Seminar 1 - Geometrie Euclidiană
Georgeta Creţu

# 1 Recapitulare

Vom nota cu $X$ spaţiul geometric (intuitiv) conceput ca o mulţime de puncte. Noţiunile de punct, dreaptă, plan şi spaţiu le considerăm cunoscute cu sensul lor intuitiv din geometria elementară. Dreptele şi planele sunt submulţimi ale lui $X$.

**Definiţia 1.** Se numeşte **segment orientat** ca fiind orice pereche orientată de puncte din spaţiu.

Dacă $A, B$ sunt două puncte date în spaţiul $X$, atunci pentru segmentul orientat definit de perechea de puncte $(A, B)$ vom folosi notaţia $\overline{AB}$. Deci orice segment orientat este un element al produsului cartezian $X \times X$. Punctul $A$ se va numi originea segmentului orientat iar $B$ extremitatea sa. Dacă $A = B$ atunci $\overline{AA}$ este segmentul nul. Dacă $A \neq B$ atunci dreapta determinată de $A$ şi $B$ se numeşte dreapta suport a segmentului orientat $\overline{AB}$.

**Definiţia 2.** Două segmente orientate nenule au aceaşi direcţie dacă dreptele lor suport sunt paralele sau coincid.

**Definiţia 3.** Două segmente orientate nenule se numesc **coliniare** dacă au aceaşi direcţie. În caz contrar ele se numesc necoliniare.

**Definiţia 4.** Două segmente orientate nenule care au aceeaşi direcţie, spunem că au acelaşi sens dacă

$(i)$ sunt necoliniare şi extremităţile lor se află în acelaşi semiplan în raport cu dreapta determinată de originile lor

sau dacă

$(ii)$ sunt coliniare şi există un segment orientat necoliniar cu ele care are acelaşi sens cu amândouă.

**Definiţia 5.** Se numeşte **mărime (modul sau lungime) a unui segment orientat** $\overline{AB}$, distanţa dintre punctele $A$ şi $B$. Vom nota mărimea cu $||\overline{AB}||$.

**Definiţia 6.** Două segmente orientate $\overline{AB}$ şi $\overline{CD}$ au aceaşi mărime dacă $||\overline{AB}|| = ||\overline{CD}||$.

**Definiţia 7.** Două segmente orientate se numesc echipolente dacă au aceeaşi direcţie, acelaşi sens şi aceeaşi mărime; vom nota aceasta cu $\overline{AB} \sim \overline{CD}$.

**Definiţia 8.** Se numeşte vector liber o clasă de echivalenţă în raport cu relaţia de echipolenţă pe mulţimea segmentelor orientate din spaţiu.

Vom nota cu $\overrightarrow{AB} = \left\{\overline{CD} : \overline{CD} \sim \overline{AB}\right\}$, şi în general, vectorii liberi cu $\overline{u}$, $\overline{v}$. În general vectorul liber este gândit printr-un reprezentat al tău. Dacă aplicăm vectorul liber $\overline{u}$ într-un punct $A$ din spaţiu atunci vom obţine $\overline{u} = \overrightarrow{AB}$. Extremitatea $B$ este astfel unic determinată. Orice vector liber poate fi aplicat în orice punct din spaţiu. Mulţimea tuturor segmentelor nule orientate defineşte un vector ce va fi numit vectorul liber nul, notat cu $\overline{0}$. Avem deci $\overline{0} = \left\{\overline{AA} : A \in X\right\}$. Definim mărimea, direcţia şi sensul unui vector liber ca fiind mărimea, direcţia şi respectiv sensul unui reprezentant oarecare al lui. Vectorul liber de mărime egală cu unitatea se numeşte versor.

Vom nota cu $V_3$ mulţimea tuturor vectorilor liberi din spaţiu.

**Definiţia 9.** Suma a doi vectori liberi se obţine prin

- regula triunghiului: astfel fie $\overline{u}, \overline{v} \in V_3$ şi $A$ un punct din spaţiu. Aplic $\overline{u}$ în punctul $A$ şi vom obţine $\overrightarrow{AB}$; aplic $\overline{v}$ în punctul $B$ şi obţin $\overrightarrow{BC}$. Se va forma astfel triunghiul $ABC$. Prin definiţie $\overline{u} + \overline{v}$ este segmentul orientat care dă cea de a treia latură a triunghiului,
$$\overline{u} + \overline{v} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} := \overrightarrow{AC}$$
sau

- regula paralelogramului: astfel fie $\overline{u}, \overline{v} \in V_3$ şi $A$ un punct din spaţiu. Aplic $\overline{u}$ în punctul $A$ şi vom obţine $\overrightarrow{AB}$; aplic $\overline{v}$ în punctul $A$ şi obţin $\overrightarrow{AC}$. Pe segmentele orientate $\overrightarrow{AB}$ şi $\overrightarrow{AC}$ se poate forma paralelogramul $ABDC$. Prin definiţie $\overline{u} + \overline{v}$ este segmentul orientat care dă diagonala mare a paralelogramului,
$$\overline{u} + \overline{v} := \overrightarrow{AD}.$$

*Observaţia* 1. Regula de adunare a vectorilor este bine definită; astfel vectorul $\overline{u} + \overline{v}$ nu depinde de punctul de plecare $A$.

**Propoziţia 1.** *Au loc următoarele proprietăţi:*

*a)* $(\overline{u}+\overline{v})+\overline{w}=\overline{u}+(\overline{v}+\overline{w})\,,\ \forall \overline{u},\overline{v},\overline{w}\in V_3$.

*b) Există vectorul notat* $\overline{0}\in V_3$*, numit* ***vector nul****, astfel încât* $\overline{u}+\overline{0}=\overline{0}+\overline{u}=\overline{u},\ \forall\ \overline{u}\in V_3$.

*c) Pentru orice* $\overline{u}\in V_3$ *există vectorul* $-\overline{u}\in V_3$*, numit* ***opusul*** *lui* $\overline{u}$*, astfel încât* $\overline{u}+(-\overline{u})=(-\overline{u})+\overline{u}=\overline{0}$.

*d)* $\overline{u}+\overline{v}=\overline{v}+\overline{u},\ \forall \overline{u},\overline{v}\in V_3$.

*Observaţia* 2. Astfel $(V_3,+)$ devine grup comutativ.

**Definiţia 10** (înmulţirea cu scalari a vectorilor liberi)**.** Fie $\alpha\in\mathbb{R}$, $\overline{u}\in V_3$ atunci $\alpha\ \overline{u}$ este dat de:

*a)* dacă $\alpha=0$ sau $\overline{u}=\overline{0}$, atunci $\alpha\ \overline{u}=\overline{0}$,

*b)* dacă $\alpha\neq 0$ şi $\overline{u}\neq\overline{0}$, atunci $\alpha\ \overline{u}$ este vectorul liber care are aceeaşi direcţie cu $\overline{u}$, acelaşi sens cu $\overline{u}$ dacă $\alpha>0$, sens opus lui $\overline{u}$ dacă $\alpha<0$, şi mărimea dată de $\left|\left|\alpha\overline{u}\right|\right|=|\alpha|\ \left|\left|\overline{u}\right|\right|$.

**Propoziţia 2.** *Au loc următoarele proprietăţi:*

*a)* $\alpha\,(\overline{u}+\overline{v})=\alpha\overline{u}+\alpha\overline{v},\ \forall\ \alpha\in\mathbb{R},\ \forall\ \overline{u},\overline{v}\in V_3$.

*b)* $(\alpha+\beta)\,\overline{u}=\alpha\overline{u}+\beta\overline{u},\ \forall\ \alpha,\beta\in\mathbb{R},\ \forall\ \overline{u}\in V_3$.

*c)* $\alpha\,(\beta\overline{u})=(\alpha\beta)\,\overline{u},\ \forall\ \alpha,\beta\in\mathbb{R},\ \forall\ \overline{u}\in V_3$.

*d)* $1\ \overline{u}=\overline{u},\ \forall\ \overline{u}\in V_3$.

*Observaţia* 3. Din propoziţiile de mai sus deducem că spaţiul vectorilor liberi $V_3$ este un spaţiu vectorial real în raport cu adunarea vectorilor şi înmulţirea cu scalari a vectorilor.

