

GEOMETRIE DIFERENȚIALĂ - SEMINAR

Exercițiul 23.03:01 Fie suprafața S dată în formă explicită prin ecuația $z = f(x, y)$, unde $f : D \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$. Să se determine planul tangent la S într-un punct p_0 al său.

Caz particular: $D = \mathbb{R}^2$ și $f(x, y) = x^2 + y^2$ (paraboloidul de rotație).

Soluție.

Fie (x_0, y_0, z_0) coordonatele lui p_0 , unde $(x_0, y_0) \in D$, iar $z_0 = f(x_0, y_0)$.

Putem scrie o parametrizare a suprafeței S astfel:

$$r : D \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad r(u, v) = (u, v, f(u, v)).$$

Pentru un punct $p_0 \in S$, planul tangent $T_{p_0}S$ are direcția planară dată de $r_u = (1, 0, f_u)$ și $r_v = (0, 1, f_v)$, unde am notat $f_u = \frac{\partial f}{\partial u}(u, v)$ și $f_v = \frac{\partial f}{\partial v}(u, v)$.

Direcția normală este dată de $r_u \times r_v = (-f_u, -f_v, 1)$.

Astfel, planul tangent în p_0 se scrie

$$f_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f_y(x_0, y_0)(y - y_0) - (z - z_0) = 0,$$

sau, echivalent,

$$f_x(x_0, y_0) x + f_y(x_0, y_0) y - z + D = 0, \quad \text{unde } D = z_0 - x_0 f_x(x_0, y_0) - y_0 f_y(x_0, y_0).$$

În cazul particular al paraboloidului de rotație PE avem $f_x = 2x$, $f_y = 2y$, deci

$$D = z_0 - x_0 \cdot 2x_0 - y_0 \cdot 2y_0 = -z_0.$$

Astfel, planul tangent $T_{p_0}S$ are ecuația:

$$x_0 x + y_0 y - \frac{z + z_0}{2} = 0.$$

Să remarcăm că această ecuație este aceeași care se obține prin dedublare (reamintim că PE este o cuadrică).

Ex 23.03:02 Fie S dată implicit de ecuația $F(x, y, z) = 0$, unde $DF(x, y, z) \neq 0$ în punctele suprafeței. Să se descrie planul tangent la S într-un punct $p_0 \in S$.

Cazuri particulare: sfera de rază R , hiperboloidul cu o pânză și hiperboloidul cu două pânze.

Soluție: Dacă $\frac{\partial F}{\partial z}(x_0, y_0, z_0) \neq 0$ atunci, într-o vecinătate a lui $p_0(x_0, y_0, z_0)$, putem exprima S în formă explicită $z = f(x, y)$, cu $(x, y) \in D \subset \mathbb{R}^2$. Prin urmare avem

$$(1) \quad F(x, y, f(x, y)) = 0, \quad \forall (x, y) \in D.$$

Într-un punct $p_0 = (x_0, y_0, z_0) \in S$, planul tangent $T_{p_0}S$ se scrie (vezi exercițiul precedent) $\langle \bar{r} - \bar{r}_0, \bar{N}_0 \rangle = 0$, unde $\bar{r}_0 = (x_0, y_0, z_0)$, $\bar{r} = (x, y, z)$, iar $\bar{N}_0 = (f_x(x_0, y_0), f_y(x_0, y_0), -1)$.

Revenind la ecuația (1), prin derivare în raport cu x , respectiv y , se obține:

$$F_x + F_z \cdot f_x = 0 \quad \text{și} \quad F_y + F_z \cdot f_y = 0.$$

Deci $f_x = -\frac{F_x}{F_z}$ și $f_y = -\frac{F_y}{F_z}$.

Prin urmare, $\bar{N}_0$ este coliniar cu $(F_x(x_0, y_0), F_y(x_0, y_0), F_z(x_0, y_0))$. Acest din urmă vector este *gradientul funcției* F în p_0 și se notează cu $\nabla F(x_0, y_0, z_0)$.

Așadar, ecuația (vectorială a) planului tangent la S în p_0 se scrie

$$\langle \bar{r} - \bar{r}_0, \nabla F(x_0, y_0, z_0) \rangle = 0.$$

Pentru celelalte cazuri, când $\frac{\partial F}{\partial x} \neq 0$ sau $\frac{\partial F}{\partial y} \neq 0$ se face un calcul analog și se obține aceeași ecuație.

