Seminar 14.04.2020

Ex 1. Fie cercul $\mathcal{C}: \; x^2 + y^2 - 2x = 0$ şi $d: \; x - y - 2 = 0$.

(a) Să se determine centrul şi raza cercului $\mathcal{C}$.

(b) Să se determine poziţia dreptei d faţă de cercul $\mathcal{C}$.

(c) Să se scrie ecuaţia tangentei la $\mathcal{C}$ în punctul $M(2, 0)$.

Soluţie:

(a) Deoarece ecuaţia cercului se rescrie $(x-1)^2 + y^2 = 1$, deducem elementele: centrul $\Omega(1, 0)$ şi raza $R = 1$.

(b) Rezolvând sistemul format de cele două ecuaţii, obţinem $\mathcal{C} \cap d = \{(2, 0), \; (1, -1)\}$.

(c) Se observă că $M \in \mathcal{C}$.

Ecuaţia tangentei în M se scrie prin dedublare $xx_M + yy_M - (x + x_M) = 0$. Rezultă dreapta $x = 2$.

Lucru individual:

Ex 2. În $\mathcal{E}^2$ se consideră cercul C dat prin ecuaţia: $x^2 + y^2 - 2x + 2y = 0$.
a) Să se determine centrul şi raza cercului; să se reprezinte grafic.
b) Să se arate că C trece prin origine.
c) Să se scrie ecuaţia tangentei în origine la C.
d) Să se scrie ecuaţiile tangentelor la C duse din punctul $A(-1, 1)$.

Ex 3. Să se scrie ecuaţia cercului determinat de:

(a) centrul $\Omega(1, 3)$ şi care trece prin punctul $A(-2, 1)$;

(b) extremităţile unui diametru $A(1, 0)$ şi $B(3, -2)$.

Soluţie:

(a) Putem imediat determina raza R a cercului căutat: $R^2 = A\Omega^2 = 3^2 + 2^2 = 13$. Aşadar, cercul are ecuaţia:
$$(x-1)^2 + (y-3)^2 = 13,$$

sau, echivalent, $x^2 + y^2 - 2x - 6y - 3 = 0$.

(b) Centrul cercului este $\Omega = \frac{1}{2}A + \frac{1}{2}B = (2, -1)$, iar raza $R = A\Omega = \sqrt{2}$. Ecuaţia cercului căutat este:

$$x^2 + y^2 - 4x + 2y + 3 = 0.$$

Ex 4. Să se scrie ecuaţia cercului determinat de centrul $\Omega(2, -1)$ şi tangenta la cerc $d: \ x + 5y - 1 = 0$.

Soluţie: Se calculează raza R ca fiind distanţa de la Ω la d:

$$d(\Omega, d) = \frac{|2 - 5 - 1|}{\sqrt{1 + 25}} = \frac{4}{\sqrt{26}}.$$

Deci cercul se scrie:

$$x^2 + y^2 - 4x + 2y + \frac{47}{13} = 0.$$

Ex 5. Fie punctele $A(1, 5)$ şi $B(-3, 1)$.

(a) Să se scrie ecuaţia tangentei în punctul $O(0, 0)$ la un cerc cu centrul pe dreapta determinată de punctele A şi B şi care trece prin originea $O(0, 0)$.

(b) Să se scrie ecuaţia tangentei în A la cercul cu centrul în origine şi care trece prin A.

(c) Scrieţi ecuaţia tangentei în B la cercul de diametru (AB).

Soluţie: (a) Fie Ω un punct pe dreapta AB.

Rezultă că există $\alpha \in \mathbb{R}$ a.î. $\Omega = (1 - \alpha)A + \alpha\ B$, adică $\Omega(1 - 4\alpha, 5 - 4\alpha)$. Cercul cu centrul în Ω şi de rază R se scrie:

$$(x - 1 + 4\alpha)^2 + (y - 5 + 4\alpha)^2 = R^2.$$

Condiţia ca cercul să treacă prin origine determină raza în funcţie de α:

$$R^2 = 32\alpha^2 - 48\alpha + 26.$$

Rescriem ecuaţia cercului:

$$x^2 + y^2 - 2x(1 - 4\alpha) - 2y(5 - 4\alpha) = 0.$$

Ecuaţia tangentei la cerc într-un punct (x_0, y_0) de pe cerc se scrie prin dedublare:

$$xx_0 + yy_0 - (x + x_0)(1 - 4\alpha) - (y + y_0)(5 - 4\alpha) = 0.$$

În cazul $x_0 = 0$, $y_0 = 0$ se obţine dreapta:

$$(1 - 4\alpha)x + (5 - 4\alpha)y = 0.$$

(b) Cercul este dat de ecuaţia: $x^2 + y^2 = R^2$, unde $R^2 = OA^2 = 26$.

Tangenta în A se scrie prin dedublare: $xx_A + yy_A - R^2 = 0$, adică $x + 5y - 26 = 0$.

(c) Tangenta căutată este normala în B la dreapta AB.

