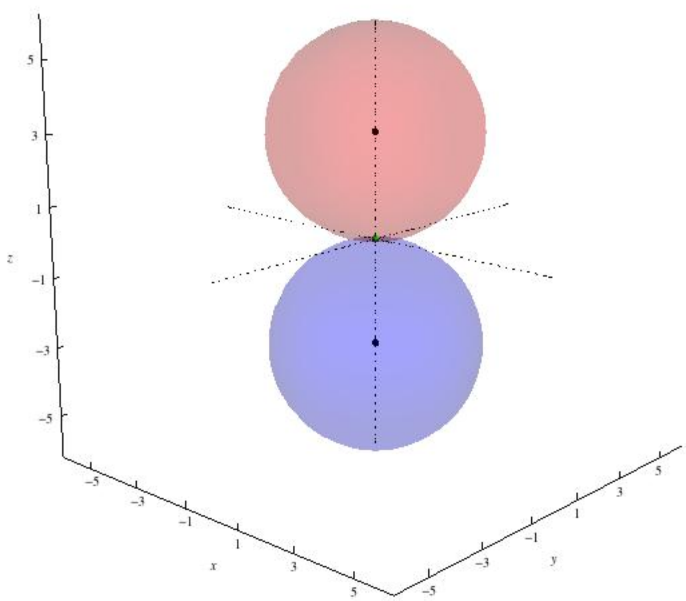
Seminar 28.04.2020

Ex 1. În $\mathcal{E}^3$, fie o sferă $\mathcal{S}$ cu centrul Ω pe axa Oz şi de rază $r = 3$.
a) Să se determine $\mathcal{S}$ ştiind că trece prin origine.
b) Există $P_0 \in S$ cu proprietatea că normala la $\mathcal{S}$ in P_0 trece prin punctul $M(3, 2, 1)$? În caz afirmativ să se găsească acest punct.
c) Să se descrie intersecţiile sferei $\mathcal{S}$ cu planele de coordonate.

Soluţie: Deoarece Ω se află pe Oz, avem $\Omega(0, 0, a)$, $a \in \mathbb{R}$. Prin urmare, ecuaţia sferei $\mathcal{S}$ este

$$x^2 + y^2 + (z - a)^2 = 9.$$

a) Dacă $O(0, 0, 0) \in \mathcal{S}$, atunci rezultă că $a^2 = 9$, deci $a = \pm 3$. Avem aşadar două sfere cu proprietatea din enunţ: $\begin{array}{ll} \mathcal{S}_1 & : x^2 + y^2 + z^2 - 6z = 0 \\ \mathcal{S}_2 & : x^2 + y^2 + z^2 + 6z = 0. \end{array}$



b) Fie $P_0(x_0, y_0, z_0) \in \mathcal{S}$ a.î. normala la $\mathcal{S}$ în P_0 trece prin M. Normala la $\mathcal{S}$ în P_0 este dată de dreapta ΩP_0, care are ecuaţia

$$\frac{x}{x_0} = \frac{y}{y_0} = \frac{z - a}{z_0 - a}.$$

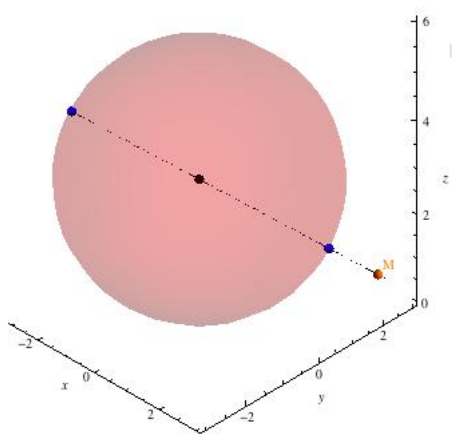
Condiţia $M \in \Omega P_0$ implică $\dfrac{3}{x_0} = \dfrac{2}{y_0} = \dfrac{1 - a}{z_0 - a}$.

Rezultă $\begin{cases} x_0 = 3t \\ y_0 = 2t \\ z_0 = a + t(1-a), \quad t \in \mathbb{R}. \end{cases}$

Deoarece $P_0 \in \mathcal{S}$ avem $9t^2 + 4t^2 + (1-a)^2 t^2 = 9$, deci $t^2 = \dfrac{9}{13 + (1-a)^2}$.

