

GEOMETRIE DIFERENȚIALĂ - SEMINAR

Exercițiul 16.03:01 Fie $\kappa > 0$ și τ două numere reale fixate. Să se determine o curbă parametrizată regulată în $\mathbb{R}^3$ care are curbura κ și torsiunea τ .

Soluție. Știm din teorema fundamentală a curbelor în spațiu că o astfel de curbă există.

Fie $\rho : I \rightarrow \mathbb{R}^3$, $\rho(s) = (x(s), y(s), z(s))$ curba căutată parametrizată natural.

Scriem ecuațiile Frenet:

$$T = \rho', \quad T' = \kappa N, \quad N' = -\kappa T + \tau B, \quad B' = -\tau N.$$

Calculăm derivatele de ordin superior ale lui ρ până la ordinul 4:

$$\rho'' = T' = \kappa N,$$

$$\rho''' = \kappa N' = -\kappa^2 T + \kappa\tau B = -\kappa^2 \rho' + \kappa\tau B,$$

$$\rho^{(4)} = -\kappa^2 \rho'' - \kappa\tau^2 N = -(\kappa^2 + \tau^2) \rho''.$$

Acum, dacă notăm $f := \rho''$ și $\mu := \sqrt{\kappa^2 + \tau^2} > 0$ putem scrie ecuația

$$f''(s) + \mu^2 f(s) = 0$$

care are soluția generală

$$f(s) = \cos(\mu s)v_1 + \sin(\mu s)v_2,$$

unde v_1 și v_2 sunt doi vectori constanți în $\mathbb{R}^3$.

Știm că $|\rho''(s)| = \kappa$, așadar

$$\kappa^2 = |f(s)|^2 = \cos^2(\mu s)|v_1|^2 + \sin^2(\mu s)|v_2|^2 + 2\sin(\mu s)\cos(\mu s)\langle v_1, v_2 \rangle, \quad \forall s \in I.$$

Rezultă că

$$\frac{1}{2}(|v_1|^2 - |v_2|^2)\cos(2\mu s) + \langle v_1, v_2 \rangle \sin(2\mu s) + \frac{1}{2}(|v_1|^2 + |v_2|^2) - \kappa = 0, \quad \forall s \in I.$$

Întrucât sistemul de funcții $\{1, \sin(2\mu s), \cos(2\mu s)\}$ este liniar independent, rezultă că

$$|v_1| = |v_2| = \kappa, \quad \langle v_1, v_2 \rangle = 0,$$

prin urmare sistemul de vectori $\{\varepsilon_1 := \frac{v_1}{\kappa}, \varepsilon_2 := \frac{v_2}{\kappa}\}$ este ortonormat.

Integrând relația $f(s) = \cos(\mu s)v_1 + \sin(\mu s)v_2$, obținută mai sus, obținem

$$\rho'(s) = v_0 + \frac{1}{\mu} \sin(\mu s)v_1 - \frac{1}{\mu} \cos(\mu s)v_2.$$

Însă acest vector este unitar (pentru orice s), prin urmare avem că

$$|v_0|^2 + \frac{\sin^2(\mu s)}{\mu^2}|v_1|^2 + \frac{\cos^2(\mu s)}{\mu^2}|v_2|^2 - \frac{\sin(2\mu s)}{\mu^2}\langle v_1, v_2 \rangle + \frac{2\sin(\mu s)}{\mu}\langle v_0, v_1 \rangle - \frac{2\cos(\mu s)}{\mu}\langle v_0, v_2 \rangle = 1.$$

Scriind în funcție de unghiul dublu $2\mu s$ și folosind același raționament de mai sus, deducem că

$$|v_0|^2 + \frac{\kappa^2}{\mu^2} = 1, \quad \langle v_0, v_1 \rangle = 0, \quad \langle v_0, v_2 \rangle = 0.$$

Rezultă că v_0 este perpendicular pe vectorii v_1 și v_2 , prin urmare este coliniar cu $v_1 \times v_2$. Pe de altă parte, $|v_0|^2 = \frac{\mu^2 - \kappa^2}{\kappa^2} = \frac{\tau^2}{\mu^2}$.

Dacă notăm $\varepsilon_3 = \varepsilon_1 \times \varepsilon_2$, obținem că $v_0 = \pm \frac{\tau}{\mu} \varepsilon_3$.

