

Seminarul 10
Sfera și cercul - continuare

Exercițiul 1. Să se determine condiția în care ecuația

$$x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$$

este ecuația unui cerc.

Soluție: Observăm că

$$x^2 + y^2 + ax + by + c = 0 \Leftrightarrow x^2 + 2\frac{a}{2}x + \frac{a^2}{4} + y^2 + 2\frac{b}{2}y + \frac{b^2}{4} = \frac{a^2 + b^2 - 4c}{4}$$

Prin urmare ecuația prezentată este ecuația unui cerc dacă și numai dacă $\frac{a^2 + b^2 - 4c}{4} > 0$.

Exercițiul 2. Să se scrie ecuația simetricului cercului $x^2 + y^2 - 4x - 8y + 19 = 0$ față de dreapta d): $x - y - 2 = 0$.

Soluție: Identificăm mai întâi centrul și raza cercului propus. Observăm că ecuația se poate rescrie astfel:

$$(x - 2)^2 + (y - 4)^2 = 1$$

Deci cercul cu care lucrăm are centrul $\Omega(2, 4)$ și raza $R = 1$. Este suficient să determinăm simetricul centrului față de dreapta d). Pentru determinarea simetricului centrului este necesar să aflăm mai întâi coordonatele proiecției punctului pe dreaptă. Fie $\Omega' = pr_d \Omega = d \cap d'$, $d' \perp d$, $\Omega \in d'$. Obținem:

$$d') : \frac{x - 2}{1} = \frac{y - 4}{-1} \rightarrow d') : x + y - 6 = 0.$$

Proiecția centrului este:

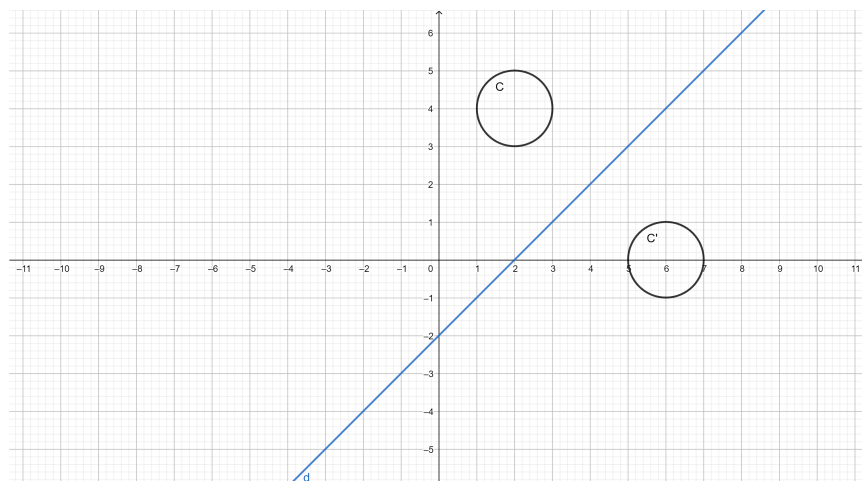
$$(1) \quad \Omega' = d \cap d' : \begin{cases} x - y - 2 = 0 \\ x + y - 6 = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = 4 \\ y = 2 \end{cases}$$

Considerăm Ω' mijlocul segmentului $[\Omega\Omega'']$ unde $\Omega'' = s_d \Omega$. Rezultă:

$$(2) \quad \begin{cases} x_{\Omega''} = 2x_{\Omega'} - x_{\Omega} = 6 \\ y_{\Omega''} = 2y_{\Omega'} - y_{\Omega} = 0 \end{cases}$$

Ecuația cercului simetric este:

$$C' : (x - 6)^2 + (y)^2 = 1.$$



Exercițiul 3. Să se scrie ecuația cercului care trece prin punctele $A(4, 3)$ și $B(0, 1)$ și are centrul pe dreapta $x + y + 1 = 0$.

Soluție: Deoarece centrul cercului se află pe dreapta d rezultă că există $t \in \mathbb{R}$ astfel încât $\Omega(t, -1 - t)$.

Valoarea parametrului se obține din informația că $d(\Omega, A) = d(\Omega, B)$.