Cazuri particulare:

(i) $S = \mathbb{S}^2(R) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = R^2\}$ (sfera de rază R).

Considerând $F(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - R^2$, avem $DF(x, y, z) = (2x \ 2y \ 2z) \neq 0$ pentru orice $(x, y, z) \in S$.

Direcția normală la S într-un punct $p_0 = (x_0, y_0, z_0)$ este dată de $\nabla F(x_0, y_0, z_0) = (2x_0 \ 2y_0 \ 2z_0)$.

Astfel,

$$T_{p_0}S : (x - x_0) \cdot 2x_0 + (y - y_0) \cdot 2y_0 + (z - z_0) \cdot 2z_0 = 0$$

sau, echivalent,

$$T_{p_0}S : x_0 x + y_0 y + z_0 z - R^2 = 0.$$

(ii) $S = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1 \right\}$, $a, b, c > 0$ (hiperbolidul cu o pânză).

Considerând $F(x, y, z) = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} - 1$ avem $DF(x, y, z) = \left(\frac{2x}{a^2}, \frac{2y}{b^2}, -\frac{2z}{c^2} \right) \neq 0$, oricare ar fi $(x, y, z) \in S$. Direcția normală la S într-un punct $p_0 = (x_0, y_0, z_0)$ este dată de:

$$\nabla F(x_0, y_0, z_0) = \left(\frac{2x_0}{a^2}, \frac{2y_0}{b^2}, -\frac{2z_0}{c^2} \right)$$

Astfel, $T_{p_0}S : (x - x_0) \frac{2x_0}{a^2} + (y - y_0) \frac{2y_0}{b^2} - (z - z_0) \frac{2z_0}{c^2} = 0$ sau, echivalent,

$$T_{p_0}S : \frac{x_0x}{a^2} + \frac{y_0y}{b^2} - \frac{z_0z}{c^2} - 1 = 0.$$

(iii) $S = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1 \right\}$, $a, b, c > 0$ (hiperbolidul cu două pânze).

Se procedează analog și se obține

$$T_{p_0}S : \frac{x_0x}{a^2} + \frac{y_0y}{b^2} - \frac{z_0z}{c^2} + 1 = 0.$$

Ex 23.03:03 Să se determine prima formă fundamentală pentru următoarele suprafețe parametrizate:

(a) $r : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$, $r(u, v) = (u, v, au + bv + c)$, unde $a, b, c \in \mathbb{R}$;

(b) $r : \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \times (0, 2\pi) \rightarrow \mathbb{R}^3$, $r(\varphi, \psi) = (\cos \varphi \cos \psi, \cos \varphi \sin \psi, \sin \varphi)$;

(c) $r : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$, $r(u, v) = (u + v, u - v, uv)$;

(d) $r : (0, 2\pi) \times \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \rightarrow \mathbb{R}^3$, $r(\theta, t) = ((2 + \cos t) \cos \theta, (2 + \cos t) \sin \theta, \sin t)$;

(e) $r : D \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$, $r(x, y) = (x, y, f(x, y))$, unde $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ este o funcție netedă.

Soluție:

(a) Avem $r_u = (1, 0, a)$ și $r_v = (0, 1, b)$.

Rezultă că

$$E = \langle r_u, r_u \rangle = 1 + a^2$$

$$F = \langle r_u, r_v \rangle = ab$$

$$G = \langle r_v, r_v \rangle = 1 + b^2,$$

deci $I = (1 + a^2)du^2 + 2ab du dv + (1 + b^2)dv^2$.

(b) Avem

$$r_\varphi = (-\sin \varphi \cos \psi, -\sin \varphi \sin \psi, \cos \varphi)$$

$$r_\psi = (-\cos \varphi \sin \psi, \cos \varphi \cos \psi, 0).$$

Rezultă că $E = 1$, $F = 0$, $G = \cos^2 \varphi$, așadar $I = d\varphi^2 + \cos^2 \varphi d\psi^2$.

(c) Avem $r_u = (1, 1, v)$ și $r_v = (1, -1, u)$, deci $E = 2 + v^2$, $F = uv$, $G = 2 + u^2$.

Rezultă $I = (2 + v^2)du^2 + 2uv dudv + (2 + u^2)dv^2$.