**Definiţia 11.** Diferenţa a doi vectori liberi se obţine astfel: fie $\overline{u},\overline{v}\in V_3$ şi $A$ un punct din spaţiu. Aplic $\overline{u}$ în punctul $A$ şi vom obţine $\overrightarrow{AB}$; aplic $\overline{v}$ în acelaşi punct $A$ şi obţin $\overrightarrow{AC}$. Vom obţine atunci

$$\overline{u}-\overline{v}=\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CA}=\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CB}.$$

Prin definiţie avem că

$$\overline{u}-\overline{v}=\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}:=\overrightarrow{CB}.$$

## 1.1 Dependenţa şi independenţa liniară a vectorilor liberi

**Definiţia 12.** Doi vectori liberi se numesc **coliniari** dacă au aceaşi direcţie.

**Propoziţia 3.** *Doi vectori liberi sunt coliniari dacă şi numai dacă sunt liniari dependenţi.*

*Demonstraţie.* Necesitatea ("$\Rightarrow$").

Fie $\overline{u},\overline{v}$ cei doi vectori coliniari. Îi aplicăm în punctul $A$ şi obţinem $\overline{u}=\overrightarrow{AB}$, $\overline{v}=\overrightarrow{AC}$. Presupunem $\overline{u},\overline{v}\neq\overline{0}$ şi fie $\lambda=\pm\frac{||\overrightarrow{AC}||}{||\overrightarrow{AB}||}$, luat cu semnul plus sau minus în funcţie dacă $\overrightarrow{AB}$ şi $\overrightarrow{AC}$ au sau nu acelaşi sens. Vom obţine $\overline{v}=\lambda\overline{u}\Leftrightarrow\lambda\overline{u}-\overline{v}=\overline{0}$, ceea ce înseamnă că vectorii sunt liniar dependenţi.

Suficienţa ("$\Leftarrow$").

Presupunem că avem relaţia $\alpha\overline{u}+\beta\overline{v}=\overline{0}$, cu $\alpha,\beta\neq 0$. Presupunem $\beta\neq 0$ şi obţinem $\overline{v}=\frac{-\alpha}{\beta}\overline{u}$, adică $\overline{u},\overline{v}$ au aceaşi direcţie deci sunt coliniari. □

**Definiţia 13.** Un vector liber nenul este paralel cu un plan dacă dreapta suport a oricărui reprezentant al său este paralelă cu planul (sau este conţinut în plan). Trei vectori se numesc coplanari dacă sunt paraleli cu acelaşi plan.

**Propoziţia 4.** *Trei vectori liberi sunt coplanari dacă şi numai dacă sunt liniari dependenţi.*

*Demonstraţie.* Demonstrăm doar suficienţa ("$\Leftarrow$").

Presupunem că avem relaţia $\alpha\overline{u}+\beta\overline{v}+\gamma\overline{w}=\overline{0}$, cu $\alpha,\beta,\gamma$ nu toţi nuli. Presupunem $\gamma\neq 0$ şi obţinem $\overline{w}=\left(-\frac{\alpha}{\gamma}\right)\overline{u}+\left(-\frac{\beta}{\gamma}\right)\overline{v}$. Dar $\frac{\alpha}{\gamma}\overline{u}$ este coliniar cu $\overline{u}$, iar $\frac{\beta}{\gamma}\overline{v}$ este coliniar cu $\overline{v}$. Am obţinut deci că $\overline{w}$ este în acelaşi plan cu vectorii $\overline{u}$ şi $\overline{v}$. □

**Propoziţia 5.** *Oricare patru vectori liberi sunt liniar dependenţi.*

**Corolarul 1.** *a) Doi vectori liberi sunt liniari independenţi dacă şi numai dacă sunt necoliniari.*

*b) Trei vectori liberi sunt liniari independenţi dacă şi numai dacă sunt necoplanari.*

Prin urmare, oricare trei vectori liberi necoplanari sunt indepenţi şi constituie şi sistem de generatori pentru orice alt vector liber, deci

**Teorema 1.** *În spaţiul vectorial al vectorilor liberi $V_3$ oricare trei vectori liberi necoplanari formează o bază. Deci dimensiunea spaţiului $V_3$ este* 3.

**Propoziţia 6.** *Fie planul $\pi$ din spaţiul $X$ şi notăm prin $V_\pi$ mulţimea tuturor vectorilor din $V_3$ paraleli cu planul $\pi$. Atunci $V_\pi$ este un subspaţiu vectorial de dimensiune* 2.

**Propoziţia 7.** *Fie dreapta $d$ din spaţiul $X$ şi notăm prin $V_d$ mulţimea tuturor vectorilor din $V_3$ paraleli cu dreapta $d$ (adică dreapta suport a oricărui reprezentant al lui $\overline{u}$ este paralelă sau coincide cu $d$). Atunci $V_d$ este un subspaţiu vectorial de dimensiune* 1.

# 2 Produsul scalar a doi vectori liberi

**Definiţia 14.** Se numeşte **produsul scalar a doi vectori liberi** numărul real notat cu $\langle \overline{u}, \overline{v}\rangle$ sau $(\overline{u}, \overline{v})$ sau cu $\overline{u}\cdot\overline{v}$, şi dat de:

$$\langle \overline{u}, \overline{v}\rangle := \|\overline{u}\|\cdot\|\overline{v}\|\cdot\cos\widehat{(\overline{u}, \overline{v})}, \tag{1}$$

pentru $\overline{u}, \overline{v} \neq \overline{0}$, şi $\langle \overline{u}, \overline{v}\rangle = 0$, pentru $\overline{u} = \overline{0}$ sau $\overline{v} = \overline{0}$.

Are loc următoarea caracterizare a ortogonalităţii:

**Propoziţia 8.** ***Doi vectori sunt ortogonali (perpendiculari) dacă şi numai dacă produsul lor scalar este nul.***

*Demonstraţie.* Evident, $\langle \overline{u}, \overline{v}\rangle = 0$ dacă şi numai dacă $\|\overline{u}\| = 0$ sau $\|\overline{v}\| = 0$ sau $\cos\widehat{(\overline{u}, \overline{v})} = \cos\left(\pi/2\right) = 0$, ceea ce înseamnă că cei doi vectori sunt ortogonali. □

Luând $\overline{v} = \overline{u}$ obţinem $\langle \overline{u}, \overline{u}\rangle = \|\overline{u}\|\,\|\overline{u}\|\cos 0 = \|\overline{u}\|^2$. Deci are loc următoarea egalitate (legătura dintre normă şi produs scalar)

$$\|\overline{u}\|^2 = \overline{u}^2 \text{ sau } \|\overline{u}\| = \sqrt{\overline{u}^2}, \text{ unde } \overline{u}^2 := \langle \overline{u}, \overline{u}\rangle$$

(adică pătratul mărimii unui vector liber este egal cu pătratul scalar al vectorului).

**Propoziţia 9.** *Au loc următoarele proprietăţi:*

*a)* $\langle \overline{v}, \overline{u}\rangle = \langle \overline{u}, \overline{v}\rangle$, $\forall\ \overline{u}, \overline{v} \in V_3$.

*b)* $\langle \lambda\overline{u}, \overline{v}\rangle = \langle \overline{u}, \lambda\overline{v}\rangle = \lambda\langle \overline{u}, \overline{v}\rangle$, $\forall\ \overline{u}, \overline{v} \in V_3$.

*c)* $\langle \overline{u}, \overline{v}+\overline{w}\rangle = \langle \overline{u}, \overline{v}\rangle + \langle \overline{u}, \overline{w}\rangle$, $\forall\ \overline{u}, \overline{v}, \overline{w} \in V_3$.

*d)* $\langle \overline{u}+\overline{v}, \overline{w}\rangle = \langle \overline{u}, \overline{w}\rangle + \langle \overline{v}, \overline{w}\rangle$, $\forall\ \overline{u}, \overline{v}, \overline{w} \in V_3$.

*Observaţia* 4. Spaţiul vectorial al vectorilor liberi $V_3$ este spaţiu euclidian.

Fie $B = \{\overline{i}, \overline{j}, \overline{k}\}$ o **bază ortonormată** a lui $\mathbb{R}^3$, adică $B$ este bază, iar vectorii bazei sunt versori şi sunt ortogonali doi câte doi, i.e. verifică condiţiile

$$\begin{cases} ||\overline{i}|| = ||\overline{j}|| = ||\overline{k}|| = 1, \\ \overline{i}\perp\overline{j},\ \overline{i}\perp\overline{k},\ \overline{j}\perp\overline{k} \end{cases}$$

sau echivalent

$$|\overline{i}|^2 = |\overline{j}|^2 = |\overline{k}|^2 = 1 \quad \text{şi} \quad \langle \overline{i}, \overline{j}\rangle = \langle \overline{i}, \overline{k}\rangle = \langle \overline{j}, \overline{k}\rangle = 0.$$

Reamintim că existenţa bazelor ortonormate este asigurată de procedeul de ortonormalizare al lui Gram–Schmidt.

