Seminar 04.05.2020

Ex 1. Pentru următoarele elipse, determinaţi coordonatele focarelor, coordonatele vârfurilor, excentricitatea, ecuaţiile directoarelor.

(i) $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{25} = 1$

(ii) $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$

(iii) $x^2 + 5y^2 - 5 = 0;$

(iv) $x = 4\cos t,\ y = 5\sin t,\ t \in \mathbb{R}.$

Reprezentaţi grafic (schiţă).

Ex 2. Fie elipsa $\mathcal{E} : \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{16} = 1$. Să se studieze poziţiile relative ale următoarelor drepte faţă de elipsa $\mathcal{E}$:

(a) $\delta : y = 2x + 1$

(b) $\delta : 3x - 2y + 1 = 0$

(c) $2\sqrt{3}x + y - 8 = 0$

(d) $x = 3.$

Reprezentaţi grafic (schiţă).

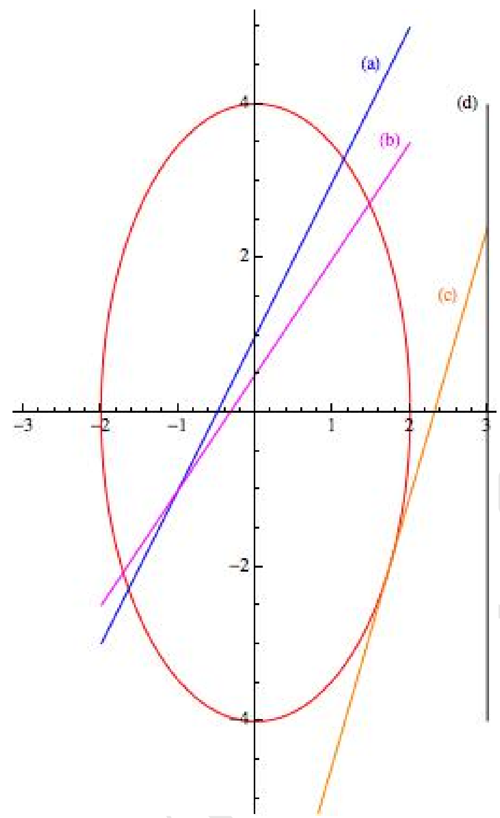
Soluţie. Vom da doar reprezentarea grafică a problemei.

(a) secantă;

(b) secantă;

(c) tangentă;

(d) exterioară.



Ex 3. Fie elipsa $\mathcal{E} : \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$.

(a) Să se scrie ecuaţiile tangentelor din $M(2, 1)$ la elipsa $\mathcal{E}$.

(b) Să se găsească tangentele prin $A(2, 0)$, $B(0, -3)$ şi $C(\sqrt{2}, 3/\sqrt{2})$ la elipsa $\mathcal{E}$.

(c) Să se determine un punct P din care se pot duce tangente perpendiculare la elipsa $\mathcal{E}$.

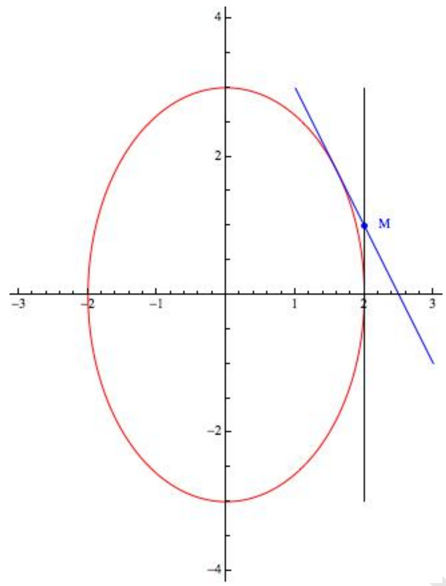
(d) Să se găsească locul geometric al tuturor punctelor cu proprietatea de la (c).

Soluţie.

(a) Să observăm mai întâi că dreapta $x = 2$ (verticală) este tangentă la $\mathcal{E}$ şi trece prin M.