(d) Calculăm

$$\begin{aligned} r_\theta &= (-(2 + \cos t) \sin \theta, (2 + \cos t) \cos \theta, 0) \\ r_t &= (-\sin t \cos \theta, -\sin t \sin \theta, \cos t). \end{aligned}$$

Rezultă $I = (2 + \cos t)^2 d\theta^2 + dt^2$.

(e) Avem $r_x = (1, 0, f_x)$ și $f_y = (0, 1, f_y)$.

Rezultă

$$I = (1 + f_x^2)dx^2 + 2f_x f_y dx dy + (1 + f_y^2)dy^2.$$

Ex 23.03:04 Să se determine prima formă fundamentală pentru următoarele suprafețe parametrizate:

(a) $r : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3, r(u, v) = \left(u + uv^2 - \frac{u^3}{3}, v + u^2v - \frac{v^3}{3}, u^2 - v^2 \right)$
(suprafața Enneper);

(b) $r : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3, r(u, v) = (u \cos v, u \sin v, av), a > 0$
(elicoidul);

(c) $r : (0, 2\pi) \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3, r(u, v) = (\cosh v \cos u, \cosh v \sin u, av), a \in \mathbb{R}$
(catenoidul).

Soluție.

(a) Pentru calculul coeficienților, vedeți figura 2. Prin urmare prima formă fundamentală se scrie

$$I = (1 + u^2 + v^2)^2 (du^2 + dv^2).$$

Suprafața este reprezentată în figura 3.

(b) Pentru calculul coeficienților, vedeți figura 4. Prin urmare prima formă fundamentală se scrie

$$I = du^2 + (a^2 + u^2) dv^2.$$

Elicoidul este reprezentat în figura 5.

(c) Prima formă fundamentală se scrie

$$I = \cosh^2(v) du^2 + (a^2 + \sinh^2(v)) dv^2.$$

Catenoidul este reprezentat în figura 6.

Ex 23.03:05 Să se determine prima formă fundamentală pentru următoarele suprafețe parametrizate:

(a) $r : (0, 2\pi) \times I \rightarrow \mathbb{R}^3, r(u, v) = (v \cos u, v \sin u, f(v))$, unde $f : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ este o funcție netedă (și bijectivă), iar $I \not\ni 0$ (suprafață de rotație);

- (b) $r : I \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$, $r(s, t) = \rho(s) + t\bar{a}$, unde $\bar{a} \in \mathbb{R}^3$ este un vector unitar constant iar $\rho : I \xrightarrow{d} \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ este o curbă parametrizată regulată (netedă) în $\mathbb{R}^3$ a.î. $\rho'(s)$ și $\bar{a}$ nu sunt coliniari $\forall s \in I$ (suprafață cilindrică).

Caz particular: $\bar{a} = (0, 0, 1)$ și $\rho : (0, 2\pi) \rightarrow \mathbb{R}^3$, $\rho(s) = (\cos s, \sin s, 0)$.

- (c) $r : I \times (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}^3$, $r(s, t) = A + t\rho(s)$, unde A este un punct fixat în $\mathbb{R}^3$, iar $\rho : I \xrightarrow{d} \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ este o curbă parametrizată natural (netedă) în $\mathbb{R}^3$ având curbura diferită de zero în orice $s \in I$ (suprafață conică).

Caz particular: $A = (0, 0, 0)$ și $\rho : (0, 2\pi) \rightarrow \mathbb{R}^3$, $\rho(s) = (\cos s, \sin s, 0)$.

Soluție.

(a) Calculăm:

$$r_u = (-v \sin u, v \cos u, 0)$$

$$r_v = (\cos u, \sin u, f'(v))$$

Coeficienții primei forme fundamentale sunt

$$E = \|r_u\|^2 = v^2$$

$$F = \langle r_u, r_v \rangle = 0$$

$$G = \|r_v\|^2 = 1 + f'(v)^2.$$

Astfel, prima formă fundamentală a suprafeței este dată de

$$I = v^2 du^2 + (1 + f'(v)^2) dv^2.$$

Să observăm că $EG - F^2 \neq 0$ în baza ipotezei $0 \notin I$.

