 - x_0^2 + x_0^3 = 0,$$

Substituind ecuațiile parametrice ale dreptei d în ecuația planului π' se obține $t = -x_0^1 - x_0^2 + x_0^3 - 2$, deci

$$P'(-x_0^1 - x_0^2 + x_0^3 - 1, x_0^1 + x_0^2 - x_0^3 + 1, -x_0^1 - x_0^2 + x_0^3).$$

Astfel ecuațiile proiecției p_π sunt date de

$$\begin{pmatrix} y^1 \\ y^2 \\ y^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Pentru (2)(ii), procedând analog, se obțin ecuațiile proiecției p_π ,

$$\begin{pmatrix} y^1 \\ y^2 \\ y^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ -3 & 3 & -3 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix}.$$

□

Exercițiul 1.64

Într-un plan afin real $\mathcal{A}_2 = (X, \vec{X}, \phi)$ raportat la un reper cartezian $\mathcal{R} = \{O; \bar{e}_1, \bar{e}_2\}$ se consideră aplicația $f : X \rightarrow X$, definită prin ecuațiile

$$\begin{cases} y^1 = 12x^1 - 4x^2 - 7 \\ y^2 = -9x^1 + 3x^2 + 7. \end{cases}$$

- (1) Să se arate că aplicația f este un morfism afin.
- (2) Să se arate că f are un unic punct fix. Să se determine acesta.
- (3) Să se determine imaginea lui f .

Soluție. Pentru (1), ecuațiile lui f în raport cu reperul $\mathcal{R}$ pot fi scrise sub forma $Y = \mathbb{A}X + \mathbb{A}_0$, unde

$$\mathbb{A} = \begin{pmatrix} 12 & -4 \\ -9 & 3 \end{pmatrix} \quad \text{și} \quad \mathbb{A}_0 = \begin{pmatrix} -7 \\ 7 \end{pmatrix},$$

deci f este un morfism afin.

Pentru (2), avem $\det(\mathbb{A} - \mathbb{I}_2) = -14 \neq 0$, deci f admite un unic punct fix. Acesta este dat de soluția sistemului $(\mathbb{A} - \mathbb{I}_2)X = -\mathbb{A}_0$, adică

$$\begin{cases} 11x^1 - 4x^2 = 7 \\ -9x^1 + 2x^2 = -7, \end{cases}$$

deci $A(1, 1)$ este unicul punct fix al morfismului afin f .

Pentru (3), notăm că $\text{rang } \mathbb{A} = 1$, deci imaginea lui f este o dreaptă. Cum A este punct fix pentru f și $\vec{f}(\bar{e}_1) = (12, -9)$, deducem că imaginea lui f este dreapta de ecuație canonică

$$\frac{x^1 - 1}{4} = \frac{x^2 - 1}{-3}.$$

□

Exercițiul 1.65

Într-un plan afin real $\mathcal{A}_2 = (X, \vec{X}, \phi)$ raportat la un reper cartezian $\mathcal{R} = \{O; \bar{e}_1, \bar{e}_2\}$ se consideră morfismul afin $f : X \rightarrow X$ de ecuații

$$\begin{cases} y^1 = 3x^1 + x^2 - 6 \\ y^2 = x^1 + 3x^2 + 9. \end{cases}$$

- (1) Să se arate că f are un unic punct fix și să se determine acesta.
- (2) Să se scrie ecuațiile dreptelor care rămân invariante prin morfismul f .

Soluție. Pentru (1), avem

$$\mathbb{A} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \quad \text{și} \quad \mathbb{A}_0 = \begin{pmatrix} -6 \\ 9 \end{pmatrix}.$$

Cum $\det(\mathbb{A} - \mathbb{I}_2) = 3 \neq 0$, rezultă că f admite un unic punct fix. Acesta este dat de soluția sistemului $(\mathbb{A} - \mathbb{I}_2)X = -\mathbb{A}_0$, adică

$$\begin{cases} 2x^1 + x^2 = 6 \\ x^1 + 2x^2 = -9, \end{cases}$$

deci $A(7, -8)$ este unicul punct fix al morfismului afin f .

