

GEOMETRIE DIFERENȚIALĂ - SEMINAR

Exercițiul 30.03:01 Să se arate că imaginea prin aplicația lui Gauss a elipsoidului

$$\mathcal{E} : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

este întreaga sferă $\mathbb{S}^2(1)$. De exemplu, să se găsească un punct o_0 pe $\mathcal{E} : \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} + z^2 = 1$ astfel încât vectorul normalei unitare exterioare în p_0 la $\mathcal{E}$ să fie $n = (1, 1, \sqrt{3})$.

Soluție. Fie $n \in \mathbb{R}^3$ unitar. Trebuie să arătăm că există un punct p_0 pe elipsoidul $\mathcal{E}$ astfel încât vectorul normalei unitare exterioare în p_0 la $\mathcal{E}$ să fie n .

Dacă $p_0 = (x_0, y_0, z_0)$ atunci direcția normalei exterioare este dată de ∇F în p_0 .

Astfel, avem: $(\frac{x_0}{a^2}, \frac{y_0}{b^2}, \frac{z_0}{c^2}) = \lambda n$, $\lambda > 0$.

Fie $n = (n_1, n_2, n_3)$. Rezultă

$$(1) \quad \begin{cases} x_0 = a^2 \lambda n_1, \\ y_0 = b^2 \lambda n_2, \\ z_0 = c^2 \lambda n_3. \end{cases}$$

Însă cum $p_0 \in \mathcal{E}$, coordonatele (x_0, y_0, z_0) verifică ecuația elipsoidului. Deducem că

$$\lambda^2(a^2 n_1^2 + b^2 n_2^2 + c^2 n_3^2) = 1.$$

De aici avem

$$\lambda = \frac{1}{\sqrt{a^2 n_1^2 + b^2 n_2^2 + c^2 n_3^2}},$$

iar pentru a afla punctul p_0 înlocuim valoarea lui λ în relația (1).

În cazul particular dat, avem:

$$a^2 = 9, b^2 = 4, c^2 = 1, n_1 = 1, n_2 = 1, n_3 = \sqrt{3},$$

de unde rezultă $\lambda = \frac{1}{4}$ și, în consecință punctul $p_0 = (\frac{9}{4}, 1, \frac{\sqrt{3}}{4})$.

Exercițiul 30.03:02 Să se calculeze curbura gaussiană, curbura medie și curburile principale ale următoarelor suprafețe:

- suprafața lui Enneper: $r : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$, $r(u, v) = \left(u + uv^2 - \frac{u^3}{3}, v + vu^2 - \frac{v^3}{3}, u^2 - v^2\right)$;
- elicoidul: $r : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$, $r(u, v) = (u \cos v, u \sin v, av)$, $a \in \mathbb{R}$;
- catenoidul: $r : (0, 2\pi) \times (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}^3$, $r(u, v) = (\cosh v \cos u, \cosh v \sin u, v)$.

Soluție.

Suprafața lui Enneper

Calculăm:

$$\begin{aligned} r_u &= (1 - u^2 + v^2, 2uv, 2u), & r_v &= (2uv, 1 + u^2 - v^2, -2v) \\ r_{uu} &= (-2u, 2v, 2), & r_{vu} &= (2v, 2u, 0), & r_{vv} &= (2u, -2v, -2). \end{aligned}$$

Coeficienții primei forme fundamentale sunt:

$$\begin{aligned} E &= \langle r_u, r_u \rangle = (1 + u^2 + v^2)^2 \\ F &= \langle r_u, r_v \rangle = 0 \\ G &= \langle r_v, r_v \rangle = (1 + u^2 + v^2)^2. \end{aligned}$$

Avem așadar

$$\sqrt{EG - F^2} = \sqrt{((1 + u^2 + v^2)^2)^2} = (1 + u^2 + v^2)^2.$$

Coeficienții celei de a doua formă fundamentale sunt:

$$\begin{aligned} e &= \frac{(r_u, r_v, r_{uu})}{\sqrt{EG - F^2}} = \frac{1}{(1 + u^2 + v^2)^2} \cdot \begin{vmatrix} 1 - u^2 + v^2 & 2uv & 2u \\ 2uv & 1 + u^2 - v^2 & -2v \\ -2u & 2v & 2 \end{vmatrix} \\ &= \frac{-2(1 + u^2 + v^2)^2}{(1 + u^2 + v^2)^2} = 2 \\ f &= \frac{(r_u, r_v, r_{uv})}{\sqrt{EG - F^2}} = \frac{1}{(1 + u^2 + v^2)^2} \cdot \begin{vmatrix} 1 - u^2 + v^2 & 2uv & 2u \\ 2uv & 1 + u^2 - v^2 & -2v \\ 2v & 2u & 0 \end{vmatrix} = 0 \\ g &= \frac{(r_u, r_v, r_{vv})}{\sqrt{EG - F^2}} = \frac{(r_u, r_v, -r_{uu})}{\sqrt{EG - F^2}} = -e = -2 \end{aligned}$$

Rezultă astfel valorile pentru curbura gaussiană:

$$K(p) = \frac{eg - f^2}{EG - F^2} = \frac{-4}{(1 + u^2 + v^2)^4}$$

și pentru curbura medie:

$$H(p) = \frac{1}{2} \cdot \frac{eG - 2fF + gE}{EG - F^2} = 0.$$

Avem deci o suprafață minimală.