Dreapta AB are ecuaţia $\dfrac{x-1}{-4} = \dfrac{y-5}{-4}$, astfel, direcţia normală dreptei AB este dată de vectorul $\bar{a} = (1, -1)$.

Ecuaţia tangentei în B se scrie aşadar $\dfrac{x+3}{1} = \dfrac{y-1}{-1}$, echivalent cu $x + y + 2 = 0$.

Ex 6. Fie cercul de ecuaţie: $x^2 + y^2 - 4x - 6y + 5 = 0$.

(a) Să se scrie ecuaţiile tangentelor la cerc paralele cu axele de coordonate.

(b) Să se arate că axa Oy determină în cerc o coardă de lungime 4.

(c) Să se găsească, dacă există, o altă dreaptă prin origine, care să determine în cerc o coardă de lungime 4.

Soluţie:

(a) Găsim mai întâi tangentele paralele cu axa Ox.

Fie $d : y = y_0$ o astfel de tangentă. Intersecţia dintre d şi cerc este un punct (dublu), adică ecuaţia:

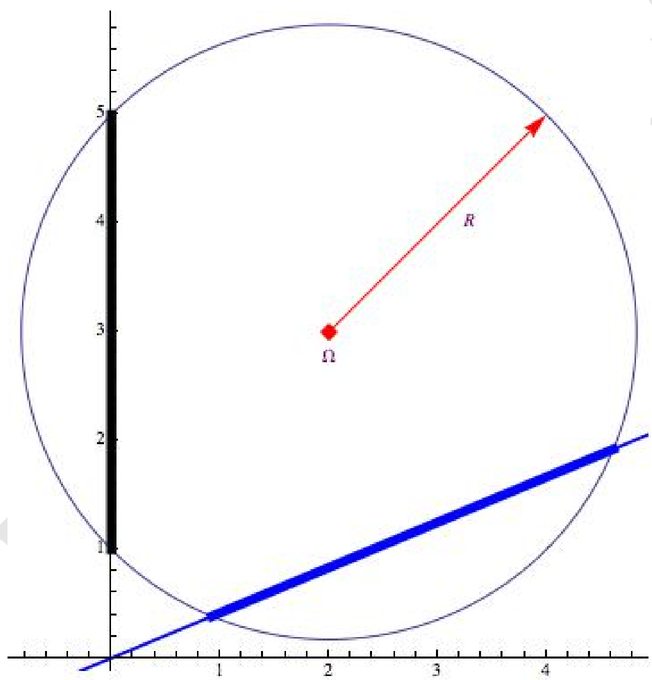
$$x^2 - 4x + y_0^2 - 6y_0 + 5 = 0$$

are o soluţie dublă. Rezultă $16 - 4(y_0^2 - 6y_0 + 5) = 0$, de unde deducem că $y_0 = 3 + 2\sqrt{2}$ sau $y_0 = 3 - 2\sqrt{2}$.

În mod analog, găsim tangentele paralele cu Oy: $x_0 = 2 + 2\sqrt{2}$ şi $x_0 = 2 - 2\sqrt{2}$.

(b) Intersecţia cercului cu dreapta $x = 0$ este formată din punctele $A_0(0, 1)$ şi $B_0(0, 5)$; evident $d(A_0, B_0) = 4$.

(c) Fie acum o altă dreaptă δ, prin origine, care determină în cerc o coardă de lungime 4. Fie m panta dreptei δ, deci δ are ecuaţia: $y = mx$.



Facem intersecţia dintre δ şi cerc şi obţinem ecuaţia

$$(1 + m^2)x^2 - 2(2 + 3m)x + 5 = 0, \tag{1}$$

care trebuie să aibă $\Delta > 0$, adică $4m^2 + 12m - 1 > 0$. Fie acum $x_1 \neq x_2$ soluţiile ecuaţiei de mai sus. Punctele corespunzătoare pe cerc sunt $P(x_1, mx_1)$ şi $Q(x_2, mx_2)$. Din ipoteză avem $PQ = 4$. Rezultă

$$(m^2 + 1)(x_1 - x_2)^2 = 16.$$

Nu vom rezolva ecuaţia (1); vom dezvolta relaţia de mai sus folosind ecuaţiile lui Viète.

Deoarece $(x_1 - x_2)^2 = (x_1 + x_2)^2 - 4x_1x_2$ avem

$$16 = (m^2+1)\left[\frac{4(2+3m)^2}{(m^2+1)^2} - \frac{20}{m^2+1}\right],$$

de unde obţinem că $m = \dfrac{5}{12}$.

Concluzionăm că δ are ecuaţia $5x - 12y = 0$ şi determină pe cerc coarda $[PQ]$ de lungime 4, unde $P\left(\dfrac{12}{13}, \dfrac{5}{13}\right)$ şi $Q\left(\dfrac{60}{13}, \dfrac{25}{13}\right)$.