Astfel, vectorul viteză $\rho'(s)$ are expresia

$$\rho'(s) = \frac{\kappa}{\mu} \sin(\mu s) \varepsilon_1 - \frac{\kappa}{\mu} \cos(\mu s) \varepsilon_2 \pm \frac{\tau}{\mu} \varepsilon_3.$$

Integrând, de la 0 la s , se obține

$$\rho(s) - \rho(0) = \left(\frac{\kappa}{\mu^2} (1 - \cos(\mu s)), -\frac{\kappa}{\mu^2} \sin(\mu s), \pm \frac{\tau}{\mu} s \right).$$

După o transformare rigidă a spațiului $\mathbb{R}^3$ (de tipul $F(q) = Aq + q_0$, $A \in O(3)$, $q_0 \in \mathbb{R}^3$), putem duce baza ortonormată $\{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3\}$ în baza canonică $\{e_1, e_2, e_3\}$ (eventual permutată și având altă orientare) și putem face o translație așa încât curba ρ să aibă expresia

$$\rho(s) = (a \cos(s/c), a \sin(s/c), bs/c),$$

unde $a := \frac{\kappa}{\mu^2}$, $b := \frac{\tau}{\mu^2}$, iar $c := \frac{1}{\mu}$.

Am obținut astfel elicea circulară (pe care am studiat-o anterior).

Exercițiul 16.03:02 (schimbări de parametru)

Următoarele exemple ne arată că o suprafață poate avea mai multe parametrizări.

$$(a) \begin{cases} D_1 = \mathbb{R}^2, & r_1(u, v) = (u + v, u - v, uv) \\ D_2 = \mathbb{R}^2, & r_2(\bar{u}, \bar{v}) = \left(\bar{u}, \bar{v}, \frac{\bar{u}^2 - \bar{v}^2}{4} \right). \end{cases}$$

Avem $r_1(D_1) = r_2(D_2) = \{(x, y, z) : z = \frac{1}{4}(x^2 - y^2)\}$ (paraboloidul hiperbolic).

$$(b) \begin{cases} D_1 = (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \times (0, 2\pi), & r_1(\varphi, \psi) = (\cos \varphi \cos \psi, \cos \varphi \sin \psi, \sin \varphi) \\ D_2 = \mathbb{R}^2 \setminus \{(u, 0) : u \geq 0\}, & r_2(u, v) = \left(\frac{2u}{u^2+v^2+1}, \frac{2v}{u^2+v^2+1}, \frac{u^2+v^2-1}{u^2+v^2+1} \right). \end{cases}$$

Avem $r_1(D_1) = r_2(D_2) = \mathbb{S}^2 \setminus \{(x, 0, z) \in \mathbb{S}^2 : x \geq 0\}$.

$$(c) \begin{cases} D_1 = (0, \infty) \times (0, 2\pi), & r_1(t, \varphi) = (t \cos \varphi, t \sin \varphi, t^2) \\ D_2 = \mathbb{R}^2 \setminus \{(u, 0) : u \geq 0\}, & r_2(u, v) = \left(\frac{u}{u^2+v^2}, \frac{v}{u^2+v^2}, \frac{1}{u^2+v^2} \right). \end{cases}$$

Avem $r_1(D_1) = r_2(D_2) = PE \setminus \{(x, 0, x^2) : x \geq 0\}$, unde PE este paraboloidul de rotație, adică $PE = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = x^2 + y^2\}$.

Soluție. Vom reprezenta mai întâi cele trei suprafețe.

