

Calcul vectorial

1. Dat un paralelogram $ABCD$, câți vectori liberi determină laturile și diagonalele acestuia? Dacă $\overrightarrow{AB} = \vec{u}$ și $\overrightarrow{AD} = \vec{v}$ să se determine $\overrightarrow{AC} \pm \overrightarrow{BD}$.
- (2) Fie $\triangle ABC$, G centrul de greutate și A', B', C' mijloacele laturilor. Să se arate că: (i) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA} = \vec{0}$; (ii) $\overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{BB'} + \overrightarrow{CC'} = \vec{0}$ și să se construiască triunghiul determinat de vectorii medianelor $\triangle$ -ului ABC ; (iii) pentru $O \in \mathbb{O}_3$ un punct arbitrar să se arate că G este unicul punct din $\mathbb{O}_3$ cu proprietatea $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = 3\overrightarrow{OG}$.
3. Fie G_i , $i=1,4$ centrul de greutate a feței tetraedrului $A_1A_2A_3A_4$ opusă vârfului A_i . Să se arate că:
 - (i) segmentele $[A_iG_i]$, $i=1,4$ au punct comun G (centrul de greutate pentru tetraedru).
 - (ii) $\overrightarrow{GA_1} = -1/4 (\overrightarrow{A_1A_2} + \overrightarrow{A_1A_3} + \overrightarrow{A_1A_4})$
 - (iii) $\sum_{i=1,4} \overrightarrow{GA_i} = \vec{0}$
4. Să se arate că pentru orice mulțime finită de puncte $S = \{A_1, \dots, A_n\}$ există unic G a.c. $\sum_{i=1}^n \overrightarrow{GA_i} = \vec{0}$. În plus, pentru orice punct P avem $n\overrightarrow{PG} = \overrightarrow{PA_1} + \dots + \overrightarrow{PA_n}$.
- (5) Fie $ABCDEF$ un hexagon regulat de centru O .
 - (i) dacă $\overrightarrow{AB} = \vec{u}$, $\overrightarrow{BC} = \vec{v}$ să se calculeze $\overrightarrow{CD}$ în funcție de $\vec{u}$ și $\vec{v}$.
 - (ii) Să se arate că: $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{AF} = 6\overrightarrow{AO}$.
6. Punctul M împarte segmentul orientat $\overrightarrow{AB}$ în raportul k , $k \neq 0, 1$, a.c. $\overrightarrow{MA} = k\overrightarrow{MB}$. Să se arate că $\overrightarrow{OM} = \frac{1}{1-k}\overrightarrow{OA} - \frac{k}{1-k}\overrightarrow{OB}$.
Caz particular: M este mijlocul segmentului $\overrightarrow{AB}$ d.d. $\overrightarrow{OM} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB})$.

- (7) Fie paralelipipedul $ABCD A'B'C'D'$ cu O centru de simetrie. Să se arate că $\vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC} + \vec{OD} = 2\vec{A'A}$.
- (8) Fie M, N, P trei puncte situate respectiv pe laturile BC, CA, AB ale Δ -ului ABC a.i. $\vec{MC} = -2\vec{MB}, \vec{NA} = -2\vec{NC}, \vec{PB} = -2\vec{PA}$. Curoscând ΔMNP să se construiască ΔABC .
- (9) Se dau punctele $A, B, C, D \in \mathbb{E}_3$ și I mijlocul lui AC , J mijlocul segmentului BD .
- (i) Să se arate că $2\vec{IJ} = \vec{AB} + \vec{CD} = \vec{AD} + \vec{CB}$
- (ii) Ce devine patrulaterul $ABCD$ dacă I și J coincid?
- (10) Se consideră triunghiurile ΔABC și $\Delta A'B'C'$ cu același centru de greutate G . Să se arate că se poate construi un triunghi cu laturile paralele și congruente cu segmentele AA', BB', CC' (dacă acestea sunt nenule).