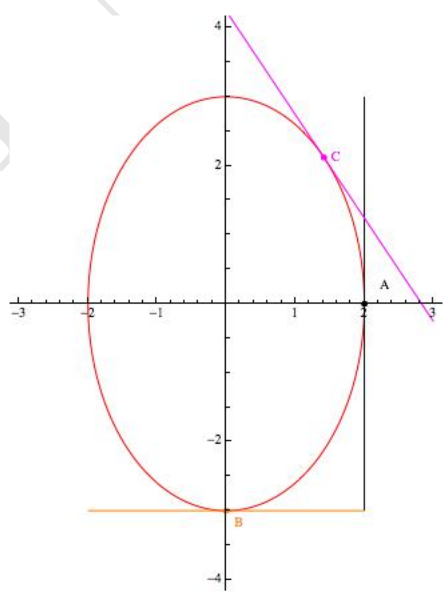
Fie acum $\delta : y = 1 + m(x - 2)$ o dreaptă prin M de pantă m. Intersecţia dintre δ şi $\mathcal{E}$ ne conduce la ecuaţia $(9 + 4m^2)x^2 + 8m(1 - 2m)x + 16(m^2 - m - 2) = 0$.

Condiţia de tangenţă, $\Delta = 0$ implică $m = -2$. Prin urmare, δ are ecuaţia $y = -2x + 5$.



(b) Avem

- tangenta prin A: $x = 2$
- tangenta prin B: $y = -3$
- tangenta prin C: $y = -\frac{3}{2}x + 3\sqrt{2}$.



(c) Patru puncte evidente sunt $P_1(2, -3)$, $P_2(2, 3)$, $P_3(-2, 3)$ şi $P_4(-2, -3)$ din care se pot duce tangente paralele cu axele de coordonate.

(d) Fie $P(x_0, y_0)$ un punct exterior elipsei cu proprietatea din enunţ. Ducem prin P o dreaptă de pantă m şi facem intersecţia cu $\mathcal{E}$. Obţinem

$$(4m^2 + 9)x^2 + 8mnx + 4(n^2 - 9) = 0,$$

unde $n = y_0 - mx_0$.

Condiţia de tangenţă $\Delta = 0$ ne conduce la $4m^2 - n^2 + 9 = 0$.

Înlocuind valoarea lui n deducem

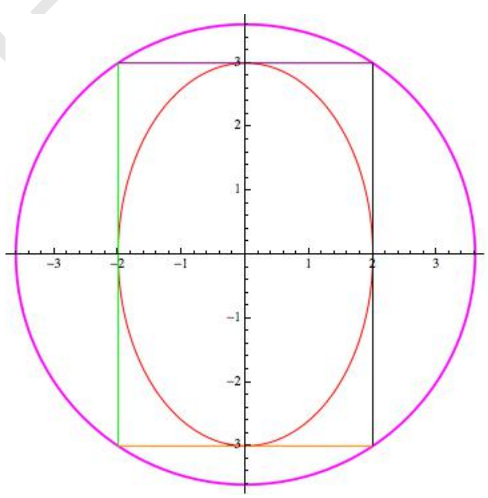
$$(4 - x_0^2)m^2 + 2x_0y_0m + (9 - y_0^2) = 0,$$

ecuaţie care are două soluţii reale distincte (P este exterior).

Astfel avem două valori pentru m, deci două drepte tangente prin P. Pentru ca cele două tangente să fie perpendiculare, produsul pantelor trebuie să fie -1, deci

$$\frac{9 - y_0^2}{4 - x_0^2} = -1.$$

Obţinem $x_0^2 + y_0^2 = 13$ care este ecuaţia unui cerc cu centrul în origine de rază $\sqrt{13}$. Se arată, de asemenea, că pentru orice punct de pe acest cerc, avem proprietatea din enunţ.



Observaţie. $13 = 4 + 9$; vezi şi problema următoare.

Lucru individual:

Ex 4. Să se găsească locul geometric al tuturor punctelor P din care se pot duce tangente perpendiculare la o elipsă $\mathcal{E}$.

Soluţie.

Se obţine *cercul lui Monge* al elipsei, adică cercul circumscris dreptunghiului circumscris elipsei.