Lucru individual:

Ex 7. Fie cercul $\mathcal{C}: \; x^2 + y^2 + 2x - 4y + 1 = 0$. Se cer:

(a) ecuaţia tangentei prin $A(-3, 2)$;

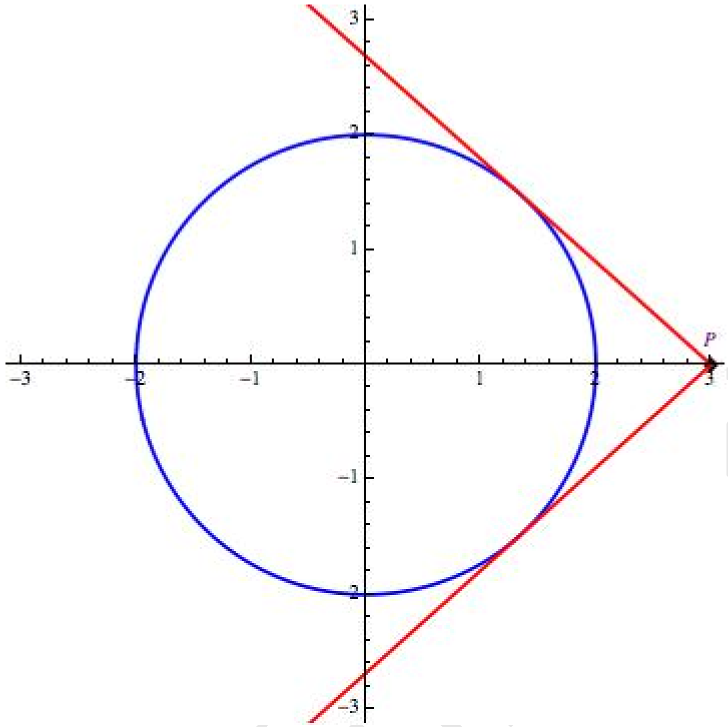
(b) ecuaţiile tangentelor prin $B(3, 2)$;

(c) ecuaţiile tangentelor paralele cu dreapta $d: \; 2x - y - 3 = 0$.

Ex 8. Fie cercul $\mathcal{C}$ dat de ecuaţia $x^2 + y^2 = 4$ şi punctul $P(3, 0)$. Să se scrie ecuaţia tangentelor din P la $\mathcal{C}$ (dacă există). Ce se poate spune în cazul punctului $P(1, 0)$?

Soluţie: Prin P ducem o dreaptă δ de pantă $m \in \mathbb{R}$. Se exclude astfel cazul când δ este "verticală", însă dreapta $x = 3$ este exterioară cercului. Prin urmare, δ are ecuaţia $y = m(x-3)$. Înlocuind în ecuaţia cercului obţinem $x^2 + m^2(x-3)^2 = 4$. Condiţia $\Delta = 0$ ne conduce la $m = \pm\dfrac{2}{\sqrt{5}}$.

Cele două tangente au respectiv ecuaţile $y = \pm\dfrac{2}{\sqrt{5}}(x-3)$.



Pentru $P(1,0)$, observăm că se află situat în interiorul cercului ($d(\Omega, P) = 1 < R = 2$). Astfel, orice dreaptă prin P este secantă.

Observaţie: Făcând calculul analog ca mai sus, noul Δ este $\Delta = 4(3m^2 + 4)$, care, evident, nu poate fi zero.

Lucru individual:

Ex 9. În $\mathcal{E}^2$ se consideră dreapta $(\delta) : x - y + 1 = 0$.
a) Să se găsească un cerc C care trece prin $A(3,0)$ şi care determină pe dreapta (δ) un segment de lungime $2\sqrt{2}$ al cărui mijloc este $B(2,3)$.
b) Să se găsească tangentele la cercul C paralele cu dreapta (δ). c) Să se reprezinte grafic.

Ex 10. În $\mathcal{E}^2$ se consideră dreptele $(\delta_1) : y = 3x$ şi $(\delta_2) : x = 3y$. Să se determine cercurile care trec prin punctul $P(4,2)$ şi sunt tangente dreptelor (δ_1) şi (δ_2). Să se reprezinte grafic.

Soluţie: Cele două drepte sunt concurente în origine, adică $d_1 \cap d_2 = \{O(0,0)\}$. Deoarece cercul este tangent la cele două drepte, rezultă că centrul său se află pe bisectoarea unghiului format de cele două drepte (una din cele două).

Fie deci $\bar{a}_1 \in \overrightarrow{d_1}$ şi $\bar{a}_2 \in \overrightarrow{d_2}$. Avem că $\bar{a}_1 = (1, 3)$, $\bar{a}_2 = (3, 1)$.

Să presupunem că b este bisectoarea unghiului format de cele două drepte. Atunci:

$$\bar{b} = \frac{\bar{a}_1}{||\bar{a}_1||} + \frac{\bar{a}_2}{||\bar{a}_2||} = \frac{4}{\sqrt{10}}(1, 1) \parallel (1, 1) \tag{2}$$

Cealaltă bisectoare este perpendiculara pe b prin O şi are direcţia paralelă cu $(1, -1)$.

Întrucât P se află între semidreptele situate în primul cadran, rezultă că centrul cercului căutat (care trece prin P) se află pe bisectoarea b situată în primul cadran, adică există $\alpha > 0$ astfel că $\Omega(\alpha, \alpha)$.