Există aşadar două puncte P_0 pe $\mathcal{S}$, indiferent de poziţia centrului Ω pe Oz, cu proprietatea solicitată,

$$x_0 = \pm\frac{9}{\sqrt{13+(1-a)^2}},\ y_0 = \pm\frac{6}{\sqrt{13+(1-a)^2}},\ z_0 = a \pm \frac{3(1-a)}{\sqrt{13+(1-a)^2}}.$$



Sfera, punctul M (orange) si cele două puncte P_0 (albastru)

c) Intersecţia cu $x = 0$ este cercul $y^2 + (z-a)^2 = 9$ (din planul yOz) de rază 3. Analog, intersecţia cu planul $y = 0$ este cercul $x^2 + (z-a)^2 = 9$ (din planul xOz) de rază 3.

Apoi, intersecţia cu planul $z = 0$ este:

(i) $\emptyset$ dacă $|a| > 3$,

(ii) $O(0,0,0)$ dacă $|a| = 3$,

(iii) cercul $x^2 + y^2 = 9 - a^2$ de rază $\sqrt{9-a^2}$, dacă $|a| < 3$.

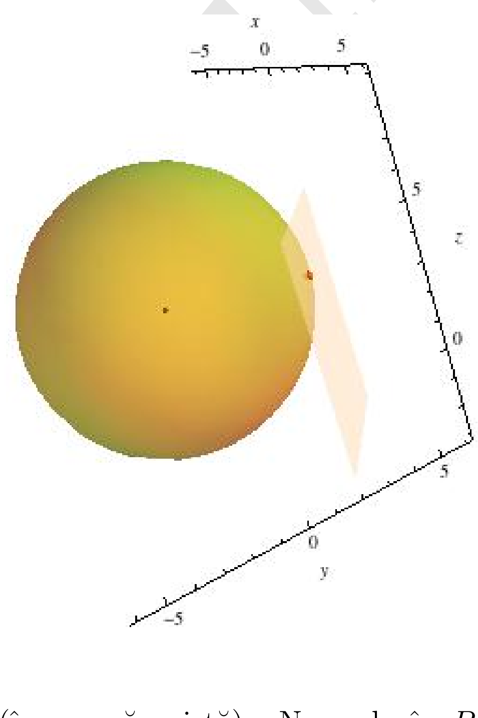
Ex 2. În $\mathcal{E}^3$, fie o sferă $\mathcal{S}$ cu centrul Ω pe axa Oz care este tangentă planului $(\pi) : 3x + 4y - 25 = 0$.
a) Să se scrie ecuaţia sferei $\mathcal{S}$ ştiind că distanţa de la Ω la $A(3, 4, 3)$ este 5.
b) Există $P_0 \in \mathcal{S}$ (de mai sus) cu proprietatea că normala la $\mathcal{S}$ in P_0 trece prin origine? În caz afirmativ să se găsească acest punct.
c) Să se descrie intersecţia sferei $\mathcal{S}$ cu planul $(\alpha) : 3x + 4y - 15 = 0$.

Soluţie: Deoarece $\Omega \in Oz$ avem $\Omega(0, 0, a)$, $a \in \mathbb{R}$. Sfera $\mathcal{S}$ are ecuaţia

