Seminar 12.05.2020

HIPERBOLA

Ex 1. Pentru următoarele hiperbole, determinaţi coordonatele focarelor, coordonatele vârfurilor, excentricitatea, ecuaţiile directoarelor, asimptotele.

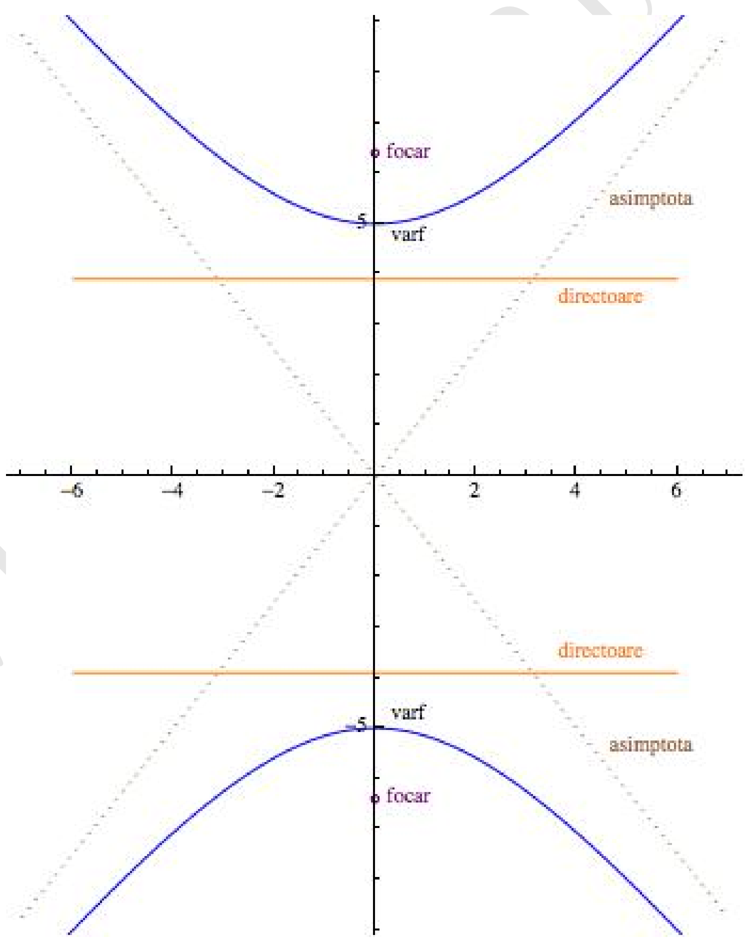
(i) $-\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{25} = 1$

(ii) $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{4} = 1$

(iii) $x^2 - 5y^2 - 5 = 0.$

Reprezentaţi grafic (schiţă).

Soluţie. Pentru (i) avem reprezentarea:



Ex 2. Scrieţi ecuaţiile hiperbolelor determinate (independent) de condiţiile:

(i) are vârfurile $A(3,0)$, $A'(-3,0)$ şi trece prin $M\left(\sqrt{10}, \frac{5}{3}\right)$;

(ii) trece prin $M(3,1)$ şi are asimptotele $\begin{cases} \delta_1 : \ 2x - 3y = 0 \\ \delta_2 : \ 2x + 3y = 0. \end{cases}$

Soluţie:

(i) Deoarece A şi A' sunt vârfuri, rezultă că axa focală este Ox. Aşadar, hiperbola $\mathcal{H}$ se scrie sub forma $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$, unde $a = 3$, iar $b > 0$ va fi determinat din condiţia $M \in \mathcal{H}$:

$$\frac{10}{9} - \frac{25}{9b^2} = 1 \quad \Longrightarrow \quad \frac{1}{9} = \frac{25}{9b^2} \quad \Longrightarrow \quad b = 5.$$

Obţinem $\mathcal{H} : \ \frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{25} = 1.$

(ii) Dreptele δ_1 şi δ_2 trec prin originea O, iar axele de coordonate sunt bisectoarele unghiurilor formate în O de cele două drepte. Prin urmare, axele de coordonate sunt axele de simetrie ale hiperbolei căutate (cu centrul în O).