Avem:

$$(3) \quad (4 - t)^2 + (4 + t)^2 = t^2 + (2 + t)^2 \rightarrow t^2 - 8t + 16 + t^2 + 8t + 16 = t^2 + t^2 + 4t + 4 \rightarrow 4t = 28 \rightarrow t = 7$$

Obținem $\Omega(7, -8)$. Raza cercului este:

$$R = d(\Omega, A) = d(\Omega, B) = \sqrt{130}.$$

Astfel ecuația cercului căutat este

$$C : (x - 7)^2 + (y + 8)^2 = 130.$$

Exercițiul 4. Să se determine ecuațiile cercurilor tangente simultan la dreptele $d_1) : x + y = 0$, $d_2) : x + y - 4 = 0$ și a axei Oy .

Soluție: Începem cu observația că dreptele d_1 și d_2 sunt două drepte paralele. Prin urmare centrele cercurilor pe care le căutăm se află pe dreapta "mediană" a celor două drepte. Este evident că pentru a scrie ecuația acestora avem nevoie de o direcție și un punct. Vectorul director va fi același cu cel al dreptelor d_1 și d_2). Pentru a determina punctul avem nevoie de ecuația unei drepte perpendiculare pe cele două care să treacă spre exemplu prin origine. Fie deci $\delta \perp d_1$, $\delta \perp d_2$, $O \in \delta$. Se obține

$$\delta : x - y = 0.$$

Să determinăm intersecția dintre dreapta δ și d_1 , d_2 . Punctul pe care îl căutăm va fi mijlocul segmentului determinat de cele două puncte de intersecție.

$$(4) \quad \begin{cases} d_1 \cap \delta \rightarrow O(0,0) \\ d_2 \cap \delta \rightarrow A(2,2) \end{cases}$$

Punctul căutat este $M(1,1)$. Scriem acum ecuația dreptei mediane:

$$m : \frac{x-1}{1} = \frac{y-1}{-1} \rightarrow x + y - 2 = 0.$$

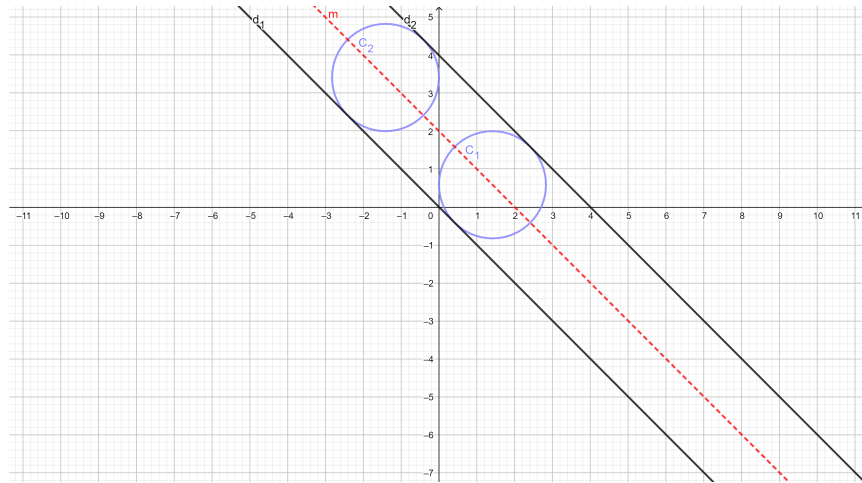
Deoarece $\Omega \in m \rightarrow \exists t \in \mathbb{R}$ astfel încât $\Omega(t, -t + 2)$. Diametrul cercului este egal cu $d(d_1, d_2) = 2\sqrt{2}$. Deci raza este $R = \sqrt{2}$. Vom determina valoarea parametrului utilizând faptul că cercul este tangent și axei Oy .

Să calculăm distanța menționată anterior:

$$(5) \quad d(\Omega, Oy) = \frac{|t|}{1} = \sqrt{2} \rightarrow \begin{cases} t = \sqrt{2} \\ t = -\sqrt{2} \end{cases}$$

Obținem cele două cercuri de ecuații generale:

$$\begin{cases} C_1 : (x - \sqrt{2})^2 + (y + \sqrt{2} - 2)^2 = 2 \\ C_2 : (x + \sqrt{2})^2 + (y - \sqrt{2} - 2)^2 = 2 \end{cases}$$



Exercițiul 5. Să se scrie ecuația unui plan care conține punctele $A(1,1,1)$, $B(2,0,0)$ și care intersectează sfera $x^2 + y^2 + (z+2)^2 = 8$ după un cerc de rază $r = 1$.