Deci ecuaţia generală a cercului este:

$$\mathcal{C} : (x - \alpha)^2 + (y - \alpha)^2 = R^2 \ .$$

Deoarece $P \in \mathcal{C}$ rezultă că $(4 - \alpha)^2 + (2 - \alpha)^2 = R^2$.

Raza se obţine din condiţiile $d(\Omega, d_1) = R = d(\Omega, d_2)$. Găsim:

$$R = \frac{|\alpha - 3\alpha|}{\sqrt{10}} = \frac{2\alpha}{\sqrt{10}} \ .$$

Rezultă că

$$2\alpha^2 - 12\alpha + 20 = \frac{2\alpha^2}{5} \iff 2\alpha^2 - 15\alpha + 25 = 0.$$

Obţinem $\alpha_1 = 5$ şi $\alpha_2 = \frac{5}{2}$, două valori posibile pentru α. Avem astfel două raze corespunzătoare:

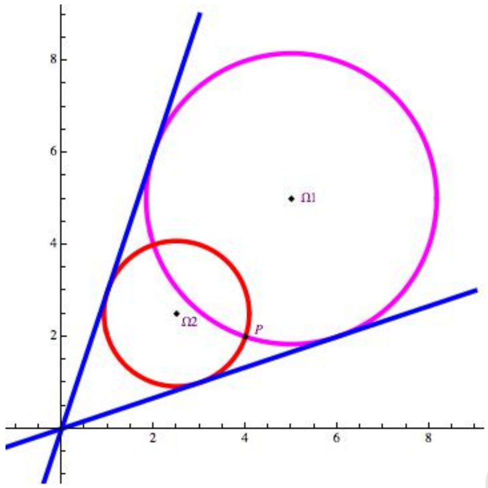
$$R_1 = \sqrt{10}, \ R_2 = \frac{\sqrt{10}}{2}.$$

Ecuaţiile generale pentru cele două cercuri sunt:

$$\mathcal{C}_1 : (x - 5)^2 + (y - 5)^2 = 10$$

$$\mathcal{C}_2 : \left(x - \frac{5}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{5}{2}\right)^2 = \frac{5}{2}.$$

Să reprezentăm grafic cele două cercuri şi cele două tangente.



Ex 11. În $\mathcal{E}^2$ se consideră dreptele $(\delta_1) : y = 4x$ şi $(\delta_2) : y = \frac{1}{4}x$ şi $(\delta_3) : x + y - 6 = 0$. Să se determine cercurile care sunt tangente (simultan) dreptelor (δ_1), (δ_2) şi (δ_3). Să se reprezinte grafic.

Soluţie:

Fie $\Omega(x_0, y_0)$ centrul şi $R > 0$ raza unui astfel de cerc. Din condiţiile de tangenţă avem:

$$R = \frac{|y_0 - 4x_0|}{\sqrt{17}} \tag{3}$$

$$R = \frac{|4y_0 - x_0|}{\sqrt{17}} \tag{4}$$

$$R = \frac{|x_0 + y_0 - 6|}{\sqrt{2}} \tag{5}$$

Din (3) şi (4), prin ridicare la pătrat, obţinem

$$x_0^2 = y_0^2.$$

Vom analiza, pe rând, cele două situaţii, **Caz (a)** $y_0 = x_0$ şi **Caz (b)** $y_0 = -x_0$.

Caz (a) $y_0 = x_0$.
Din (3) sau (4) se obţine $R = \dfrac{3}{\sqrt{17}}|x_0|$, iar din (5) se deduce că $R = \sqrt{2}\ |x_0 - 3|$. Avem de rezolvat ecuaţia $3|x_0| = \sqrt{34}\ |x_0 - 3|$.

Un calcul clasic ne conduce la:

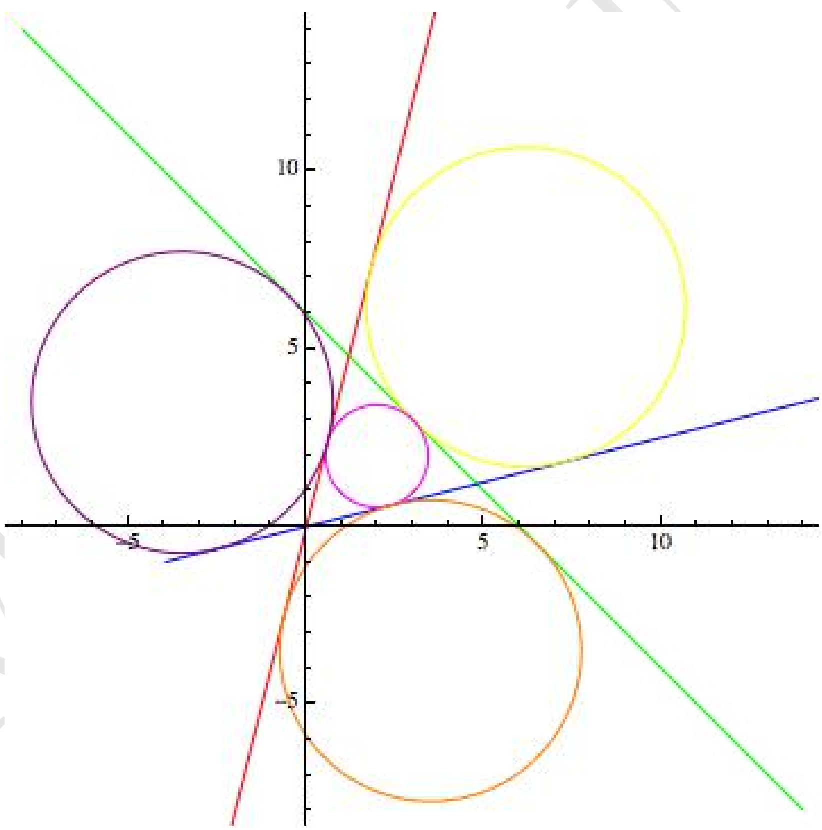
(a.1) $x_0 = \frac{3}{25}(34 + 3\sqrt{34})$

