

1. În V_3 , în raport cu $B = \{\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}\}$ o bază ortonormată pozitivă
Să se determine produsul vectorial pentru vectorii:

a. $\bar{u} = \bar{i} + 2\bar{j}$, $\bar{v} = 6\bar{k}$

$\bar{u} \times \bar{v} = ?$

b. $\bar{u} = \bar{i} + 2\bar{j} + 5\bar{k}$, $\bar{v} = \bar{j} - 6\bar{k}$

c. $\bar{u} = 2\bar{j} + 4\bar{k}$, $\bar{v} = \bar{i} + 6\bar{k}$

d. $\bar{u} = \bar{i} + 2\bar{j} - 5\bar{k}$, $\bar{v} = \bar{i} - 3\bar{j} + 2\bar{k}$

2. Să se verifice care dintre tripletele următoare conțin vectori coplanari

$\bar{u}_1$	$\bar{u}_2$	$\bar{u}_3$
$\bar{i} + 2\bar{j} - \bar{k}$	$9\bar{i} - 11\bar{j} + 13\bar{k}$	$2\bar{i} + 4\bar{j} - 2\bar{k}$
$8\bar{i} - 3\bar{j} + 2\bar{k}$	$2\bar{j} - \bar{k}$	$4\bar{i} - 6\bar{j} + 2\bar{k}$
$-2\bar{i} - \bar{j} + \bar{k}$	$4\bar{i} - 4\bar{j} + \bar{k}$	$4\bar{i} - 6\bar{j} + 2\bar{k}$
$\bar{i} + \bar{j} + \bar{k}$	$\bar{i} + \bar{j}$	$\bar{j} + \bar{k}$

3. Să se arate că dacă $\bar{u}, \bar{v}, \bar{w}$ sunt trei vectori arbitrari atunci vectorii $\bar{v} - \bar{u}$, $\bar{u} - \bar{v} + \bar{w}$, $-\bar{u} + \bar{v} + \bar{w}$ sunt coplanari.

4. Să se determine $\alpha = ?$ a.i. vectorii $\bar{u} = \alpha \bar{a} + 3\bar{b}$, $\bar{v} = 3\bar{a} - \bar{b}$ să fie coliniari, unde $\bar{a}, \bar{b} \in V_3$ sunt doi vectori necoliniari.

5. Fie $\bar{v}_1, \bar{v}_2, \bar{v}_3 \in V_3$ necoplanari. Să se determine $a \in \mathbb{R}$ a.i. următorii vectori să fie coplanari:
- $$\begin{cases} \bar{u} = a\bar{v}_1 + \bar{v}_2 + \bar{v}_3 \\ \bar{v} = \bar{v}_1 + a\bar{v}_2 + \bar{v}_3 \\ \bar{w} = \bar{v}_1 + \bar{v}_2 + a\bar{v}_3 \end{cases}$$

6. (i) Fie $\bar{u}, \bar{v} \in V_3$, $|\bar{u}| = 3$, $|\bar{v}| = 5$, $\angle(\bar{u}, \bar{v}) = \pi/3$. Să se calculeze:

$$|\bar{u} \times \bar{v}|, |(\bar{u} + \bar{v}) \times (\bar{u} - \bar{v})|, |(3\bar{u} + \bar{v}) \times (\bar{u} - 3\bar{v})|$$

- (ii) Fie $\bar{u}, \bar{v} \in V_3$ a.i. $|\bar{u}| = 3$, $|\bar{v}| = 4$, $\langle \bar{u}, \bar{v} \rangle = -6$. Să se determ.:

$$|\bar{u} \times \bar{v}| = ?$$

- (iii) $|\bar{u}| = 8$, $|\bar{v}| = 15$, $|\bar{u} \times \bar{v}| = 72$. Să se calculeze $|\langle \bar{u}, \bar{v} \rangle| = ?$

7. Să se dem:

(i) identitatea lui Lagrange : $|\vec{a} \times \vec{b}|^2 + \langle \vec{a}, \vec{b} \rangle^2 = |\vec{a}|^2 |\vec{b}|^2$

(ii) identitatea lui Jacobi : $\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) + \vec{b} \times (\vec{c} \times \vec{a}) + \vec{c} \times (\vec{a} \times \vec{b}) = \vec{0}$

8. (i) Dacă vectorii $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ sunt necoliniari doi câte doi a.i.

$$\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = \vec{0} \quad \text{atunci} \quad \vec{a} \times \vec{b} = \vec{b} \times \vec{c} = \vec{c} \times \vec{a}$$

(ii) Dacă vectorii $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \vec{d}$ satisfac $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{c} \times \vec{d}$ atunci

$$\vec{a} \times \vec{c} = \vec{b} \times \vec{d}$$

vectorii $\vec{a} - \vec{d}$ și $\vec{b} - \vec{c}$ sunt coliniari

(iii) Să se determine vectorul liber $\vec{u}$ a.i. $\vec{u} \perp \vec{a}$ și $\vec{u} \perp \vec{b}$,

$$\vec{a} = 2\vec{i} + 3\vec{j} - \vec{k}, \quad \vec{b} = \vec{i} - \vec{j} + 3\vec{k}, \quad \angle(\vec{u}, \vec{c}) > 1 \text{ dr}, \quad |\vec{u}| = \sqrt{138}$$

9. Să se dem pe cale vectorială teorema sinusului într-un Δ .

10. Dacă $\vec{u} = 2\vec{i} + \vec{j} - \vec{k}$, $\vec{v} = 3\vec{i} - \vec{k}$, $\vec{w} = \vec{j} - 5\vec{k}$ să se calculeze

$$\vec{u} \times (\vec{v} \times \vec{w}) \quad \text{și} \quad (\vec{u} \times \vec{v}) \times \vec{w}. \quad (\text{în două moduri!})$$

Este produsul vectorial asociativ?