

Seminar 17.03.2020

Ex 1. În $\mathcal{E}^3$: Să se determine unghiul dintre dreptele δ_1 și δ_2 , respectiv distanța dintre δ_1 și δ_2 , unde:

a) $\delta_1 : \frac{x}{1} = \frac{y-1}{-2} = \frac{z+1}{2}$ și $\delta_2 : \frac{x+1}{1} = \frac{y+1}{1} = \frac{z-1}{1}$;

b) $\delta_1 : \frac{x}{1} = \frac{y}{1} = \frac{z-1}{-1}$ și $\delta_2 : \frac{x-1}{-1} = \frac{y+1}{-1} = \frac{z}{1}$.

Soluție:

a) Direcțiile celor două drepte sunt date, respectiv de $\bar{a}_1 = (1, -2, 2)$ și $\bar{a}_2 = (1, 1, 1)$. Dacă θ este unghiul neorientat al dreptelor (neorientate) δ_1 și δ_2 , atunci

$$\cos \theta = \frac{|\langle \bar{a}_1, \bar{a}_2 \rangle|}{\|\bar{a}_1\| \|\bar{a}_2\|} = \frac{1}{3\sqrt{3}}. \text{ Prin urmare, } \theta = \arccos \frac{1}{3\sqrt{3}} \in (0, \frac{\pi}{2}).$$

Considerăm $A_1(0, 1, -1) \in \delta_1$ și $A_2(-1, -1, 1) \in \delta_2$. Vectorii $\overrightarrow{A_1A_2} = (-1, -2, 2)$, $\bar{a}_1$ și $\bar{a}_2$ sunt liniar independenți deoarece $(\overrightarrow{A_1A_2}, \bar{a}_1, \bar{a}_2) = 8 \neq 0$, prin urmare dreptele sunt necoplanare. Astfel, $d(\delta_1, \delta_2) = \frac{|(\overrightarrow{A_1A_2}, \bar{a}_1, \bar{a}_2)|}{\|\bar{a}_1 \times \bar{a}_2\|} = 4\sqrt{\frac{2}{13}}.$

Această valoare se poate obține și folosind definiția distanței dintre două subspații afine arbitrare. Mai precis, fie $P(t, -2t+1, 2t-1) \in \delta_1$ și $Q(s-1, s-1, s+1) \in \delta_2$ două puncte arbitrare. Să calculăm minimul distanței de la P la Q când t și s variază arbitrar pe $\mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} d(P, Q)^2 &= \|\overrightarrow{PQ}\|^2 = (s-t-1)^2 + (s+2t-2)^2 + (s-2t+2)^2 \\ &= 3s^2 + 9t^2 + 9 - 2st - 2s - 14t \\ &= 3 \underbrace{\left(s - \frac{t+1}{3}\right)^2}_{\geq 0} + \frac{1}{3} \underbrace{(26t^2 - 44t + 26)}_{\geq \frac{96}{13}} \geq \frac{32}{13} \end{aligned}$$

b) Acum dreptele δ_1 și δ_2 sunt paralele, deoarece $\bar{a}_1$ și $\bar{a}_2$ sunt proporționali și $A_1(0, 0, 1) \in \delta_1 \setminus \delta_2$.

Deci unghiul lor este 0.

Distanța dintre δ_1 și δ_2 se poate calcula, de exemplu, ca fiind distanța de la A_1 la δ_2 .

Fie $A_2(1, -1, 0)$. Avem $d(A_1, \delta_2) = \frac{\|\overrightarrow{A_2A_1} \times \bar{a}_2\|}{\|\bar{a}_2\|} = 2\sqrt{\frac{2}{3}}.$

Se poate obține această distanță și folosind definiția.

Știm că distanța dintre dreptele δ_1 și δ_2 este minimul $\min\{d(P, Q) : P \in \delta_1, Q \in \delta_2\}$.

Considerând $P(t, t, -t + 1) \in \delta_1$ și $Q(-s + 1, -s - 1, s) \in \delta_2$ două puncte arbitrare, calculăm

$$\begin{aligned} d(P, Q)^2 &= \|\overrightarrow{PQ}\|^2 = (-t - s + 1)^2 + (-t - s - 1)^2 + (s + t - 1)^2 \\ &= 3(t + s)^2 - 2(t + s) + 3 \geq \frac{8}{3} \end{aligned}$$

Prin urmare, $d(\delta_1, \delta_2) = 2\sqrt{\frac{2}{3}}$.