Avem două posibilităţi:

$$(a) \ \ \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad \text{sau} \quad (b) \ \ -\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

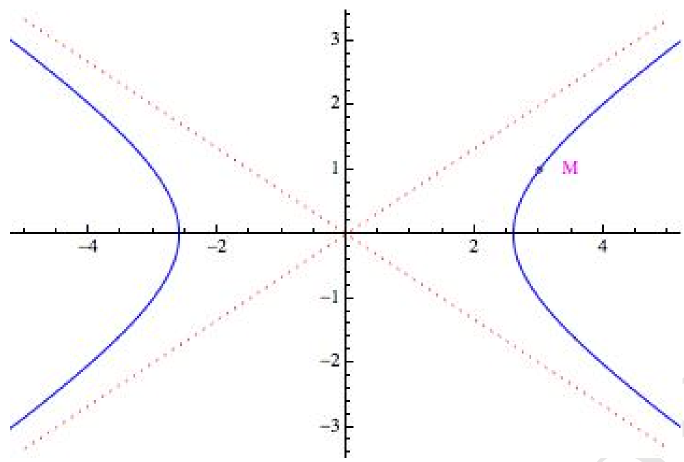
(hiperbole conjugate) pentru care ecuaţiile asimptotelor sunt $y = \pm\frac{b}{a}x$. Astfel, din ipoteză rezultă

$$\frac{b}{a} = \frac{2}{3}. \tag{1}$$

Condiţia ca $M \in \mathcal{H}$ ne conduce la:

• în cazul (a): $\frac{9}{a^2} - \frac{1}{b^2} = 1$. Combinând cu (1) obţinem $a = \frac{3\sqrt{3}}{2}$ şi $b = \sqrt{3}$, adică

$$\mathcal{H} : \ \frac{x^2}{\frac{27}{4}} - \frac{y^2}{3} = 1.$$



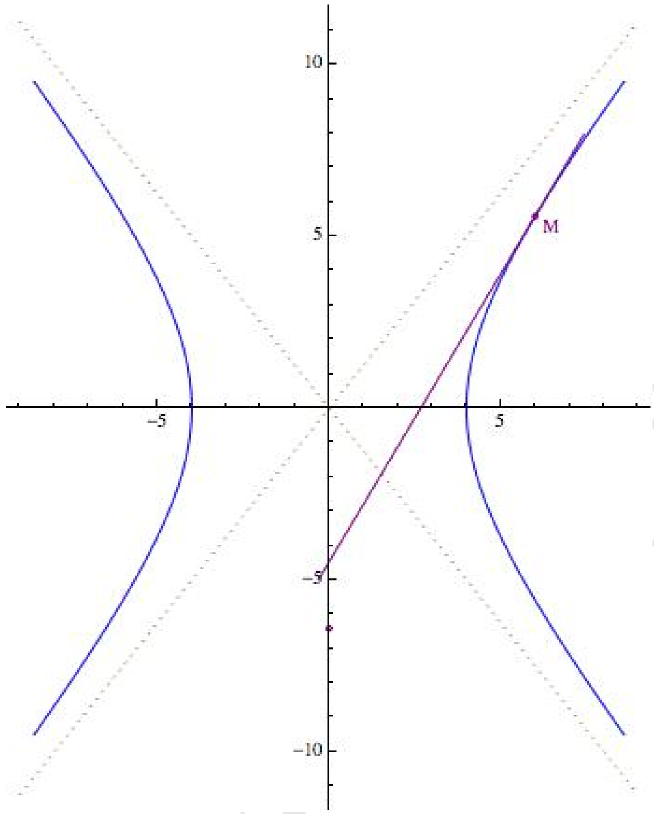
• în cazul (b): $-\dfrac{9}{a^2} + \dfrac{1}{b^2} = 1$. Combinând din nou cu (1) obţinem o contradicţie.

Ex 3. Fie hiperbola $\mathcal{H} : \dfrac{x^2}{16} - \dfrac{y^2}{25} = 1$.

1. Scrieţi ecuaţiile tangentei şi normalei in $M\left(6, \dfrac{5\sqrt{5}}{2}\right)$.
2. Din $P(2, 2)$ exterior hiperbolei, să se ducă tangentele la $\mathcal{H}$.
3. Scrieţi ecuaţiile tangentelor la $\mathcal{H}$ paralele cu dreptele:
   a) $x + y - 1 = 0$
   b) $5x - 4y - 3 = 0$
   c) $2x - y = 0$
   d) $x - 2y = 0$.

Soluţie:

1. Deoarece $M \in \mathcal{H}$, ecuaţia tangentei se scrie prin dedublare în M: $\dfrac{6x}{16} - \dfrac{5\sqrt{5}\ y}{2 \cdot 25} - 1 = 0$, echivalent cu $\dfrac{3x}{8} - \dfrac{y\sqrt{5}}{10} - 1 = 0$.



Normala este perpendiculara în M pe dreapta de mai sus.

2. Nu avem tangente verticale la $\mathcal{H}$ decât în vârfuri, iar $x_P \neq \pm a$ (P nu este situat pe dreapta verticală într-unul din vârfuri).