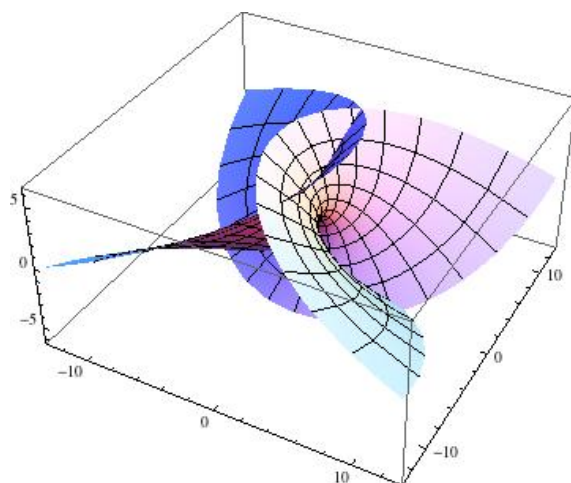


FIGURA 1. Suprafața lui Enneper

Să calculăm și curburile principale:

$$k_{1,2} = H \pm \sqrt{H^2 - K} \iff k_{1,2} = \pm \frac{2}{(1 + u^2 + v^2)^2}$$

Elicoidul

Calculăm: $r_u = (\cos v, \sin v, 0)$, $r_v = (-u \sin v, u \cos v, a)$.

Coeficienții primei forme fundamentale sunt:

$$E = \langle r_u, r_u \rangle = 1$$

$$F = \langle r_u, r_v \rangle = 0$$

$$G = \langle r_v, r_v \rangle = a^2 + u^2.$$

Vom calcula a doua formă fundamentală folosind aplicația lui Gauss. Calculăm normala la suprafață:

$$r_u \times r_v = (a \sin v, -a \cos v, u),$$

pentru care

$$|r_u \times r_v|^2 = a^2 + u^2.$$

Astfel, aplicația lui Gauss este:

$$n(p) = \frac{r_u \times r_v}{|r_u \times r_v|} = \frac{1}{\sqrt{a^2 + u^2}} (a \sin v, -a \cos v, u), \quad \text{unde } (u, v) = r^{-1}(p).$$

Rezultă că

$$\begin{aligned} n_u &= \frac{a}{(a^2 + u^2)^{\frac{3}{2}}} (-u \sin v, u \cos v, a) \\ n_v &= \frac{1}{\sqrt{a^2 + u^2}} (a \cos v, a \sin v, 0). \end{aligned}$$

Coeficienții celei de a doua formă fundamentală sunt:

$$\begin{aligned} e &= -\langle n_u, r_u \rangle = 0 \\ f &= -\langle n_v, r_u \rangle = -\langle n_u, r_v \rangle = -\frac{a}{\sqrt{a^2 + u^2}} \\ g &= -\langle n_v, r_v \rangle = 0. \end{aligned}$$

Deci avem matricea operatorului Weingarten:

$$\begin{aligned} S_p &= -\frac{1}{EG - F^2} \begin{pmatrix} -eG + fF & -fG + gF \\ eF - fE & fF - gE \end{pmatrix} \\ &= -\frac{1}{a^2 + u^2} \begin{pmatrix} 0 & \frac{a(a^2 + u^2)}{\sqrt{a^2 + u^2}} \\ \frac{a}{\sqrt{a^2 + u^2}} & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & -\frac{a}{\sqrt{a^2 + u^2}} \\ -\frac{a}{(a^2 + u^2)^{\frac{3}{2}}} & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Obținem astfel curbura gaussiană

$$K(p) = \det(S_p) = -\frac{a}{\sqrt{a^2 + u^2}} \cdot \frac{a}{(a^2 + u^2)^{\frac{3}{2}}} = -\frac{a^2}{(a^2 + u^2)^2}$$

și curbura medie

$$H(p) = \text{trace}(S_p) = 0$$

Deci elicoidul este suprafață minimală.