Ex 2. În $\mathcal{E}^3$: Fie dreapta δ și planul π :

$$\delta : \frac{x}{1} = \frac{y}{1} = \frac{z-1}{2}, \quad \pi : 2x - y - z + 3 = 0.$$

- a) Să se determine unghiul dintre dreapta δ și planul π ;
- b) Să se determine distanța de la δ la π .

Soluție:

a) Pentru π avem direcția normalei $\bar{N} = (2, -1, -1)$. Pentru δ avem $\overrightarrow{\delta} = [\bar{a}]$, unde $\bar{a} = (1, 1, 2)$ Calculăm unghiul θ dintre δ și π folosind formula

$$\sin \theta = \frac{|\langle \bar{a}, \bar{N} \rangle|}{\|\bar{a}\| \|\bar{N}\|} = \frac{1}{6}. \text{ Deci } \theta = \arcsin \frac{1}{6} \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right).$$

b) Se observă că $\delta \cap \pi = \{P(2, 2, 5)\}$, prin urmare $d(\delta, \pi) = 0$.

Ex 3. În $\mathcal{E}^3$: Fie dreapta δ și planul π :

$$\delta : \frac{x}{1} = \frac{y}{1} = \frac{z-1}{2}, \quad \pi : x + y - z + 12 = 0.$$

- a) Să se determine unghiul dintre dreapta δ și planul π ;
- b) Să se determine distanța de la δ la π .

Soluție:

a) Pentru planul π avem direcția normală $\bar{N} = (1, 1 - 1)$. Observăm că $\langle \bar{N}, \bar{a} \rangle = 0$, deci $\bar{N} \perp \bar{a}$. Așadar $\vec{\delta} \subset \vec{\pi}$, deci unghiul θ dintre δ și π este 0.

b) Dreapta δ și planul π nu au puncte comune. Se verifică, de exemplu, faptul că $A(0, 0, 1) \notin \pi$. Distanța $d(\delta, \pi) = d(A, \pi) = \frac{|0+0-1+12|}{1+1+1} = \frac{11}{\sqrt{3}}$.

Ex 4. În $\mathcal{E}^3$: Să se determine unghiul dintre planele:

$$\pi_1 : x + 2y + z + 10 = 0 \quad \text{și} \quad \pi_2 : x - y + z - 11 = 0.$$

Soluție: Unghiul θ dintre două (hiper)plane este unghiul format de normalele la cele două (hiper)plane. În cazul nostru, $\bar{N}_1 = (1, 2, 1)$ și $\bar{N}_2 = (1, -1, 1)$. Deoarece $\langle \bar{N}_1, \bar{N}_2 \rangle = 0$, rezultă că $\theta = \frac{\pi}{2}$.

Ex 5. În $\mathcal{E}^3$: Fie planele

$$\pi_1 : x + y - 2z = 0, \quad \pi_2 : x + y - 2z + 3 = 0 \quad \text{și considerăm} \quad A(1, 1, 1) \in \pi_1.$$

- a) Să se determine distanța dintre cele două plane.
- b) Să se determine proiecția P a punctului A pe planul π_2 (piciorul subspațiului prin A normal la π_2).
- c) Să se calculeze $d(A, P)$.

Soluție:

a) Planele π_1 și π_2 au aceeași direcție normală $\bar{N} = (1, 1, -2)$, deci sunt paralele. Așadar, distanța dintre ele poate fi calculată ca $d(A, \pi_2)$, unde $A \in \pi_1$ arbitrar. Fie $A(1, 1, 1) \in \pi_1$.

$$\text{Atunci } d(A, \pi_2) = \frac{|1 + 1 - 2 + 3|}{\sqrt{1 + 1 + 4}} = \sqrt{\frac{3}{2}}.$$

b) Prin A ducem dreapta δ perpendiculară pe π_2 , adică având direcția dată de $\bar{N}$:

$$\delta : \frac{x-1}{1} = \frac{y-1}{1} = \frac{z-1}{-2}.$$

Intersectăm δ cu π_2 și obținem punctul $P(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 2)$.

Pentru aceasta, considerăm $P(t+1, t+1, -2t+1) \in \delta$ și punând condiția $P \in \pi_2$ obținem $t = -\frac{1}{2}$.

c) Distanța $d(A, P) = \|\overrightarrow{AP}\| = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{1}{4} + 1} = \sqrt{\frac{3}{2}}.$

Ex 6. În $\mathcal{E}^3$: Să se calculeze distanța de la punctul A la dreapta δ , unde:

a) $\delta : \frac{x+1}{-2} = \frac{y-1}{1} = \frac{z-1}{1}$ și $A(0, 1, 1)$;

b) $\delta : \frac{x-1}{1} = \frac{y+1}{2} = \frac{z}{-2}$ și $A(1, 1, 1)$.

