

**Subiecte examen oral Geometrie Euclidiană : semian A
iunie 2021**

Ex 1. Fie elipsa $\mathcal{E} : x^2 + 3y^2 - 4 = 0$.

- a) Identificați elementele elipsei și reprezentați grafic;
- b) Scrieți ecuația tangentei la elipsă în $M(1, 1)$;
- c) Verificați dacă există normale la elipsă paralele cu dreapta $\delta : 3x - 2y + 5 = 0$ și în caz afirmativ să se determine.

Ex 2. Fie hiperbola $\mathcal{H} : \frac{y^2}{9} - \frac{x^2}{4} = 1$.

- a) Identificați elementele hiperbolei și reprezentați grafic;
- b) Scrieți ecuațiile tangentelor la hiperbolă în vârfurile acesteia;
- c) Scrieți ecuațiile tangentelor la hiperbolă din punctul $P(3, 1)$.

Ex 3. Fie elipsa $\mathcal{E} : \frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1$ și punctul $P(-4, 4)$.

- a) Să se găsească punctele de intersecție ale elipsei cu dreapta care trece prin P și O .
- b) Să se ducă tangentele la $\mathcal{E}$ paralele cu dreapta PO .
- c) Să se ducă tangentele la $\mathcal{E}$ prin P .

Ex 4. Fie elipsa de ecuație $\mathcal{E} : 2x^2 + 3y^2 - 30 = 0$ și punctul $M(3, 2) \in \mathcal{E}$. Să se determine un punct $N \neq M$ pe elipsă astfel încât coardele prin M și respectiv N paralele cu prima bisectoare să fie distincte și să aibă lungimile egale.

Ex 5. Fie elipsa $\mathcal{E} : \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{16} = 1$ și punctele $M(0, \sqrt{7})$, $N(0, -\sqrt{7})$ și $P(0, -4)$.

- a) Să se determine un punct de intersecție Q al celei de a doua bisectoare cu elipsa.
- b) Să se arate că $MQ + QN = 2PM$.
- c) Să se scrie ecuația normalei în Q la $\mathcal{E}$.

Ex 6. Să se determine elipsa $\mathcal{E} : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ știind că normala în punctul $M(\frac{9}{5}, \frac{16}{5})$ aparținând elipsei este paralelă cu prima bisectoare. Să se scrie ecuațiile tangentei și normalei în M la elipsa $\mathcal{E}$. Să se determine focarele acestei elipse.

Ex 7. Fie elipsa $\mathcal{E} : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$. Să se arate că oricare ar fi o dreaptă δ în plan, există normale la $\mathcal{E}$ paralele cu δ .

Ex 8. Proprietatea optică a parabolei.

Ex 9. (a) Scrieți ecuația unei hiperbole $\mathcal{H}$ știind că trece prin $M(2, 5)$ și are asimptotele
$$\begin{cases} \delta_1 : 4x - 3y = 0 \\ \delta_2 : 4x + 3y = 0. \end{cases}$$

(b) Să se scrie ecuațiile directoarelor și să se găsească distanța dintre ele.

(c) Să se studieze intersecția unei drepte oarecare de pantă $\frac{4}{3}$ cu hiperbola.

Ex 10. Fie hiperbola $\mathcal{H} : \frac{y^2}{\alpha^2} - \frac{x^2}{\beta^2} = 1$ și $M \in \mathcal{H}$. Normala în M la $\mathcal{H}$ taie axa Ox în P . În ce condiții $d(O, M) = d(M, P)$?

Să se rezolve aceeași problemă înlocuind axa Ox cu axa Oy , respectiv cu prima bisectoare.

Ex 11. Fie parabola $\mathcal{P} : x^2 = -6y$. Să se determine un punct $A \in \mathcal{P}$ (dacă există) cu următoarea proprietate: Fie A' simetricul lui A față de axa de simetrie a parabolei. Prin A și A' ducem tangentele la $\mathcal{P}$ care se intersectează în M . Atunci triunghiul AMA' este echilateral.

Ex 12. Considerăm hiperbola cu axa focală Ox dată prin ecuația $\mathcal{H} : \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$.

1. Determinați toate elementele hiperbolei știind că aceasta trece prin punctul $M(3, \sqrt{2})$ iar unghiul format de asimptotele sale este $\frac{\pi}{3}$.
2. Demonstrați că tangentele la hiperbolă în punctele $M\left(-\frac{3\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ și $N\left(\frac{3\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ sunt perpendiculare.

Ex 13. 1. Scrieți ecuația canonică a elipsei cu directoarele $x = \pm 9$ care trece prin $M(0, 2\sqrt{2})$.

2. Scrieți ecuațiile tangentelor la elipsa determinată anterior paralele cu dreapta $y = -x$.

3. Aflați aria dreptunghiului ce are drept laturi tangentele la elipsă duse prin vârfurile acesteia.

Ex 14. 1. Să se determine ecuația parabolei cu focarul în originea O și directoarea $\delta : x = -1$ (folosind definiția cu loc geometric).

2. Scrieți ecuațiile tangentelor la parabolă paralele cu axa Ox .

3. Demonstrați că punctul de intersecție a două tangente perpendiculare la parabola determinată anterior se află pe directoarea acesteia.

Ex 15. 1. Să se scrie ecuația canonică a hiperbolei echilatre cu axa focală Oy care trece prin punctul $N(4, 5)$.

2. Să se calculeze produsul distanțelor de la un punct arbitrar al hiperbolei determinate anterior la asimptotele sale.

3. Să se scrie ecuațiile tangentelor la hiperbolă paralele cu axele de coordonate.

Ex 16. 1. Dreptele $d_1 : x + y - 1 = 0$ și $d_2 : 5x - 4\sqrt{2}y - 2 = 0$ sunt tangente la hiperbola $\mathcal{H} : \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$. Să se scrie ecuația hiperbolei.

2. Să se determine punctele de intersecție dintre cercul $\mathcal{C} : x^2 + y^2 = 25$ și hiperbola $\mathcal{H}$.

3. Să se scrie ecuațiile tangentelor la hiperbolă în punctele de intersecție identificate.

Ex 17. 1. Să se scrie ecuațiile tangentelor la hiperbola $\mathcal{H} : 4x^2 - y^2 = 64$ perpendiculare pe dreapta $d : 3x + 10y - 8 = 0$.

2. Determinați aria figurii geometrice ce are drept vârfuri punctele de intersecție dintre asimptotele și directoarele hiperbolei.

Ex 18. 1. Să se determine locul geometric al punctelor egal depărtate de dreapta $x = 6$ și originea O .

2. Reprezentați grafic locul geometric și identificați punctele de intersecție dintre acesta și dreapta $y = x$.

Ex 19. Să se determine hiperbola $\mathcal{H} : \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ știind că trece prin punctul $M(6, 3)$ iar secanta prin M paralelă cu dreapta $y = x$ taie în $\mathcal{H}$ o coardă de lungime $3\sqrt{2}$.

Ex 20. Să se scrie ecuația coardei elipsei $16x^2 + 25y^2 = 400$ al cărei mijloc este punctul de coordonate $\left(2, \frac{4}{5}\right)$ și să se afle punctele de intersecție cu elipsa.