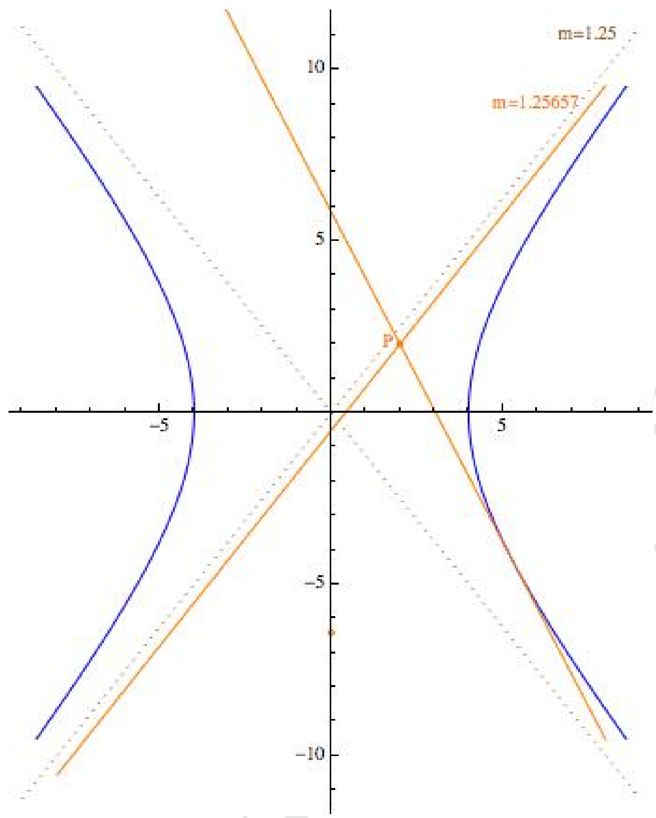
Fie aşadar δ tangenta prin P de pantă m care va fi determinată. Considerăm ecuaţia $\delta: \ y = mx + n$, unde $2m + n = 2$ şi facem intersecţia $\delta \cap \mathcal{H}$:

$$\frac{x^2}{16} - \frac{(mx+n)^2}{25} = 1 \quad \Longrightarrow \quad \left(\frac{1}{16} - \frac{m^2}{25}\right)x^2 - \frac{2mn}{25}x - \left(1 + \frac{n^2}{25}\right) = 0.$$

Impunem condiţia: $m \neq \pm\frac{5}{4}$ pentru a avea o ecuaţie de gradul al doilea în x. Condiţia de tangenţă se scrie

$$\Delta = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad 25 - 16m^2 + n^2 = 0.$$

Înlocuind $n = 2 - 2m$, obţinem $29 - 8m - 12m^2 = 0$ cu soluţiile $m_{1,2} = -\frac{1}{3} \pm \frac{\sqrt{91}}{6}$.

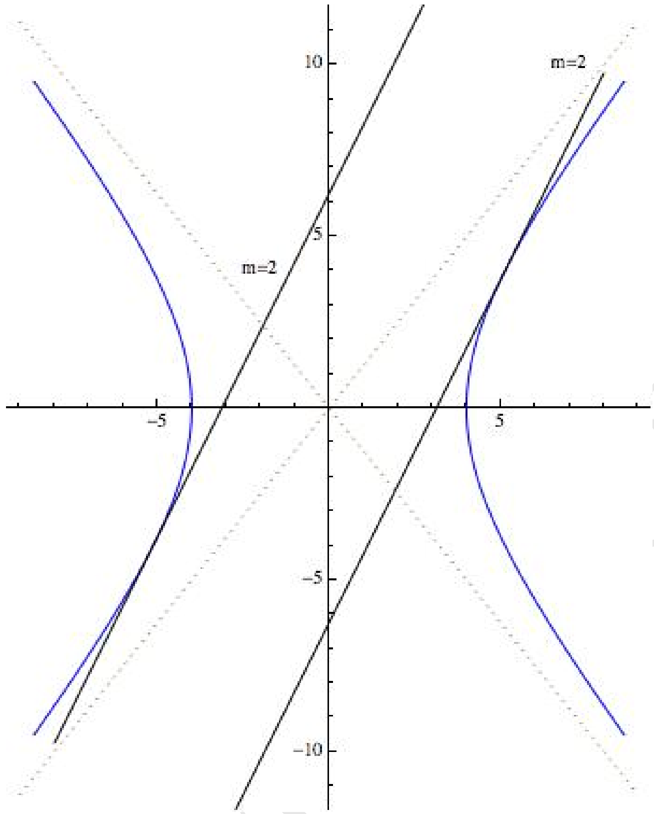


3. Condiţia pentru ca o dreaptă de pantă m să fie tangentă la $\mathcal{H}$ este $|m| > \dfrac{b}{a}$, în cazul nostru $|m| > \dfrac{5}{4}$.

Astfel, în cazurile

a) $m = -1$, b) $m = \dfrac{5}{4}$ şi d) $m = \dfrac{1}{2}$ nu avem soluţie.

În cazul c) $m = 2$. Ecuaţiile tangentelor de pantă 2 sunt: $y = 2x \pm \sqrt{39}$.