(b) Să determinăm baza naturală într-un punct al suprafeței:

$$\{r_s = \rho'(s), r_t = \bar{a}\}$$

cât și coeficienții primei forme fundamentale

$$E = \|r_s\|^2 = |\rho'(s)|^2$$

$$F = \langle r_s, r_t \rangle = \langle \rho'(s), \bar{a} \rangle$$

$$G = \|r_t\|^2 = |\bar{a}|^2.$$

Așadar, prima formă fundamentală pentru S este

$$I = |\rho'(s)|^2 ds^2 + 2\langle \rho'(s), \bar{a} \rangle ds dt + |\bar{a}|^2 dt^2.$$

Condiția $EG - F^2 \neq 0$ este echivalentă cu $|\rho'(s) \times \bar{a}|^2 \neq 0$, care este îndeplinită deoarece $\rho'(s)$ și $\bar{a}$ nu sunt coliniari pentru niciun s .

Caz particular:

$$\bar{a} = (0, 0, 1) \text{ și } \rho : (0, 2\pi) \rightarrow \mathbb{R}^3, \rho(s) = (\cos s, \sin s, 0)$$

(cilindrul circular drept de rază 1).

Avem:

$$r_s = (-\sin s, \cos s, 0), \quad r_t = (0, 0, 1)$$

$$E = \|r_s\|^2 = 1, \quad F = \langle r_s, r_t \rangle = 0, \quad G = \|r_t\|^2 = 1.$$

Forma întâi fundamentală se scrie $I = ds^2 + dt^2$.

(c) Planul tangent într-un punct la suprafață este generat de $\{r_s = t\rho'(s), r_t = \rho(s)\}$.

Calculăm

$$E = \|r_s\|^2 = t^2|\rho'(s)|^2 = t^2$$

parametrizarea este naturală

$$F = \langle r_s, r_t \rangle = \langle t\rho(s), \rho'(s) \rangle = 0$$

deoarece $\rho'(s) \perp \rho(s)$

$$G = \|r_t\|^2 = |\rho(s)|^2.$$

Prima formă fundamentală se scrie $I = t^2 ds^2 + |\rho(s)|^2 dt^2$.

În cazul particular dat, se obține $I = t^2 ds^2 + dt^2$.

Ex 23.03:06 Să se arate că meridianele și paralelele de pe sfera $\mathbb{S}^2$ sunt perpendiculare. Concret, considerând parametrizarea $r(\varphi, \psi) = (\cos \varphi \cos \psi, \cos \varphi \sin \psi, \sin \varphi)$, meridianele sunt definite de $\psi = \text{constant}$, iar paralelele de $\varphi = \text{constant}$.

Soluție. Întrucât meridianele și paralelele pe sfera $\mathbb{S}^2$ reprezintă liniile parametrice ale acesteia, vom folosi formula

$$\cos \theta(p) = \frac{F}{\sqrt{EG}},$$

unde E, F, G sunt coeficienții primei forme fundamentale pe $\mathbb{S}^2$.

Am calculat anterior

$$E = \|r_\varphi\|^2 = 1$$

$$F = \langle r_\varphi, r_\psi \rangle = 0$$

$$G = \|r_\psi\|^2 = \cos^2 \varphi.$$

Așadar $\cos \theta(p) = 0$, deci $\theta = \frac{\pi}{2}$ pentru orice punct $p \in \mathbb{S}^2$.

Ex 23.03:07 Pentru două puncte arbitrare A, B (dar nu diametral opuse) de pe sfera $\mathbb{S}^2$ construim segmentul sferic $[AB]$ în felul următor: planul (OAB) intersectează sfera după un cerc mare (i.e. de rază 1); considerăm arcul mic ce unește A cu B .

Fie punctele $A(1, 0, 0)$, $B(0, 1, 0)$ și $N(0, 0, 1)$ pe sfera $\mathbb{S}^2$. Construim "triunghiul sferic" ABN . Să se arate că are trei unghiuri drepte.

Soluție. Vom parametriza cele trei segmente sferice.

