

1. Să se arate că dacă $\vec{u} \perp \vec{v}$, $|\vec{u}|=1$ atunci are loc egalitatea $\vec{u} \times (\vec{u} \times (\vec{u} \times (\vec{u} \times \vec{v}))) = \vec{v}$

2. Să se stabilească egalitățile:

$$(i) \quad \langle \vec{a} \times \vec{b}, \vec{c} \times \vec{d} \rangle = \langle \vec{a}, \vec{c} \rangle \langle \vec{b}, \vec{d} \rangle - \langle \vec{b}, \vec{c} \rangle \langle \vec{d}, \vec{a} \rangle$$

$$(ii) \quad (\vec{a} \times \vec{b}) \times (\vec{c} \times \vec{d}) = (\vec{a}, \vec{c}, \vec{d}) \vec{b} - (\vec{b}, \vec{c}, \vec{d}) \vec{a} = \\ = (\vec{a}, \vec{b}, \vec{d}) \vec{c} - (\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) \vec{d}$$

$$(iii) \quad (\vec{a} \times \vec{b}, \vec{c} \times \vec{d}, \vec{e} \times \vec{f}) = (\vec{c}, \vec{d}, \vec{f}) (\vec{a}, \vec{b}, \vec{e}) - (\vec{e}, \vec{d}, \vec{c}) (\vec{a}, \vec{b}, \vec{f})$$

$$(iv) \quad \left\langle \frac{\vec{a} \times \vec{b}}{\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle}, \frac{\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c})}{(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})} \right\rangle = -1$$

3. Se dau vectorii $\vec{a} = \vec{i} + \vec{j}$, $\vec{b} = \vec{j} + \vec{k}$, $\vec{c} = \vec{k} + \vec{i}$, $B = \{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$ b.o.p. Să se arate că $B = \{\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\}$ este bază și să se determine

$B^* = \{\vec{a}^*, \vec{b}^*, \vec{c}^*\}$ baza reciprocă.

4. Fie $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \in V_3$ necoplanari și $B^* = \{\vec{a}^*, \vec{b}^*, \vec{c}^*\}$ baza reciprocă bazei $B = \{\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\}$. Să se demonstreze:

$$(i) \quad \langle \vec{a} + \vec{b} + \vec{c}, \vec{a}^* + \vec{b}^* + \vec{c}^* \rangle = 3$$

$$(ii) \quad (\vec{a}, \vec{b} + \vec{c}, \vec{a} + \vec{b} + \vec{c}) = \\ (\vec{a}, \vec{a} + \vec{b}, \vec{a} + \vec{b} + \vec{c}) = \\ (\vec{a} + \vec{b}, \vec{b} + \vec{c}, \vec{c} + \vec{a}) =$$

$$(iii) \quad (\vec{a}^* \times \vec{b}^*, \vec{b}^* \times \vec{c}^*, \vec{c}^* \times \vec{a}^*) = 1/(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})^2$$

$$(iv) \quad (\vec{a} \times \vec{b}, \vec{b} \times \vec{c}, \vec{c} \times \vec{a}) = (\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})^2$$

$$(v) \quad (\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}, \vec{a}^* + \vec{b}^*, \vec{c}^*) = ?$$

5. Să se rezolve ecuațiile:

$$(i) \quad \vec{a} \times \vec{x} = \vec{b}, \quad \vec{a} \neq \vec{0}, \quad \vec{a} \perp \vec{b}$$

$$(ii) \quad \vec{a} \times (\vec{a} \times \vec{x}) = \vec{b}, \quad \vec{a} \neq \vec{0}$$

$$(iii) \quad \vec{a} \times (\vec{a} \times (\vec{a} \times \vec{x})) = \vec{b}, \quad \vec{a} \neq \vec{0}$$

$$(iv) \quad \underbrace{\vec{a} \times (\vec{a} \times \dots (\vec{a} \times \vec{x}) \dots)}_{n \text{ ori}} = \vec{b}, \quad \vec{a} \neq \vec{0}$$

6. Să se rezolve sistemele vectoriale:

$$(i) \quad \vec{a} \times \vec{x} = \vec{b}, \quad \langle \vec{a}, \vec{x} \rangle = m \quad \text{ptr } \vec{a} \neq \vec{0}$$

$$(ii) \quad \vec{a} \times \vec{x} = \vec{b}, \quad \langle \vec{b}, \vec{x} \rangle = m \quad \text{ptr } \vec{a} \neq \vec{0}$$

$$(iii) \quad \langle \vec{a}, \vec{x} \rangle = m, \quad \langle \vec{b}, \vec{x} \rangle = n, \quad \langle \vec{c}, \vec{x} \rangle = p \quad \text{ptr } (\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) \neq \vec{0}$$

7. Să se rezolve ec: $\vec{a} \times \vec{x} + \vec{x} = \vec{b}$

8. Să se rezolve ecuația:

$$\vec{x} \times (\vec{x} \times \vec{u}) = \vec{v} \quad \text{în cazul general și pentru}$$

$$\vec{u} = \vec{i} - 2\vec{j} + \vec{k}, \quad \vec{v} = -3\vec{i} + \vec{j} + 2\vec{k}$$

9. Fie $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \in V_3$ necoplanari. Să se arate că:

$$(\vec{a}^* \times \vec{b}^*, \vec{b}^* \times \vec{c}^*, \vec{c}^* \times \vec{a}^*) = 1/(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})^2$$

pentru $\vec{a} = (0, 1, 1), \vec{b} = (1, 0, 1), \vec{c} = (1, 1, 0)$.

10. Fie cubul $ABCD A'B'C'D'$ și E mijlocul muchiei BB' .

a. Să se calculeze $\vec{u} = \vec{AE} \times \vec{AC'}$

b. Să se determine unghiurile făcute de $\vec{u}$ cu $\vec{AB}, \vec{AD}, \vec{AA'}$.

c. Să se calculeze unghiul $\widehat{EAC'}$.

Distanțe. Aree. Volume

(55)

1. În raport cu un reper ortonormat drept $R = \{\vec{O}, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$ se dau punctele $A(2, 3, 1)$, $B(4, 1, 2)$, $C(6, 3, 7)$, $D(-5, -4, 8)$.
Să se determine:
 - a. Unghiurile ^{măsurilor} tetraedrului format
 - b. Unghiurile și aria feței ABC
 - c. volumul tetraedrului și lungimea înălțimii din D
 - d. unghiurile diedre ale tetraedrului
2. Să se arate că există un punct în planul yOz al unui reper drept $(O; x, y, z)$ egal depărtat de punctele $A(3, 1, 2)$, $B(4, -2, -2)$, $C(0, 5, 1)$ ale cărui coordonate să se afle.
Să se determine centrul cercului circumscris $\triangle ABC$.
3. Se consideră punctele $A(3, 2, 0)$, $B(2, 4, 0)$ într-un reper drept. Să se determine coordonatele vârfurilor paralelogramului format de laturile OA și OB.
4. Se dau punctele $A(0, 0, 3)$, $B(1, -2, 1)$, $C(0, -2, 2)$, $D(1, 1, 1)$.
Să se determine volumul tetraedrului ABCD și lungimea înălțimii din A.
5. Să se arate că volumul tetraedrului care are ca vârfuri centrele de greutate a fețelor unui tetraedru este egal cu $\frac{1}{27}$ din volumul acestuia.
6. Fie $\triangle OBC$, $O(0, 0, 0)$, $B(-3, -2, 6)$, $C(-2, 4, 4)$. Să se det. lungimea înălțimilor h_O , h_B , h_C .