$$x^2 + y^2 + (z - a)^2 = R^2, \qquad R > 0.$$

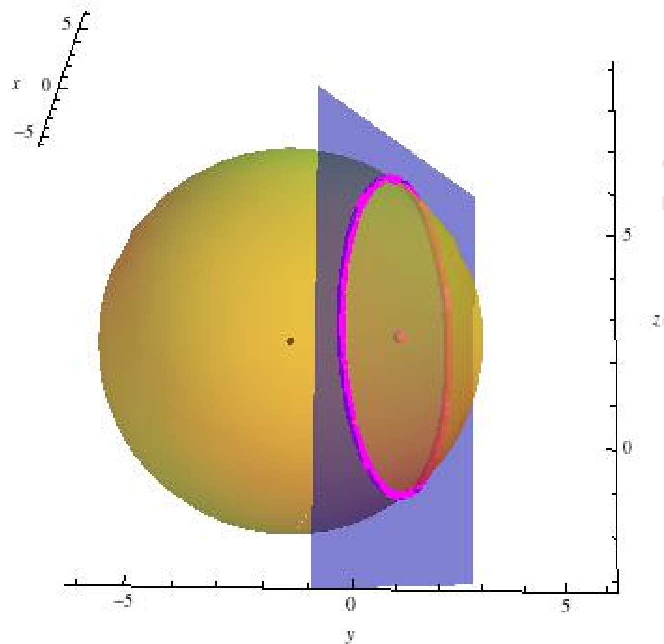
Din condiţia de tangenţă rezultă că $d(\Omega, \pi) = R$. Dar $d(\Omega, \pi) = \dfrac{|3 \cdot 0 - 4 \cdot 0 - 25|}{\sqrt{9 + 16}} = 5$.
Prin urmare, $\mathcal{S} :\ x^2 + y^2 + (z - a)^2 = 25$.

a) Deoarece $d(\Omega, A) = 5$ rezultă $A \in \mathcal{S}$ şi $a = 3$.



b) Fie P_0 un astfel de punct (în caz că există). Normala în P_0 este dreapta ΩP_0 de ecuaţie $\dfrac{x}{x_0} = \dfrac{y}{y_0} = \dfrac{z - 3}{z_0 - 3}$. Dacă $O(0, 0, 0) \in \Omega P_0$, atunci $\dfrac{0}{x_0} = \dfrac{0}{y_0} = \dfrac{-3}{z_0 - 3}$. Deducem $x_0 = y_0 = 0$ şi astfel $P_0(0, 0, -2)$ sau $P_0(0, 0, 8)$ verifică proprietatea din enunţ.

c) Deoarece $d(\Omega, \alpha) = 3 < R$ rezultă că intersecţia este un cerc. Proiecţia lui Ω pe α este centrul cercului de intersecţie. Se obţine $\Omega_0\left(\frac{9}{5}, \frac{12}{5}, 3\right)$. Apoi raza r a cercului de intersecţie satisface ecuaţia $r^2 + \Omega\Omega_0^2 = R^2$. Obţinem $r = 4$.



Ex 3. In $\mathcal{E}^3$, fie sfera $\mathcal{S} : (x-1)^2 + (y-1)^2 + z^2 = 5$ şi dreapta $(\delta) : \frac{x}{1} = \frac{y+3}{2} = \frac{z}{1}$.
a) Să se determine intersecţia sferei $\mathcal{S}$ cu dreapta (δ).
b) Să se scrie ecuaţiile planelor tangente la $\mathcal{S}$ care trece prin $A(2,1,2)$ şi $B(1,-1,1)$.
c) Să se determine un plan (π) care conţine (δ) şi care determină pe $\mathcal{S}$ un cerc $\mathcal{C}$ de rază $r = \sqrt{\frac{18}{5}}$.
d) Care este valoarea minimă pe care o poate lua r de la punctul c)?

Soluţie:

a) Rezolvând sistemul format din ecuaţia sferei şi ecuaţiile dreptei obţinem punctele $A(2,1,2)$ şi $B(1,-1,1)$.

b) Deoarece punctele aparţin sferei, scriem ecuaţiile planelor tangente prin dedublare:

$$(x_0 - 1)(x - 1) + (y_0 - 1)(y - 1) + z_0 z - 5 = 0\ :$$

pentru A: $\quad x + 2z - 6 = 0;$

pentru B: $\quad 2y - z + 3 = 0.$

c) Fie π un plan care conţine dreapta δ. Evident, există o infinitate de astfel de plane. Scriem ecuaţia generală a unui plan $ax + by + cz + D = 0$ şi punem condiţia ca punctul $P(t, 2t-3, t)$ să aparţină planului oricare ar fi $t \in \mathbb{R}$.

Obţinem $\begin{cases} a + 2b + c = 0 \\ D = 3b. \end{cases}$

Astfel avem $ax + by - (a+2b)z + 3b = 0$ cu $a^2 + b^2 \neq 0$.