$[AB] : \rho_1 : I_1 \rightarrow \mathbb{R}^3, \rho_1(t) = (\cos t, \sin t, 0)$, astfel încât $[0, \frac{\pi}{2}] \subset I_1$ și

$$\rho_1(0) = A \quad , \quad \rho_1\left(\frac{\pi}{2}\right) = B$$

$[AN] : \rho_2 : I_2 \rightarrow \mathbb{R}^3, \rho_2(s) = (\cos s, 0, \sin s)$, astfel încât $[0, \frac{\pi}{2}] \subset I_2$ și

$$\rho_2(0) = A \quad , \quad \rho_2\left(\frac{\pi}{2}\right) = N$$

$[BN] : \rho_3 : I_3 \rightarrow \mathbb{R}^3, \rho_3(a) = (0, \cos a, \sin a)$, astfel încât $[0, \frac{\pi}{2}] \subset I_3$ și

$$\rho_3(0) = B \quad , \quad \rho_3\left(\frac{\pi}{2}\right) = N.$$

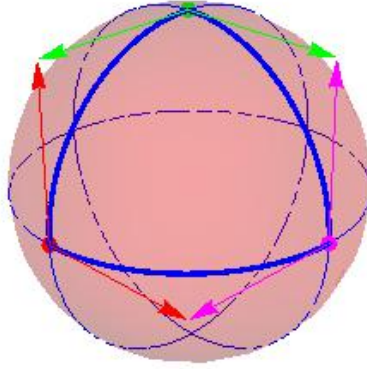


FIGURA 1. N(verde), A(roșu), B(magenta)

În A , avem vectorii tangenți $\rho'_1(0) = (0, 1, 0)$ și $\rho'_2(0) = (0, 0, 1)$.

Unghiul A se calculează astfel:

$$\cos A = \frac{\langle \rho'_1(0), \rho'_2(0) \rangle}{\|\rho'_1(0)\| \cdot \|\rho'_2(0)\|} = 0.$$

Deci $A = \frac{\pi}{2}$.

Analog, în B avem vectorii tangenți $-\rho'_1\left(\frac{\pi}{2}\right) = (1, 0, 0)$ și $\rho'_3(0) = (0, 0, 1)$ care sunt perpendiculari. Deci $B = \frac{\pi}{2}$.

Apoi în N avem vectorii tangenți $-\rho'_3\left(\frac{\pi}{2}\right) = (0, 1, 0)$ și $-\rho'_2\left(\frac{\pi}{2}\right) = (1, 0, 0)$. Rezultă $N = \frac{\pi}{2}$.

Observație. Pentru unghiul B am considerat $-\rho'_1\left(\frac{\pi}{2}\right)$ (drept vector tangent la $\rho_1\left(\frac{\pi}{2}\right)$) deoarece este vorba de unghiul B interior triunghiului sferic ABN . Prin urmare, trebuie să considerăm segmentul sferic BA , așa că trebuie să schimbăm orientarea (sensul de parcurs al curbei ρ_1). Analog și pentru N .

Ex 23.03:08 Fie paraboloidul de rotație $PE : z = x^2 + y^2$.

Definim curbele $C_1 = PE \cap \{z = h\}$ și $C_2 = PE \cap \{ax + by = 0\}$, unde $h > 0$, $a, b \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Să se determine unghiul dintre cele două curbe în punctul lor de intersecție.

Soluție. Curba C_1 poate fi parametrizată astfel

$$\rho_1 : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad \rho_1(t) = (\sqrt{h} \cos t, \sqrt{h} \sin t, h).$$

Pentru curba C_2 avem parametrizarea

$$\rho_2 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad \rho_2(s) = (bs, -as, (a^2 + b^2)s^2).$$

Evident, C_1 și C_2 se intersectează în două puncte și anume:

$$P = \left(b\sqrt{\frac{h}{a^2 + b^2}}, -a\sqrt{\frac{h}{a^2 + b^2}}, h\right) \quad \text{și} \quad Q = \left(-b\sqrt{\frac{h}{a^2 + b^2}}, a\sqrt{\frac{h}{a^2 + b^2}}, h\right).$$

Vectorii tangenți la C_1 și C_2 sunt

$$\begin{aligned} \rho'_1(t) &= (-\sqrt{h} \sin t, \sqrt{h} \cos t, 0) \\ \rho'_2(s) &= (b, -a, 2(a^2 + b^2)s). \end{aligned}$$

Pentru punctul P avem: $s_0 = \sqrt{\frac{h}{a^2 + b^2}}$, $\cos t_0 = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}$, $\sin t_0 = -\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}$.

Calculăm $\langle \rho'_1(t_0), \rho'_2(t_0) \rangle = 0$.

Deci unghiul sub care cele două curbe se intersectează în P este $\frac{\pi}{2}$.

Analog pentru punctul Q .