Dacă $\overline{u} = u_1\overline{i}+u_2\overline{j}+u_3\overline{k} \in V_3$ şi $\overline{v} = v_1\overline{i}+v_2\overline{j}+v_3\overline{k} \in V_3$, atunci are loc următoarea **expresie analitică a produsului scalar**

$$\langle \overline{u}, \overline{v}\rangle = u_1v_1 + u_2v_2 + u_3v_3. \tag{2}$$

În particular

$$\overline{u}^2 = \langle \overline{u}, \overline{u}\rangle = (u_1)^2 + (u_2)^2 + (u_3)^2,$$

adică

$$\|\overline{u}\| = \sqrt{(u_1)^2 + (u_2)^2 + (u_3)^2} \tag{3}$$

Din definiţia (1) deducem

$$\cos(\overline{u}, \overline{v}) = \frac{\langle \overline{u}, \overline{v}\rangle}{\|\overline{u}\|\cdot\|\overline{v}\|} = \frac{u_1v_1 + u_2v_2 + u_3v_3}{\sqrt{(u_1)^2 + (u_2)^2 + (u_3)^2}\cdot\sqrt{(v_1)^2 + (v_2)^2 + (v_3)^2}} \tag{4}$$

Formulele (2), (3) şi (4) reprezintă **expresiile analitice ale produsului scalar, ale normei şi respectiv ale cosinusului** unghiului dintre doi vectori liberi.

## 3 Produsul vectorial a doi vectori liberi

**Definiţia 15.** Fie $\overline{u}, \overline{v} \in V_3$. **Produsul vectorial a celor doi vectori** este notat cu $\overline{u} \times \overline{v}$ şi este dat de:

*a*) dacă $\overline{u}, \overline{v}$ sunt coliniari atunci $\overline{u} \times \overline{v} = \overline{0}$,

*b*) dacă $\overline{u}, \overline{v}$ sunt necoliniari atunci $\overline{u} \times \overline{v}$ este un nou vector liber astfel încât:

$b_1$) **direcţia lui este perpendiculară pe planul determinat de vectorii $\overline{u}$ şi $\overline{v}$,**

$b_2$) **sensul lui este dat de regula burghiului** (sau echivalent $\{\overline{u}, \overline{v}, \overline{u} \times \overline{v}\}$ formează o bază orientată pozitiv),

$b_3$) mărimea lui este aria paralelogramului format cu cei doi vectori.

**Propoziţia 10.** *Au loc următoarele proprietăţi:*

*a) Având în vedere că, din definiţie, produsul vectorial $\overline{u} \times \overline{v}$ este un vector ortogonal pe ambii vectori $\overline{u}$ şi pe $\overline{v}$ obţinem că*

$$\langle \overline{u}, \overline{u} \times \overline{v} \rangle = 0 = \langle \overline{v}, \overline{u} \times \overline{v} \rangle, \ \forall \overline{u}, \overline{v} \in V_3.$$

*b) Folosind formula ariei unui paralelogram deducem că*

$$\|\overline{u} \times \overline{v}\| = \|\overline{u}\| \cdot \|\overline{v}\| \cdot \sin(\widehat{\overline{u}, \overline{v}}), \ \forall \overline{u}, \overline{v} \in V_3.$$

*c) Are loc şi următoarea formulă de legătură dintre produsul vectorial şi produsul scalar, numit şi identitatea lui Lagrange:*

$$\begin{aligned} (\overline{u} \times \overline{v})^2 &= \|\overline{u} \times \overline{v}\|^2 = \|\overline{u}\|^2 \|\overline{v}\|^2 \sin^2(\overline{u}, \overline{v}) = \|\overline{u}\|^2 \|\overline{v}\|^2 \left(1 - \cos^2(\widehat{\overline{u}, \overline{v}})\right) \\ &= \|\overline{u}\|^2 \|\overline{v}\|^2 - \langle \overline{u}, \overline{v} \rangle^2, \ \forall \overline{u}, \overline{v} \in V_3. \end{aligned}$$

**Propoziţia 11.** ***Doi vectori sunt coliniari dacă şi numai dacă produsul lor vecorial este nul.***

*Demonstraţie.* Necesitatea ("$\Rightarrow$").

Fie $\overline{u}, \overline{v}$ cei doi vectori coliniari. Atunci

$$\|\overline{u} \times \overline{v}\| = \|\overline{u}\| \cdot \|\overline{v}\| \cdot \sin(\widehat{\overline{u}, \overline{v}}) = \|\overline{u}\| \cdot \|\overline{v}\| \cdot \sin(\alpha) = 0,$$

unde $\alpha = 0$ sau $\pi$.

Suficienţa ("$\Leftarrow$").

Presupunem că $\overline{u} \times \overline{v} = 0$. Conform definiţiei produsului vectorial avem că $\overline{u}$ sau $\overline{v}$ sunt coliniari sau $0 = \|\overline{u} \times \overline{v}\| = \|\overline{u}\| \|\overline{v}\| \sin(\widehat{\overline{u}, \overline{v}})$, ceea ce înseamnă că $\overline{u} = \overline{0}$ sau $\overline{v} = \overline{0}$ sau $(\widehat{\overline{u}, \overline{v}}) = 0$ sau $\pi$, deci vectorii daţi sunt coliniari. ☐

**Propoziţia 12.** *Au loc următoarele proprietăţi:*

*a) Produsul vectorial este anticomutativ, i.e.* $\overline{u} \times \overline{v} = -\overline{v} \times \overline{u}$, $\forall \ \overline{u}, \overline{v} \in V_3$.

*b)* $(\lambda \overline{u}) \times \overline{v} = \overline{u} \times (\lambda \overline{v}) = \lambda (\overline{u} \times \overline{v}), \ \forall \ \overline{u}, \overline{v} \in V_3$.

*c)* $\overline{u} \times (\overline{v} + \overline{w}) = \overline{u} \times \overline{v} + \overline{u} \times \overline{w}, \ \forall \ \overline{u}, \overline{v}, \overline{w} \in V_3$.

Fie $B = \{\overline{i}, \overline{j}, \overline{k}\}$ o bază ortonormată a lui $\mathbb{R}^3$. Evident, folosind definiţia produsului vectorial avem că

$$\overline{i} \times \overline{j} = \overline{k}, \quad \overline{j} \times \overline{k} = \overline{i} \quad \text{şi} \quad \overline{k} \times \overline{i} = \overline{j}.$$

Dacă $\overline{u} = u_1 \overline{i} + u_2 \overline{j} + u_3 \overline{k} \in V_3$ şi $\overline{v} = v_1 \overline{i} + v_2 \overline{j} + v_3 \overline{k} \in V_3$, atunci are loc următoarea **expresie analitică a produsului vectorial**

$$\overline{u} \times \overline{v} = \begin{vmatrix} \overline{i} & \overline{j} & \overline{k} \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix}. \tag{5}$$

**Propoziţia 13.** *Aria unui triunghi format de doi vectori liberi $\overline{u}$ şi $\overline{v}$ este jumătate din aria paralelogramului format cu cei doi vectori, adică*

$$\mathcal{A}_{\Delta} = \frac{1}{2} \|\overline{u} \times \overline{v}\|.$$

# 4 Produsul a trei vectori liberi

Prezentăm în continuare produsul mixt şi produsul dublu vectorial a trei vectori liberi, noţiuni care folosesc produsul scalar şi produsul vectorial a doi vectori liberi şi care prezintă un interes geometric.