Soluție:

a) Metoda 1. Fie $A_1(-1, 1, 1) \in \delta$ și $\bar{a} = (-2, 1, 1)$ vectorul director al lui δ . Atunci, folosind formula, $d(A, \delta) = \frac{\|\overrightarrow{A_1A} \times \bar{a}\|}{\|\bar{a}\|} = \frac{1}{\sqrt{3}}.$

Metoda 2. Prin A construim subspațiul normal la δ . Acesta este un plan π de direcție normală $\bar{a} = (-2, 1, 1)$. Ecuația lui π este $-2x + y + z + D = 0$. Deoarece $A \in \pi$ rezultă că $D = -2$. Avem $\delta \cap \pi = \left\{ P \left(-\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3} \right) \right\}$, iar $d(A, P) = \frac{1}{\sqrt{3}}.$

Metoda 3. (folosind definiția) Fie $M(-2t-1, t+1, t+1) \in \delta$ un punct oarecare pe dreapta δ . Calculăm distanța de la A la M .

$$d(A, M)^2 = (2t+1)^2 + t^2 + t^2 = 6t^2 + 4t + 1 \geq \frac{1}{3}.$$

Deci $d(A, \delta) = \frac{1}{\sqrt{3}}.$

b) Fie $A_1(1, -1, 0)$ și $\bar{a} = (1, 2, -2)$. Atunci $\overrightarrow{A_1A} = (0, 2, 1)$ și $\overrightarrow{A_1A} \times \bar{a} = (-6, 1, -2)$.

$$\text{Deci } d(A, \delta) = \sqrt{\frac{36+1+4}{9}} = \frac{\sqrt{41}}{3}.$$

Ex 7. În $\mathcal{E}^4$: Să se determine unghiul dintre dreptele δ_1 și δ_2 , precum și distanța dintre ele, unde

$$\delta_1 : \frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{1} = \frac{z}{-1} = \frac{w}{1} \quad \text{și} \quad \delta_2 : \frac{x}{1} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z}{-1} = \frac{w-1}{1}.$$

Soluție. Unghiul θ dintre dreptele (neorientate) δ_1 și δ_2 se calculează astfel:

$$\cos \theta = \frac{|\langle \bar{a}_1, \bar{a}_2 \rangle|}{\|\bar{a}_1\| \cdot \|\bar{a}_2\|}, \text{ unde } \bar{a}_1 = (2, 1, -1, 1) \text{ și } \bar{a}_2 = (1, -1, -1, 1).$$

$$\text{Prin urmare avem } \cos \theta = \frac{3}{2\sqrt{7}}, \text{ deci } \theta = \arccos \frac{3}{2\sqrt{7}} \in (0, \frac{\pi}{2}).$$

$$\text{Distanța } d(\delta_1, \delta_2) = \min\{d(P, Q) : P \in \delta_1, Q \in \delta_2\}.$$

$$\text{Fie } P(2t+1, t-1, -t, t) \text{ și } Q(s, -s+1, -s, s+1).$$

$$\begin{aligned} d(P, Q)^2 &= (s-2t-1)^2 + (-s-t+2)^2 + (t-s)^2 + (s-t+1)^2 \\ &= 4s^2 + 7t^2 + 6 - 6ts - 4s - 2t \\ &= \underbrace{\left(2s - \frac{3t+2}{2}\right)^2}_{\geq 0} + \underbrace{\frac{1}{4}(19t^2 - 20t + 20)}_{\geq \frac{70}{19}}. \end{aligned}$$

$$\text{Deci } d(\delta_1, \delta_2) = \sqrt{\frac{70}{19}}.$$

Alternativ, putem calcula această distanță folosind formula (cu determinanți Gram).

$$\text{Fie } A_1(1, -1, 0, 0) \in \delta_1 \setminus \delta_2 \text{ și fie } A_2(0, 1, 0, 1). \text{ Atunci } \overrightarrow{A_1A_2} = (-1, 2, 0, 1).$$

$$\begin{aligned} G(\overrightarrow{A_1A_2}, \bar{a}_1, \bar{a}_2) &= \begin{vmatrix} 6 & 1 & -2 \\ 1 & 7 & 3 \\ -2 & 3 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 6 & 1 & -2 \\ 1 & 7 & 3 \\ 0 & 17 & 10 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 6 & 1 & 0 \\ 1 & 7 & 17 \\ 0 & 17 & 44 \end{vmatrix} = 6 \cdot 7 \cdot 44 - 6 \cdot 17 \cdot 17 - 44 = 70 \\ G(\bar{a}_1, \bar{a}_2) &= \begin{vmatrix} 7 & 17 \\ 17 & 44 \end{vmatrix} = 7 \cdot 44 - 17 \cdot 17 = 19. \end{aligned}$$

Deci, $d(\delta_1\delta_2) = \sqrt{\frac{70}{19}}$.