Ex 4. Fie hiperbola $\mathcal{H}: \ -\dfrac{x^2}{4} + y^2 - 1 = 0.$

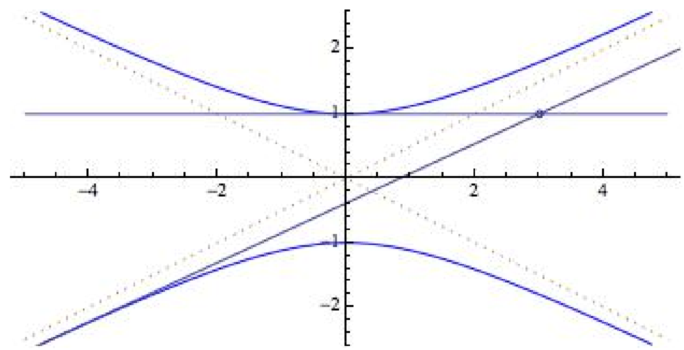
Scrieţi ecuaţiile tangentelor la hiperbolă din punctul exterior $P(3,1)$ şi determinaţi coordonatele punctelor de contact.

Soluţie: Fie $T_i(x_i, y_i)$, $i = 1, 2$ punctele de contact. Dreapta T_1T_2 se scrie prin dedublarea ecuaţiei $\mathcal{H}$ în P, $\delta: \ -\dfrac{3x}{4} + y - 1 = 0$. Prin urmare, $\{T_1, T_2\} = \delta \cap \mathcal{H}$. Făcând intersecţia, obţinem: $T_1(0,1)$, $T_2\left(-\dfrac{24}{5}, -\dfrac{13}{5}\right)$.

Astfel, cele două tangente se scriu:

(1) $y = 1$;

(2) $\dfrac{y-1}{-18} = \dfrac{x-3}{-39}$, echivalent cu $\dfrac{y-1}{6} = \dfrac{x-3}{13}$.



Ex 5. Scrieţi ecuaţiile hiperbolelor determinate prin:

a) centrul $O(0,0)$, focarele $F'(-4,0)$, $F(4,0)$ şi semiaxa mare 3;

b) axa mare 2 şi distanţa focală 4;

c) vârful $A'(-4,0)$ şi excentricitatea $e=2$.

Soluţie:

a) Deoarece focarele sunt pe axa Ox, rezultă că hiperbola este dată de ecuaţia $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$. Avem $a=3$ şi $c=4$, unde $c^2=a^2+b^2$. Deducem $b^2=7$ şi astfel obţinem hiperbola $\mathcal{H}:\ \dfrac{x^2}{9}-\dfrac{y^2}{7}=1$.

b) Axa mare este $2a=2$, deci $a=1$, iar distanţa focală este $2c=4$, deci $c=2$. Ca mai sus, obţinem $\mathcal{H}:\ x^2-\dfrac{y^2}{3}=1$.

c) Avem $a=4$ şi $\dfrac{c}{a}=e=2$, deci $c=8$. Se obţine $\mathcal{H}:\ \dfrac{x^2}{16}-\dfrac{y^2}{48}=1$.

Ex 6. Fie conica: $\mathcal{H}:\ \dfrac{x^2}{3}-\dfrac{y^2}{4}=1$ şi dreapta $\delta:\ x-y-1=0$. Se cer:

a) identificaţi elementele conicei şi reprezentaţi grafic;

b) stabiliţi poziţia dreptei δ faţă de conica dată.

Soluţie:

a) Conica este o hiperbolă cu axa mare Ox. Elementele hiperbolei se determină imediat.

b) Facem intersecţia dintre δ şi $\mathcal{H}$ şi obţinem

$$\frac{x^2}{3} - \frac{(x-1)^2}{4} = 1 \iff \frac{x^2}{12} + \frac{x}{2} - \frac{5}{4} = 0,$$

care este o ecuaţie de gradul al doilea cu $\Delta = \dfrac{2}{3} > 0$. Astfel, δ este secantă hiperbolei iar punctele de intersecţie se obţine rezolvând ecuaţia în x de mai sus.

Ex 7. Fie hiperbola $\mathcal{H}: \ \dfrac{x^2}{4} - \dfrac{y^2}{4} = 1$.

a) Să se arate că asimptotele sunt perpendiculare.

b) Să se studieze intersecţia dreptelor prin O cu $\mathcal{H}$.

c) Să se studieze intersecţia dreptelor $\delta_1: \ x + y + 1 = 0$ şi $\delta_2 : x - y - 2 = 0$, respectiv cu $\mathcal{H}$.

Soluţie:

a) Asimptotele sunt $y = \pm x$, adică cele două bisectoare; concluzia este evidentă.

b) Considerăm o dreaptă $y = mx$ (prin O, diferită de Oy care este exterioară) şi facem intersecţia cu $\mathcal{H}$: $\dfrac{1-m^2}{4}x^2 = 1$. Pentru a avea soluţie, trebuie ca $m^2 < 1$, caz în care dreapta este secantă. Pentru $m = \pm 1$ dreptele sunt asimptote, iar pentru $|m| > 1$ dreptele sunt exterioare.