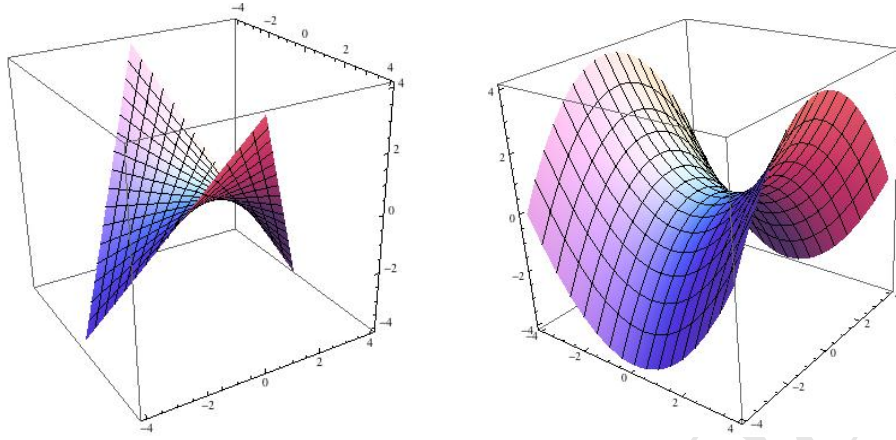


FIGURA 1. (a) paraboloidul hiperbolic

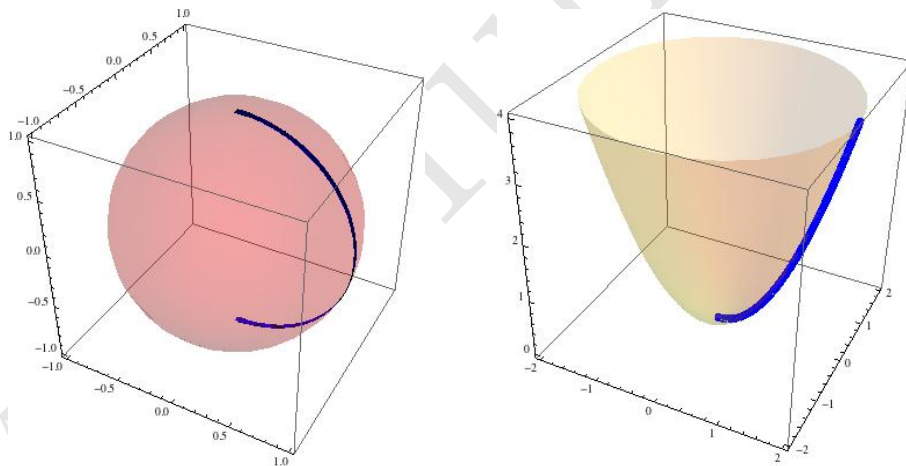


FIGURA 2. (b) sfera unitate fără un semicerc;
(c) paraboloidul de rotație fără o jumătate de parabolă

Să analizăm cazul (a): Transformarea $(u, v) \xrightarrow{\Phi} (\bar{u}, \bar{v})$, $\Phi(u, v) = (u + v, u - v)$ este un difeomorfism de la $\mathbb{R}^2$ la $\mathbb{R}^2$ cu inversul $\Phi^{-1}(\bar{u}, \bar{v}) = (\frac{\bar{u} + \bar{v}}{2}, \frac{\bar{u} - \bar{v}}{2})$. Apoi, $r_1 = r_2 \circ \Phi$.

Pentru (b) lucrurile sunt ceva mai complicate. Este evident că ambele parametrizări sunt pe sfera $\mathbb{S}^2$ și că $r_1(\varphi, \psi) = r_2(u, v)$

Obținem sistemul:

$$(1a) \quad x = \cos \varphi \cos \psi = \frac{2u}{u^2 + v^2 + 1}$$

$$(1b) \quad y = \cos \varphi \sin \psi = \frac{2v}{u^2 + v^2 + 1}$$

$$(1c) \quad z = \sin \varphi = \frac{u^2 + v^2 - 1}{u^2 + v^2 + 1}$$

Din (1c) avem:

$$z = \sin \varphi = 1 - \frac{2}{u^2 + v^2 + 1} \iff 1 - z = \frac{2}{u^2 + v^2 + 1}$$

Deci:

$$\frac{x}{1 - z} = \frac{\cos \varphi \cos \psi}{1 - \sin \varphi} = \frac{2u}{u^2 + v^2 + 1} \cdot \frac{u^2 + v^2 + 1}{2} = u$$

și

$$\frac{y}{1 - z} = \frac{\cos \varphi \sin \psi}{1 - \sin \varphi} = \frac{2v}{u^2 + v^2 + 1} \cdot \frac{u^2 + v^2 + 1}{2} = v$$

Din (1a) și (1b) avem:

$$\frac{y}{x} = \frac{\frac{2v}{u^2 + v^2 + 1}}{\frac{2u}{u^2 + v^2 + 1}} = \frac{v}{u} = \frac{\cos \varphi \sin \psi}{\cos \varphi \cos \psi} = \tan \psi$$

Întrucât ψ trebuie să fie diferențiabilă va trebui să asigurăm mai întâi continuitatea. Punem așadar

$$\psi = \psi(u, v) = \begin{cases} \arctan\left(\frac{v}{u}\right), & \text{dacă } u > 0 \text{ și } v > 0, \\ \arctan\left(\frac{v}{u}\right) + 2\pi, & \text{dacă } u > 0 \text{ și } v < 0, \\ \arctan\left(\frac{v}{u}\right) + \pi, & \text{dacă } u < 0, \\ \frac{3\pi}{2}, & \text{dacă } u = 0 \text{ și } v < 0. \\ \frac{\pi}{2}, & \text{dacă } u = 0 \text{ și } v > 0. \end{cases}$$

În (1c), cum $\varphi \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$, putem folosi arcsin:

$$\varphi = \varphi(u, v) = \arcsin\left(\frac{u^2 + v^2 - 1}{u^2 + v^2 + 1}\right)$$

Ar trebui să verificăm și diferențiabilitatea, însă nu o mai facem aici.