Avem apoi relaţia $d(\Omega, \pi)^2 + r^2 = R^2$, de unde obţinem $d(\Omega, \pi) = \sqrt{5 - \dfrac{18}{5}} = \sqrt{\dfrac{7}{5}}$. Centrul cercului de intersecţie este proiecţia centrului sferei $\Omega(1,1,0)$ pe planul π.

Însă $d(\Omega, \pi) = \dfrac{|a + b + 3b|}{\sqrt{a^2 + b^2 + (a+2b)^2}}$. Rezultă $\dfrac{7}{5} = \dfrac{a^2 + 8ab + 16b^2}{2a^2 + 4ab + 5b^2}$, de unde obţinem $3a^2 - 4ab - 15b^2 = 0$, adică $a = 3b$ sau $a = -\dfrac{5}{3}b$.

Obţinem astfel două plane $\begin{array}{ll} \pi_1 & : 3x + y - 5z + 3 = 0 \\ \pi_2 & : 5x - 3y + z - 9 = 0. \end{array}$

d) Refacem calculul de la c) pentru o rază r arbitrară. Obţinem $5 - r^2 = \dfrac{a^2 + 8ab + 16b^2}{2a^2 + 4ab + 5b^2}$, de unde se obţine

$$(9 - 2r^2)a^2 + 4(3 - r^2)ab + (9 - 5r^2)b^2 = 0.$$

Avem o ecuaţie de gradul al doilea; condiţiile $9 - 2r^2 = 0$ şi $9 - 5r^2 = 0$ nu pot fi satisfăcute simultan.

Pentru a avea soluţie este necesar si suficient ca $4(3 - r^2)^2 - (9 - 2r^2)(9 - 5r^2) \geq 0$.

Rezultă $2r^4 - 13r^2 + 15 \leq 0$ ceea ce implică $r^2 \in \left[\dfrac{3}{2}, 5\right]$.

Valoarea minimă a lui r este $\sqrt{\dfrac{3}{2}}$ caz în care $d(\Omega, \pi) = \sqrt{\dfrac{7}{2}} = d(\Omega, \delta)$.

M-I-Munteanu

Ex 4. În spaţiul afin euclidian $\mathcal{E}^3$ considerăm planul $\pi:\ x+y+z-1=0$ şi punctul $A(1,2,3)$.

a) Scrieţi ecuaţia sferei cu centrul în A şi de rază $R=4$.

b) Demonstraţi că intersecţia dintre sferă şi planul π este un cerc. Determinaţi centrul şi raza acestui cerc.

Soluţie:

a) Ecuaţia sferei este

$$(x-1)^2+(y-2)^2+(z-3)^2=16.$$

b) Calculăm mai întâi $d(A,\pi)=\dfrac{|1+2+3-1|}{\sqrt{3}}=\dfrac{5}{\sqrt{3}}<R$ de unde deducem că $\pi\cap\mathcal{S}$ este un cerc. Centrul său este proiecţia centrului A al sferei pe planul π.

Fie $\delta:\ \dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y-2}{1}=\dfrac{z-3}{1}$ normala prin A la planul π. Intersecţia dintre δ şi π este punctul $B\left(-\dfrac{2}{3},\dfrac{1}{3},\dfrac{4}{3}\right)$. Raza r a cercului de intersecţie verifică relaţia: $r^2+d(A,\pi)^2=R^2$ şi astfel $r=\dfrac{\sqrt{119}}{3}$.

Ex 5. Să se scrie ecuaţia unei sfere ştiind că trece prin punctul $A(0,3,1)$ şi intersectează planul xOy după cercul $\begin{cases}x^2+y^2=16\\ z=0.\end{cases}$

Soluţie: Mai întâi avem că raza cercului de intersecţie este $r=4$. Apoi scriem ecuaţia $d(\Omega,xOy)^2+r^2=R^2$, unde Ω este centrul sferei căutate, iar R este raza sa. Dacă $\Omega(x_0,y_0,z_0)$ atunci $d(\Omega,xOy)=|z_0|$. Rezultă $z_0^2+16=R^2$.

