

Clasa

-11-

-1-

(57)

Transformări ortogonale: simetrii ortogonale
Rotatii geometrice în V_2 și în V_3

1. Să se scrie ec. sim. ortog. a sp. v. V față de un vector $\bar{u} \neq \bar{0}$, $\bar{u} \in V$.
 - a. În planul vectorial $V_2 = (\overrightarrow{ABC})$ se consideră simetria $S_{\overrightarrow{BC}} : V_2 \rightarrow V_2$. Să se scrie ecuațiile acestui endomorfism în raport cu baza $B = \{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\}$ și să se arate că este o transf. ortogonală de specie $\alpha \mathbb{I}^a$.
 - c. Să se determine $S_{\overrightarrow{BC}}(\overrightarrow{AA'})$, A' mijlocul segmentului $[BC]$.
(Se vor folosi elementele ΔABC - măsurile unghiurilor și laturilor).
2. Fie $\bar{u} = \alpha \bar{i} + \beta \bar{j}$, $\alpha^2 + \beta^2 = 1$, $B = \{\bar{i}, \bar{j}\}$ c.o.poz în $(V_2, \langle, \rangle)$. Să se scrie matricea simetriei față de $\bar{u}$ în raport cu baza B .
Să se verifice că $S_{\bar{u}}$ este transf. ortog. de specie $\alpha \mathbb{I}^a$.
3. Fie $\bar{a} = \frac{1}{3}(\bar{i} + 2\bar{j} + 2\bar{k})$, $B = \{\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}\}$ c.o.poz. Să se scrie ecuațiile simetriei ortogonale față de planul vectorial perpendicular pe $\bar{a}$. Să se verifice că este transf. ortog. de specie $\alpha \mathbb{I}^a$.
4. Fie $\bar{a} = \bar{i} + 2\bar{j} + 2\bar{k}$, $\bar{b} = 2\bar{i} + \bar{j} + 2\bar{k}$, $B = \{\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}\}$ c.o.poz.
 - a. Să se scrie ec-le simetriei ortog. față de planul vect generat de $\bar{a}, \bar{b}$.
 - b. Să se compare $S_{\bar{a}} \circ S_{\bar{b}}$ cu $S_{\bar{b}} \circ S_{\bar{a}}$.
 - c. Să se compare compunerile simetriei ortogonale față de planele vectoriale perpendiculare pe $\bar{a}$ și pe $\bar{b}$.
($S_1 \circ S_2$ cu $S_2 \circ S_1$)

5. Fie un plan vectorial orientat V_2 și $u, u' \in V_2$ necolini, $|u| = |u'|$.
- 15- a. Să se arate că există o simetrie a lui V_2 față de un vector $v \in V_2$ a.c. $S_v(u) = u'$
- b. Să se arate că S_v are proprietățile:
 $S_v(u+u') = u+u', S_v(u-u') = u-u'$
- c. Să se amarețeze prr $u = i, u' = j$
6. Fie $\bar{a} = \frac{1}{3}(i+2j+2k)$, $B = \{i, j, k\}$ b.o. poz. Să se scrie ecuațiile rotației geometrice de unghi orientat $\alpha = \pi/3$ în jurul lui $\bar{a}$. Să se determine matr. transformării și să se verifice că este tr. o. s. I.
- $$R_{\bar{a}, \alpha}(v) = \frac{\langle \bar{a}, v \rangle}{|\bar{a}|^2} (1 - \cos \alpha) \bar{a} + v \cos \alpha + \frac{\sin \alpha}{|\bar{a}|} (\bar{a} \times v)$$
7. Fie $\bar{a} = i+2j+2k$, $\bar{b} = 2i+j+2k$, $B = \{i, j, k\}$ b.o. poz. Să se scrie ecuațiile rotației geometrice de unghi orientat $\alpha = \pi/2$ față de un vector perpendicular pe $\bar{a}$ și $\bar{b}$.
8. În $(V_2, \langle, \rangle)$ se consideră $B = \{i, j\}$ b.o. poz., $B_1 = \{\bar{u}_1, \bar{v}_1\}$, $B_2 = \{\bar{u}_2, \bar{v}_2\}$
 $\bar{u}_1 = \frac{\sqrt{2}}{2}(i+j)$, $\bar{v}_1 = \frac{\sqrt{2}}{2}(i-j)$, $\bar{u}_2 = \frac{1}{2}(\sqrt{3}i-j)$, $\bar{v}_2 = \frac{1}{2}(i+\sqrt{3}j)$
- a. Să se arate că B_1, B_2 sunt b.o.
- b. Să se determine rotațiile geometrice ce dau schimbările de baze

$$\begin{array}{ccccc} B & \longrightarrow & B_1 & \longrightarrow & B_2 \\ & & \underbrace{\hspace{1.5cm}} & \uparrow & \end{array}$$
9. Se consideră $u = li + mj$, $B = \{i, j\}$ b.o. poz a.c. $3l^2 - 4lm + 3m^2 = 0$
 Fie $B' = \{i', j'\}$ baza obținută din B prr rotație de unghi $\varphi = \pi/4$.
 Să se determine relația verificată de (l', m') coordonatele lui u în baza B' .