Soluție: Observăm că $\Omega(0,0,-2)$ este centrul sferei de rază $R = 2\sqrt{2}$. Să presupunem că sfera intersectează planul π după cercul de rază $r = 1$. Avem $r^2 = R^2 - d^2(\Omega, \pi) \rightarrow d^2(\Omega, \pi) = R^2 - r^2 = 4$. Deci $d(\Omega, \pi) = 2$. Ecuația generală a planului π este

$$\pi : ax + by + cz + d = 0.$$

Folosind apartenența celor două puncte la plan avem:

$$(6) \quad \begin{cases} a + b + c + d = 0 \\ 2a + d = 0 \end{cases}$$

Sistemul precedent este un sistem compatibil dublu nedeterminat. Avem:

$$(7) \quad \begin{cases} a = -\frac{d}{2} \\ b = -c - \frac{d}{2} \end{cases}$$

Ecuția planului devine:

$$(8) \quad \pi : -\frac{d}{2}x - \left(c + \frac{d}{2}\right)y + cz + d = 0$$

Vom utiliza faptul că $d(\Omega, \pi) = 2$. Deci:

$$(9) \quad d(\Omega, \pi) = \frac{\left| -\frac{d}{2} \cdot 0 - \left(c + \frac{d}{2}\right) \cdot 0 - 2c + d \right|}{\sqrt{\frac{d^2}{4} + c^2 + \frac{d^2}{4} + cd + c^2}} = \frac{|-2c + d|}{\sqrt{2c^2 + \frac{d^2}{2} + cd}}$$

Prin ridicare la pătrat obținem:

$$(10) \quad 4c^2 + d^2 - 4cd = 4 \left(2c^2 + \frac{d^2}{2} + cd \right) \rightarrow 4c^2 + 8cd + d^2 = 0$$

Privim ecuația precedentă ca pe o ecuație de gradul II în necunoscuta c .

$$(11) \quad \Delta = 64d^2 - 16d^2 = 48d^2$$

Obținem:

$$(12) \quad \begin{cases} c = \frac{-8d + 4\sqrt{3}d}{8} = \left(-1 + \frac{\sqrt{3}}{2}\right)d \\ c = \frac{-8d - 4\sqrt{3}d}{8} = \left(-1 - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)d \end{cases}$$

Deci:

$$(13) \quad \begin{cases} \pi_1 : -\frac{1}{2}x + \left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)y + \left(-1 + \frac{\sqrt{3}}{2}\right)z + 1 = 0 \\ \pi_2 : -\frac{1}{2}x + \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\right)y + \left(-1 - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)z + 1 = 0 \end{cases}$$

Exercițiul 6. Fie sfera $S) : x^2 + y^2 + (z - 1)^2 = 5$ și dreapta $d) : \frac{x}{1} = \frac{y - 1}{1} = \frac{z}{1}$.

(1) Să se determine intersecția sferei cu dreapta d .

Soluție:

$$(14) \quad S \cap d : \begin{cases} x^2 + y^2 + (z - 1)^2 = 5 \\ x = t \\ y = t + 1 \\ z = t \end{cases} \rightarrow t = \pm 1$$

Obținem cele două puncte de intersecție: $A(1, 2, 1)$, $B(-1, 0, -1)$.

(2) Să se scrie ecuația planelor tangente sferei în punctele de intersecție dintre dreapta și sferă.

Soluție: Deoarece punctele aparțin sferei rezultă că ecuația planelor tangente se obține prin dedublare.

$$(15) \quad \begin{cases} \pi_1 : x + 2y - 5 = 0 \\ \pi_2 : -x - 2z - 3 = 0 \end{cases}$$

(3) Să se determine ecuația unui plan π care conține dreapta d și determină pe sferă un cerc de rază $r = 2$.