În concluzie avem aplicația

$$\begin{aligned}\Phi : \mathbb{R}^2 \setminus \{(u, 0) : u \geq 0\} &\rightarrow \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \times (0, 2\pi) \\ \Phi(u, v) &= (\varphi(u, v), \psi(u, v)) \\ \Phi^{-1}(\varphi, \psi) &= \left(\frac{\cos \varphi \cos \psi}{1 - \sin \varphi}, \frac{\cos \varphi \sin \psi}{1 - \sin \varphi}\right).\end{aligned}$$

Diferențiala sa este

$$D\Phi(u, v) = \begin{pmatrix} -\frac{v}{u^2 + v^2} & \frac{2u}{(u^2 + v^2 + 1)\sqrt{u^2 + v^2}} \\ \frac{u}{u^2 + v^2} & \frac{2v}{(u^2 + v^2 + 1)\sqrt{u^2 + v^2}} \end{pmatrix}.$$

Determinantul acesteia este

$$\det D\Phi(u, v) = -\frac{2}{(u^2 + v^2 + 1)\sqrt{u^2 + v^2}} \neq 0.$$

Deducem că Φ este un difeomorfism.

Relația dintre cele două parametrizări este $r_2 = r_1 \circ \Phi$.

Pentru (c) scriind $r_1(t, \varphi) = r_2(u, v)$ se obține:

$$(2a) \quad t \cos \varphi = \frac{u}{u^2 + v^2}$$

$$(2b) \quad t \sin \varphi = \frac{v}{u^2 + v^2}$$

$$(2c) \quad t^2 = \frac{1}{u^2 + v^2}$$

Din (2a) avem:

$$(3) \quad t \cos \varphi = \frac{t^2 \cos \varphi}{t} = \frac{u}{u^2 + v^2} \xLeftrightarrow{(2c)} \frac{1}{u^2 + v^2} \cdot \frac{\cos \varphi}{t} = \frac{u}{u^2 + v^2} \Leftrightarrow \frac{\cos \varphi}{t} = u$$

Analog din (2b) deducem:

$$(4) \quad t \sin \varphi = \frac{t^2 \sin \varphi}{t} = \frac{v}{u^2 + v^2} \xLeftrightarrow{(2c)} \frac{\sin \varphi}{t} = v$$

Din (2c) avem $t = \frac{1}{\sqrt{u^2 + v^2}} \in (0, \infty)$.

Din (3) și (4) avem unghiul $\varphi \in [0, 2\pi)$ unic determinat de relațiile:

$$\begin{cases} \cos \varphi = ut = \frac{u}{\sqrt{u^2 + v^2}} \\ \sin \varphi = vt = \frac{v}{\sqrt{u^2 + v^2}} \end{cases}$$

Presupunem prin reducere la absurd că $\varphi = 0$:

$$0 = \sin 0 = \frac{v}{\sqrt{u^2 + v^2}} \iff v = 0$$

$$1 = \cos 0 = \frac{u}{\sqrt{u^2 + v^2}} \implies u \geq 0,$$

contradicție cu ipoteza $(u, v) \notin \{(u, 0) : u \geq 0\}$.

Deci $\varphi \in (0, 2\pi)$.