Ex 5. Scrieţi ecuaţiile elipselor determinate, respectiv, prin următoarele condiţii:

(i) elipsa cu două vârfuri în $A(5, 0)$ şi $A'(-5, 0)$, ce trece prin punctul $P(-2, 3)$;

(ii) elipsa cu focarele în $F(2, 0)$, $F'(-2, 0)$, ce trece prin punctul $Q(\frac{-2\sqrt{2}}{3}, \frac{4\sqrt{2}}{3})$.

Soluţie. Vom considera elipsa $\mathcal{E}$ scrisă în forma $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, unde $a, b \in \mathbb{R}$ vor fi determinate din condiţii.

(i) Avem mai întâi că $a = 5$ (A şi A' sunt vârfuri). Apoi, din condiţia $P \in \mathcal{E}$, rezultă $\frac{4}{25} + \frac{9}{b^2} = 1$, de unde rezultă $b^2 = \frac{125}{7}$.

(ii) Rezultă mai întât ca axa Ox este axa focală şi $c = 2$, deci $a^2 - b^2 = 4$. Apoi, din condiţia $Q \in \mathcal{E}$, rezultă $\frac{8}{9a^2} + \frac{32}{9b^2} = 1$, de unde rezultă

$$\frac{8}{9(b^2+4)} + \frac{32}{9b^2} = 1.$$

Se obţine soluţie unică $b^2 = 4$ şi astfel elipsa se scrie $\mathcal{E}: \ \frac{x^2}{8} + \frac{y^2}{4} = 1$.

Ex 6. Scrieţi ecuaţiile elipselor determinate, respectiv, prin următoarele condiţii:

(i) elipsa cu două vârfuri în $A(3, 0)$ şi $A'(-3, 0)$, şi este tangentă dreptei $\delta: \ 2x + y - 9 = 0$;

(ii) elipsa cu focarele în $F(0, 3)$, $F'(0, -3)$, şi este tangentă dreptei $d: \ x + 2y - 9 = 0$.

Soluţie. Vom considera elipsa $\mathcal{E}$ scrisă în forma $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, unde $a, b \in \mathbb{R}$ vor fi determinate din condiţii.

(i) Avem mai întâi $a = 3$. Pentru a afla b, procedăm astfel:

Metoda 1. Facem intersecţia dintre dreapta δ şi elipsa $\mathcal{E}$ şi obţinem $\frac{x^2}{9} + \frac{(2x-9)^2}{b^2} = 1$. Condiţia de tangenţă ($\Delta = 0$) ne conduce la $b^2 = 45$.

Metoda 2. Fie $M(x_0, y_0)$ punctul de tangenţă. Ecuaţia tangentei prin M se scrie

$$\frac{x_0 x}{9} + \frac{y_0 y}{b^2} - 1 = 0,$$

care trebuie sa coincidă cu δ, deci

$$\frac{x_0}{18} = \frac{y_0}{-b^2} = \frac{1}{9}\ .$$

Deducem $x_0 = 2$ şi $y_0 = 2x_0 - 9 = -5$, deci $b^2 = 45$.

Se obţine aşadar elipsa

$$\mathcal{E}:\ \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{45} = 1.$$

(ii) Rezultă mai întât ca axa Oy este axa focală şi $c = 3$, deci $b^2 - a^2 = 9$. Vom proceda ca în metoda 2 de mai sus. Fie $M(x_0, y_0)$ punctul de tangenţă. Ecuaţia tangentei prin M se scrie

$$\frac{x_0 x}{a^2} + \frac{y_0 y}{2(a^2+9)} - 1 = 0,$$

care trebuie sa coincidă cu d, deci

$$\frac{x_0}{a^2} = \frac{y_0}{2(a^2+9)} = \frac{1}{9} = \frac{x_0 + 2y_0 - 9}{a^2 + 4(a^2+9) - 81}$$

ultima egalitate obţinându-se folosind proporţii derivate.

Cum $M \in d$, numărătorul ultimului raport este 0, deci şi numitorul se anulează. Prin urmare $a^2 = 9$.

Se obţine aşadar elipsa

$$\mathcal{E}:\ \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{18} = 1.$$

Lucru individual.

Ex 7. Fie elipsa $\mathcal{E} : x^2 + 4y^2 - 4 = 0$.