Centrul cercului de intersecţie $O(0,0,0)$ este proiecţia lui Ω pe planul xOy, deci $x_0=0$, $y_0=0$.

Deoarece $A\in\mathcal{S}$ avem relaţia $x_0^2+(y_0-3)^2+(z_0-1)^2=R^2$, ceea ce implică

$$9+z_0^2-2z_0+1=R^2=z_0^2+16.$$

M-I-Munteanu

Obţinem $z_0 = -3$ şi $R = 5$.

Prin urmare, sfera căutată este

$$\mathcal{S}: \ x^2 + y^2 + (z+3)^2 = 25.$$

Ex 6. Să se scrie ecuaţia unui plan care trece prin punctele $A(2,3,0)$ şi $B(3,2,2)$ şi care intersectează sfera $\mathcal{S}: \ (x-4)^2 + (y-7)^2 + (z+1)^2 = 36$ după un cerc de rază $r = 5$.

Soluţie: Raza sferei este $R = 6$, iar centrul său este $\Omega(4,7,-1)$.

Din ecuaţia $d(\Omega,\pi)^2 + r^2 = R^2$ obţinem $d(\Omega,\pi) = \sqrt{11}$, unde π este planul căutat. Fie π dat de ecuaţia $ax + by + cz + d = 0$, cu $a^2 + b^2 + c^2 \neq 0$. Întrucât punctele A şi B sunt situate în plan, avem $\begin{cases} 2a + 3b + d = 0 \\ 3a + 2b + 2c + d = 0. \end{cases}$

Drept consecinţă, obţinem $c = \dfrac{b-a}{2}$ şi $d = -(2a+3b)$.

Ecuaţia planului π se rescrie:

$$ax + by + \frac{b-a}{2}z - (2a+3b) = 0.$$

Dezvoltăm acum relaţia $d(\Omega,\pi) = \sqrt{11}$, obţinută mai sus.

Avem: $\dfrac{\left|4a + 7b + \dfrac{a-b}{2} - 2a - 3b\right|}{\sqrt{a^2 + b^2 + \left(\dfrac{b-a}{2}\right)^2}} = \sqrt{11}.$

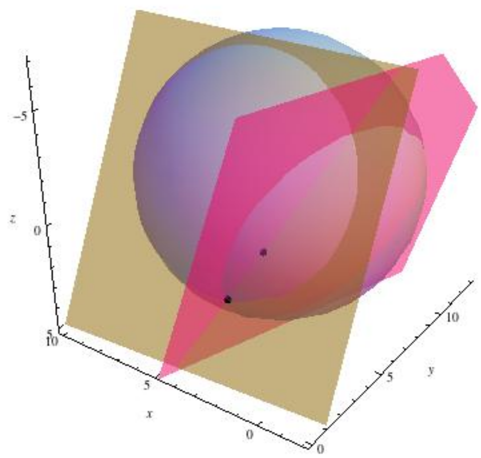
Rezultă prin ridicare la pătrat şi calcule elementare că $15a^2 - 46ab + 3b^2 = 0$, echivalent $(15a-b)(a-3b) = 0$. Distingem două cazuri:

(i) $\boxed{b = 15a}$: Se obţine $\pi: \ x + 15y + 7z - 47 = 0$

(ii) $\boxed{a = 3b}$: Se obţine $\pi: \ 3x + y - z - 9 = 0$.

M.I. Munteanu

Să reprezentăm sfera şi cele două plane obţinute mai sus:



Ex 7. Determinaţi ecuaţia unei sfere de rază $R = 5$ care este tangentă planului $\pi:\ x + 2y - 2z + 3 = 0$ în $A(1, 1, 3)$.

Soluţie: Trebuie să găsim coordonatele centrului sferei din enunţ. Prin A ducem dreapta δ normală la π:

$$\delta:\ \frac{x-1}{1} = \frac{y-1}{2} = \frac{z-3}{-2}.$$

Pe această dreaptă vom căuta puncte Ω a.î. $d(A, \Omega) = R$. Fie $\Omega(t+1, 2t+1, -2t+3)$, $t \in \mathbb{R}$. Condiţia $d(A, \Omega) = 5$ ne conduce la $t = \pm\frac{5}{3}$. Obţinem astfel $\Omega_1\left(-\frac{2}{3}, -\frac{7}{3}, \frac{19}{3}\right)$ şi $\Omega_2\left(\frac{8}{3}, \frac{13}{3}, -\frac{1}{3}\right)$.