Acum (ținând cont de continuitate) putem scrie funcția φ astfel:

$$\varphi = \varphi(u, v) = \begin{cases} \arccos\left(\frac{u}{\sqrt{u^2 + v^2}}\right), & \text{dacă } v > 0, \\ \arccos\left(\frac{u}{\sqrt{u^2 + v^2}}\right) + \pi, & \text{dacă } v < 0, \\ \pi, & \text{dacă } u < 0 \text{ și } v = 0. \end{cases}$$

În concluzie avem aplicația $\Phi : (0, \infty) \times (0, 2\pi) \rightarrow \mathbb{R}^2 \setminus \{(u, 0) : u \geq 0\}$

$$\Phi(t, \varphi) = \left(\frac{\cos \varphi}{t}, \frac{\sin \varphi}{t} \right)$$

$$\Phi^{-1}(u, v) = \left(\frac{1}{\sqrt{u^2 + v^2}}, \varphi(u, v) \right).$$

Avem

$$D\Phi(t, \varphi) = \begin{pmatrix} -\frac{\sin \varphi}{t} & \frac{\cos \varphi}{t} \\ -\frac{\cos \varphi}{t^2} & -\frac{\sin \varphi}{t^2} \end{pmatrix}$$

care are determinantul $\det D\Phi(t, \varphi) = \frac{1}{t^3} \neq 0$, deci Φ este un difeomorfism.

Relația dintre cele două parametrizări este $r_2 = r_1 \circ \Phi$.

Exercițiul 16.03:03 Să se descrie planul tangent la suprafața (π) , într-un punct arbitrar p , unde (π) este planul dat prin ecuație generală: $Ax + By + Cz + D = 0$, $A^2 + B^2 + C^2 \neq 0$.

Soluție. Dacă $C \neq 0$, atunci $S = (\pi)$ admite parametrizarea globală (adică o singură hartă de coordonate)

$$r : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad r(u, v) = \left(u, v, -\frac{A}{C}u - \frac{B}{C}v - \frac{D}{C} \right).$$

Planul tangent $T_p S$ este generat de $r_u = (1, 0, -A/C)$ și $r_v = (0, 1, -B/C)$. Direcția normală este dată de $r_u \times r_v = (A/C, B/C, 1)$.

Prin urmare, $T_p S$ este planul care trece prin p și are direcția normală $(A/C, B/C, 1)$, adică este planul (π) însuși, oricare ar fi punctul $p \in (\pi)$.

Exercițiul 16.03:04 Să se descrie planul tangent într-un punct arbitrar p la sfera unitate $\mathbb{S}^2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$.

Soluție. Fie o parametrizare pe sferă dată de

$$r : D \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad r(\varphi, \psi) = (\cos \varphi \cos \psi, \cos \varphi \sin \psi, \sin \varphi),$$

unde $D = (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \times (0, 2\pi)$. Avem $r(D) = \mathbb{S}^2 \setminus \{(x, y, z) \in \mathbb{S}^2 : x \geq 0\}$.

Calculăm

$$r_\varphi = (-\sin \varphi \cos \psi, -\sin \varphi \sin \psi, \cos \varphi)$$

$$r_\psi = (-\cos \varphi \sin \psi, \cos \varphi \cos \psi, 0).$$

Astfel, direcția normală (într-un punct arbitrar) este dată de

$$r_\varphi \times r_\psi = (-\cos^2 \varphi \cos \psi, -\cos^2 \varphi \sin \psi, -\sin \varphi \cos \varphi).$$

Avem $|r_\varphi \times r_\psi|^2 = \cos^2 \varphi \neq 0$.

Remarcăm că direcția normală dată de $r_\varphi \times r_\psi$ este aceeași cu cea dată de vectorul de poziție $r(\varphi, \psi)$. Prin urmare, planul tangent în p la $\mathbb{S}^2$ este planul care trece prin p și este perpendicular pe vectorul de poziție $\vec{Op}$.

Întrebare:

Cum se scrie planul tangent în p dacă folosim altă parametrizare? De exemplu să considerăm una din cele 6 parametrizări (care acoperă o emisferă):

$$r : D(1) \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad r(u, v) = (u, \sqrt{1 - u^2 - v^2}, v),$$

unde $D(1)$ este discurul unitate deschis în $\mathbb{R}^2$.

Evident avem $r(D(1)) = U_2^+ := \{(x, y, z) \in \mathbb{S}^2 : y > 0\}$.

Calculăm derivatele parțiale (care ne dau direcția planară a planului tangent):

$$r_u = \left(1, \frac{-u}{\sqrt{1-u^2-v^2}}, 0\right) \quad \text{și} \quad r_v = \left(0, \frac{-v}{\sqrt{1-u^2-v^2}}, 1\right).$$

Direcția normală este dată de: $r_u \times r_v = \left(\frac{-u}{\sqrt{1-u^2-v^2}}, -1, \frac{-v}{\sqrt{1-u^2-v^2}}\right)$ care este, din nou, aceeași cu cea dată de vectorul de poziție $r(u, v)$; mai precis avem

$$r_u \times r_v = -\frac{1}{\sqrt{1-u^2-v^2}} \cdot r(u, v).$$

Prin urmare, se obține același plan exprimat printr-o altă parametrizare.