Lucru individual.

Ex 23.03:09 Fie paraboloidul de rotație $PE : z = x^2 + y^2$.

Definim curbele $C_1 = PE \cap \{z = h\}$ și $C_2 = PE \cap \{ax + by + cz = 0\}$, unde $h > 0$, $a, b \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Să se determine unghiul dintre cele două curbe în punctul lor de intersecție.

Caz particular: $a = b = 2$, $c = 1$.

Ex 23.03:10 Să se calculeze aria sferei $\mathbb{S}^2(R)$.

Soluție.

Metoda 1. Considerăm parametrizarea

$$r : \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \times (0, 2\pi) \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad r(\varphi, \psi) = (R \cos \varphi \cos \psi, R \cos \varphi \sin \psi, R \sin \varphi).$$

Coeficienții primei forme fundamentale sunt:

$$\begin{aligned} E &= \|r_\varphi\|^2 = R^2 \\ F &= \langle r_\varphi, r_\psi \rangle = 0 \\ G &= \|r_\psi\|^2 = R^2 \cos^2 \varphi \end{aligned}$$

și $EG - F^2 = R^4 \cos^2 \varphi$.

$$\text{Aria } (\mathbb{S}^2(R)) = \int_0^{2\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} R^2 |\cos \varphi| d\varphi d\psi = 2\pi R^2 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos \varphi d\varphi = 2\pi R^2 \sin \varphi \Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = 4\pi R^2.$$

Observație: În calculul de mai sus am "trișat" un pic, în sensul că ar fi trebuit să considerăm integralele următoare $\int_{\epsilon}^{2\pi-\epsilon}$ pentru ψ și $\int_{-\frac{\pi}{2}+\epsilon}^{\frac{\pi}{2}-\epsilon}$ pentru φ , după care să facem $\epsilon \rightarrow 0$.

Metoda 2. Considerăm parametrizarea

$$r : D^2(1) \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad r(u, v) = (u, v, \sqrt{1 - u^2 - v^2}),$$

unde $D^2(1) = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 / u^2 + v^2 < 1\}$ este discul unitate.

Am văzut deja că $r(D^2(1))$ reprezintă emisfera nordică a sferei $\mathbb{S}^2(1)$, deci doar jumătate de sferă.

Să calculăm aria. Mai întâi, coeficienții primei forme fundamentale sunt:

$$\begin{aligned} E &= \|r_u\|^2 = \frac{1 - v^2}{1 - u^2 - v^2} \\ F &= \langle r_u, r_v \rangle = \frac{uv}{1 - u^2 - v^2} \\ G &= \|r_v\|^2 = \frac{1 - u^2}{1 - u^2 - v^2} \end{aligned}$$

$$\text{și } EG - F^2 = \frac{1}{1 - u^2 - v^2}.$$

$$\text{Aria} = \iint_{D^2(1)} \frac{1}{\sqrt{1-u^2-v^2}} du dv.$$

Făcând schimbarea de variabile $u = r \cos \theta$, $v = r \sin \theta$, cu Jacobianul

$$\text{Jac} = \begin{pmatrix} \cos \theta & -r \sin \theta \\ \sin \theta & r \cos \theta \end{pmatrix}$$

obținem

$$\text{Aria} = \int_0^1 \int_0^{2\pi} \frac{r}{\sqrt{1-r^2}} d\theta dr = 2\pi \int_0^1 \frac{r}{\sqrt{1-r^2}} dr = 2\pi \left(-\sqrt{1-r^2} \right) \Big|_0^1 = 2\pi.$$

Rezultă $\text{Aria}(\mathbb{S}^2(1)) = 4\pi$.

Ex 23.03:11 Să se calculeze aria calotei sferice

$$\{(x, y, z) \in \mathbb{S}^2(R) : z > h\}$$

situate deasupra planului $z = h$, unde $h > 0$ este o constantă dată.

Soluție.

Folosind parametrizarea pe sfera de rază R dată de

$$r : \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right) \times (0, 2\pi) \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad r(\varphi, \psi) = R(\cos \varphi \cos \psi, \cos \varphi \sin \psi, \sin \varphi),$$

condiția $z > h$ implică $\sin \varphi > h$.

Deoarece $\sin : \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right) \rightarrow (-1, 1)$ este crescătoare, rezultă că $\varphi > \arcsin \frac{h}{R}$.