**Definiţia 16.** Fie $\overline{u}, \overline{v}, \overline{w} \in V_3$. **Produsul mixt a celor trei vectori** este numărul real notat cu $\langle \overline{u}, \overline{v}, \overline{w} \rangle$ şi dat de:

$$(\overline{u}, \overline{v}, \overline{w}) := \langle \overline{u}, \overline{v} \times \overline{w} \rangle .$$

**Propoziţia 14.** ***Trei vectori sunt coplanari dacă şi numai dacă produsul lor mixt este nul.***

*Demonstraţie.* Avem

$$(\overline{u}, \overline{v}, \overline{w}) = 0 \Leftrightarrow \|\overline{u}\| \, \|\overline{v} \times \overline{w}\| \cos (\widehat{\overline{u}, \overline{v} \times \overline{w}}) = 0.$$

Dacă $\|\overline{u}\| = 0$ atunci $\overline{u} = \overline{0}$ care este evident coplanar cu $\overline{v}, \overline{w}$. Dacă $\|\overline{v} \times \overline{w}\| = 0$, atunci $\overline{v} \times \overline{w} = \overline{0}$ şi deci $\overline{v}, \overline{w}$ sunt coliniari. Deci $\overline{u}, \overline{v}, \overline{w}$ sunt coplanari. Dacă $\cos (\widehat{\overline{u}, \overline{v} \times \overline{w}}) = 0$, adică unghiul $(\widehat{\overline{u}, \overline{v} \times \overline{w}}) = \pi/2$, atunci $\overline{u}$ şi $\overline{v} \times \overline{w}$ sunt vectori ortogonali. Dar $\overline{v} \times \overline{w}$ este prin definiţie perpendicular pe $\overline{v}$ şi pe $\overline{w}$. deci $\overline{u}, \overline{v}, \overline{w}$ aparţin aceluiaşi plan, planul ortogonal pe $\overline{v} \times \overline{w}$. □

*Observaţia* 5. Trei vectori liberi formează o bază în spaţiul $V_3$ dacă şi numai dacă sunt necoplanari adică dacă şi numai dacă produsul lor mixt este nenul.

**Propoziţia 15.** *Valoarea absolută a produsului mixt a trei vectori liberi necoplanari reprezintă volumul paralelipipedului construit pe cu cei trei vectori ca muchii, adică*

$$\mathcal{V} = \left| (\overline{u}, \overline{v}, \overline{w}) \right| .$$

**Propoziţia 16.** *Au loc următoarele proprietăţi:*

*a) Permutările circulare nu afectează semnul produsului mixt, adică*

$$(\overline{u}, \overline{v}, \overline{w}) = (\overline{v}, \overline{w}, \overline{u}) = (\overline{w}, \overline{u}, \overline{v}) \, , \forall \, \overline{u}, \overline{v}, \overline{w} \in V_3.$$

*b)* $(\overline{u}, \overline{v}, \overline{w}) = -(\overline{v}, \overline{u}, \overline{w})$, $\forall \, \overline{u}, \overline{v}, \overline{w} \in V_3$.

Fie $B = \{\overline{i}, \overline{j}, \overline{k}\}$ o bază ortonormată a lui $\mathbb{R}^3$. Dacă $\overline{u} = u_1\overline{i} + u_2\overline{j} + u_3\overline{k} \in V_3$, $\overline{v} = v_1\overline{i} + v_2\overline{j} + v_3\overline{k} \in V_3$ şi $\overline{w} = w_1\overline{i} + w_2\overline{j} + w_3\overline{k} \in V_3$, atunci are loc următoarea **expresie analitică a produsului mixt**

$$(\overline{u}, \overline{v}, \overline{w}) = \begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix} . \tag{6}$$

Într-adevăr, $\overline{v} \times \overline{w} = \begin{vmatrix} \overline{i} & \overline{j} & \overline{k} \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix} \Rightarrow (\overline{u}, \overline{v}, \overline{w}) = (\overline{u}, \overline{v} \times \overline{w}) = u_1 (v_2w_3 - v_3w_2) + u_2 (v_3w_1 - v_1w_3) + u_3 (v_1w_2 - v_2w_1).$

Pe de altă parte, calculând determinantul obţinem (dezvoltăm după prima linie) $\begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix} = u_1 (v_2w_3 - v_3w_2) +$ $u_2 (v_3w_1 - v_1w_3) + u_3 (v_1w_2 - v_2w_1)$, adică are loc egalitatea (6).

Prezentăm, în final, produsul dublu vectorial a trei vectori liberi.

**Definiţia 17.** Fie $\overline{u}, \overline{v}, \overline{w} \in V_3$. Produsul dublu vectorial a celor trei vectori este vectorul $\overline{u} \times (\overline{v} \times \overline{w})$.

**Propoziţia 17.** *Are loc următoarea proprietate:*

$$\overline{u} \times (\overline{v} \times \overline{w}) = \langle \overline{u}, \overline{w} \rangle \, \overline{v} - \langle \overline{u}, \overline{v} \rangle \, \overline{w}.$$

*Observaţia* 6. Produsul dublu vectorial este un vector coplanar cu vectorii din paranteză, i.e. cu $\overline{v}$ şi $\overline{w}$. Într-adevăr, $\overline{u} \times (\overline{v} \times \overline{w})$ este, din definiţia prodului vectorial, un vector ortogonal pe $\overline{u}$ şi pe $\overline{v} \times \overline{w}$, iar $\overline{v} \times \overline{w}$ este, tot din definiţia prodului vectorial, un vector ortogonal pe $\overline{v}$ şi pe $\overline{w}$, deci vectorul $\overline{u} \times (\overline{v} \times \overline{w})$ este în acelaşi plan cu vectorii $\overline{v}$ şi $\overline{w}$. Evident are loc şi caracterizarea cu produsul mixt a coplanarităţii a trei vectori:

$$\left\langle \overline{u} \times (\overline{v} \times \overline{w}) \, , \overline{v}, \overline{w} \right\rangle := \left\langle \overline{u} \times (\overline{v} \times \overline{w}) \, , \overline{v} \times \overline{w} \right\rangle = 0.$$

*Observaţia* 7. Produsul dublu vectorial nu este asociativ. Într-adevăr, $\overline{u}\times(\overline{v}\times\overline{w})\neq(\overline{u}\times\overline{v})\times\overline{w}$, deoarece

$$\overline{u}\times(\overline{v}\times\overline{w})=\langle\overline{u},\overline{w}\rangle\,\overline{v}-\langle\overline{u},\overline{v}\rangle\,\overline{w}$$

iar, pe de altă parte,

$$(\overline{u}\times\overline{v})\times\overline{w}=-\overline{w}\times(\overline{u}\times\overline{v})=-\langle\overline{w},\overline{v}\rangle\,\overline{u}+\langle\overline{w},\overline{u}\rangle\,\overline{v}.$$

# 5 Exerciţii propuse spre rezolvare:

**Liniară dependenţă. Liniară independenţă**

*Exerciţiul* 1. Studiaţi dacă următorul sistem de vectori din spaţiul vectorial $\mathbb{R}^3$ este liniar dependent sau nu:

$$S=\left\{\overline{v}_1=(1,1,1)\,,\overline{v}_2=(1,-1,1)\,,\overline{v}_3=(-1,3,-1)\right\}.$$

*Exerciţiul* 2. Să se studieze dependenţa liniară a următorilor vectori:
$(a)$ $\overline{v}_1=(1,2,-1,1,-2)\,,\overline{v}_2=(1,3,2,-1,-1)\,,\overline{v}_3=(0,1,4,2,0)$, $\overline{v}_4=(2,4,-3,-2,-3)$ din $\mathbb{R}^5$;
$(b)$ $\overline{v}_1=(1,-1,2)\,,\overline{v}_2=(1,0,3)\,,\overline{v}_3=(2,1,1)$ din $\mathbb{R}^3$;

*Exerciţiul* 3. Să se stabilească dacă următorii vectori sunt liniar independenţi: $\overline{v}_1=(1,-1,0)$, $\overline{v}_2=(-1,2,1)$, $\overline{v}_3=(1,1,1)$

*Exerciţiul* 4. Studiaţi liniara dependenţă ( independenţă) a sistemelor de vectori.

1. $S_1=\{\overline{u}=(1,2,-4);\overline{v}=(0,1,1);\overline{w}=(1,4,-2)\}\subset\mathbb{R}^3$.
2. $S_2=\{\overline{u}=(2,1,3,1);\overline{v}=(1,2,0,1);\overline{w}=(-1,1,-3,0)\}\subset\mathbb{R}^4$.
3. $S_3=\{\overline{u}=(1,1,1);\overline{v}=(1,-1,1);\overline{w}=(-1,3,-1)\}\subset\mathbb{R}^3$.
4. $S_4=\{\overline{u}=(2,9,1,3,-1);\overline{v}=(1,1,0,-1,1);\overline{w}=(0,-2,1,5,-3);\overline{x}=(1,-3,2,9,-5)\}\subset\mathbb{R}^5$.
5. $S_5=\{\overline{u}=(2,1,-3);\overline{v}=(3,2,-5);\overline{w}=(1,-1,1)\}\subset\mathbb{R}^3$.