Observaţie: Mijlocul segmentului $[\Omega_1\Omega_2]$ este A.

M-I-Munteanu

Lucru individual:

Ex 8. Scrieţi ecuaţia unei sfere de rază 3 tangentă planului $\pi: \ x + 2y - 2z - 4 = 0$ în $A(2, 1, 0)$.

Ex 9. Fie sfera $\mathcal{S}: \ (x-1)^2 + (y-1)^2 + (z-1)^2 = 4$ şi $A(1, 1, 5)$. Să se scrie toate planele tangente la $\mathcal{S}$ care trec prin A. Să se determine mulţimea tuturor punctelor de tangenţă.

Soluţie: Fie π un plan prin A tangent la $\mathcal{S}$ într-un punct M. Atunci dreapta AM este tangentă la $\mathcal{S}$. De fapt, dacă δ este dreaptă prin A tangentă la $\mathcal{S}$, atunci ea determină în mod unic un plan prin A care să o conţină şi care să fie tangent la $\mathcal{S}$.

Scriem δ în formă vectorială: $\bar{r} = \bar{r}_A + t\bar{u}$, unde $\bar{u}$ este un vector unitar. Ecuaţia vectorială a sferei este $\|\bar{r} - \bar{r}_\Omega\|^2 = 4$, unde $\bar{r}_\Omega = (1, 1, 1)$. Dacă facem intersecţia $\delta \cap \mathcal{S}$ obţinem $\|\bar{r}_A - \bar{r}_\Omega + t\bar{u}\|^2 = 4$, echivalent cu $t^2 + 2t\langle \bar{u}, \bar{v}\rangle + \|\bar{v}\|^2 = 4$, unde $\bar{v} = \bar{r}_A - \bar{r}_\Omega = (0, 0, 4)$.

Condiţia de tangenţă $\Delta = 0$ devine $\langle \bar{u}, \bar{v}\rangle^2 = 12$.

Fără a restrânge generalitatea presupunem $\langle \bar{u}, \bar{v}\rangle = \sqrt{12}$, altfel considerăm $-\bar{u}$ în locul lui $\bar{u}$. Se obţine $t = -2\sqrt{3}$. Prin urmare, pentru dreapta δ de vector director unitar $\bar{u}$, avem punctul de tangenţă M: $\bar{r}_M = \bar{r}_A - 2\sqrt{3}\bar{u}$.

Descompunem $\bar{u} = \lambda\bar{v} + \bar{w}$, $\bar{w} \perp \bar{v}$ ($\bar{w} \in \overrightarrow{xOy}$). Deducem imediat că $\lambda = \dfrac{\sqrt{3}}{8}$ şi astfel $\|\bar{w}\|^2 = \dfrac{1}{4}$. Rezultă $\bar{r}_M = \bar{r}_A - \dfrac{3}{4}\bar{v} - 2\sqrt{3}\bar{w} = \bar{r}_B - 2\sqrt{3}\bar{w}$, unde $B(1, 1, 2)$.

Planul care trece prin A şi este tangent la $\mathcal{S}$ în M este perpendicular pe ΩM. Astfel ecuaţia sa vectorială este $\langle \bar{r} - \bar{r}_A, \bar{r}_M - \bar{r}_\Omega\rangle = 0$, echivalent cu $\langle \bar{r} - \bar{r}_A, \dfrac{1}{4}\bar{v} - 2\sqrt{3}\bar{w}\rangle = 0$, $\forall \bar{w} \in \overrightarrow{xOy}$ a.î. $\|\bar{w}\| = \dfrac{1}{2}$. Se obţine o familie de plane depinzând de un parametru.