Pentru (2), notăm că o dreaptă invariantă de f trebuie să conțină A și trebuie să aibă spațiul vectorial director generat de un vector propriu al aplicației liniare $\vec{f}$. Folosind matricea $\mathbb{A}$ obținem vectorii $\bar{u}_1 = (1, -1)$ și $\bar{u}_2 = (1, 1)$. Astfel există două drepte invariante de f , iar ecuațiile acestora sunt

$$d_1 : x^1 + x^2 + 1 = 0, \quad d_2 : x^1 - x^2 - 15 = 0.$$

□

Exercițiul 1.66

Într-un plan afin real $\mathcal{A}_2 = (X, \vec{X}, \phi)$ raportat la un reper cartezian $\mathcal{R} = \{O; \vec{e}_1, \vec{e}_2\}$ se consideră morfismul afin $f : X \rightarrow X$ de ecuații

$$\begin{cases} y^1 = 3x^1 - 2x^2 + 10 \\ y^2 = -x^1 + x^2 - 6. \end{cases}$$

- (1) Fie dreapta afină de ecuație $d : x^1 - x^2 + 10 = 0$. Să se determine punctele dreptei d a căror imagine prin f aparține tot dreptei d .
- (2) Să se determine dreapta afină d' ce conține punctul $P(-1, 1)$ și a cărei imagine prin f conține punctul P .

Soluție. Pentru (1), punctele căutate sunt soluții ale sistemului

$$\begin{cases} x^1 - x^2 + 10 = 0 \\ 3x^1 - 2x^2 + 10 - (-x^1 + x^2 - 6) + 10 = 0. \end{cases}$$

Există o singură soluție $M(4, 14)$.

Pentru (2), notăm că f este un morfism afin bijectiv, iar ecuațiile inversei în raport cu reperul $\mathcal{R}$ sunt

$$\begin{cases} y^1 = x^1 + 2x^2 + 2 \\ y^2 = x^1 + 3x^2 + 8 \end{cases}$$

și $f^{-1}(P) = P'(3, 10)$.

Dreapta d' este determinată de punctele P și $P' = f^{-1}(P)$, deci ecuația sa în raport cu reperul $\mathcal{R}$ este

$$d' : 9x^1 - 4x^2 + 13 = 0.$$

□

Exercițiul 1.67

Fie $\mathcal{A}_3 = (X, \vec{X}, \phi)$ un spațiu afin real 3-dimensional raportat la reperul cartezian $\mathcal{R} = \{O; \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ și fie $f : X \rightarrow X$ definită de ecuațiile

$$\begin{cases} y^1 = 5x^1 + 2x^2 + 2x^3 - 2 \\ y^2 = -4x^1 - x^2 - 2x^3 + 2 \\ y^3 = 8x^1 + 4x^2 + 5x^3 - 4. \end{cases}$$

- (1) Să se arate că aplicația f este un morfism afin.
- (2) Să se verifice că f este bijectivă și să se determine f^{-1} .
- (3) Să arate că mulțimea punctelor fixe ale lui f este un plan π_f .
- (4) Să se arate că $\overrightarrow{Pf(P)}$ este coliniar cu $\overrightarrow{Qf(Q)}$, pentru orice $P, Q \in X$.
- (5) Să se arate că raportul simplu $(P', f(P); P)$ este constant, unde $P \in X$ cu $f(P) \neq P$, iar P' reprezintă intersecția dreptei $Pf(P)$ cu π_f .

Soluție. Pentru (1), ecuațiile lui f în raport cu reperul $\mathcal{R}$ pot fi scrise sub forma $Y = \mathbb{A}X + \mathbb{A}_0$, unde

$$\mathbb{A} = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 2 \\ -4 & -1 & -2 \\ 8 & 4 & 5 \end{pmatrix} \quad \text{și} \quad \mathbb{A}_0 = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix},$$

deci f este un morfism afin.