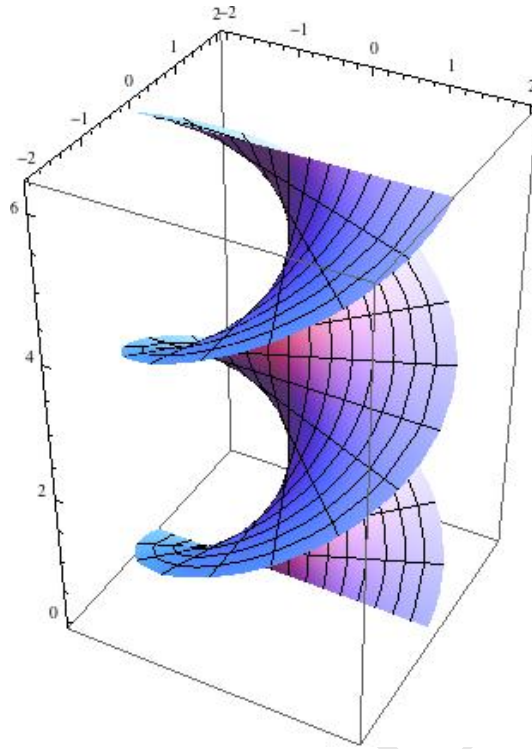


FIGURA 2. Elicoidul

Curburile principale sunt:

$$k_{1,2} = H \pm \sqrt{H^2 - K} \iff k_{1,2} = \pm \frac{a}{a^2 + u^2}$$

Catenoidul

Avem următoarele valori pentru coeficienții celor două forme fundamentale:

$$\begin{aligned} E &= \cosh^2 v, & F &= 0, & G &= \cosh^2 v, \\ e &= -1, & f &= 0, & g &= 1, \end{aligned}$$

de unde obținem

$$K = -\frac{1}{\cosh^4 v}$$

și

$$H = 0.$$

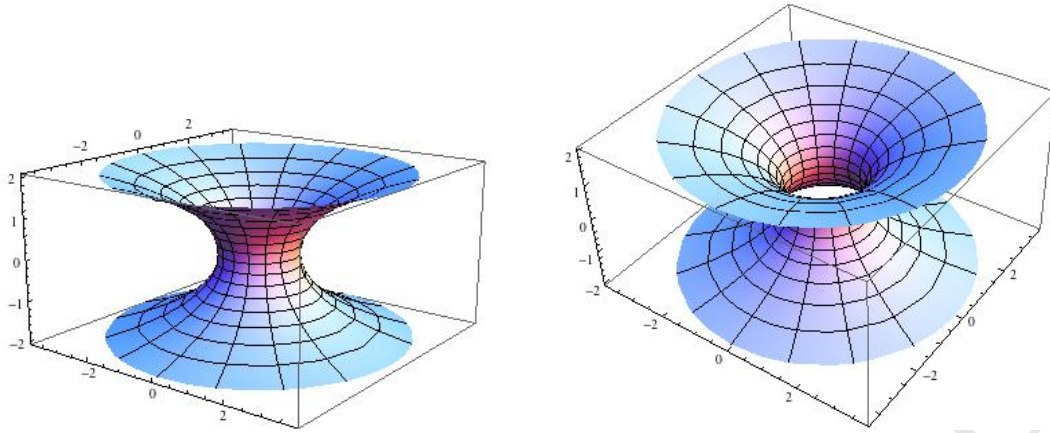


FIGURA 3. Catenoidul (vizualizări din unghiuri diferite)

Exercițiul 30.03:03 Fie curba (plană) parametrizată $\rho : I \rightarrow \mathbb{R}^3$, $\rho(t) = (0, y(t), z(t))$, cu $y(t) > 0$ și $y'(t)^2 + z'(t)^2 \neq 0$.

(a) Să se scrie ecuațiile suprafeței obținute prin rotația curbei în jurul axei Oz .

Fie $\rho(t) = (0, \sin t, \cos t + \log \tan \frac{t}{2})$, $t \in (\frac{\pi}{2}, \pi)$ (tractricea). Suprafața obținută se numește *pseudosferă*.

(b) Să se calculeze curbura medie și curbura gaussiană. Să se deducă faptul că *pseudosfera* are curbura gaussiană constantă negativă.