*Exerciţiul* 5. Să se arate că următorii vectori sunt liniar dependenţi şi să se afle relaţia de dependenţă: $\overline{v}_1=(0,1,1)$, $\overline{v}_2=(1,2,3)$, $\overline{v}_3=(2,-1,1)$ din $\mathbb{R}^3$.

*Exerciţiul* 6. Să se studieze dependenţa liniară a următorilor vectori: $\overline{v}_1=(1,-1,2)$, $\overline{v}_2=(-1,3,-2)$, $\overline{v}_3=(5,-11,10)$.

*Exerciţiul* 7. Să se studieze după valorile parametrului $m\in\mathbb{R}$ dependenţa liniară a sistemului de vectori:

$$\left\{\overline{v}_1=(1,2,3)\,,\ \overline{v}_2=(4,5,6)\,,\ \overline{v}_3=(7,8,m)\right\}.$$

*Exerciţiul* 8. Să se arate că următorii vectori sunt liniar dependenţi şi să se afle relaţia de dependenţă:
$(a)$ $\overline{v}_1=(1,1,1)\,,\overline{v}_2=(1,-1,1)\,,\overline{v}_3=(-1,3,-1)$ din $\mathbb{R}^3$;
$(b)$ $\overline{v}_1=(1,2,5)\,,\overline{v}_2=(5,3,1)\,,\overline{v}_3=(-15,-2,21)$ din $\mathbb{R}^3$;

*Exerciţiul* 9. Să se afle numărul maxim de vectori liniar independenţi din sistemul $S=\{\overline{v}_1,\overline{v}_2,\overline{v}_3,\overline{v}_4\}$, unde $\overline{v}_1=(1,-1,1)$, $\overline{v}_2=(2,-1,3)$, $\overline{v}_3=(1,3,5)$, $\overline{v}_4=(3,1,7)$. Să se găsească, în plus, relaţia de dependenţă dintre primii trei vectori.

*Exerciţiul* 10. În $\mathbb{R}^4$ se consideră vectorii $\overline{v}_1=(1,0,2,-1)$, $\overline{v}_2=(3,1,-1,0)$ şi $\overline{v}_3=(2,-2,3,1)$. Să se precizeze care este subspaţiul vectorial generat de $\overline{v}_1$, $\overline{v}_2$ şi $\overline{v}_3$.

*Exerciţiul* 11. Să se determine $\lambda$ astfel încât vectorii $\overline{v}_1=(1,\lambda,0)$, $\overline{v}_2=(\lambda,1,1)$, $\overline{v}_3=(1,0,\lambda)$ din $\mathbb{R}^3$ să formeze o bază în $\mathbb{R}^3$.

*Exerciţiul* 12. Se dau vectorii $\overline{a}=\overline{e}_1+\overline{e}_2$, $\overline{b}=2\overline{e}_1-\overline{e}_2+\overline{e}_3$ şi $\overline{c}=\overline{e}_2-\overline{e}_3$ dintr-un spaţiu vectorial cu baza $\{\overline{e}_1,\overline{e}_2,\overline{e}_3\}$. Să se arate că $\{\overline{a},\overline{b},\overline{c}\}$ formează o nouă bază şi să se afle coordonatele în această bază ale vectorului $\overline{d}=\overline{e}_1+8\overline{e}_2-5\overline{e}_3$.

**Operaţii cu vectori. Produse vectoriale**

*Exerciţiul* 13. 1. Fie $ABCD$ un paralelogram şi $M \in CD$. Calculaţi următoarele sume de vectori:

(a) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$

(b) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD}$

(c) $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{DM}$

(d) $\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{BM}$

(e) $\overrightarrow{CM} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$

(f) $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CM}$

2. Fie $ABCD$ un paralelogram de centru $O$. Calculaţi următoarele diferenţe de vectori.

(a) $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AO}$

(b) $\overrightarrow{DO} - \overrightarrow{CB}$

(c) $\overrightarrow{CO} - \overrightarrow{OB}$

(d) $(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AD}) - \overrightarrow{DO}$

(e) $(\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AO}) - \overrightarrow{OB}$

3. Fie $ABCD$ un paralelogram de centru $O$. Să se determine $x \in \mathbb{R}$ astfel încât:

(a) $\overrightarrow{AB} = x\overrightarrow{CD}$

(b) $\overrightarrow{AC} = x\overrightarrow{OA}$

(c) $\overrightarrow{OC} = x\overrightarrow{CA}$

(d) $\overrightarrow{DB} = x\overrightarrow{OB}$

*Exerciţiul* 14. Se dă tetraedrul $ABCD$. Să se afle sumele de vectori: $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{DC}$, $\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{DC}$, $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{DA}$.

*Exerciţiul* 15. Se dau punctele $A, B$ şi $C$ prin vectorii lor de poziţie $\overrightarrow{OA} = 14\bar{i} - 7\bar{j} + 2\bar{k}$, $\overrightarrow{OB} = 2\bar{i} + 2\bar{j} - 7\bar{k}$, $\overrightarrow{OC} = -2\bar{i} + 7\bar{j} + 2\bar{k}$. Să se arate că triunghiul $AOB$ este dreptunghic şi că triunghiul $BOC$ este isoscel.

Se cere deasemenea să se determine perimetrul triunghiului $ABC$, aria sa şi lungimea înălţimii din $A$, precum şi vectorul bisectoarei unghiului $BAC$.

**Teorema 2.** *Bisectoarea unui unghi al unui triunghi determină pe latura opusă segmente proporţionale cu lungimile laturilor ce formează unghiul.*

$$(AD \text{ bisectoare } \Leftrightarrow \frac{BD}{DC} = \frac{AB}{AC} \tag{7}$$

**Teorema 3.** *($AD$ este bisectoarea unghiului $\widehat{BAC}$ dacă şi numai dacă $\overrightarrow{AD} = \frac{b\overrightarrow{AB}+c\overrightarrow{AC}}{b+c}$, unde $b = |\overrightarrow{AC}|$, $c = |\overrightarrow{AB}|$.*

*Demonstraţie.* Observăm că punctul $D$ împarte segmentul $BC$ în raportul $\frac{BD}{DC} = k \in \mathbb{R}$. Obţinem de aici $\overrightarrow{BD} = k\overrightarrow{DC}$. Intercalând un $A$ în relaţia precedentă obţinem:

$$\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AD} = k(\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AC}) \Leftrightarrow \overrightarrow{AD}(1+k) = \overrightarrow{AB} + k\overrightarrow{AC} \Leftrightarrow \overrightarrow{AD} = \frac{1}{1+k}\overrightarrow{AB} + \frac{k}{1+k}\overrightarrow{AC}. \tag{8}$$

Înlocuind $k$ în (8) obţinem:

$$\overrightarrow{AD} = \frac{1}{1+\frac{BD}{DC}}\overrightarrow{AB} + \frac{\frac{BD}{DC}}{1+\frac{BD}{DC}}\overrightarrow{AC}. \tag{9}$$

Uilizând teorema bisectoarei în (9) obţinem:

$$\overrightarrow{AD} = \frac{1}{1+\frac{AB}{AC}}\overrightarrow{AB} + \frac{\frac{AB}{AC}}{1+\frac{AB}{AC}}\overrightarrow{AC} \Leftrightarrow \overrightarrow{AD} = \frac{AC}{AB+AC}\overrightarrow{AB} + \frac{AB}{AB+AC}\overrightarrow{AC}. \tag{10}$$

□

*Exercițiul* 16. Fie $\|\cdot\| : V \to [0,\infty)$ norma indusă de un produs scalar $\langle,\rangle : V \times V \to \mathbb{R}$ pe spaţiul liniar real $V$. Demonstraţi:

1. (inegalitatea Cauchy-Buniakowski-Schwartz - CBS) $|\langle\overline{u},\overline{v}\rangle| \leq \|\overline{u}\|\|\overline{v}\|,\ \forall\overline{u},\overline{v} \in V$. Egalitatea are loc dacă şi numai dacă $\overline{u},\overline{v}$ sunt liniar dependenţi (coliniari);
2. (inegalitatea Minkowski) $\|\overline{u}+\overline{v}\| \leq \|\overline{u}\| + \|\overline{v}\|,\ \forall\overline{u},\overline{v} \in V$. Egalitatea are loc dacă şi numai dacă $\exists\lambda \in [0,\infty)$ astfel încât $\overline{u} = \lambda\overline{v}$ sau $\overline{v} = \lambda\overline{u}$ ($\overline{u},\overline{v}$ sunt coliniari de acelaşi sens);
3. (egalitatea paralelogramului) $\|\overline{u}+\overline{v}\|^2 + \|\overline{u}-\overline{v}\|^2 = 2\left(\|\overline{u}\|^2 + \|\overline{v}\|^2\right)$;
4. (Pitagora) $\overline{u} \perp \overline{v} \Leftrightarrow \|\overline{u}+\overline{v}\|^2 = \|\overline{u}\|^2 + \|\overline{v}\|^2$;
5. Dacă $S = \{\overline{u}_1,\ldots,\overline{u}_k\}$ este un sistem ortogonal de vectori din $V$, atunci
$$\left\|\sum_{i=1}^{k}\overline{u}_i\right\|^2 = \sum_{i=1}^{k}\|\overline{u}_i\|^2;$$
6. $\overline{u} \perp \overline{v} \Leftrightarrow \|\overline{u}+\overline{v}\| = \|\overline{u}-\overline{v}\|$;
7. $\|\overline{u}\| = \|\overline{v}\| \Leftrightarrow (\overline{u}+\overline{v}) \perp (\overline{u}-\overline{v})$.