De remarcat că nu avem drepte tangente la $\mathcal{H}$ prin O.

c) $\delta_1 \cap \mathcal{H} = \left\{ P\left(-\frac{5}{2}, \frac{3}{2}\right) \right\}$, iar $\delta_2 \cap \mathcal{H} = \{Q(2, 0)\}$.

Remarcăm că δ_1 şi δ_2 sunt secante de direcţii asimptotice.

Ex 8. Fie hiperbola $\mathcal{H}:\ 3x^2 - y^2 - 3 = 0$.

a) Calculaţi unghiul $\theta \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ dintre asimptotele sale.

b) Fie $M(2,3)$. Tangenta prin M la $\mathcal{H}$ intersectează asimptotele în punctele P şi Q. Să se determine aceste puncte.

c) Să se arate că M este mijlocul segmentului $[PQ]$.

Soluţie: Scriem $\mathcal{H}:\ x^2 - \frac{y^2}{3} = 1$, astfel $a = 1$ şi $b = \sqrt{3}$.

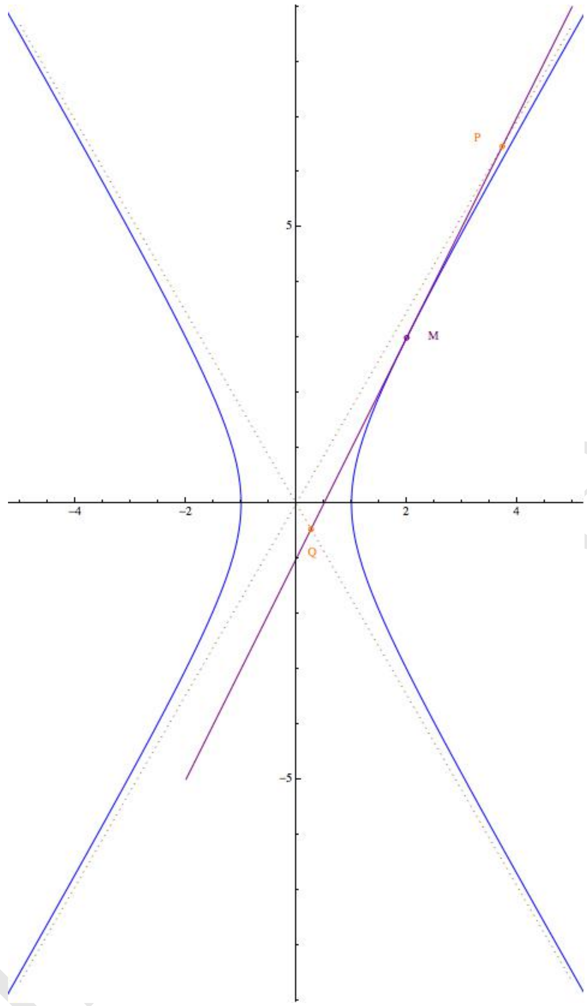
a) Cele două asimptote sunt $\delta_1:\ y = \sqrt{3}\, x$ şi $\delta_2:\ y = -\sqrt{3}\, x$. Vectorii directori ai celor două drepte sunt $\bar{a}_1 = (1, \sqrt{3})$ şi $\bar{a}_2 = (1, -\sqrt{3})$. Astfel $\cos \sphericalangle(\bar{a}_1, \bar{a}_2) = \frac{\langle \bar{a}_1, \bar{a}_2 \rangle}{|\bar{a}_1| \cdot |\bar{a}_2|} = -\frac{1}{2}$. Rezultă că $\sphericalangle(\bar{a}_1, \bar{a}_2) = 120^\circ$, deci $\theta = 60^\circ$.

b) $M \in \mathcal{H}$. Tangenta δ, în M la $\mathcal{H}$, se scrie prin dedublare şi se obţine: $\delta:\ 2x - y - 1 = 0$.

Intersecţia dintre δ şi cele două asimptote (δ_1 şi δ_2) este formată respectiv din punctele $P\left(2+\sqrt{3}, 3+2\sqrt{3}\right)$ şi $Q(2-\sqrt{3}, 3-2\sqrt{3})$.

c) Se verifică imediat că $M = \frac{1}{2}P + \frac{1}{2}Q$.

Observaţie: Se poate arăta că: Dacă printr-un punct M, al unei hiperbole oarecare, ducem tangenta iar aceasta intersectează asimptotele în punctele P şi Q, atunci M este mijlocul segmentului $[PQ]$.