Pentru (2), $\det \mathbb{A} = 7 \neq 0$, deci f este bijectiv. Ecuațiile inversei f^{-1} în raport cu reperul $\mathcal{R}$ sunt

$$\begin{cases} y^1 = \frac{3}{7}x^1 - \frac{2}{7}x^2 - \frac{2}{7}x^3 + \frac{2}{7} \\ y^2 = \frac{4}{7}x^1 + \frac{9}{7}x^2 + \frac{2}{7}x^3 - \frac{2}{7} \\ y^3 = -\frac{8}{7}x^1 - \frac{4}{7}x^2 + \frac{3}{7}x^3 + \frac{4}{7}. \end{cases}$$

Pentru (3), $\text{rang}(\mathbb{A} - \mathbb{I}_3) = 1$, deci mulțimea punctelor fixe ale lui f este un plan. Acesta este dat de soluția sistemului $(\mathbb{A} - \mathbb{I}_3)X = -\mathbb{A}_0$, adică

$$\pi_f : \quad 2x^1 + x^2 + x^3 - 1 = 0.$$

Pentru (4), fie $P \in X$ fixat arbitrar. Dacă $P(x^1, x^2, x^3)$ în raport cu reperul $\mathcal{R}$, atunci

$$\overrightarrow{Pf(P)} = 2(2x^1 + x^2 + x^3 - 1)(1, -1, 2).$$

În concluzie, $\overrightarrow{Pf(P)}$ este paralel cu vectorul constant $\bar{u} = (1, -1, 2)$, pentru orice $P \in X$.

Pentru (5), dacă $P(x_0^1, x_0^2, x_0^3)$ în raport cu reperul $\mathcal{R}$, atunci ecuațiile parametrice ale dreptei $Pf(P)$ sunt

$$\begin{cases} x^1 = x_0^1 + t \\ x^2 = x_0^2 - t \\ x^3 = x_0^3 + 2t. \end{cases}$$

iar P' se obține pentru $t = \frac{-2x_0^1 - x_0^2 - x_0^3 + 1}{3}$. Astfel,

$$\overrightarrow{P'P} = \frac{2x_0^1 + x_0^2 + x_0^3 - 1}{3}(1, -1, 2).$$

Din (4) avem $\overrightarrow{Pf(P)} = 2(2x_0^1 + x_0^2 + x_0^3 - 1)(1, -1, 2)$, deci $(P', f(P); P) = \frac{1}{6}$.

□

Exercițiul 1.68

Fie $\mathcal{A}_3 = (X, \overrightarrow{X}, \phi)$ un spațiu afin real 3-dimensional, $A \in X$ fixat și $f : X \rightarrow X$ un endomorfism afin cu proprietatea că $f^3(P) = A$, pentru orice $P \in X$.

- (1) Să se determine mulțimea punctelor fixe ale lui f .
- (2) Dacă $B \in X$ astfel încât $f^2(B) \neq A$, să se arate că $\{A, B, f(B), f^2(B)\}$ este un reper afin. Să se scrie ecuațiile lui f în reperul cartezian asociat.

(3) Să se arate că imaginea lui f este planul $\langle A, f(B), f^2(B) \rangle_{\text{af}}$ și $f^{-1}(A)$ este dreapta $\langle A, f^2(B) \rangle_{\text{af}}$.

Soluție. Pentru (1), avem

$$\mathcal{F}ix(f) = \{A\}.$$

În adevăr, $f(A) = f(f^3(A)) = f^3(f(A)) = A$. Invers, dacă $f(P) = P$, atunci $f^3(P) = P$, deci $P = A$.