Observație. Să scriem ecuația planului tangent la sferă într-un punct al ei $p_0 = (x_0, y_0, z_0)$. Am văzut, pentru două parametrizări diferite, că planul tangent într-un punct la sfera unitate este planul perpendicular pe vectorul de poziție (în acel punct). Prin urmare, vectorul de poziție $\vec{Op_0}$ definește normala la planul tangent în p_0 . Mai precis, direcția normală este dată de (x_0, y_0, z_0) .

Acum putem scrie ecuația planului prin p_0 și de direcție normală (x_0, y_0, z_0) :

$$T_{p_0}\mathbb{S}^2 : x_0(x - x_0) + y_0(y - y_0) + z_0(z - z_0) = 0,$$

ceea ce este echivalent cu

$$T_{p_0}\mathbb{S}^2 : x_0x + y_0y + z_0z + 1 = 0,$$

care reprezintă ecuația planului tangent la sferă exprimat prin "dedublare".

Exercițiul 16.03:05 Să se scrie planul tangent într-un punct arbitrar pentru suprafața parametrizată $r : D = \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$, $r(u, v) = (u + v, u - v, uv)$.

Cazuri particulare: (i) $p = (2, 0, 1)$; (ii) $p = (0, 2, -1)$; (iii) $p = (0, 0, 0)$.

Soluție. Planul tangent T_pS este generat de r_u și r_v , unde $r_u = (1, 1, v)$, iar $r_v = (1, -1, u)$.

Direcția normală este dată de $r_u \times r_v = (u + v, -u + v, -2)$

Prin urmare, T_pS este planul care trece prin p și are direcția normală $(u + v, -u + v, -2)$.

Dacă (x, y, z) sunt coordonatele unui punct arbitrar pe $S \subset \mathbb{R}^3$, atunci direcția normală la S într-un punct arbitrar al său (x_0, y_0, z_0) , este $(x_0, -y_0, -2)$. Astfel, planul tangent se scrie

$$T_{p_0}S : x_0(x - x_0) - y_0(y - y_0) - 2(z - z_0) = 0.$$

Echivalent, putem scrie

$$(5) \quad T_{p_0}S : x_0x - y_0y - 2(z + z_0) = 0,$$

deoarece $x_0^2 - y_0^2 = 4z_0$.

Să remarcăm faptul că ecuația dată prin formula (5) este aceeași cu cea obținută prin dedublare când scriem ecuația planului tangent într-un punct la cuadrica S (paraboloid hiperbolic).

În ceea ce privește cazurile particulare, avem

(i) $p_0 = (2, 0, 1)$: Acest punct corespunde valorilor $u = 2$ și $v = 0$.

Ecuția planului tangent este $T_{p_0}S : x - z - 1 = 0$.

ii) $p_0 = (0, 2, -1)$: Acest punct corespunde valorilor $u = 0$ și $v = 2$.

Ecuția planului tangent este $T_{p_0}S : y + z - 1 = 0$.

iii) $p_0 = (0, 0, 0)$: Acest punct corespunde valorilor $u = 0$ și $v = 0$.

Ecuția planului tangent este $T_{p_0}S : z = 0$.

Exercițiul 16.03:06 Să se scrie planul tangent într-un punct arbitrar pentru suprafața PE dată prin ecuația $z = x^2 + y^2$. (Vezi și exercițiul 16.03:02 (c).)

Cazuri particulare: (i) $p = (1, 1, 2)$; (ii) $p = (0, 0, 0)$.

Soluție.

Considerăm parametrizarea (vezi exercițiul 16.03:02):

$$r : D \rightarrow \mathbb{R}^3 \quad , \quad r(u, v) = \left(\frac{u}{u^2 + v^2}, \frac{v}{u^2 + v^2}, \frac{1}{u^2 + v^2} \right),$$

unde $D = \mathbb{R}^2 \setminus \{(u, 0) : u \geq 0\}$, iar $S = r(D) = PE \setminus \{(x, 0, x^2) : x \geq 0\}$, PE fiind paraboloidul de rotație, adică mulțimea

$$PE = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = x^2 + y^2\}$$

Planul tangent $T_p S$ este generat de

$$r_u = \left(\frac{v^2 - u^2}{(u^2 + v^2)^2}, -\frac{2uv}{(u^2 + v^2)^2}, -\frac{2u}{(u^2 + v^2)^2} \right)$$

