

Subiecte examen oral Geometrie Euclidiană : semian B
iunie 2020

Ex 1. Fie elipsa $\mathcal{E} : x^2 + 2y^2 - 8 = 0$.

- a) Identificați elementele elipsei și reprezentați grafic;
- b) Scrieți ecuația tangentei la elipsă în $M(4, 2)$;
- c) Verificați dacă normala în punctul $P(-\sqrt{6}, 1)$ este paralelă cu dreapta $\delta : y = -\sqrt{\frac{2}{3}}x + \sqrt{\frac{3}{2}}$.

Ex 2. Fie hiperbola $\mathcal{H} : \frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$.

- a) Identificați elementele hiperbolei și reprezentați grafic;
- b) Scrieți ecuațiile tangențelor la hiperbolă în vârfurile acesteia;
- c) Scrieți ecuațiile tangențelor la hiperbolă din punctul $P(1, 3)$.

Ex 3. Fie elipsa $\mathcal{E} : \frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1$ și punctul $P(4, -4)$.

- a) Să se găsească punctele de intersecție ale elipsei cu dreapta care trece prin P și O .
- b) Să se ducă tangentele la $\mathcal{E}$ paralele cu dreapta PO .
- c) Să se ducă tangentele la $\mathcal{E}$ prin P .

Ex 4. Fie elipsa $\mathcal{E} : \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{16} = 1$ și punctele $M(0, \sqrt{7})$, $N(0, -\sqrt{7})$ și $P(3, 0)$.

- a) Să se determine un punct de intersecție Q al primei bisectoare cu elipsa.
- b) Să se arate că $MQ + QN = 2PM$.
- c) Să se scrie ecuația normalei în Q la $\mathcal{E}$.

Ex 5. (a) Scrieți ecuația unei hiperbole $\mathcal{H}$ știind că trece prin $M(2, 5)$ și are asimptotele $\begin{cases} \delta_1 : 4x - 3y = 0 \\ \delta_2 : 4x + 3y = 0. \end{cases}$

(b) Să se scrie ecuațiile directoarelor și să se găsească distanța dintre ele.

(c) Să se studieze intersecția unei drepte oarecare de pantă $\frac{4}{3}$ cu hiperbola.

Ex 6. Proprietatea optică a parabolei.

Ex 7. Fie hiperbola $\mathcal{H} : \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ și $M \in \mathcal{H}$. Normala în M la $\mathcal{H}$ taie axa Ox în P . În ce condiții $d(O, M) = d(M, P)$?

Ex 8. Fie parabolă $\mathcal{P} : x^2 = -6y$. Să se determine un punct $A \in \mathcal{P}$ (dacă există) cu următoarea proprietate: Fie A' simetricul lui A față de axa de simetrie a parabolei. Prin A și A' ducem tangentele la $\mathcal{P}$ care se intersectează în M . Atunci triunghiul AMA' este echilateral.

Ex 9. Considerăm hiperbola cu axa focală Ox dată prin ecuația $\mathcal{H} : \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$.

1. Determinați toate elementele hiperbolei știind că aceasta trece prin punctul $M(3, \sqrt{2})$ iar unghiul format de asimptotele sale este $\frac{\pi}{3}$.
2. Demonstrați că tangentele la hiperbolă în punctele $M\left(-\frac{3\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ și $N\left(\frac{3\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ sunt perpendiculare.

Ex 10. 1. Scrieți ecuația canonică a elipsei cu directoarele $y = \pm \frac{25}{4}$ care trece prin $M(3, 0)$.

2. Scrieți ecuațiile tangentelor la elipsa determinată anterior paralele cu dreapta $y = -x$.
3. Aflați aria dreptunghiului ce are drept laturi tangentele la elipsă duse prin vârfurile acesteia.

Ex 11. 1. Să se determine ecuația parabolei cu focarul în originea O și directoarea $\delta : x = -1$ (folosind definiția cu loc geometric).

2. Scrieți ecuațiile tangentelor la parabolă paralele cu axa Ox .

3. Demonstrați că punctul de intersecție a două tangente perpendiculare la parabola determinată anterior se află pe directoarea acesteia.

Ex 12. 1. Să se scrie ecuația canonică a hiperbolei echilatre cu axa focală Oy care trece prin punctul $N(4, 5)$.

2. Să se calculeze produsul distanțelor de la un punct arbitrar al hiperbolei determinate anterior la asimptotele sale.

3. Să se scrie ecuațiile tangentelor la hiperbolă paralele cu axele de coordonate.

Ex 13. 1. Dreptele $d_1 : x + y - 1 = 0$ și $d_2 : 5x - 4\sqrt{2}y - 2 = 0$ sunt tangente la hiperbola $\mathcal{H} : \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$. Să se scrie ecuația hiperbolei.

2. Să se determine punctele de intersecție dintre cercul $\mathcal{C} : x^2 + y^2 = 25$ și hiperbola $\mathcal{H}$.

3. Să se scrie ecuațiile tangentelor la hiperbolă în punctele de intersecție identificate.

Ex 14. 1. Să se scrie ecuațiile tangentelor la hiperbola $\mathcal{H} : 4x^2 - y^2 = 64$ perpendiculare pe dreapta $d : 3x + 10y - 8 = 0$.

2. Determinați aria figurii geometrice ce are drept vârfuri punctele de intersecție dintre asimptotele și directoarele hiperbolei.

Ex 15. 1. Să se determine locul geometric al punctelor egal depărtate de dreapta $x = 6$ și originea O .

2. Reprezentați grafic locul geometric și identificați punctele de intersecție dintre acesta și dreapta $y = x$.

Ex 16. Să se scrie ecuația coardei elipsei $16x^2 + 25y^2 = 400$ al cărei mijloc este punctul de coordonate $\left(2, \frac{4}{5}\right)$ și să se afle punctele de intersecție cu elipsa.