Soluție: Ecuația generală a planului este $\pi : ax + by + cz + d = 0$. Pentru ca planul să conțină dreapta este suficient să impunem apartenența punctelor de intersecție dintre dreapta și plan.

$$(16) \quad \begin{cases} a + 2b + c + d = 0 \\ -a - c + d = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} a = -c + d \\ b = -d \end{cases}$$

Momentan ecuația planului este:

$$(17) \quad \pi : (-c + d)x - dy + cz + d = 0$$

Să utilizăm informația legată de raza acestuia. Avem $r^2 = R^2 - d^2(\Omega, \pi) \rightarrow d(\Omega, \pi) = 1$.

Altfel spus:

$$(18) \quad d(\Omega, \pi) = \frac{|c + d|}{\sqrt{2c^2 + 2d^2 - 2cd}} = 1$$

Prin ridicare la pătrat obținem:

$$(19) \quad c^2 + d^2 + 2cd = 2c^2 + 2d^2 - 2cd \rightarrow c^2 - 4cd + d^2 = 0$$

O privim ca fiind o ecuație de gradul II în necunoscuta c . Avem $\Delta = 16d^2 - 4d^2 = 12d^2$. Deci:

$$(20) \quad \begin{cases} c = \frac{4d + 2\sqrt{3}d}{2} = (2 + \sqrt{3})d \rightarrow \pi_1 : (-1 - \sqrt{3})x - y + (2 + \sqrt{3})z + 1 = 0 \\ c = \frac{4d - 2\sqrt{3}d}{2} = (2 - \sqrt{3})d \rightarrow \pi_2 : (-1 + \sqrt{3})x - y + (2 - \sqrt{3})z + 1 = 0 \end{cases}$$

(4) Să se determine valoarea minimă pe care o poate lua raza cercului de la punctul anterior?

Soluție: Vom aborda o metodă diferită de cea prezentată în seminarul precedent. Pentru aceasta vom relua calculul de la punctul precedent pentru o rază arbitrară. Fie deci

$$(21) \quad 5 - r^2 = \frac{c^2 + d^2 + 2cd}{2c^2 + 2d^2 - 2cd} \rightarrow (9 - 2r^2)c^2 + (2r^2 - 12)cd + (9 - 2r^2)d^2 = 0$$

Se obține

$$\Delta = \left((2r^2 - 12)^2 - 4(9 - 2r^2)^2 \right) d^2 = -12r^4 + 96r^2 - 180 \Big) d^2.$$

Pentru a avea o soluție este necesar și suficient ca $\Delta \geq 0 \rightarrow 3r^2 - 24r^2 + 45 \leq 0$. Obținem $r^2 \in [3, 5]$. Deci valoarea minimă este $r = \sqrt{3}$.

Exercițiul 7. Fiind date sfera $S) x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 4y - 6z = 0$ și punctul $A(1, 1, 1)$ să se determine:

(1) centrul și raza sferei S).

Soluție: Se observă că putem rescrie ecuația sferei astfel :

$$S) (x - 1)^2 + (y - 2)^2 + (z - 3)^2 = 14.$$

Deci centrul sferei este $\Omega(1, 2, 3)$ și raza este $R = \sqrt{14}$.

(2) raza și ecuațiile cercului de centru A care se află la intersecția dintre sferă cu un plan convenabil ales.

Soluție: Observăm că $\overrightarrow{A\Omega} = \bar{j} + 2\bar{k}$. Deci $\|\overrightarrow{A\Omega}\| = \sqrt{5} < R$. Prin urmare A este un punct interior sferei. Planul căutat are normala $\overrightarrow{A\Omega} = \bar{N}$. Deci ecuația planului este

$$(\pi) : y + 2z + d = 0.$$

Vom identifica valoarea lui d punând condiția ca $A \in \pi$. Se obține $d = -3$. Deci:

$$(22) \quad \mathcal{C} = S \cap \pi : \begin{cases} (x - 1)^2 + (y - 2)^2 + (z - 3)^2 = 14 \\ y + 2z - 3 = 0 \end{cases}$$

Raza cercului obținut prin intersectarea sferei cu planul π este $r = \sqrt{R^2 - \|\overrightarrow{A\Omega}\|^2} = 3$.

Exercițiul 8. Să se determine centrul și raza sferei $S) x^2 + y^2 + z^2 - 6x + 4y + z - \frac{3}{4} = 0$ și să se scrie ecuația planului tangent la sferă în punctul $M \left(1, 1, \frac{1}{2} \right)$. Să se verifice dacă planul $P) 3x - 2y - z + \frac{1}{2} = 0$ este tangent la sferă.