și

$$r_v = \left(-\frac{2uv}{(u^2 + v^2)^2}, \frac{u^2 - v^2}{(u^2 + v^2)^2}, -\frac{2v}{(u^2 + v^2)^2} \right),$$

iar direcția normală este dată de

$$r_u \times r_v = \left(\frac{2u}{(u^2 + v^2)^3}, \frac{2v}{(u^2 + v^2)^3}, -\frac{1}{(u^2 + v^2)^2} \right)$$

Să observăm că dacă $p_0 = (x_0, y_0, z_0) \in S = r(D)$, atunci direcția normală este dată de $(2x_0z_0^2, 2y_0z_0^2, -z_0^2)$. Prin urmare, $T_{p_0} S$ este planul care trece prin p și are direcția normală $(2x_0, 2y_0, -1)$. Rezultă că planul tangent $T_{p_0} S$ are ecuația

$$T_{p_0} S : 2x_0(x - x_0) + 2y_0(y - y_0) - (z - z_0) = 0,$$

echivalent cu

$$T_{p_0} S : x_0x + y_0y - \frac{z + z_0}{2} = 0.$$

Această ecuație reprezintă ecuația planului tangent prin dedublare la cuadrica PE .

Pentru $p = (1, 1, 2)$ avem

$$u = \frac{1}{2}, v = \frac{1}{2}, r_u = (0, -2, -4), r_v = (-2, 0, -4), r_u \times r_v = (8, 8, -4).$$

Planul tangent are așadar ecuația

$$2(x - 1) + 2(y - 1) - (z - 2) = 0 \iff 2x + 2y - z - 2 = 0.$$

Ce putem spune pentru $p = (0, 0, 0)$? Facem observația că acest punct **NU** se află în $r(D)$, prin urmare calculul de mai sus nu se aplică. Va trebui să considerăm altă parametrizare.

În jurul lui $p = (0, 0, 0)$ putem considera, de exemplu,

$$r : D = \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad r(u, v) = (u, v, u^2 + v^2).$$

În urma unui calcul analog, se obține că planul tangent în $p = (0, 0, 0)$ la PE este $z = 0$, adică planul xOy .

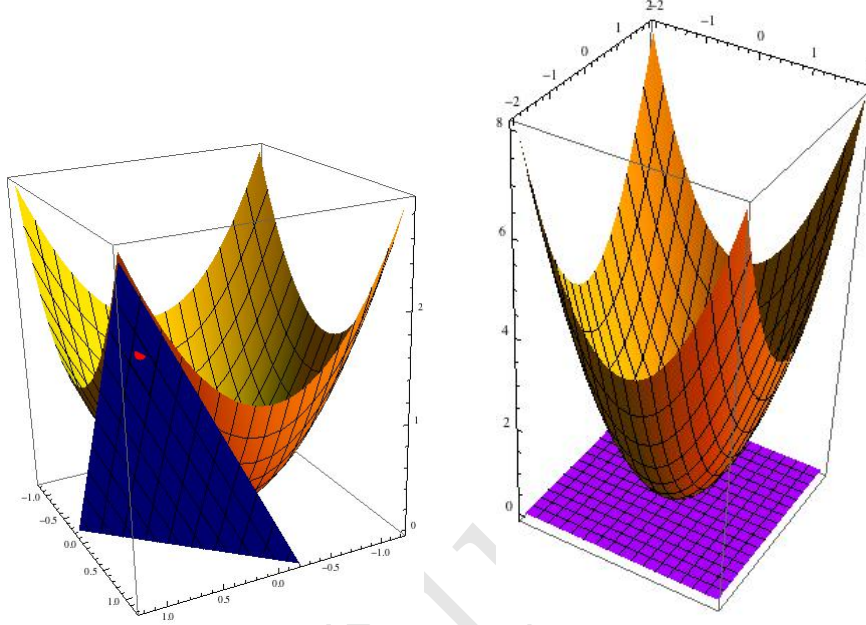


FIGURA 3. cele două plane tangente la PE

Exercițiul 16.03:07 Să se scrie planul tangent într-un punct arbitrar al suprafeței parametrizate

$$r : D \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad r(\theta, t) = ((2 + \cos t) \cos \theta, (2 + \cos t) \sin \theta, \sin t),$$

unde D este un domeniu ”cât mai amplu” din $\mathbb{R}^2$ (care să se determine).