*Demonstraţie.* 1. **Demonstraţia inegalităţii:** Fie $\overline{u},\overline{v} \in V$. Dacă unul din vectori este nul, atunci relaţia de demonstrat are loc, fiind chiar egalitate.

Dacă ambii vectori sunt nenuli, fie $\lambda \in \mathbb{R}$ arbitrar. Se obţine:

$$\langle\overline{u}-\lambda\overline{v},\overline{u}-\lambda\overline{v}\rangle \geq 0, \forall\lambda \in \mathbb{R} \overset{(10)}{\Longrightarrow}$$

$$\langle\overline{u},\overline{u}-\lambda\overline{v}\rangle - \lambda\langle\overline{v},\overline{u}-\overline{v}\rangle \geq 0, \forall\lambda \in \mathbb{R} \overset{(9)}{\Longrightarrow}$$

$$\langle\overline{u},\overline{u}\rangle - \lambda\langle\overline{u},\overline{v}\rangle - \lambda\langle\overline{v},\overline{u}\rangle + \lambda^2\langle\overline{v},\overline{v}\rangle \geq 0, \forall\lambda \in \mathbb{R} \overset{(8)}{\Longrightarrow}$$
$$\langle\overline{u},\overline{u}\rangle - 2\lambda\langle\overline{u},\overline{v}\rangle + \lambda^2\langle\overline{v},\overline{v}\rangle \geq 0, \forall\lambda \in \mathbb{R} \Rightarrow$$
$$\|\overline{u}\|^2 - 2\lambda\langle\overline{u},\overline{v}\rangle + \lambda^2\|\overline{v}\|^2 \geq 0, \forall\lambda \in \mathbb{R}.$$

Privind ca o inegalitate ce conţiune un polinom de gradul al doilea în $\lambda$, obţinem că discriminatul este negativ, deci:
$$\langle\overline{u},\overline{v}\rangle^2 \leq \|\overline{u}\|^2\|\overline{v}\|^2 \Rightarrow$$
$$|\langle\overline{u},\overline{v}\rangle| \leq \|u\|\|\overline{v}\|,$$

ceea ce încheie demonstraţia inegalităţii.

**Cazul de egalitate:** "$\Leftarrow$" Fie $\overline{u},\overline{v} \in V$ coliniari. Rezultă că $\exists\lambda \in \mathbb{R}$ astfel încât $\overline{v} = \lambda\overline{u}$. Atunci $|\langle\overline{u},\overline{v}\rangle| = |\langle\overline{u},\lambda\overline{u}\rangle| = |\lambda|\cdot\|\overline{u}\|^2 = \|\overline{u}\|\|\overline{v}\|$.

"$\Rightarrow$" Fie acum $\overline{u},\overline{v} \in V$ astfel încât
$$|\langle\overline{u},\overline{v}\rangle| = \|\overline{u}\|\|\overline{v}\|. \tag{11}$$

Dacă unul din vectori este nul, celălalt este coliniar cu acesta, oricare ar fi el. Putem presupune aşadar că $\overline{u},\overline{v} \neq 0$. Fie
$$\lambda = (\operatorname{sgn}(\langle\overline{u},\overline{v}\rangle))\frac{\|\overline{u}\|}{\|\overline{v}\|} \tag{12}$$

Evident $\lambda \in \mathbb{R}$. Au loc următoarele egalităţi:

$$\langle\overline{u}-\lambda\overline{v},\overline{u}-\lambda\overline{v}\rangle = \langle\overline{u},\overline{u}\rangle - 2\lambda\langle\overline{u},\overline{v}\rangle + \lambda^2\langle\overline{v},\overline{v}\rangle = \|\overline{u}\|^2 - 2\lambda\langle\overline{u},\overline{v}\rangle + \lambda^2\|\overline{v}\|^2 = \|\overline{u}\|^2 - 2\frac{\|\overline{u}\|}{\|\overline{v}\|}|\langle\overline{u},\overline{v}\rangle| + \frac{\|\overline{u}\|^2}{\|\overline{v}\|^2}\|\overline{v}\|^2$$

$$\Leftrightarrow \|\overline{u}\|^2 - 2\frac{\|\overline{u}\|}{\|\overline{v}\|}\|\overline{u}\|\|\overline{v}\| + \frac{\|\overline{u}\|^2}{\|\overline{v}\|^2}\|\overline{v}\|^2 = 0.$$

Rezultă că $\overline{u} = \lambda\overline{v}$, i.e. vectorii sunt coliniari.

2. **Demonstraţia inegalităţii:** Fie $\overline{u}, \overline{v} \in V$. Din inegalitatea CBS, rezultă că:

$$\langle \overline{u}, \overline{v} \rangle \le \|\overline{u}\| \|\overline{v}\| \Leftrightarrow$$

$$\langle \overline{u}, \overline{v} \rangle \le \sqrt{\langle \overline{u}, \overline{u} \rangle} \sqrt{\langle \overline{v}, \overline{v} \rangle} \Leftrightarrow$$

$$2\langle \overline{u}, \overline{v} \rangle \le 2\sqrt{\langle \overline{u}, \overline{u} \rangle} \sqrt{\langle \overline{v}, \overline{v} \rangle} \stackrel{(8)}{\Longleftrightarrow}$$

$$\langle \overline{u}, \overline{v} \rangle + \langle \overline{v}, \overline{u} \rangle \le 2\sqrt{\langle \overline{u}, \overline{u} \rangle \langle \overline{v}, \overline{v} \rangle} \Leftrightarrow$$

$$\langle \overline{u}, \overline{u} \rangle + \langle \overline{u}, \overline{v} \rangle + \langle \overline{v}, \overline{u} \rangle + \langle \overline{v}, \overline{v} \rangle \le \langle \overline{u}, \overline{u} \rangle + 2\sqrt{\langle \overline{u}, \overline{u} \rangle \langle \overline{v}, \overline{v} \rangle} + \langle \overline{v}, \overline{v} \rangle \stackrel{(9),(10)}{\Longleftrightarrow}$$

$$\langle \overline{u} + \overline{v}, \overline{u} + \overline{v} \rangle \le (\sqrt{\langle \overline{u}, \overline{u} \rangle} + \sqrt{\langle \overline{v}, \overline{v} \rangle})^2 \Leftrightarrow$$

$$\|\overline{u} + \overline{v}\| \le \|\overline{u}\| + \|\overline{v}\|,$$

ceea ce încheie demonstraţia inegalităţii.