1. Determinaţi ecuaţiile tangentei şi normalei în punctul $M(1, \frac{\sqrt{3}}{2})$ la elipsă.

2. Scrieţi ecuaţiile tangentelor la elipsă, paralele cu normala în M la $\mathcal{E}$.

3. Scrieţi ecuaţiile tangentelor la elipsă duse din punctul exterior $P_0(-3, 5)$ şi determinaţi punctele de tangenţă P_1 şi P_2. Să se scrie ecuaţia dreptei P_1P_2.

Reprezentaţi grafic (schiţă).

Lucru individual.

Ex 8. (Proprietatea optică a elipsei)

Tangenta şi normala la elipsă, într-un punct oarecare M al ei, sunt respectiv bisectoarea exterioară şi bisectoarea interioară a unghiului $\sphericalangle FMF'$.

Soluţie (schiţă).

Pentru ca unghiul să fie nenul (triunghiul MFF' să fie nedegenerat) considerăm $M \neq A$ şi $M \neq A'$, adică $M \notin Ox$. Fie $M(x_0, y_0)$.

Tangenta în M are direcţia $(\frac{y_0}{b^2}\ , -\frac{x_0}{a^2})$, iar normala are direcţia $(\frac{x_0}{a^2}\ , \frac{y_0}{b^2})$.

Avem apoi $d(M, F) = a - x_0e$ şi $d(M, F') = a + x_0e$, unde $e = \frac{c}{a}$ este excentricitatea elipsei.

Direcţia bisectoarei interioare unghiului $\sphericalangle FMF'$ este $\frac{\overrightarrow{MF}}{|\overrightarrow{MF}|} + \frac{\overrightarrow{MF'}}{|\overrightarrow{MF'}|}$.

Dar $\overrightarrow{MF'} = (-x_0 - c, -y_0)$ şi $\overrightarrow{MF} = (-x_0 + c, -y_0)$.

Astfel, bisectoarea (interioară) are direcţia

$$\frac{(-x_0 - c, -y_0)}{a + x_0e} + \frac{(-x_0 + c, -y_0)}{a - x_0e}\ .$$

Făcând calculul obţinem succesiv: $\frac{2}{a^2 - x_0^2e^2}\big((ce - a)x_0, -ay_0\big) = -\frac{2ab^2}{a^2 - x_0^2e^2}\big(\frac{x_0}{a^2}\ , \frac{y_0}{b^2}\big)$ care este direcţia normalei de mai sus.

Ex 9. Dată o elipsă, se consideră triunghiurile $\triangle M_1M_2M_3$ înscrise în elipsă, astfel încât centrul lor de greutate să coincidă cu centrul de simetrie O al elipsei. Să se arate că normalele în vârfurile triunghiului la elipsă sunt concurente. (Steiner)

Soluţie: Considerăm elipsa $\mathcal{E}: \ \dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$, $a,b>0$ şi fie $M_i\in\mathcal{E}$, $i=1,2,3$ a.î. $\sum x_i=0$, $\sum y_i=0$.

Reamintim că centrul de greutate al triunghiului $M_1M_2M_3$ se scrie $G=\dfrac{1}{3}M_1+\dfrac{1}{3}M_2+\dfrac{1}{3}M_3$.

Normala în M_i la $\mathcal{E}$ se scrie $b^2x_i(y-y_i)-a^2y_i(x-x_i)=0$.

Deoarece cele trei normale sunt concurente rezultă că sistemul format din cele trei ecuaţii de mai sus este compatibil. Determinantul următor trebuie să fie zero:

$$\Delta=\begin{vmatrix} b^2x_1 & -a^2y_1 & (a^2-b^2)x_1y_1 \\ b^2x_2 & -a^2y_2 & (a^2-b^2)x_2y_2 \\ b^2x_3 & -a^2y_3 & (a^2-b^2)x_3y_3 \end{vmatrix}=0.$$

Întrucât $a^2\neq b^2$, condiţia $\Delta=0$ este echivalentă cu $\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & x_1y_1 \\ x_2 & y_2 & x_2y_2 \\ x_3 & y_3 & x_3y_3 \end{vmatrix}=0.$

Apoi, adunând L_1 şi L_2 la L_3, obţinem

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & x_1y_1 \\ x_2 & y_2 & x_2y_2 \\ x_1+x_2+x_3 & y_1+y_2+y_3 & x_1y_1+x_2y_2+x_3y_3 \end{vmatrix}=0.$$