Pentru (2), observăm mai întâi că dacă $f^2(B) \neq A$, atunci punctele sistemului $\{A, B, f(B), f^2(B)\}$ sunt distincte două câte două. Folosind (1) avem

$$\overrightarrow{Af(B)} = \overrightarrow{f(A)f(B)} = \overrightarrow{f^2(AB)}, \quad \overrightarrow{Af^2(B)} = \overrightarrow{f^2(A)f^2(B)} = \overrightarrow{f^2(AB)}.$$

Astfel, condiția

$$\alpha \overrightarrow{AB} + \beta \overrightarrow{Af(B)} + \gamma \overrightarrow{Af^2(B)} = \vec{0}$$

este echivalentă cu

$$\alpha \overrightarrow{AB} + \beta \overrightarrow{f^2(AB)} + \gamma \overrightarrow{f^2(AB)} = \vec{0}, \quad (1.24)$$

Cum $f^3 = A$, rezultă că $\overrightarrow{f^3} = \vec{0}$. Aplicând $\overrightarrow{f^2}$ în (1.24), obținem $\alpha \overrightarrow{f^2(AB)} = \vec{0}$, deci $\alpha = 0$. Cu raționamente asemănătoare obținem $\beta = \gamma = 0$ și rezultă că sistemul de vectori $\{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{Af(B)}, \overrightarrow{Af^2(B)}\}$ este liniar independent, deci $\mathcal{R} = \{A, B, f(B), f^2(B)\}$ este un reper afin în X .

Reperul cartezian asociat lui $\mathcal{R}$ este $\mathcal{R} = \{A; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{f^2(AB)}, \overrightarrow{f^2(AB)}\}$. Astfel, ecuația matriceală a morfismului f în raport cu $\mathcal{R}$ este

$$Y = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} X,$$

iar ecuațiile carteziene sunt

$$\begin{cases} y^1 = 0 \\ y^2 = x^1 \\ y^3 = x^2. \end{cases}$$

Pentru (3), cum $\mathcal{R} = \{A, B, f(B), f^2(B)\}$ este un reper afin, pentru orice $P \in X$, există $\lambda^i \in \mathbb{R}$, $i = 1, \dots, 4$ astfel încât

$$P = \lambda^1 A + \lambda^2 B + \lambda^3 f(B) + \lambda^4 f^2(B), \quad \sum_{i=1}^4 \lambda^i = 1.$$

Astfel,

$$f(P) = (\lambda^1 + \lambda^4)A + \lambda^2 f(B) + \lambda^3 f^2(B), \quad \sum_{i=1}^4 \lambda^i = 1,$$

adică $\text{Im } f \subset \langle A, f(B), f^2(B) \rangle_{\text{af}}$. Reciproc, dacă $Q \in \langle A, f(B), f^2(B) \rangle_{\text{af}}$, atunci există $\mu^j \in \mathbb{R}$, $j = 1, 2, 3$, astfel încât

$$Q = \mu^1 A + \mu^2 f(B) + \mu^3 f^2(B), \quad \sum_{i=1}^3 \mu^i = 1,$$

și dacă considerăm

$$P = \mu^1 A + \mu^2 B + \mu^3 f(B), \quad \sum_{i=1}^3 \mu^i = 1,$$

atunci $f(P) = Q$, deci $\langle A, f(B), f^2(B) \rangle_{\text{af}} \subset \text{Im } f$.
Avem

$$\begin{aligned} f^{-1}(A) &= \{P \in X / f(P) = A\} \\ &= \{P = \lambda^1 A + \lambda^2 B + \lambda^3 f(B) + \lambda^4 f^2(B) / \\ &\quad (\lambda^1 + \lambda^4)A + \lambda^2 f(B) + \lambda^3 f^2(B) = A, \sum_{i=1}^4 \lambda^i = 1, \lambda^i \in \mathbb{R}, i = 1, \dots, 4\} \\ &= \{P \in X / P = \lambda A + (1 - \lambda)f^2(B), \lambda \in \mathbb{R}\} \\ &= \langle A, f^2(B) \rangle_{\text{af}}. \end{aligned}$$

□