

Schimbări de baze ortonormate în planul și spațiul vectorial

(56)

1. Fie $B = \{\vec{i}, \vec{j}\}$ o b.o. poz. în $(V_2, \langle, \rangle)$ orientat și $B' = \{\vec{i}', \vec{j}'\}$ cu $\vec{i}' = \frac{1}{2}(\sqrt{3}\vec{i} + \vec{j})$ și $\vec{j}' = \frac{1}{2}(-\vec{i} + \sqrt{3}\vec{j})$.

a. Să se ar. că B' este o b.o. care se obține din B printr-o rot. de unghi φ .

b. Să se determ. coord. vectorului $\vec{v} = 3\vec{i} - 4\vec{j}$ în raport cu B' .

Aceeași pb ptr $\vec{i}' = \frac{1}{2}\vec{i} - \frac{\sqrt{3}}{2}\vec{j}$, $\vec{j}' = \frac{\sqrt{3}}{2}\vec{i} + \frac{1}{2}\vec{j}$, $\vec{v} = \vec{i} + \vec{j}$

2. Fie bazele $B = \{\vec{i}, \vec{j}\}$, $B' = \{\vec{i}', \vec{j}'\}$, $B'' = \{\vec{i}'', \vec{j}''\}$ unde

$$\begin{cases} \vec{i}' = \frac{\sqrt{3}}{2}\vec{i} + \frac{1}{2}\vec{j} \\ \vec{j}' = -\frac{1}{2}\vec{i} + \frac{\sqrt{3}}{2}\vec{j} \end{cases} \quad \begin{cases} \vec{i}'' = \frac{1}{2}\vec{i} - \frac{\sqrt{3}}{2}\vec{j} \\ \vec{j}'' = \frac{\sqrt{3}}{2}\vec{i} + \frac{1}{2}\vec{j} \end{cases} \quad B \text{ b.o. poz.}$$

Să se ar. că B', B'' sunt b.o. și B'' se obține din B' printr-o rotație a cărei unghi să se determine.

3. Se dă vectorul $\vec{u} = -3\vec{i} + \vec{j}$, $B = \{\vec{i}, \vec{j}\}$ b.o. poz. Să se determine unghiul cu care se rotește baza B a.i. $\vec{u}$ să fie coliniar cu primul vector al noii baze sau cu al doilea vector al noii baze.

4. În raport cu o b.o. poz $B = \{\vec{i}, \vec{j}\}$ din $(V_2, \langle, \rangle)$ orientat fie vect. $\vec{u} = -5\vec{i} - 3\vec{j}$. Să se determine $B' = \{\vec{i}', \vec{j}'\}$ b.o. neg a.i. $\vec{u} = -4\sqrt{2}\vec{i}' - \sqrt{2}\vec{j}'$

5. Se dau vectorii $\vec{u} = 2\vec{i} - 2\vec{j} + \vec{k}$, $\vec{v} = 2\vec{i} + \vec{j} - 2\vec{k}$ unde $B = \{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$ b.o. po. Să se determine o nouă b.o. a.i. $\vec{u}, \vec{v}$ să fie coliniari cu primii doi vectori ai noii baze. Să se precizeze câte astfel de baze există și câte sunt pozitive.

6. Se consideră bazele ortonormate în V_3 , $B = \{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$, $B' = \{\vec{i}', \vec{j}', \vec{k}'\}$ și $B' = S(B)$, $S = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & -2 \\ -2 & 2 & 1 \end{bmatrix}$

(i) Să se verifice că B' este e.o. poz

(ii) Să se determine unghiurile lui Euler ptr schimb. de baze $B' = S(B)$

(iii) Să se determine coord. vect. $\vec{u} = \vec{i} - \vec{j} - \vec{k}$ în raport cu B' .

7. Să se determine vectorii bazei $B' = \{\vec{i}', \vec{j}', \vec{k}'\}$ știind că unghiurile lui Euler în raport cu e.o. poz $B = \{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$ sunt

(i) $\varphi = \frac{\pi}{6}$, $\psi = \pi/4$, $\theta = \pi/3$

(ii) $\varphi = -\pi/6$, $\psi = \pi/3$, $\theta = 0$

Sol: $\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\} \xrightarrow{R_{K, \varphi} / R_{K, \theta} / R_{K', \psi}} \{\vec{i}', \vec{j}', \vec{k}'\}$

8. Să se verifice că vectorii $\vec{v}_1 = 9\vec{i} + \vec{j}$, $\vec{v}_2 = 4\vec{i} + 13\vec{j}$, $\vec{v}_3 = -8\vec{i} + 8\vec{j}$, $\vec{v}_4 = -3\vec{i} - 4\vec{j}$ determină vârfurile unui pătrat.

9. Fie $B = \{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$ e.o. poz și $B' = \{\vec{i}', \vec{j}', \vec{k}'\}$ a.i. $\begin{cases} \vec{i}' = \frac{1}{3}(2\vec{i} - 2\vec{j} + \vec{k}) \\ \vec{j}' = \frac{1}{3}(2\vec{i} + \vec{j} - 2\vec{k}) \end{cases}$

(i) Să se det. $\vec{k}'$ a.i. B' e.o. neg în V_3

(ii) Să se det. unghiurile lui Euler ptr schimb. de baze $B \rightarrow B'$

(iii) Să se det. coordonatele vect $\vec{u} = \vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$ în baza B' .

10. În V_3 , $B = \{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$ e.o. poz., $A(\vec{r}_A)$, $B(\vec{r}_B)$, $C(\vec{r}_C)$, $D(\vec{r}_D)$ cu $\vec{r}_A = \vec{i}$, $\vec{r}_B = -\vec{j}$, $\vec{r}_C = 2\vec{k}$, $\vec{r}_D = \vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$

(i) Să se det. $B_A = \{\vec{AB}, \vec{AC}, \vec{AD}\}$ și $B_B = \{\vec{BC}, \vec{BD}, \vec{BA}\}$.

(ii) Să se ar. că sunt baze și să se determine matr. de trecere

(iii) Să se ortonormeze Gram-Schmidt și să se det. unghiurile lui Euler.