Coeficienții primei forme fundamentale sunt

$$E = R^2, \quad F = 0, \quad G = R^2 \cos^2 \varphi,$$

deci aria este

$$\text{Aria} = \int_0^{2\pi} \left(\int_{\arcsin \frac{h}{R}}^{\frac{\pi}{2}} R^2 |\cos \varphi| d\varphi \right) d\psi = 2\pi R^2 \sin \varphi \Big|_{\arcsin \frac{h}{R}}^{\frac{\pi}{2}}.$$

Deci aria calotei este

$$\text{Aria} = 2\pi R(R - h).$$

Ex 23.03:12 Să se calculeze aria regiunii de cilindru $x^2 + y^2 = a^2$, unde $a > 0$, situată între planele $z = \alpha$ și $z = \beta$, unde $\alpha < \beta$.

Soluție. Considerăm parametrizarea $r : D \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$, $r(\varphi, z) = (a \cos \varphi, a \sin \varphi, z)$, unde $D = (0, 2\pi) \times (\alpha, \beta)$.

Calculăm:

$$\begin{aligned} r_\varphi &= (-a \sin \varphi, a \cos \varphi, 0) \\ r_z &= (0, 0, 1) \end{aligned}$$

Coefficienții primei forme fundamentale sunt:

$$\begin{aligned} E &= \langle r_\varphi, r_\varphi \rangle = a^2 \\ F &= \langle r_\varphi, r_z \rangle = 0 \\ G &= \langle r_z, r_z \rangle = 1. \end{aligned}$$

Rezultă că aria porțiunii de cilindru cuprinsă între cele două plane este

$$\begin{aligned} \text{Aria} &= \iint_D \sqrt{EG - F^2} d\varphi dz = \iint_D \sqrt{a^2} d\varphi dz = a \int_{0+0}^{2\pi-0} \int_{\alpha+0}^{\beta-0} dz d\varphi \\ &= a \varphi \Big|_0^{2\pi} \cdot z \Big|_\alpha^\beta d\varphi = 2\pi a(\beta - \alpha). \end{aligned}$$

Ex 23.03:13 Fie elicea $\rho : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$, $\rho(t) = (a \cos t, a \sin t, bt)$, unde $a, b > 0$, care este situată pe cilindrul $x^2 + y^2 = a^2$. Fie cercul obținut prin secționarea cilindrului cu planul $z = h$, unde $h > 0$. Să se găsească punctul p_0 de intersecție al elicei cu cercul și să se determine unghiul sub care cele două curbe se intersectează.

Soluție. Notăm cu C intersecția cilindrului cu planul $z = h$ și parametrizăm astfel:

$$\gamma : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad \gamma(t) = (a \cos t, a \sin t, h).$$

Punctul de intersecție p_0 este dat de $\rho(t_1) = \gamma(t_2)$:

$$\begin{aligned} (2a) \quad & a \cos t_1 = a \cos t_2 \\ (2b) \quad & a \sin t_1 = a \sin t_2 \\ (2c) \quad & bt_1 = h \end{aligned}$$

Din (2a) și (2b) avem $t_1 = t_2 + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. Fără a restrânge generalitatea alegem $t_1 = t_2$.

Apoi, din (2c) obținem

$$t_1 = t_2 = \frac{h}{b},$$

de unde

$$p_0 = \left(a \cos \frac{h}{b}, a \sin \frac{h}{b}, h \right).$$

Notăm unghiul dintre ρ și γ cu θ ; avem următoarea formulă de calcul:

$$\cos \theta = \frac{\langle \rho'(t_1), \gamma'(t_1) \rangle}{|\rho'(t_1)| \cdot |\gamma'(t_1)|}$$

Calculăm derivatele funcțiilor ρ și γ :

$$\begin{aligned}\rho'(t) &= (-a \sin t, a \cos t, b) \\ \gamma'(t) &= (-a \sin t, a \cos t, 0).\end{aligned}$$

Astfel, obținem:

$$\begin{aligned}\langle \rho'(t_1), \gamma'(t_1) \rangle &= a^2 \\ |\rho'(t_1)|^2 &= a^2 + b^2 \\ |\gamma'(t_1)|^2 &= a^2.\end{aligned}$$

În concluzie:

$$\cos \theta = \frac{a^2}{a\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \iff \theta = \arccos\left(\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}\right),$$

independent de $h > 0$.