Soluție: $S)(x - 3)^2 + (y + 2)^2 + \left(z + \frac{1}{2} \right)^2 = 14$, deci $\Omega \left(3, -2, -\frac{1}{2} \right)$ și $R = \sqrt{14}$. Planul tangent la sferă în punctul M are ecuația

$$-2x + 3y + z - \frac{3}{2} = 0.$$

Se obține $d(\Omega, P) = \sqrt{14} = R$, deci planul P este tangent sferei.

Exercițiul 9. Fiind date sfera $S)x^2 + y^2 + z^2 + 2x - 4y - 6z - 2 = 0$, planul $P) x + 2y + 2z - 4 = 0$, dreapta $d) \frac{x+1}{1} = \frac{y-2}{0} = \frac{z+2}{2}$ și punctul $A(1, 1, 2)$ să se determine:

(1) centrul și raza sferei S) precum și raza și ecuațiile cercului de centru A care se află la intersecția dintre sferă cu un plan convenabil ales.

Soluție: Obținem $\Omega(-1, 2, 3)$ și $R = 4$. Vectorul $\overrightarrow{A\Omega} = (-2, 1, 1)$ reprezintă normala la planului cu care se realizează secțiunea. Deoarece A aparține planului obținem:

$$(23) \quad \mathcal{C} = S \cap \pi : \begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 + 2x - 4y - 6z - 2 = 0 \\ -2x + y + z - 1 = 0 \end{cases}$$

Raza cercului $r = \sqrt{10}$.

(2) ecuațiile planelor paralele cu planul P) și tangente sferei S);

Soluție: Se obțin planele de ecuație generală:

$$(24) \quad \pi_1 : x + 2y + 2z + 3 = 0, \quad \pi_2 : x + 2y + 2z - 21 = 0.$$

(3) ecuația sferei cu centrul în A și tangentă dreptei d).

Soluție: Avem centrul sferei pe care o căutăm. Mai avem de identificat raza acesteia. Vom folosi informația că sfera este tangentă dreptei d . Deci $r = d(A, d)$. Pentru aceasta considerăm $M_0(-1, 2, -2) \in d$. Atunci $d(A, d) =$

$$\frac{\|\vec{AM} \times \vec{d}\|}{\|\vec{d}\|} = 1. \text{ Deci}$$

$$(S_1) : (x-1)^2 + (y-1)^2 + (z-2)^2 = 1.$$

Exercițiul 10. Să se determine centrul și raza cercului de intersecție dintre sferele $S_1)x^2 + y^2 + z^2 - 6x + 2y - 2z + 7 = 0$ și $S_2)x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 4y + 2z - 3 = 0$.

Soluție: Centrul cercului căutat se află la intersecția dintre planului radical

$$P) : 4x - 6y + 4z - 10 = 0$$

și dreapta perpendiculară pe plan care trece prin centrul sferei S_2 . Deci:

$$(25) \quad \Omega = P \cap d : \begin{cases} 4x - 6y + 4z - 10 = 0 \\ x = 2t + 1, \\ y = -3t + 2, \\ z = 2t - 1 \end{cases}, t \in \mathbb{R}$$

Obținem $\Omega \left(\frac{39}{17}, \frac{1}{17}, \frac{5}{17} \right)$. Raza cercului este $r = \frac{\sqrt{32}}{17}$.

Exercițiul 11. Se cere ecuația sferei S) ce trece prin cercul $C)x^2 + y^2 - 11 = 0, z = 0$ și este tangentă planului $P)x + y + z - 5 = 0$.

Soluție: Deoarece sfera S) trece prin cercul C), centrul sferei va fi $C(0, 0, \alpha)$. Punem condiția $R^2 = d^2 + r^2$, unde R este raza sferei S), $r = \sqrt{11}$ este raza cercului C) iar $d = \text{dist}(C, C') = |\alpha|, C'(0, 0, 0)$ fiind centrul cercului C). Sfera este tangentă planului P), deci $R = \text{dist}(C, P) = \frac{|\alpha - 5|}{3}$. Rezultă că $\alpha^2 + 11 = \left(\frac{|\alpha - 5|}{3} \right)^2$. Se obțin soluțiile $\alpha_1 = -4, \alpha_2 = -1$ și deci sferele corespunzătoare sunt $x^2 + y^2 + (z + 4)^2 - 27 = 0$, respectiv $x^2 + y^2 + (z + 1)^2 - 12 = 0$.