(a.2) $x_0 = \frac{3}{25}(34 - 3\sqrt{34})$

Caz (b) $y_0 = -x_0$.
Din (3) sau (4) se obţine $R = \dfrac{5}{\sqrt{17}}|x_0|$, iar din (5) deducem $R = 3\sqrt{2}$.

Astfel, $x_0 = \pm\dfrac{3\sqrt{34}}{5}$.

Prin urmare, se obţin patru cercuri, care reprezintă cercul înscris şi cele 3 cercuri exinscrise triunghiului format prin intersecţia celor trei drepte.

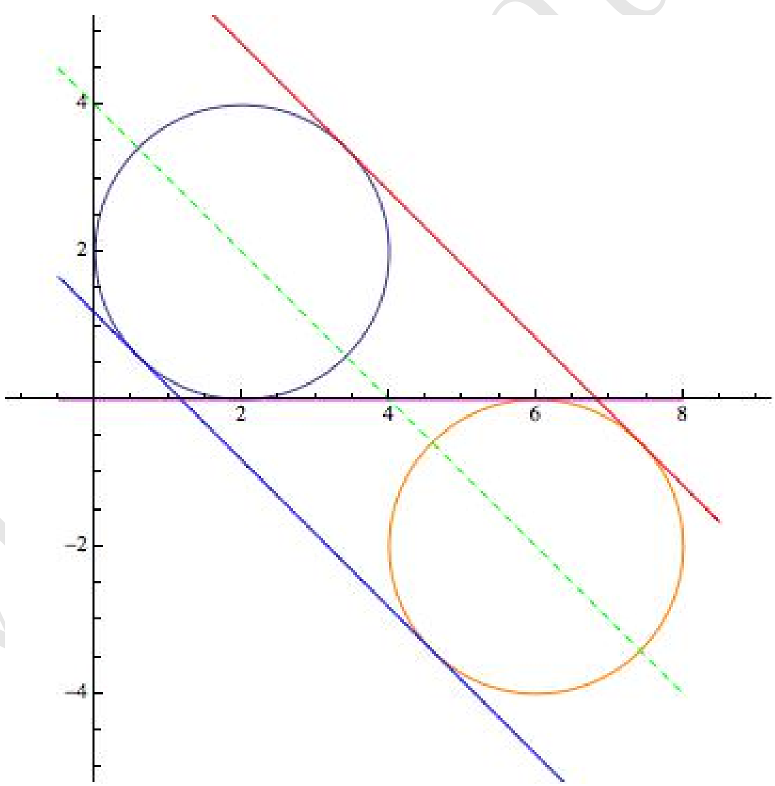


Ex 12. În $\mathcal{E}^2$ se consideră dreptele: $\delta_1 : x + y - 4 - 2\sqrt{2} = 0$ şi $\delta_2 : x + y - 4 + 2\sqrt{2} = 0$.
a) Să se determine un cerc $\mathcal{C}$ tangent simultan la dreptele δ_1, δ_2 şi la axa Ox.
b) Fie $\mathcal{C}_1$ cercul de centru $\Omega_1(3, 1)$ şi rază $r_1 = 2$. Să se arate că $\mathcal{C}_1$ nu verifică toate condiţiile punctului a).
c) Să se găsească ecuaţiile tangentelor la $\mathcal{C}_1$ paralele cu Ox.
d) Să se reprezinte grafic.