**Cazul de egalitate:** "$\Leftarrow$" Fie $\overline{u}, \overline{v} \in V$ coliniari de acelaşi sens. Atunci $\exists \lambda \ge 0$ astfel încât $\overline{v} = \lambda \overline{u}$. Au loc egalităţile:

$$\|\overline{u} + \overline{v}\| = \|(\lambda + 1)\overline{u}\| = (\lambda + 1)\|\overline{u}\| = \|\overline{u}\| + \lambda\|\overline{v}\| = \|\overline{u}\| + \|\lambda \overline{u}\| = \|\overline{u}\| + \|\overline{v}\|.$$

"$\Rightarrow$" Fie $\overline{u}, \overline{v} \in V$ astfel încât $\|\overline{u} + \overline{v}\| = \|\overline{u}\| + \|\overline{v}\|$. Din demonstraţia inegalităţii, obţinem că: $\langle \overline{u}, \overline{v} \rangle = \|\overline{u}\| \|\overline{v}\|$, deci $\begin{cases} |\langle \overline{u}, \overline{v} \rangle| = \|\overline{u}\| \|\overline{v}\| \\ |\langle \overline{u}, \overline{v} \rangle| = \langle \overline{u}, \overline{v} \rangle \end{cases} \stackrel{\text{CBS}}{\Longrightarrow} \begin{cases} \exists \lambda \in \mathbb{R} : \overline{v} = \lambda \overline{u} \\ |\langle \overline{u}, \overline{v} \rangle| = \langle \overline{u}, \overline{v} \rangle \end{cases} \Rightarrow \exists \lambda \ge 0 : \overline{v} = \lambda \overline{u}.$

□

*Exerciţiul* 17. Într-un plan afin euclidian se consideră punctele afin independente $A, B, C$. Fie $M$ mijlocul segmentului $[BC]$. Demonstraţi:

(a) (T. Cosinusului) $(d(B, C))^2 = (d(A, B))^2 + (d(A, C))^2 - 2d(A, B)d(A, C) \cos A$ ;

(b) (T. Medianei) $4(d(A, M))^2 = 2\left((d(A, B))^2 + (d(A, C))^2\right) - (d(B, C))^2$.

*Exerciţiul* 18. Într-un spaţiu afin euclidian 3-dimensional se consideră un paralelipiped oarecare şi $\overline{a}$, $\overline{b}$, $\overline{c}$ vectorii asociaţi muchiilor ce pleacă din acelaşi vârf. Calculaţi în funcţie de normele acestor vectori suma pătratelor lungimilor diagonalelor paralelipipedului.

*Exerciţiul* 19. Într-un spaţiu afin euclidian 3-dimensional se dă un cub $ABCDA'B'C'D'$ de muchie $a$, $M$ un punct pe segmentul $[AB']$ şi $N$ un punct pe segmentul $[BD]$ astfel încât $d(B', M) = d(B, N)$.

(a) Demonstraţi că dreapta afină $MN$ este paralelă cu una dintre feţele cubului.

(b) Calculaţi minimul distanţei dintre punctele $M$ şi $N$ şi unghiul neorientat dintre dreapta $MN$ şi dreapta $BD$, pentru poziţia punctelor $M, N$ când se realizează acest minim.

(c) Arătaţi că dreapta $MN$ nu poate fi perpendiculara comună dreptelor $AB'$ şi $BD$.

*Exerciţiul* 20. Fie $\mathcal{E} = (E, \overrightarrow{E}, \Phi)$ un spaţiu afin euclidian şi $G$ mijlocul segmentului $[A, B]$, $A, B \in E$ distincte. Demonstraţi că

$$\langle \overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB} \rangle = \|\overrightarrow{GM}\|^2 - \frac{1}{4}\|\overrightarrow{AB}\|^2, \forall M \in E. \tag{13}$$

Determinaţi apoi natura mulţimii $\{M \in E | \langle \overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB} \rangle = k\}$ în funcţie de constanta $k \in \mathbb{R}$.

*Exerciţiul* 21. Se consideră punctele $A(1, 0, 0)$, $B(1, 2, 3)$ şi $C(1, 1, 1)$.

1. Să se determine coordonatele vectorilor $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{BC}$.
2. Determinaţi coordonatele punctului $D$ astfel încât $ABCD$ să fie paralelogram.
3. Calculaţi: $\langle \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC} \rangle$, $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{BC}$, $\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{BC}\right)$.

*Exerciţiul* 22.
- Fie $B = \{\overline{i}, \overline{j}, \overline{k}\}$ o bază ortonormată în $V_3$.
  - Să se determine $\alpha \in \mathbb{R}$ astfel încât vectorii $\overline{a} = \alpha\overline{i} - 3\overline{j} + 2\overline{k}$ şi $\overline{b} = \overline{i} + 2\overline{j} - \alpha\overline{k}$ să fie ortogonali.

– Să se determine unghiul format de vectorii $\overline{a} = 2\overline{i} - 4\overline{j} + 4\overline{k}$ şi $\overline{b} = -3\overline{i} + 2\overline{j} + 6\overline{k}$.

– Să se determine vectorul $\overline{u} \in V_3$, ştiind că $|\overline{u}| = 14$, $\angle(\overline{u}, \overline{j}) > \frac{\pi}{2}$ şi că $\overline{u}$ este ortogonal pe vectorii $\overline{a} = 3\overline{i} + 2\overline{j} + 2\overline{k}$ şi $\overline{b} = 18\overline{i} - 22\overline{j} - 5\overline{k}$.

- Să se determine cosinusul unghiului format de vectorii $\overline{a}$ şi $\overline{b}$ ştiind că vectorul $\overline{a} + 3\overline{b}$ este perpendicular pe vectorul $7\overline{a} - 5\overline{b}$ iar vectorul $\overline{a} - 4\overline{b}$ este perpendicular pe vectorul $7\overline{a} - 2\overline{b}$.

- Să se arate că $\forall \overline{u}, \overline{v} \in V_3$ au loc relaţiile:

$$||\overline{u} + \overline{v}||^2 + ||\overline{u} - \overline{v}||^2 = 2(||\overline{u}||^2 + ||\overline{v}||^2);$$

$$||\overline{u} + \overline{v}||^2 - ||\overline{u} - \overline{v}||^2 = 4\langle \overline{u}, \overline{v} \rangle.$$

- Să se arate că oricare ar fi punctele $A, B, C, M \in \mathcal{E}_3$ are loc relaţia:

$$\langle \overrightarrow{AM}, \overrightarrow{BC} \rangle + \langle \overrightarrow{BM}, \overrightarrow{CA} \rangle + \langle \overrightarrow{CM}, \overrightarrow{AB} \rangle = 0 \tag{14}$$

- Utilizaţi relaţia (14) pentru a demonstra că înălţimile unui triunghi sunt concurente.

- Daţi trei vectori $\overline{a}, \overline{b}$ şi $\overline{c}$ astfel încât $\overline{a} + \overline{b} + \overline{c} = \overline{0}$, să se arate că:

$$|\overline{a}|^2 = |\overline{b}|^2 + |\overline{c}|^2 + 2\langle \overline{b}, \overline{c} \rangle.$$

*Exerciţiul* 23. Se dau doi vectori $\overline{u}$ şi $\overline{v}$ astfel încât $\|\overline{u}\| = 11$, $\|\overline{v}\| = 23$ şi $\|\overline{u} - \overline{v}\| = 30$. Să se determine $\|\overline{u} + \overline{v}\|$.

*Exerciţiul* 24. Să se calculeze produsul scalar $\langle 5\overline{u} + 3\overline{v}, 2\overline{u} - \overline{v} \rangle$, dacă se dau $\|\overline{u}\| = 2$, $\|\overline{v}\| = 3$ şi $\overline{u} \perp \overline{v}$ ($\overline{u}$ este ortogonal pe $\overline{v}$).

*Exerciţiul* 25. Să se calculeze $\langle \overline{u}, \overline{v} \rangle$, $(\overline{u} + \overline{v})^2$ şi $\langle 2\overline{u} - \overline{v}, 3\overline{u} + 4\overline{v} \rangle$, dacă se dau $\|\overline{u}\| = 2$, $\|\overline{v}\| = 5$ şi $\widehat{(\overline{u}, \overline{v})} = \pi/3$.

*Exerciţiul* 26. Să se determine parametrul $\lambda$ astfel încât vectorii $\overline{u} = \overline{i} + 2\lambda\overline{j} - (\lambda - 1)\overline{k}$ şi $\overline{v} = (3 - \lambda)\overline{i} + \overline{j} + 3\overline{k}$ să fie perpendiculari.

*Exerciţiul* 27. Să se calculeze produsul mixt $(\overline{u} - \overline{v}, \overline{v} - \overline{w}, \overline{w} - \overline{u})$.

*Exerciţiul* 28. Să se calculeze aria paralelogramului construit cu vectorii $\overline{u} = \overline{i} + 2\overline{j} - \overline{k}$ şi $\overline{v} = 2\overline{i} - \overline{j} + 3\overline{k}$.

*Exerciţiul* 29. Să se calculeze produsul vectorial $(\overline{u} + \overline{v}) \times (\overline{u} - \overline{v})$ şi să se dea o interpretare geometrică rezultatului obţinut.

*Exerciţiul* 30. Să se arate că dacă $\overline{u} \times \overline{v} = \overline{v} \times \overline{w} = \overline{w} \times \overline{u}$, atunci $\overline{u} + \overline{v} + \overline{w} = \overline{0}$.