Soluție. Calculăm:

$$r_t = (-\sin t \cos \theta, -\sin t \sin \theta, \cos t)$$

$$r_\theta = (-(2 + \cos t) \sin \theta, (2 + \cos t) \cos \theta, 0)$$

$$r_\theta \times r_t = ((2 + \cos t) \cos \theta \cos t, (2 + \cos t) \sin \theta \cos t, (2 + \cos t) \sin t).$$

Prin urmare, planul tangent la S în p este planul care trece prin P și are direcția normală

$$(\cos \theta \cos t, \sin \theta \cos t, \sin t).$$

Domeniul D poate fi ales, de exemplu, $(0, 2\pi) \times (-\pi/2, \pi/2)$; evident, $r(D)$ nu acoperă întreaga suprafață, însă considerând alte domenii D putem acoperi S . Suprafața descrisă de ecuația din enunț se numește *tor* și poate fi obținută prin rotirea unui cerc din planul yOz (care nu intersectează axa Oz) în jurul axei Oz .

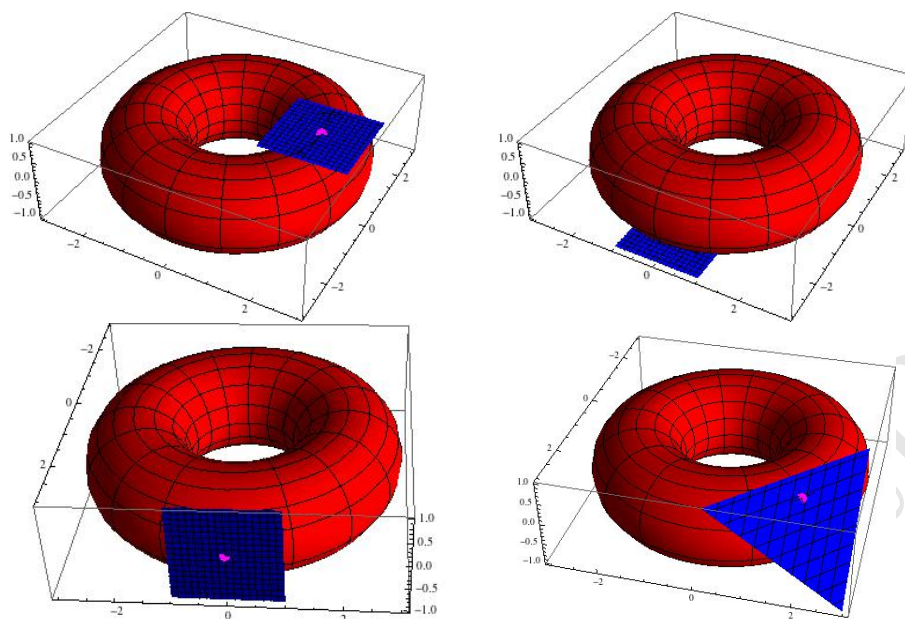


FIGURA 4. planele tangente la tor în punctele $(2, 0, 1)$, $(0, -2, -1)$, $(3, 0, 0)$, respectiv $\left(\sqrt{2} + \frac{1}{2}, \sqrt{2} + \frac{1}{2}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$

Exercițiul 16.03:08 Fie suprafața S parametrizată prin $r : (0, \infty) \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$, $r(u, v) = (ue^v, ue^{-v}, uv)$. Se cer ecuațiile planului tangent și ale normalei la S în punctul $p = (1, 1, 0)$.

Soluție. Punctul p aparține într-adevăr suprafeței S și corespunde valorilor $u = 1$ și $v = 0$.

Calculăm $r_u = (e^v, e^{-v}, v)$ și $r_v = (ue^v, -ue^{-v}, u)$. Produsul lor vectorial este

$$r_u \times r_v = (u(1+v)e^v, -u(1-v)e^{-v}, -2u) \neq 0, \quad \forall (u, v) \in (0, \infty) \times \mathbb{R}.$$

În p avem

$r_u = (1, 1, 0)$ și $r_v = (1, -1, 1)$ care ne dau direcția planară a lui $T_p S$

$r_u \times r_v = (1, -1, -2)$ care ne dă direcția dreptei normale în p la S .

Așadar ecuațiile se scriu:

$$T_p S: \begin{vmatrix} x-1 & y-1 & z \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \iff x - y - 2z = 0;$$

$$\text{dreapta normală: } \frac{x-1}{1} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z}{-2}.$$