Exercițiul 12. Să se determine ecuațiile cercului C) care are centrul $C(1, 6, 0)$ și se află la intersecția sferei $S)(x - 4)^2 + (y - 7)^2 + (z + 1)^2 - 36 = 0$ cu un plan convenabil ales. Care este raza acestui cerc?

Soluție: Deoarece distanța de la C la centrul sferei $C'(4, 7, -1)$ este $d = \sqrt{11}$, este mai mică decât raza sferei $R = 6$, punctul este interior sferei. Cercul C) aflându-se la intersecția sferei S) cu planul prin C perpendicular pe $\vec{CC'}$ = $(3, 1, -1)$ Acest cerc are ecuațiile

$$\begin{cases} (x-4)^2 + (y-7)^2 + (z+1)^2 - 36 = 0 \\ 3x + y - z - 9 = 0 \end{cases}.$$

Raza cercului este $r = \sqrt{R^2 - d^2} = 5$.

Exercițiul 13. Să se determine ecuația sferei S) ce trece prin origine și prin cercul $C) : \begin{cases} 2x + 2y - z + 4 = 0, \\ x^2 + y^2 + z^2 + 2x - 4y - 4z - 40 = 0. \end{cases}$

Soluție: Distanța de la centrul sferei la plan fiind mai mică decât raza sferei, familia de sfere ce trece prin cercul C) este dată de $S_\lambda) : \lambda(x^2 + y^2 + z^2 + 2x - 4y - 4z - 40) + 2x + 2y - z + 4 = 0$. Sfera căutată $x^2 + y^2 + z^2 + 22x + 16y - 6z = 0$ se obține pentru $\lambda = 1/10$, rezultat din cerința ca originea să aparțină lui S_λ).

Exercițiul 14. Determinați ecuația sferei S) tangentă dreptelor $d_1)x = y = z$ și $d_2)x + y = 5, z = 0$. În punctele $A(1, 1, 1)$, respectiv $B(3, 2, 0)$.

Soluție: Să analizăm ecuațiile dreptei d_2) pentru a obține vectorul său director:

$$(26) \quad \begin{cases} x = t \\ y = 5 - t \\ z = 0, t \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Centrul sferei se află pe dreapta de intersecție a planelor $P)x + y + z - 3 = 0$ (plan prin A perpendicular pe d_1) și $Q)x - y - 1 = 0$ (plan prin B perpendicular pe d_2). Dacă considerăm un punct curent de pe această dreaptă $C'(\lambda; \lambda - 1; 4\lambda - 2)$, din condiția $\text{dist}(C_\lambda, A) = \text{dist}(C_\lambda, B)$ obținem $\lambda = 2$ și deci sfera este $S)(x - 2)^2 + (y - 1)^2 + z^2 - 2 = 0$.

Exercițiul 15. Fiind date sfera $S)x^2 + (y - 2)^2 + z^2 - 6 = 0$, punctul $A(0, 2, 1)$ și dreapta $d)2x = y02 = 2z$ se cer:

(1) ecuația sferei de centru A și tangentă sferei S);

Soluție: Centrul sferei S este $C(0, 2, 0)$, raza $R = \sqrt{6}$, iar $\text{dist}(A, C) = 1$. Evident există două sfere cu proprietatea cerută, de raze $\sqrt{6} \pm 1$. Ecuațiile lor sunt $x^2 + (y - 2)^2 + (z - 1)^2 - 7 \pm 2\sqrt{6} = 0$.

(2) ecuațiile sferelor tangente sferei S), având raza egală cu unitatea și centrele pe dreapta d).