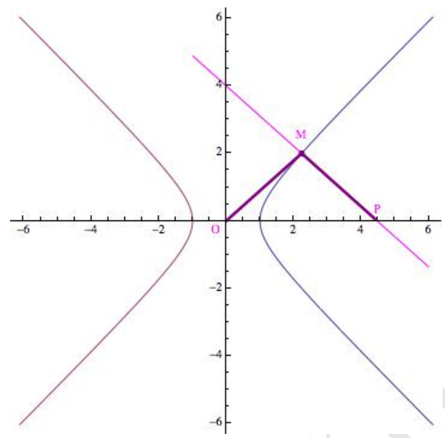
Ex 9. Fie hiperbola $\mathcal{H}: \dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ şi $M \in \mathcal{H}$. Normala în M la $\mathcal{H}$ taie axa Ox în P. În ce condiţii $d(O,M) = d(M,P)$?

Soluţie: Fie $M(x_0, y_0) \in \mathcal{H}$. Normala la $\mathcal{H}$ în M are ecuaţia: $y - y_0 = -\dfrac{a^2 y_0}{b^2 x_0}(x - x_0)$, prin urmare P are coordonatele $\left(\dfrac{c^2}{a^2}x_0, 0\right)$. Avem

$$d(O,M)^2 = x_0^2 + y_0^2$$
$$d(M,P)^2 = \left(x_0 - \frac{c^2 x_0}{a^2}\right)^2 + y_0^2 = \frac{b^4}{a^4}x_0^2 + y_0^2.$$

Condiţia din enunţ este echivalentă cu $a = b$.

Observaţie: O astfel de hiperbolă se numeşte *echilateră*.



PARABOLA

Ex 10. Pentru următoarele parabole, determinaţi coordonatele focarelor, ale vârfurilor, ecuaţiile directoarelor, axa de simetrie, etc:

- $y^2 = 4x$;
- $y^2 = -6x$;
- $x^2 = 5y$;
- $x^2 = -4y$.

Reprezentare grafică (schiţă).

Ex 11. Scrieţi ecuaţiile parabolelor date (independent) de următoarele condiţii:

(a) $\mathcal{P}$ are focarul în $F(3, 0)$ şi directoarea $\delta : x = -3$;

(b) $\mathcal{P}$ are dreapta $y = 0$ ca axă de simetrie, Oy este tangentă în vârf şi, în plus, $\mathcal{P}$ este tangentă dreptei $\delta : x - y - 2 = 0$.

Soluţie. (a) Deducem imediat că $\frac{p}{2} = 3$, axa de simetrie este Ox, vârful este în $O(0,0)$ şi ramurile sunt în semiplanul $x > 0$. Deci $\mathcal{P} : y^2 = 12x$.

(b) Din enunţ deducem că $\mathcal{P}$ se poate scrie $y^2 = 2px$, $p \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$; fie $M(x_0, y_0)$ punctul de tangenţă. Ecuaţia tangentei în M se scrie prin dedublare (în M), deci avem

$$px - y_0 y + px_0 = 0.$$

Pentru ca această dreaptă să fie exact δ trebuie să avem

$$\frac{p}{1} = \frac{-y_0}{-1} = \frac{px_0}{-2}\ .$$

Deducem că $x_0 = -2$ şi $y_0 = p$. Apoi, din condiţia $M(-2, p) \in \mathcal{P}$, rezultă $p^2 = 2p(-2)$. Deoarece $p \neq 0$ deducem că $p = -4$, astfel că parabola se scrie $y^2 = -8x$.

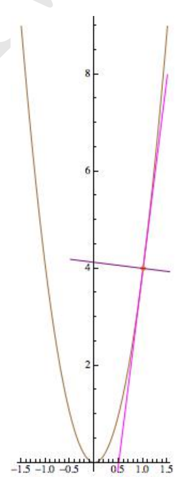
Ex 12. Fie parabola $\mathcal{P} : y = 4x^2$.

a) Scrieţi ecuaţiile tangentei şi normalei în $M(1, 4)$ la parabolă.

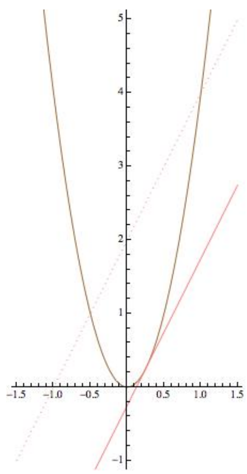
b) Determinaţi ecuaţia tangentei la $\mathcal{P}$ care este paralelă cu dreapta $y = 2x + 3$.

c) Scrieţi ecuaţiile tangentelor la $\mathcal{P}$ duse din punctul exterior $P(-1, -1)$.