Soluţie:

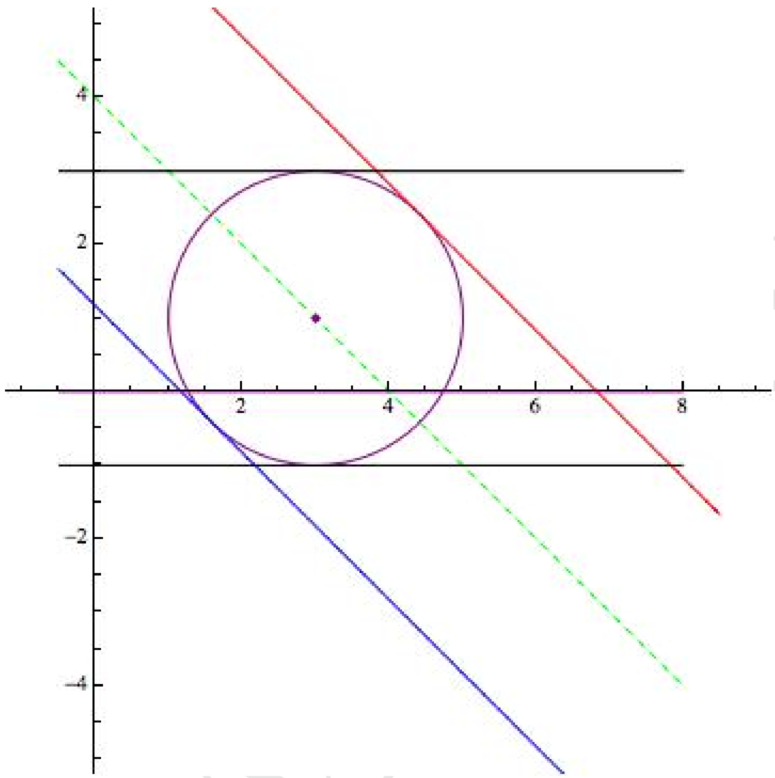
a) Remarcăm că dreptele δ_1 şi δ_2 sunt paralele, iar distanţa dintre acestea este $d = 4$. Prin urmare, pentru ca un cerc $\mathcal{C}$ să fie tangent simultan la δ_1 şi δ_2, centrul său trebuie să se afle pe dreapta "mediană" care are ecuaţia $\delta\ : x + y - 4 = 0$ şi să aibă raza $R = \frac{d}{2} = 2$.

Există două astfel de cercuri care au centrele respectiv în $\Omega_1(2, 2)$ şi $\Omega_2(6, -2)$. Vezi figura.



b) Cercul $\mathcal{C}_1$ este tangent dreptelor δ_1 şi δ_2, dar nu este tangent la Ox; se verifică $d(\Omega_1, Ox) = 1 \neq R$ şi $\Omega_1 \in \delta$, $r_1 = R$.

c) Cele două tangente au ecuaţiile $y = y_{\Omega_1} \pm r_1$, adică $y = -1$ şi $y = 3$, respectiv.



Ex 13. Fie cercurile $\mathcal{C}_1 : \; x^2 + y^2 = 4$, $\mathcal{C}_2 : \; (x-5)^2 + y^2 = 9$ şi notăm Ω_1, Ω_2 centrele acestora.

a) Să se studieze poziţia relativă a celor două cercuri.

b) Să se determine punctele de intersecţie ale dreptei $\Omega_1\Omega_2$ cu cele două cercuri.

c) Să se găsească tangentele comune la cele două cercuri.

Soluţie:

a) Să rezolvăm sistemul format cu cele două ecuaţii $\begin{cases} x^2 + y^2 = 4 \\ (x-5)^2 + y^2 = 9. \end{cases}$

Scăzând ecuaţiile obţinem $-10x + 25 = 5$, deci avem o singură soluţie $\begin{cases} x = 2 \\ y = 0. \end{cases}$

Astfel, cercurile sunt tangente în $A(2,0)$.

b) Avem $\begin{cases} \Omega_1(0,0), & R_1 = 2 \\ \Omega_2(5,0), & R_2 = 3. \end{cases}$

Dreapta $\Omega_1\Omega_2$ este axa $Ox: \ y = 0$.

Intersecţia cu $\mathcal{C}_1$ este $\{A(2,0), B(-2,0)\}$, iar intersecţia cu $\mathcal{C}_2$ este $\{A(2,0), C(8,0)\}$.

c) Vom considera o dreaptă δ de ecuaţie $\delta: \ y = mx + n$, $m \in \mathbb{R}$. Această alegere exclude dreptele δ verticale; le vom analiza mai târziu pe acestea.

Intersecţia cu $\mathcal{C}_1$ este un punct dublu, la fel cu $\mathcal{C}_2$. Deci ecuaţiile de gradul al doilea

$$x^2 + (mx+n)^2 - 4 = 0 \tag{6}$$

$$(x-5)^2 + (mx+n)^2 - 9 = 0 \tag{7}$$

au fiecare $\Delta = 0$.