Soluție: Dreapta d ce trece prin centrul sferei S o intersectează pe aceasta în punctele $B_1(1, 4, 1)$ și $B_2(-1, 0, -1)$. Un punct generic al dreptei d fiind $D_\lambda(\lambda, 2\lambda + 2, \lambda)$, din condiția $\text{dist}(B_1; D_\lambda) = 1$ obținem $D_1(1 + 1/\sqrt{6}, 4 + 2\sqrt{6}, 1 + 1/\sqrt{6})$ și $D_2(1 - 1/\sqrt{6}, 4 - 2\sqrt{6}, 1 - 1/\sqrt{6})$. Sferele corespunzătoare au ecuațiile

$$S_{1,2} : (x - 1 \pm 1/\sqrt{6})^2 + (y - 4 \pm 2\sqrt{6})^2 + (z - 1 \pm 1/\sqrt{6})^2 = 1.$$

Alte două sfere se obțin analog din condiția $\text{dist}(B_2; D_\lambda) = 1$.

Exercițiul 16. Arătați că planul tangent sferei $S)x^2 + y^2 + z^2 - R^2 = 0$ într-un punct arbitrar al acesteia determină pe axe de coordonate segmente având suma inverselor pătratelor lungimilor constantă.

Soluție: Planul tangent sferei S în punctul $M(\alpha, \beta, \gamma)$ al acesteia este $P)\alpha x + \beta y + \gamma z - R^2 = 0$. Intersectând acest plan cu axe de coordonate, obținem punctele $A(R^2/\alpha, 0, 0)$, $B(0, R^2/\beta, 0)$ și $C(0, 0, R^2/\gamma)$. Prin urmare:

$$\frac{1}{OA^2} + \frac{1}{OB^2} + \frac{1}{OC^2} = \frac{\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2}{R^4} = \frac{1}{R^2},$$

(punctul M aparținând sferei S)).

Exercițiul 17. Arătați că din punctul $A(1, 2, 0)$ nu se pot duce tangente la sfera $S)x^2 + y^2 + (z - 1)^2 - 9 = 0$ și justificați rezultatul.

Soluție: O dreaptă arbitrară care trece prin punctul A , adică

$$\frac{x - 1}{\lambda} = \frac{y - 2}{\nu} = \frac{z}{1}$$

va intersecta sfera într-un punct dublu numai dacă ecuația

$$(\lambda^2 + \nu^2 + 1)z^2 + 2(\lambda + 2\nu - 1)z - 3 = 0$$

admite soluții egale. Acest lucru nu este posibil deoarece

$$\Delta = 4(\lambda + 2\nu - 1) + 12(\lambda^2 + \nu^2 + 1)$$

este strict pozitiv. Punctul A este interior sferei, puterea lui față de aceasta fiind -3 .

Exercițiul 18. Fiind date punctele $A(1, 0, 2)$ și $B(3, 2, 0)$ să se determine sfera de diametru AB și planul tangent sferei în punctul A .

Soluție: Centrul este $C(2, 1, 1)$, raza $R = \sqrt{3}$, ecuația sferei este

$$(x - 2)^2 + (y - 1)^2 + (z - 1)^2 - 3 = 0,$$

iar planul tangent în A este $x + y - z + 1 = 0$.

Exercițiul 19. Se consideră sfera $S)x^2 + y^2 + z^2 + 2x - 4y + 4z = 0$ și dreapta $d)\frac{x - 1}{1} = \frac{y - 1}{1} = \frac{z}{-2}$. Se cere:

a) să se determine centrul și raza sferei S);

Soluție: Scriem ecuația sferei sub formă de pătrate

$$S)(x + 1)^2 + (y - 2)^2 + (z + 2)^2 - 9 = 0,$$

deci centrul sferei este $C(-1, 2, -2)$, iar raza $R = 3$.

b) să se afle punctele de intersecție ale sferei cu dreapta d) și apoi să se determine planele tangente sferei în punctele de intersecție găsite.

Soluție: Obținem punctele $A(2, 2, -2)$ și $B(1, 1, 0)$. Planul tangent sferei în punctul A este $P_1)(x + 1)(2 + 1) + (y - 2)(2 - 2) + (z + 2)(-2 + 2) - 9 = 0$, adică $3x - 6 = 0$, sau $x - 2 = 0$. În același mod se obține și planul tangent în punctul B , $P_2)2x - y + 2z - 1 = 0$.

Exercițiul 20. Fiind date punctele $A(3, -1, 2)$ și $B(-3, 7, 2)$ să se determine:

a) sfera de diametru AB și punctele de intersecție ale acesteia cu axa Oz ;

Soluție: $C(0, 3, 2)$, $R = \text{dist}(A, C) = 5$, sfera

$$x^2 + (y - 3)^2 + (z - 2)^2 - 25 = 0,$$

axa Oz are ecuațiile $x = 0, y = 0$ și punctele de intersecție sunt $D_1(0, 0, 6), D_2(0, 0, -2)$.

b) planele tangente sferei în punctele de intersecție obținute.

