

Operații cu vectori liberi(i) Produsul scalar

1. (i) În V_3 fie vectorii unitari și necoliniari $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ a.i. $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = \vec{0}$
 să se calculeze $S = \langle \vec{a}, \vec{b} \rangle + \langle \vec{b}, \vec{c} \rangle + \langle \vec{c}, \vec{a} \rangle$

(ii) Fie $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \in V_3$ a.i. $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = \vec{0}$, $|\vec{a}| = 3$, $|\vec{b}| = 1$, $|\vec{c}| = 4$.
 Să se calculeze $S = ?$

2. În sp. vectorilor liberi V_3 să se calculeze:

(i) $|\vec{a} - \vec{b} + 2\vec{c}| = ?$ dacă $|\vec{a}| = 1$, $|\vec{b}| = 2$, $|\vec{c}| = 3$, $\angle(\vec{a}, \vec{b}) = \pi/6$, $\angle(\vec{a}, \vec{c}) = \pi/4$
 și $\angle(\vec{c}, \vec{b}) = \pi/3$

(ii) $\langle \vec{a} + \vec{b} - 3\vec{c}, 2\vec{a} - \vec{c} \rangle = ?$, $|\vec{a}| = 2$, $|\vec{b}| = 1$, $|\vec{c}| = 1$, $\angle(\vec{a}, \vec{b}) = \pi/2$, $\angle(\vec{a}, \vec{c}) = \pi/4$
 și $\angle(\vec{c}, \vec{b}) = \pi/6$

(iii) $3\langle \vec{m}, \vec{m} \rangle - 2\langle \vec{m}, \vec{n} \rangle + 4\langle \vec{n}, \vec{n} \rangle = ?$, $|\vec{m}| = 1/3$, $|\vec{n}| = 6$, $\angle(\vec{m}, \vec{n}) = \pi/3$

3. Fie $B = \{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$ bază ortonormată pozitivă în V_3 .

a. Să se det $\alpha = ?$ a.i. vectorii $\vec{a} = \alpha\vec{i} - 3\vec{j} + 2\vec{k}$ și $\vec{b} = \vec{i} + 2\vec{j} - \alpha\vec{k}$, $\vec{a} \perp \vec{b}$

b. Să se determine unghiul dintre vectorii: $\vec{a} = (2, -4, 4)$ și $\vec{b} = (-3, 2, 6)$

c. Să se determine vectorul $\vec{u}$ a.i. $\vec{u} \perp \vec{a}$, $\vec{u} \perp \vec{b}$, $|\vec{u}| = 14$, $\angle(\vec{u}, \vec{j}) > 1$
 unde $\vec{a} = (3, 2, 2)$, $\vec{b} = (18, -22, -5)$.

4. Dati vectorii $\vec{OA} = (12, -4, 3)$, $\vec{OB} = (3, 12, -4)$, $\vec{OC} = (2, 3, -4)$

în raport cu $B = \{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$ b. ortonormată pozitivă să se dem:

(i) ΔAOB isoscel

(iii) să se calculeze perimetrul ΔABC

(ii) ΔAOC dreptunghiuc

(iv) $\langle \vec{AB}, \vec{AC} \rangle = ?$

5. Fie ΔABC cu vectorii laturilor: $\vec{AB} = \vec{c}$, $\vec{BC} = \vec{a}$, $\vec{CA} = \vec{b}$. Să se dem:

$$\langle \vec{AB}, \vec{AC} \rangle + \langle \vec{BC}, \vec{BA} \rangle + \langle \vec{CA}, \vec{CB} \rangle = \frac{1}{2} (|\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 + |\vec{c}|^2)$$

6. Să se determine $Pr_{\vec{u}}(\vec{v}) = ?$, $\vec{v} = 10\vec{a} + 2\vec{b}$, $\vec{u} = 5\vec{a} - 12\vec{b}$,
 (i) unde $\vec{a}, \vec{b}$ sunt doi vectori ortogonali, nenuli și de ac. lungimi

(ii) Să se determine $Pr_{\vec{u}}(\vec{a}) = ?$, $\vec{a} = \sqrt{2}\vec{i} - 3\vec{j} - 5\vec{k}$ pe un vector $\vec{u}$ ce formează unghiuri de $45^\circ, 60^\circ$ cu vectorii $\vec{i}$ și respectiv $\vec{k}$ și un unghi ascuțit cu $\vec{j}$.

7. (i) Să se arate că un vector unitar $\vec{u}$ este perpendicular pe orice vector $\vec{v} = \vec{a} - \langle \vec{a}, \vec{u} \rangle \vec{u}$, $\forall \vec{a} \in V_3$

(ii) Să se det. unghiul format de vectorii $\vec{a}, \vec{b}$ știind că vectorii $\vec{a} + 3\vec{b}$ și $\vec{a} - 4\vec{b}$ sunt perpendiculari pe $7\vec{a} - 5\vec{b}$, respectiv pe $7\vec{a} - 2\vec{b}$.

8. (i) Să se deducă prin considerații vectoriale th. cosinusului în $\triangle ABC$

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$$

(ii) Să se dem. pe cale vect. lungimea medianei în $\triangle ABC$.

$$m_a^2 = \frac{1}{4}(b^2 + c^2 - a^2)$$

9. Se consideră hexagonul regulat $OAB CDE$ de latură 2. Să se calculeze

(i) $\langle \vec{OA}, \vec{OB} \rangle, \langle \vec{OA}, \vec{OC} \rangle, \langle \vec{OA}, \vec{OD} \rangle, \langle \vec{OA}, \vec{OE} \rangle, \langle \vec{OA}, \vec{OB} + \vec{OC} \rangle$

(ii) Fie cubul $ABCD A'B'C'D'$ de muchie a . Să se calculeze:

$\langle \vec{AB}, \vec{AB'} \rangle, \langle \vec{AB}, \vec{AA'} \rangle, \langle \vec{AB}, \vec{AC'} \rangle, \langle \vec{AB}, \vec{AD'} \rangle, \langle \vec{AB}, \vec{A'C'} \rangle, \langle \vec{AB}, \vec{A'D'} \rangle$.

10. (i) Să se dem. concurența înălțimilor în $\triangle ABC$.

(ii) Vectorul de poziție pentru ortocentru este:

$$\vec{r}_H = \frac{\tan A \cdot \vec{r}_A + \tan B \cdot \vec{r}_B + \tan C \cdot \vec{r}_C}{\tan A + \tan B + \tan C}$$