APPENDIX:

```
In[1]:= r = {u + u v^2 - u^3 / 3, v + u^2 v - v^3 / 3, u^2 - v^2}
Out[1]:= {u - u^3 / 3 + u v^2, v + u^2 v - v^3 / 3, u^2 - v^2}

In[2]:= ru = D[r, u] // Simplify
Out[2]:= {1 - u^2 + v^2, 2 u v, 2 u}

In[3]:= rv = D[r, v] // Simplify
Out[3]:= {2 u v, 1 + u^2 - v^2, -2 v}

In[4]:= ru.ru // Simplify
Out[4]:= (1 + u^2 + v^2)^2

In[5]:= ru.rv // Simplify
Out[5]:= 0

In[6]:= rv.rv // Simplify
Out[6]:= (1 + u^2 + v^2)^2
```

FIGURA 2. Enneper: calcul realizat cu Mathematica

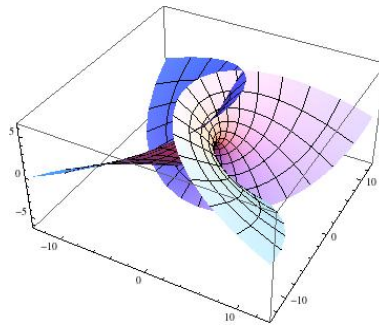


FIGURA 3. suprafața lui Enneper

```
In[7]:= r = {u Cos[v], u Sin[v], a v}
```

```
Out[7]= {u Cos[v], u Sin[v], a v}
```

```
In[8]:= ru = D[r, u] // Simplify
```

```
Out[8]= {Cos[v], Sin[v], 0}
```

```
In[9]:= rv = D[r, v] // Simplify
```

```
Out[9]= {-u Sin[v], u Cos[v], a}
```

```
In[10]:= ru.ru // Simplify
```

```
Out[10]= 1
```

```
In[11]:= ru.rv // Simplify
```

```
Out[11]= 0
```

```
In[12]:= rv.rv // Simplify
```

```
Out[12]= a2 + u2
```

FIGURA 4. Elicoidul: calcul realizat cu Mathematica

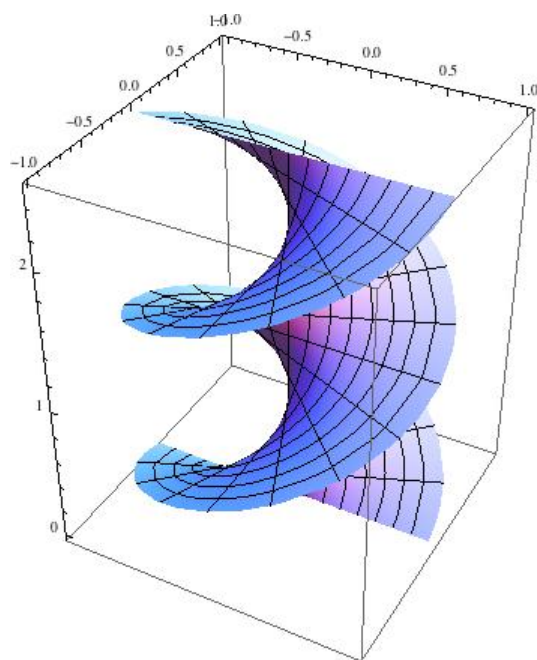


FIGURA 5. Elicoidul

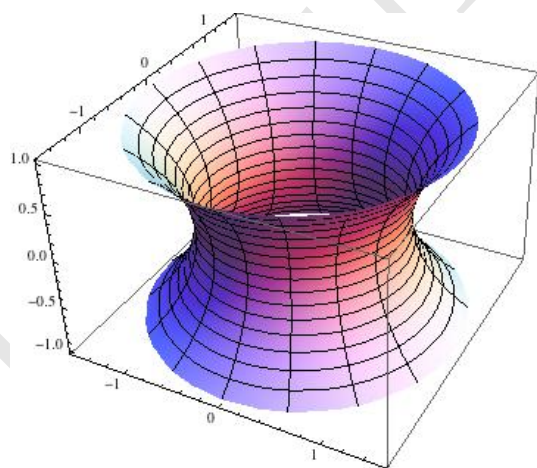


FIGURA 6. Catenoidul