Ex 8. În $\mathcal{E}^4$: Fie 2-planul π care trece prin $A(1, 0, 1, 0)$ și are drept spațiu liniar director $\bar{\pi} = [\bar{a}_1, \bar{a}_2]$, unde $\bar{a}_1 = (1, 0, 0, 1)$ și $\bar{a}_2 = (-1, -1, 0, 2)$. Fie de asemenea dreapta

$$\delta : \frac{x-1}{1} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z+1}{2} = \frac{w+1}{-2}.$$

- (i) Să se calculeze unghiul dintre δ și π .
- (ii) Să se calculeze distanța de la δ la π .

Soluție.

- (i) Fie $\vec{d} = [\bar{a}]$, unde $\bar{a} = (1, -1, 2, -2)$.

Unghiul θ dintre δ și π este unghiul dintre δ și proiecția sa pe 2-planul π .

Să calculăm această proiecție.

Facem mai întâi observația că $\bar{a}$, $\bar{a}_1$ și $\bar{a}_2$ sunt liniar independenți, iar $\bar{a}_1$ și $\bar{a}_2$ **NU** sunt perpendiculari.

Descompunem $\bar{a} = a^{\parallel} + a^{\perp}$, unde $a^{\parallel} \in \vec{\pi}$ iar $a^{\perp} \in \vec{\pi}^{\perp}$. Componenta paralelă $a^{\parallel}$ se descompune în baza $\{\bar{a}_1, \bar{a}_2\}$ astfel: $a^{\parallel} = \alpha\bar{a}_1 + \beta\bar{a}_2$, unde $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

Calculăm mai întâi $\|\bar{a}_1\|^2 = 2$, $\|\bar{a}_2\|^2 = 6$, $\langle \bar{a}_1, \bar{a}_2 \rangle = 1$, $\langle \bar{a}, \bar{a}_1 \rangle = -1$ și $\langle \bar{a}, \bar{a}_2 \rangle = -4$.

Prin urmare, rezultă

$$\begin{aligned}\langle \bar{a}, \bar{a}_1 \rangle &= \langle a^{\parallel} + a^{\perp}, \bar{a}_1 \rangle = \alpha\|\bar{a}_1\|^2 + \beta\langle \bar{a}_1, \bar{a}_2 \rangle \\ \langle \bar{a}, \bar{a}_2 \rangle &= \langle a^{\parallel} + a^{\perp}, \bar{a}_2 \rangle = \alpha\langle \bar{a}_1, \bar{a}_2 \rangle + \beta\|\bar{a}_2\|^2.\end{aligned}$$

Deci $\begin{cases} 2\alpha + \beta = -1 \\ \alpha + 6\beta = -4. \end{cases}$ Sistemul are soluție unică, $\alpha = -\frac{2}{11}$, $\beta = -\frac{7}{11}$.

Așadar, $a^{\parallel} = -\frac{2}{11}(1, 0, 0, 1) - \frac{7}{11}(-1, -1, 0, 2) = \left(\frac{5}{11}, \frac{7}{11}, 0, -\frac{16}{11}\right)$.

Acum putem calcula unghiul $\theta \in (0, \frac{\pi}{2})$: $\cos \theta = \frac{\|a^\parallel\|}{\|\bar{a}\|} = \sqrt{\frac{3}{11}}$.

(ii) Metoda 1. Fie $A_0(1, 1, -1, -1) \in \delta$. Deci $\overrightarrow{A_0A} = (0, -1, 2, 1)$.

Calculăm

$$G(\overrightarrow{A_0A}, \bar{a}, \bar{a}_1, \bar{a}_2) = \begin{vmatrix} 6 & 3 & 1 & 3 \\ 3 & 10 & -1 & -4 \\ 1 & -1 & 2 & 1 \\ 3 & -4 & 1 & 6 \end{vmatrix} = 64 \text{ și } G(\bar{a}, \bar{a}_2, \bar{a}_2) = \begin{vmatrix} 10 & -1 & -4 \\ -1 & 2 & 1 \\ -4 & 1 & 6 \end{vmatrix} = 80.$$

Prin urmare, $d(\delta, \pi) = \sqrt{\frac{64}{80}} = \frac{2}{\sqrt{5}}$.