Soluție. (a) Ecuațiile parametrice ale suprafeței de rotație obținute sunt

$$r(u, t) = (y(t) \cos u, y(t) \sin u, z(t)).$$

(b) Pentru pseudosferă avem

coeficienții primei forme fundamentale

$$E = \cot^2 t, \quad F = 0, \quad G = \sin^2 t$$

și coeficienții celei de a doua forme fundamentale

$$e = \cot t, \quad f = 0, \quad g = -\sin t \cos t.$$

Deducem astfel valorile pentru curburi

$$H = -\cot 2t, \quad K = -1.$$

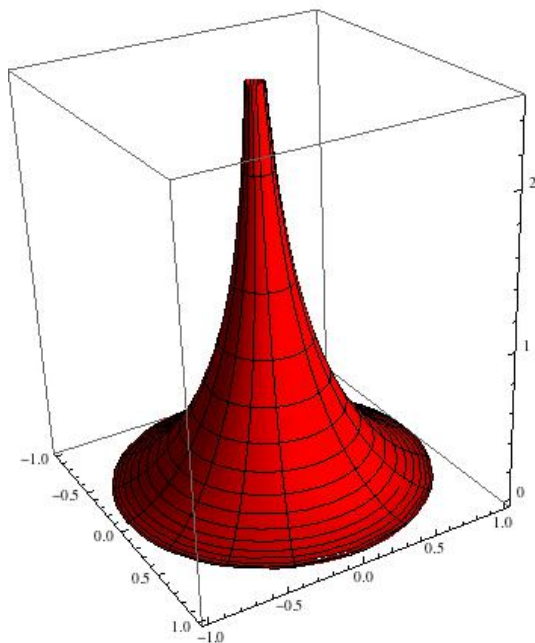


FIGURA 4. Pseudosfera

Exercițiul 30.03:04 Fie suprafața parametrizată

$$r(u, t) = \left(\sin t \cos u, \sin t \sin u, \cos t + \log \tan \frac{t}{2} + au \right), t \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi \right), a > 0.$$

Această suprafață se numește *suprafața lui Dini* și este o "răsucire torsionată" a pseudosferei.

Să se calculeze curbura gaussiană.

Soluție.

Avem coeficienții primei forme fundamentale

$$E = \cot^2 t, \quad F = a \cos t \cot t, \quad G = \sin^2 t + a^2$$

și coeficienții celei de a doua forme fundamentale

$$e = \frac{\cot t}{\sqrt{1 + a^2}}, \quad f = \frac{a}{\sqrt{1 + a^2}}, \quad g = -\frac{\sin t \cos t}{\sqrt{1 + a^2}}.$$

Deducem astfel valorile pentru curbură

$$H = -\frac{\cot 2t}{\sqrt{1 + a^2}}, \quad K = -\frac{1}{\sqrt{1 + a^2}}.$$

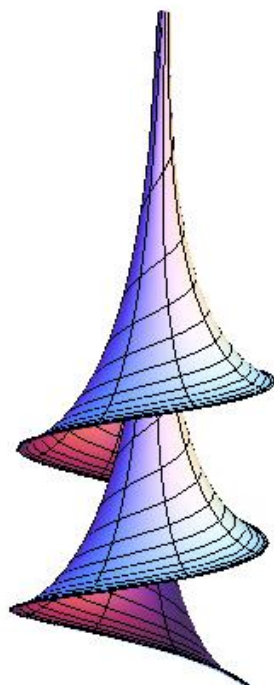


FIGURA 5. Suprafața lui Dini

Prin urmare suprafața lui Dini are curbura gaussiană constantă negativă.

Lucru individual:

Exercițiul 30.03:05 Fie $\rho : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ o curbă parametrizată natural, de curbură nenulă. Fie $\{\rho(t); T(t), N(t), B(t)\}$ reperul Frenet într-un punct arbitrar al curbei. Definim suprafața parametrizată

$$r : I \times (0, 2\pi) \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad r(t, u) = \rho(t) + R \cos u \, N(t) + R \sin u \, B(t), \quad R > 0.$$

(Suprafața de mai sus se numește *suprafață tubulară* în jurul lui ρ .)

Să se calculeze curbura medie și curbura gaussiană.

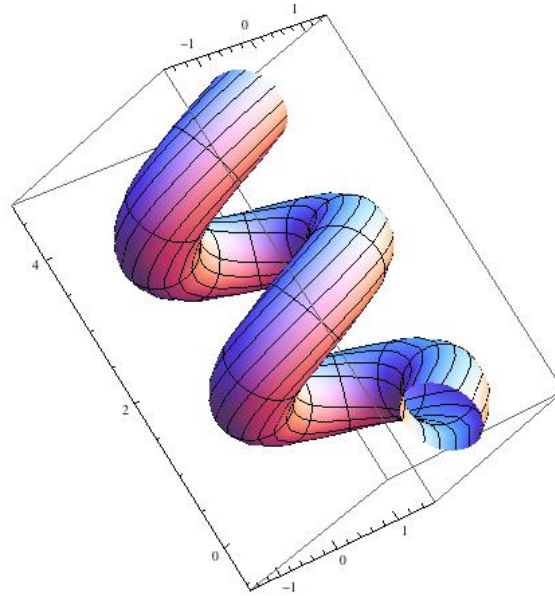


FIGURA 6. Suprafață tubulară