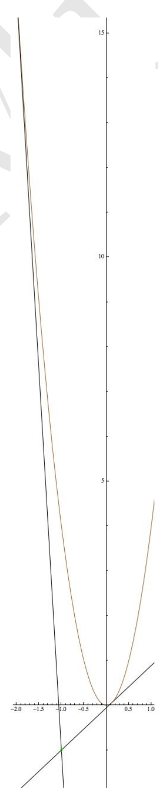
Soluţie. a) Ecuaţia tangentei se scrie prin dedublare în M şi se obţine $8x - y - 4 = 0$.



b) Panta dreptei date este $m = 2$, astfel că ne interesează să găsim tangente cu această pantă. Se obţine $y = 2x - \frac{1}{4}$.



c) Fie $m \in \mathbb{R}$ panta unei drepte δ prin P (am exclus dreptele verticale care nu pot fi tangente la $\mathcal{P}$). Atunci tangenta δ are ecuaţia $y = mx + n$ cu $n = m - 1$. Facem intersecţia şi scriem condiţia de tangenţă. Obţinem ecuaţia $mx + n = 4x^2$ pentru care, $\Delta = 0$ implică $m_{1,2} = -8 \pm 4\sqrt{5}$. Astfel avem două tangente $y = (-8 \pm 4\sqrt{5})x - 9 \pm 4\sqrt{5}$.



Ex 13. Să se arate că pentru fiecare parabolă $\mathcal{P} : y^2 = 2px$, $p > 0$, există puncte $A \in \mathcal{P}$ cu următoarea proprietate:
Fie A' simetricul lui A față de axa de simetrie a parabolei. Prin A și A' ducem tangentele la $\mathcal{P}$ care se intersectează în M. Atunci triunghiul AMA' este echilateral.
Caz particular $y^2 = 4x$; să se determine toate punctele A cu proprietatea de mai sus.

Soluţie. Fie $A(x_0, y_0)$ (cu $y_0 > 0$) un punct de pe parabola $\mathcal{P}$; atunci $A'(x_0. - y_0)$. Segmentul AA' are lungimea $2y_0$.

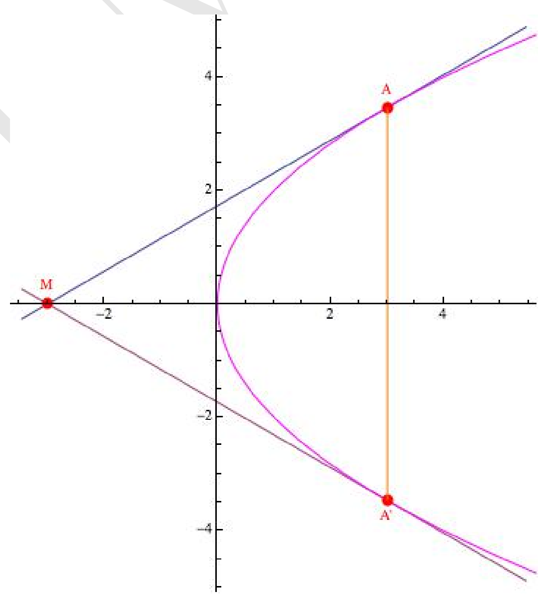
Cele două tangente au respectiv ecuaţiile (obţinute prin dedublare):

$$\delta_1 : \quad y_0 y = p(x + x_0),$$
$$\delta_2 : \quad -y_0 y = p(x + x_0).$$

Punctul de intersecţie al celor două tangente se obţine rezolvând sistemul format de cele două ecuaţii de mai sus. Se obţine punctul $M(-x_0, 0)$.

Condiţia ca triunghiul AMA' să fie echilateral implică $4x_0^2 = 3y_0^2$. Combinând acum cu ecuaţia parabolei ($A \in \mathcal{P}$) obţinem punctul $A(\frac{3p}{2}, \sqrt{3}p)$. Drept consecinţă, $A'(\frac{3p}{2}, -\sqrt{3}p)$. Acest punct este unic.

Aşadar, există două puncte cu proprietatea din enunţ: A şi A' obţinute mai sus.



Ex 14. Fie parabola $\mathcal{P}: \ y^2 = 2px$, $p > 0$.

a) Notăm cu C punctul de intersecţie al tangentei cu axa parabolei şi cu D punctul de intersecţie al normalei cu axa parabolei. Arătaţi că C şi D sunt egal depărtate de focarul parabolei.

b) Tangenta şi normala la parabolă, într-un punct oarecare M al ei, sunt respectiv bisectoarea interioară şi bisectoarea exterioară a unghiului $\sphericalangle FMN$ cu $MN \perp \delta$, $N \in \delta$, unde δ este directoarea parabolei (proprietatea optică a parabolei).

Soluţie:

a) Fie $M(x_0, y_0) \in \mathcal{P}$. Ecuaţia tangentei se scrie prin dedublare: $y_0 y = p(x + x_0)$.