Metoda 2. Folosind definiția (schiță):

$$P = (1 + t - s, -s, 1, t + 2s)$$

$$Q = (\alpha + 1, -\alpha + 1, 2\alpha - 1, -2\alpha - 1).$$

$$\overrightarrow{PQ} = (\alpha - t + s, -\alpha + s + 1, 2\alpha - 2, -2\alpha - 2s - t - 1)$$

$$\begin{aligned} d(P, Q)^2 &= 10\alpha^2 + 6s^2 + 2t^2 + 2\alpha t + 2st + 8\alpha s - 6\alpha + 6s + 2t + 6 \\ &\geq \frac{1}{10}(19t^2 + 44s^2 + 51 + 12ts + 26t + 84s) \\ &\geq \frac{16}{19}(5s^2 + 9s + 5) \geq \frac{16}{19} \cdot \frac{19}{20} = \frac{4}{5}. \end{aligned}$$

Deci, $d(\delta, \pi) = \frac{2}{\sqrt{5}}$.

Se observă astfel dificultatea rezolvării problemei folosind definiția.

OBSERVAȚIE:

Să se arate că dacă se consideră $A(3, -1, 1, 1)$ atunci $d(\delta, \pi) = 0$. Prin urmare, δ și π se intersectează. Să se determine $\delta \cap \pi$.

Punctul de intersecție se calculează și este $(2, 0, 1, -3)$.

Ex 8. Fie 2-planele

$$\pi_1 = A_1 + [\bar{a}_1, \bar{b}_1], \text{ unde } A_1(1, 0, 0, 1), \bar{a}_1 = (1, 0, 0, 0), \bar{b}_1 = (0, 1, 0, 0)$$

$$\pi_2 = A_2 + [\bar{a}_2, \bar{b}_2], \text{ unde } A_2(0, 1, 1, 0), \bar{a}_2 = (0, 0, 1, 0), \bar{b}_2 = (1, 1, 1, 1).$$

Să se calculeze $\pi_1 \cap \pi_2$ și $d(\pi_1, \pi_2)$.

Soluție: Căutăm un punct $M \in \pi_1 \cap \pi_2$.

Atunci $\exists t, s, \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ (parametri ce urmează a fi determinați) astfel încât

$$M = A_1 + t\bar{a}_1 + s\bar{b}_1 \text{ și } M = A_2 + \alpha\bar{a}_2 + \beta\bar{b}_2.$$

Rezultă $t = 0, s = 2, \alpha = -2, \beta = 1$, adică $M(1, 2, 0, 1)$.

Prin urmare, $d(\pi_1, \pi_2) = 0$.

Ex 9. În $\mathcal{E}^n = \mathbb{R}^n$ (cu structura afină eculidiană canonică): Se consideră dreapta:

$$\delta : \frac{x^1}{1} = \frac{x^2}{0} = \dots = \frac{x^{n-1}}{0} = \frac{x^n}{1}$$

și hiperplanul $\mathcal{H} : x^1 + x^2 + \dots + x^n + D = 0, D \in \mathbb{R}$.

(a) Să se determine D astfel încât distanța de la $O(0, \dots, 0)$ la $\mathcal{H}$ să fie 1.

(b) În ce condiții unghiul θ dintre δ și $\mathcal{H}$ este $\frac{\pi}{4}$?

(c) Să se determine $\delta \cap \mathcal{H}$, pentru $D = -4$.

Soluție:

(a) $d(O, \mathcal{H}) = \frac{|D|}{\sqrt{n}}$. Rezultă $D = \pm\sqrt{n}$.

(b) Normala la $\mathcal{H}$ este dată de $\bar{N} = (1, \dots, 1)$, iar direcția lui δ este $\bar{a} = (1, 0, \dots, 0, 1)$.

Avem că $\sin \theta = \frac{|\langle \bar{a}, \bar{N} \rangle|}{\|\bar{a}\| \cdot \|\bar{N}\|}$. Deci $\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{2}{\sqrt{2}\sqrt{n}}$ de unde rezultă că $n = 4$.

(c) Fie $P(t, 0, \dots, 0, t)$ un punct arbitrar pe δ . Deoarece P verifică și ecuația hiperplanului $\mathcal{H}$, rezultă $2t + D = 0$, adică $t = 2$. Astfel, punctul de intersecție este $P(2, 0, \dots, 0, 2)$.