*Exerciţiul* 31. Să se arate că vectorii $\overline{u} = \overline{i} + 2\overline{j} + 3\overline{k}$, $\overline{v} = 2\overline{i} + 3\overline{j} + 4\overline{k}$ şi $\overline{w} = 3\overline{i} + 4\overline{j} + 5\overline{k}$ sunt coplanari.

*Exerciţiul* 32. Să se calculeze mărimea înălţimii paralelipipedului construit pe vectorii $\overline{u} = 2\overline{i} + \overline{j} - \overline{k}$, $\overline{v} = 3\overline{i} + 2\overline{j} + 1\overline{k}$ şi $\overline{w} = -\overline{j} + 2\overline{k}$, considerându-se că baza paralelipipedului este formată cu primii doi vectori.

*Exerciţiul* 33. Se dau punctele $A = (3, 0, 0)$, $B = (2, 4, 0)$, $C = (-3, -1, 0)$ şi $D = (0, 0, 5)$. Să se afle punctele $M, N, P$ şi $Q$ care împart muchiile $AB, AC, DB$ şi respectiv $DC$ în acelaşi raport $k$. Să se arate şi că $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{PQ}$.

*Exerciţiul* 34. Arătaţi că trei vectori sunt coplanari dacă şi numai dacă produsul lor mixt este nul.

*Exerciţiul* 35. Demonstraţi reciproca teoremei lui Pitagora (dacă în triunghiul $ABC$ are loc relaţia $\overrightarrow{AB}^2 + \overrightarrow{AC}^2 = \overrightarrow{BC}^2$ atunci triunghiul este dreptunghic).

*Exerciţiul* 36. Demonstraţi că în orice spaţiu euclidian $\mathcal{E}$ au loc:

1. Dacă $\overline{x} \perp (\overline{y} + \overline{z})$ şi $\overline{y} \perp (\overline{z} - \overline{x})$ , atunci $\overline{z} \perp (\overline{x} + \overline{y})$.
2. $||\overline{x}|| = ||\overline{y}|| \Leftrightarrow (\overline{x} - \overline{y}) \perp (\overline{x} + \overline{y})$
3. Dacă $||\overline{x}|| = ||\overline{y}|| = 1$ şi $\langle \overline{x}, \overline{y} \rangle = 0$, atunci
$$||\alpha\overline{x} + (1 - \alpha)\overline{y}|| = 1.$$

*Exerciţiul* 37. Se dau vectorii $\overline{x} = \frac{1}{3}(2, 1, 2)$ şi $\overline{y} = \frac{1}{3}(1, 2, -2)$. Să se determine versorul $\overline{z} \in \mathcal{E}$ astfel încât $\overline{x} \perp \overline{z}$ şi $\overline{y} \perp \overline{z}$.

*Exercițiul* 38. Fie $B = \{e_1, e_2, e_3\}$ o bază în $\mathbb{R}^3$ şi $\langle,\rangle : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ o formă biliniară a cărei matrice în raport cu $B$ este

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 6 & 3 \\ 0 & 3 & 3 \end{pmatrix}.$$

(a) Verificaţi că $\langle,\rangle$ defineşte pe $\mathbb{R}^3$ o structură de spaţiu liniar euclidian.

(b) Fără a calcula lungimile vectorilor $\overline{w}_1 = \overline{e}_1+\overline{e}_2+\overline{e}_3$, $\overline{w}_2 = -2\overline{e}_1+\overline{e}_3$, $\overline{w}_3 = -\overline{e}_1+\overline{e}_2+2\overline{e}_3$, arătaţi că $\|\overline{w}_3\| < \|\overline{w}_1\|+\|\overline{w}_2\|$, unde $\|\cdot\|$ este norma indusă de produsul scalar $g$.

**Soluţie:**

(a) Trebuie să demonstrăm că $\langle,\rangle$ este o formă simetrică, pozitiv definită.

(b) Să observăm că $\overline{w}_3 = \overline{w}_1 + \overline{w}_2$. Inegalitatea de demonstrat devine $\|\overline{w}_1 + \overline{w}_2\| < \|\overline{w}_1\| + \|\overline{w}_2\|$.

*Exercițiul* 39. În raport cu produsul scalar canonic pe $\mathbb{R}^3$ ortonormaţi următoarele sisteme de vectori, folosind procedeul Gram-Schmidt:

(a) $\overline{v}_1 = (1, 2, 1)$, $\overline{v}_2 = (1, 0, 1)$, $\overline{v}_3 = (1, 0, 0)$;

(b) $\overline{v}_1 = (2, 1, 2)$, $\overline{v}_2 = (1, 1, -2)$, $\overline{v}_3 = (2, -2, 1)$;

(c) $\overline{v}_1 = (1, 2, 2)$, $\overline{v}_2 = (1, 1, -5)$, $\overline{v}_3 = (3, 2, 8)$.

(a) Să demonstrăm mai întâi că vectorii daţi formează o bază. . Să aplicăm acum procedeul Gram-Schmidt. Construim baza ortonormată $F = \{\overline{f}_1, \overline{f}_2, \overline{f}_3\}$. Aceştia sunt daţi de:

$$\begin{cases} \overline{f}_1 = \overline{v}_1 \\ \overline{f}_2 = \overline{v}_2 - \frac{\langle \overline{f}_1, \overline{v}_2\rangle}{\langle \overline{f}_1, \overline{f}_1\rangle}\overline{f}_1 \\ \overline{f}_3 = \overline{v}_3 - \frac{\langle \overline{f}_1, \overline{v}_3\rangle}{\langle \overline{f}_1, \overline{f}_1\rangle}\overline{f}_1 - \frac{\langle \overline{f}_2, \overline{v}_3\rangle}{\langle \overline{f}_2, \overline{f}_2\rangle}\overline{f}_2 \end{cases}.$$

Se ortonormează baza $F$ şi se obţine baza ortonormată $B' = \{\overline{e}'_i\}_{i=\overline{1,3}}$. Au loc formulele:

$$\begin{cases} \overline{e}'_1 = \frac{1}{\|\overline{f}_1\|}\overline{f}_1 \\ \overline{e}'_2 = \frac{1}{\|\overline{f}_2\|}\overline{f}_2 \\ \overline{e}'_3 = \frac{1}{\|\overline{f}_3\|}\overline{f}_3, \end{cases}$$

**Exemplu:** $\overline{v}_1 = (1, 1, 1)$, $\overline{v}_2 = (0, 1, 1)$, $\overline{v}_3 = (0, 0, 1)$;

1. Se construieşte $F = \{\overline{f}_1, \overline{f}_2, \overline{f}_3\}$ ortogonală:

$$\begin{cases} \overline{f}_1 = \overline{v}_1 = (1, 1, 1) \\ \overline{f}_2 = \overline{v}_2 - \frac{\langle \overline{f}_1, \overline{v}_2\rangle}{\langle \overline{f}_1, \overline{f}_1\rangle}\overline{f}_1 = (0, 1, 1) - \frac{2}{3}(1, 1, 1) = \left(-\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right) \\ \overline{f}_3 = \overline{v}_3 - \frac{\langle \overline{f}_1, \overline{v}_3\rangle}{\langle \overline{f}_1, \overline{f}_1\rangle}\overline{f}_1 - \frac{\langle \overline{f}_2, \overline{v}_3\rangle}{\langle \overline{f}_2, \overline{f}_2\rangle}\overline{f}_2 = (0, 0, 1) - \frac{1}{3}(1, 1, 1) - \frac{\frac{1}{3}}{\frac{2}{3}}\left(-\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right) = \left(0, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) \end{cases}.$$

2. Se ortonormează baza $F$ şi se obţine baza ortonormată $B' = \{\overline{e}'_i\}_{i=\overline{1,3}}$. Au loc formulele:

$$\begin{cases} \overline{e}'_1 = \frac{1}{\|\overline{f}_1\|}\overline{f}_1 = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right) \\ \overline{e}'_2 = \frac{1}{\|\overline{f}_2\|}\overline{f}_2 = \left(-\frac{2}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}\right) \\ \overline{e}'_3 = \frac{1}{\|\overline{f}_3\|}\overline{f}_3 = -\left(0, -\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right), \end{cases}$$

*Exercițiul* 40. De o parte şi de alta a unui râu (ale cărui maluri sunt reprezentate de două drepte paralele) se afla două localităţi $A$, $B$. Determinaţi poziţia în care trebuie să se construiască un pod perpendicular pe malurile râului, astfel încât distanţa parcursă de un om care pleacă din $A$ şi ajunge în $B$ să fie minimă.