Din (6) condiţia $\Delta = 0$ implică

$$n^2 - 4 - 4m^2 = 0, \tag{8}$$

iar din (7) avem

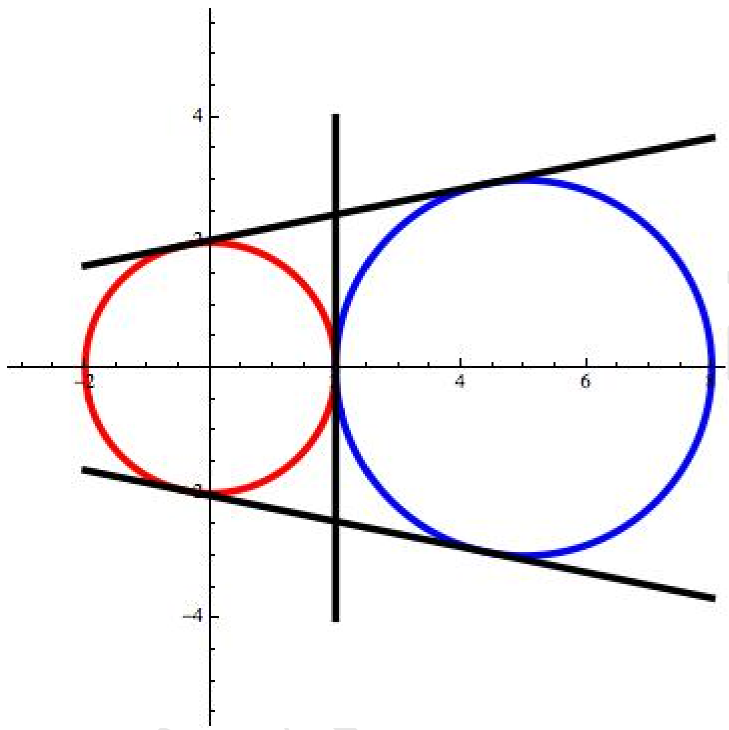
$$n^2 + 10mn + 16m^2 - 9 = 0. \tag{9}$$

Combinând (8) şi (9) avem $n = \dfrac{1-4m^2}{2m}$.

Astfel obţinem soluţiile $m = \pm\dfrac{1}{\sqrt{24}}$ şi $n = \pm\dfrac{5}{\sqrt{6}}$.

Fie acum o tangentă comună verticală $x = x_0$, dacă există. Intersecţia cu $\mathcal{C}_1$ este un punct dublu, la fel pentru $\mathcal{C}_2$. Obţinem că ecuaţiile $y^2 + x_0^2 - 4 = 0$ şi $y^2 + (x_0-5)^2 - 9 = 0$ au fiecare $\Delta = 0$. Deducem că $x_0^2 = 4$ şi $(x_0-5)^2 = 9$, care au soluţia $x_0 = 2$.

Să vizualizăm cele descrise mai sus.



Ex 14. Fie cercul $\mathcal{C}:\ x^2 + (y-1)^2 = 1$.

a) Să se construiască tangentele prin $P(0, 1-\sqrt{2})$ la cercul $\mathcal{C}$ şi să se arate că sunt perpendiculare.

b) Mai există un alt punct din care se pot duce tangente perpendiculare la $\mathcal{C}$?

Soluţie:

a) Observăm că $x = 0$ nu este tangentă.

Fie tangenta de ecuaţie $y - (1-\sqrt{2}) = mx$, $m \in \mathbb{R}$ (am exclus dreapta verticală $x = 0$).

Rezultă $x^2 + (mx - \sqrt{2})^2 = 1$.

Condiţia $\Delta = 0$ implică $m^2 = 1$, adică $m_1 = 1$ şi $m_2 = -1$.

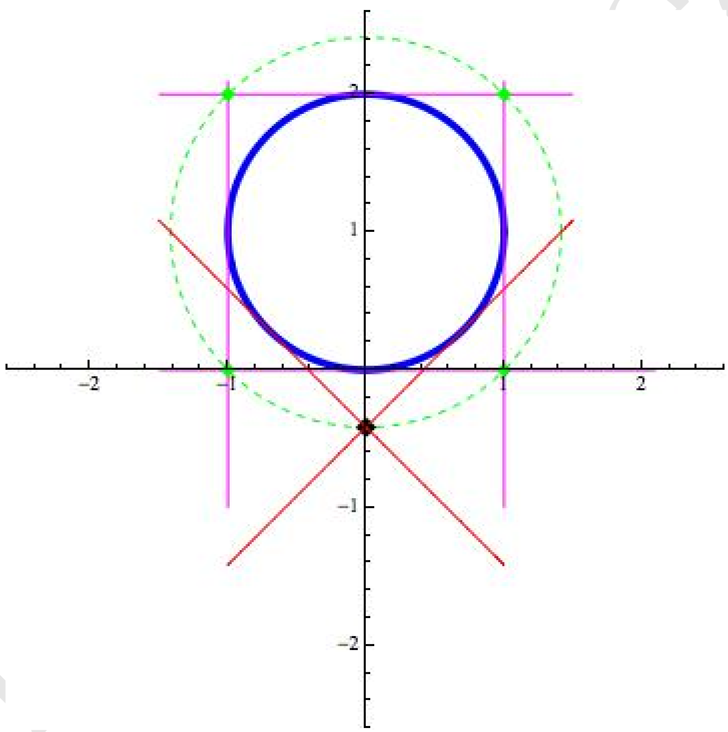
Cele două tangente sunt:

$$\begin{aligned} \delta_1 &: y - x - 1 + \sqrt{2} = 0 \\ \delta_2 &: y + x - 1 + \sqrt{2} = 0. \end{aligned}$$

Cum produsul pantelor este -1, rezută că dreptele sunt perpendiculare.

b) Fie un punct (x_0, y_0) a.î. $x = x_0$ şi $y = y_0$ să fie tangente la cercul $\mathcal{C}$ (dreptele tangente să fie paralele cu axele de coordonate). Rezultă punctele $\{(-1,0), (-1,2), (1,0), (1,2)\}$.