Normala în M este perpendiculară pe tangentă în M, deci produsul pantelor este -1. Rezultă că normala are ecuaţia

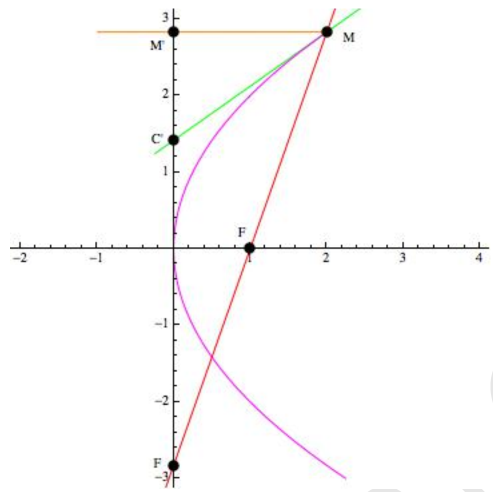
$$p(y - y_0) = -y_0(x - x_0).$$

Facem intersecţia celor două drepte cu axa parabolei, $y = 0$. Obţinem punctele $C(-x_0, 0)$, respectiv $D(x_0 + p, 0)$. Deoarece $\mathcal{P}$ are focarul $F\left(\frac{p}{2}, 0\right)$, deducem imediat $F = \frac{1}{2}C + \frac{1}{2}D$.

b) Fără a restrânge generalitatea presupunem că $y^2 = 2px$, $p > 0$ şi $y_0 > 0$. Vom arăta proprietatea doar pentru tangenta în M.

Fie M' proiecţia lui M pe Oy. Atunci $M'(0, y_0)$. Fie C' punctul de intersecţie al tangentei cu Oy. Atunci $C'\left(0, p\frac{x_0}{y_0}\right)$. Fie de asemenea F' punctul de intersecţie (atunci când există!) al dreptei MF cu Oy. Deducem că $F'\left(0, -\frac{py_0}{2x_0 - p}\right)$.

Caz I: $x_0 > \dfrac{p}{2}$. Avem figura:

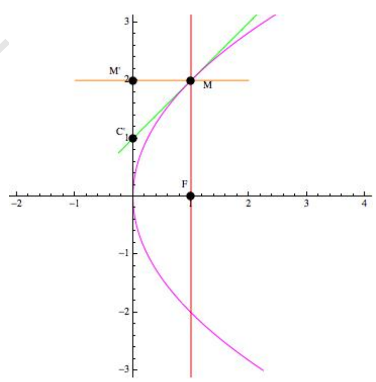


Vom verifica reciproca teoremei bisectoarei în $\triangle MM'F'$. Avem:

$$MM' = x_0, \quad MF' = x_0 \cdot \frac{2x_0 + p}{2x_0 - p}, \;\; M'C' = p\frac{x_0}{y_0}, \;\; C'F' = p\frac{x_0}{y_0} \cdot \frac{2x_0 + p}{2x_0 - p}.$$

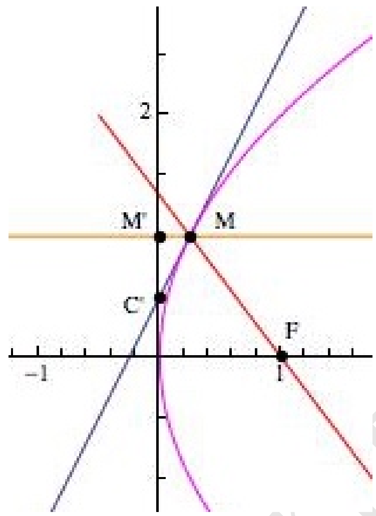
Astfel, $\dfrac{MM'}{M'C'} = \dfrac{MF'}{C'F'} = \dfrac{y_0}{p}$.

Caz II: $x_0 = \dfrac{p}{2}$. Rezultă $y_0 = p$. Dreapta $MF \perp Ox$, deci nu intersectează Oy.



În acest caz tangenta în M se scrie $py = p\left(x + \dfrac{p}{2}\right)$, care formează unghiul $\dfrac{\pi}{4}$ cu axa Ox. Concluzia în acest caz rezultă uşor.

Caz III: $0 < x_0 < \dfrac{p}{2}$. Avem figura:



Vom lucra vectorial, cu unghiuri. Calculăm:

$$\overrightarrow{MM'} = (-x_0, 0), \quad \overrightarrow{MC'} = \left(-x_0, -p\frac{x_0}{y_0}\right), \ \overrightarrow{MF} = \left(\frac{p}{2} - x_0, -y_0\right).$$

Atunci, $\cos \sphericalangle M'MC' = \dfrac{\langle \overrightarrow{MM'}, \overrightarrow{MC'} \rangle}{|\overrightarrow{MM'}| \cdot |\overrightarrow{MC'}|} = \dfrac{1}{\sqrt{1 + \dfrac{p^2}{y_0^2}}} = \cos \sphericalangle FMC'$. Rezultă concluzia.