Din condiţiile din ipoteză deducem $\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & x_1y_1 \\ x_2 & y_2 & x_2y_2 \\ 0 & 0 & x_1y_1+x_2y_2+x_3y_3 \end{vmatrix}=0$, echivalent cu

$$(x_1y_2-x_2y_1)[x_1y_1+x_2y_2+(x_1+x_2)(y_1+y_2)]=0. \tag{1}$$

Pe de altă parte, avem $M_3\in\mathcal{E}$: $\dfrac{(x_1-x_2)^2}{a^2}+\dfrac{(y_1+y_2)^2}{b^2}=1$, ceea ce implică

$$\frac{2x_1x_2}{a^2}+\frac{2y_1y_2}{b^2}=-1. \qquad \text{(deoarece } M_1,M_2\in\mathcal{E}\text{)}$$

Folosind ecuaţiile parametrice ale elipsei (date cu funcţii trigonometrice), avem

$$x_i = a\cos t_i,\ y_i = b\sin t_i,\ t_i \in \mathbb{R},\ i = 1, 2, 3.$$

Astfel, deducem relaţia

$$2\cos(t_1 - t_2) = -1. \tag{2}$$

Revenind la (1) calculăm

$$x_1y_1 + x_2y_2 + (x_1 + x_2)(y_1 + y_2) = ab\big[\sin 2t_1 + \sin 2t_2 + \sin(t_1 + t_2)\big]$$
$$= ab\sin(t_1 + t_2)[2\cos(t_1 - t_2) + 1] \overset{(2)}{=} 0.$$

Găsiţi şi alte tehnici de a demonstra rezultatul.

Ex 10. *Fie elipsele* $\mathcal{E}_1 :\ \dfrac{x^2}{16} + \dfrac{y^2}{4} = 1$ *şi* $\mathcal{E}_2 :\ \dfrac{x^2}{9} + \dfrac{y^2}{25} = 1$. *Să se găsească dreptele care sunt tangente simultan la cele două elipse.*

Aceeaşi problemă pentru elipsele: $\mathcal{E}_1 :\ \dfrac{x^2}{16} + \dfrac{y^2}{9} = 1$ *şi* $\mathcal{E}_2 :\ \dfrac{x^2}{25} + \dfrac{y^2}{4} = 1$.

Pentru două elipse oarecare, să se scrie condiţia ca ele să admită o tangentă comună.

Soluţie: Prima întrebare ar fi dacă există drepte verticale tangente simultan la $\mathcal{E}_1$ şi $\mathcal{E}_2$.

Ştim că avem tangente verticale la o elipsă $\mathcal{E} :\ \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ doar în vârfurile $A(a, 0)$ şi $A'(-a, 0)$. Astfel nu avem tangente verticale comune celor două elipse.

Fie acum o dreaptă $\delta :\ y = mx + n$ cu proprietatea că este tangentă şi la $\mathcal{E}_1$ şi la $\mathcal{E}_2$.

Deoarece, în cazul general, tangentele la o elipsă de pantă dată m au ecuaţiile $y = mx \pm \sqrt{a^2m^2 + b^2}$, în cazul nostru avem:

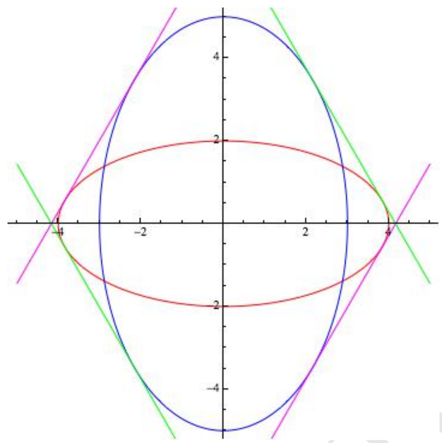
- pentru $\mathcal{E}_1 :\ y = mx \pm \sqrt{16m^2 + 4}$
- pentru $\mathcal{E}_2 :\ y = mx \pm \sqrt{9m^2 + 25}$

Pentru a avea aceeaşi dreaptă, trebuie să avem relaţia:

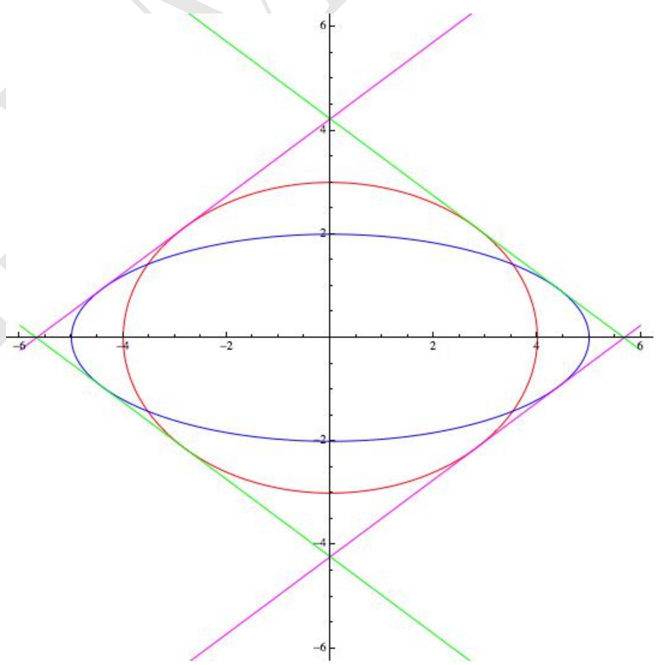
$$16m^2 + 4 = 9m^2 + 25,$$

deci $m = \pm\sqrt{3}$.

Deducem astfel dreptele $y = \pm\sqrt{3}\ x \pm 2\sqrt{13}$.



Pentru partea a doua a problemei se obţin, analog, pantele $m = \pm\frac{\sqrt{5}}{3}$ şi tangentele $y = \pm\frac{\sqrt{5}}{3}\ x \pm \frac{\sqrt{161}}{3}$.

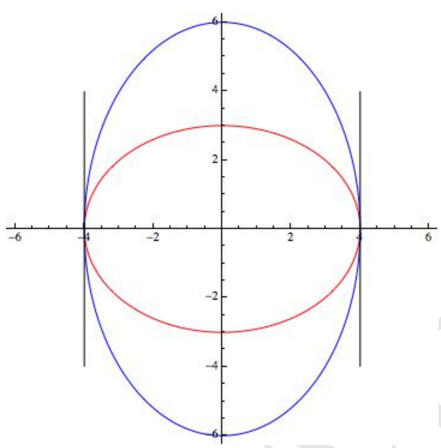


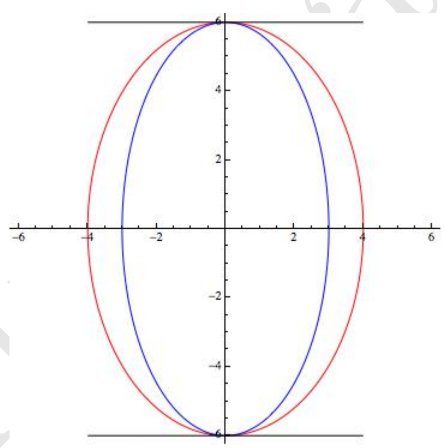
În cazul general, fie elipsele: $\mathcal{E}_1 : \dfrac{x^2}{a_1^2} + \dfrac{y^2}{b_1^2} = 1$ şi $\mathcal{E}_2 : \dfrac{x^2}{a_2^2} + \dfrac{y^2}{b_2^2} = 1$. Relaţia care se obţine pentru a avea tangente comune este:

$$a_1^2 m^2 + b_1^2 = a_2^2 m^2 + b_2^2 \Longleftrightarrow (a_1^2 - a_2^2) m^2 = b_2^2 - b_1^2,$$

de unde rezultă condiţia: $(a_1 - a_2)(b_1 - b_2) < 0$.

Evident, cazurile când elipsele au două vârfuri comune, i.e. $a_1 = a_2$ sau $b_1 = b_2$, se discută separat şi se obţin tangente comune verticale, respectiv orizontale.





Mai jos, putem vedea o situaţie când elipsele NU au tangentă comună.