Se poate arăta că pentru orice (x_0, y_0) cu proprietatea că $x_0^2 + (y_0 - 1)^2 = 2$ tangentele duse la $\mathcal{C}$ sunt perpendiculare.



Ex 15. Fie cercurile $\mathcal{C}_1 : \ x^2 + y^2 = 4$ şi $\mathcal{C}_2 : \ (x-5)^2 + y^2 = 1$.

Să se scrie ecuaţia unei drepte tangente la ambele cercuri. Câte astfel de drepte există?

Soluţie: Fie δ o dreaptă tangentă la ambele cercuri. Remarcăm că nu există drepte verticale tangente la ambele cercuri. Scriem ecuaţia dreptei δ sub forma $y = mx + n$ şi punem condiţiile de tangenţă.

Intersecţia cu $\mathcal{C}_1$: $x^2 + (mx + n)^2 = 4$. Condiţia $\Delta = 0$ este echivalentă cu:

$$n^2 - 4 - 4m^2 = 0. \tag{10}$$

Intersecţia cu $\mathcal{C}_2$: $(x - 5)^2 + (mx + n)^2 = 1$. Condiţia $\Delta = 0$ este echivalentă cu:

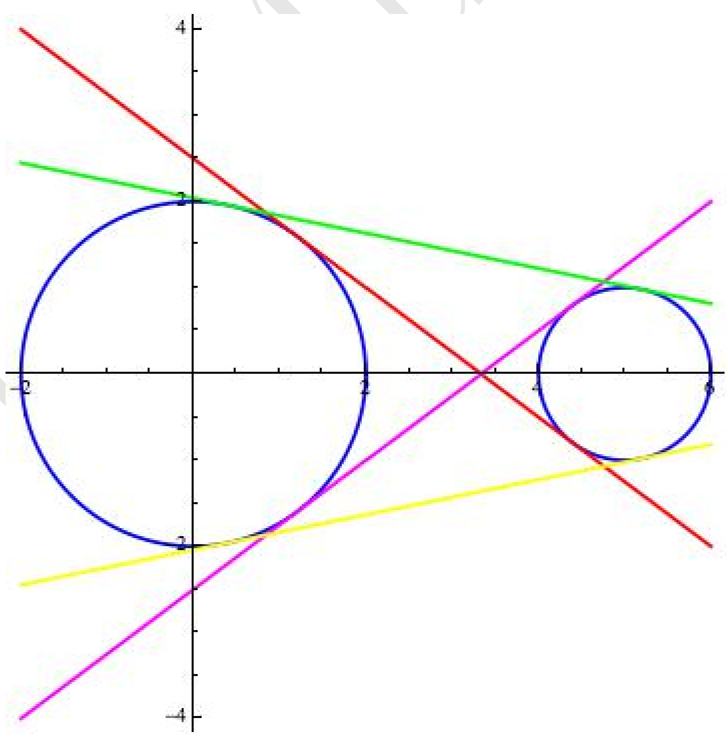
$$24m^2 + 10mn + n^2 - 1 = 0 \tag{11}$$

Combinând (10) cu (11) obţinem $n = -\dfrac{3 + 28m^2}{10m}$. Rezultă apoi ecuaţia

$$\frac{(3 + 28m^2)^2}{100m^2} = 4 + 4m^2$$

care are soluţiile $m_1 = \dfrac{3}{4}$, $m_2 = -\dfrac{3}{4}$, $m_3 = \dfrac{1}{\sqrt{24}}$, $m_4 = -\dfrac{1}{\sqrt{24}}$. Obţinem apoi $n_1 = -\dfrac{5}{2}$, $n_2 = \dfrac{5}{2}$, $n_3 = -\dfrac{5}{\sqrt{6}}$, $n_4 = \dfrac{5}{\sqrt{6}}$.

Găsim astfel patru tangente. Vezi şi figura!



Lucru individual:

Ex 16. Fie cercul $\mathcal{C}$ de centru $\Omega(1,1)$ şi rază $R = 1$.

a) Să se arate că imaginea lui $\mathcal{C}$ prin translaţia $t_{\bar{u}}$, $\bar{u} = (2,1)$ este un cerc căruia să i se determine centrul şi raza.

b) Să se determine imaginea lui $\mathcal{C}$ în urma rotaţiei $R_{A,\frac{\pi}{2}}$, de centru $A(1,0)$ şi unghi $\frac{\pi}{2}$.

c) Să se determine imaginea lui $\mathcal{C}$ în urma simetriei ortogonale S_δ faţă de dreapta $\delta: \ x + y + 1 = 0$.