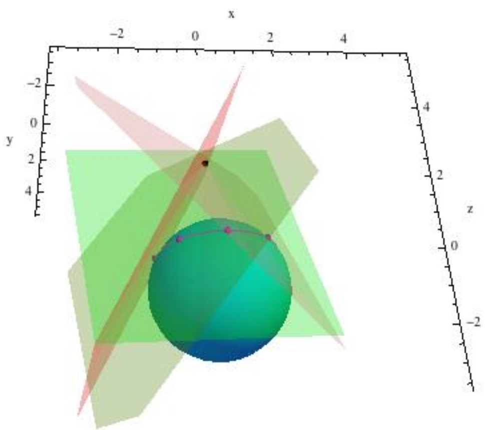
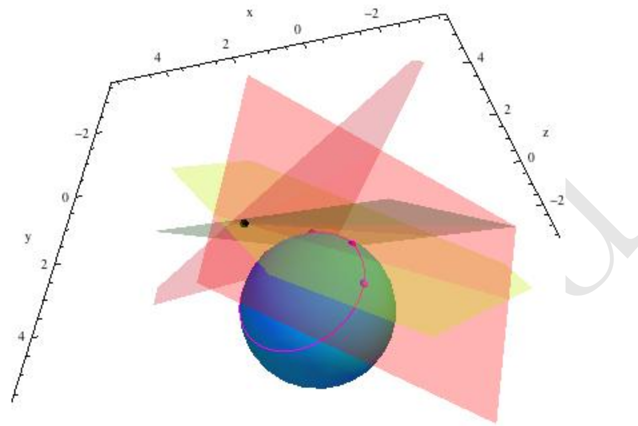
Avem apoi că $|\bar{r}_M - \bar{r}_B| = \sqrt{3}$ şi M aparţine planului prin B paralel cu xOy.

Aşadar M descrie cercul orizontal cu centrul în B şi de rază $\sqrt{3}$. Acesta este situat în planul $z = 2$.

Observaţie. Acest plan se obţine prin dedublarea ecuaţiei sferei în punctul A.

Să reprezentăm mai jos câteva plane din întreaga mulţime, punctele de tangenţă şi cercul obţinut ca reuniunea tuturor punctelor de tangenţă.

M-I-Munteanu

Lucru individual:

Ex 10. Fie sfera $\mathcal{S}: \ (x-x_\Omega)^2+(y-y_\Omega)^2+(z-z_\Omega)^2=R^2$ de centru $\Omega(x_\Omega,y_\Omega,z_\Omega)$ şi rază $R>0$. Dintr-un punct A, exterior sferei, ducem planele tangente la $\mathcal{S}$. Să se arate că mulţimea tuturor punctelor de tangenţă este un cerc situat într-un plan a cărui ecuaţie se obţine din ecuaţia sferei prin dedublare.

Soluţie (schiţă).

Dacă notăm $d=d(A,\Omega)$, avem $d>R$.

Pentru un punct de tangenţă M se poate arăta că:

$d(M,A)=\sqrt{d^2-R^2}$, $d(M,B)=\frac{R\sqrt{d^2-R^2}}{d}$, unde $B=\Omega+\frac{R^2}{d^2}\overrightarrow{\Omega A}$.

Apoi, $d(\Omega,B)=\frac{R^2}{d}$ şi $d(A,B)=\frac{d^2-R^2}{d}$.

Planul în care se află M este planul prin B şi având direcţia normală dată de $\overrightarrow{\Omega A}$.

Observaţie.
Revenind la problema precedentă, dedublarea în $A(1,1,5)$ se scrie $0+0+(5-1)(z-1)=4$, echivalent, $z=2$. Acesta este planul prin $B(1,1,2)$ care este paralel cu xOy (care apare în rezolvarea problemei).

Lucru individual:

Ex 11. Fie sfera $\mathcal{S}:\ (x-1)^2+(y-1)^2+(z-1)^2=16.$

a) Să se determine imaginea sferei $\mathcal{S}$ prin simetria ortogonală S_π faţă de planul π: $z=2$.

b) Să se determine imaginea sferei $\mathcal{S}$ prin simetria ortogonală S_δ, unde $\delta:\ \dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y-1}{1}=\dfrac{z+1}{-1}$.

M-I-Munteanu