Soluție: Planul tangent în punctul $D_1 : -3y + 4z - 24 = 0$ și planul tangent în punctul $D_2 : 3y + 4z + 8 = 0$.

Exercițiul 21. Să se determine ecuația sferei ce trece prin punctele $A(1, 2, 3), B(3, -4, 5)$ și are centrul pe dreapta

$$d) : \begin{cases} x + y + z = 5 \\ 2x + 5y + 3z = 10 \end{cases}$$

Soluție: Să scriem mai întâi ecuațiile dreptei sub formă parametrică:

$$(27) \quad d) : \begin{cases} x = -\frac{2t}{3} + 5 \\ y = -\frac{t}{3} \\ z = t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}$$

Fie centrul $C \left(-\frac{2t}{3} + 5, -\frac{t}{3}, z = t \right)$ de pe dreapta d .

Vom identifica valoarea parametrului punând condiția ca $d(A, C) = d(B, C)$ Obținem:

$$(28) \quad \left(-\frac{2t}{3} + 5 - 1 \right)^2 + \left(-\frac{t}{3} - 2 \right)^2 + (t - 3)^2 = \left(-\frac{2t}{3} + 5 - 3 \right)^2 + \left(-\frac{t}{3} + 4 \right)^2 + (t - 5)^2$$

Relația precedentă se rescrie astfel:

$$(29) \quad \left(-\frac{2t}{3} + 4 \right)^2 + \left(-\frac{t}{3} - 2 \right)^2 + (t - 3)^2 = \left(-\frac{2t}{3} + 2 \right)^2 + \left(-\frac{t}{3} + 4 \right)^2 + (t - 5)^2$$

După efectuarea calculelor avem:

$$(30) \quad \frac{4t^2}{9} - \frac{16t}{3} + 16 + \frac{t^2}{9} + \frac{4t}{3} + 4 + t^2 - 6t + 9 = \frac{4t^2}{9} - \frac{8t}{3} + 4 + \frac{t^2}{9} - \frac{8t}{3} + 16 + t^2 - 10t + 25$$

Obține,:

$$(31) \quad -\frac{16t}{3} + 16 = 0 \rightarrow t = 3.$$

Deci centrul cercului are coordonatele $C(3, -1, 3)$. Raza va fi $R = d(A, C) = d(B, C) = \sqrt{4 + 9} = \sqrt{13}$.

Exercițiul 22. Determinați simetrica sferei $S) : x^2 + y^2 + (z - 1)^2 = 1$ față de planul xOy .

Soluție: Observăm că sfera are centrul $\Omega(0, 0, 1)$ și raza $R = 1$. Este suficient să determinăm simetricul centrului față de planul propus. Pentru aceasta amintim faptul că $xOy : z = 0$. Vom determina mai întâi proiecția punctului pe plan. Fie

$$(32) \quad \Omega' = pr_{xOy}\Omega = xOy \cap d, \quad d \perp xOy, \quad \Omega \in d.$$

Obținem:

$$(33) \quad d \cap xOy : \begin{cases} z = 0, \\ x = 0, \\ y = 0, \\ z = t - 1 \end{cases} \rightarrow t = 1$$

Deci

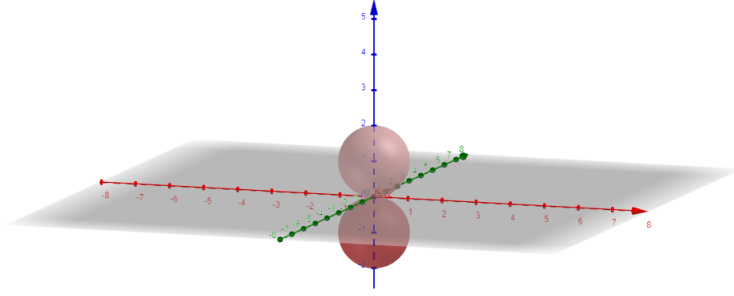
$$\Omega' = (0, 0, 0).$$

Considerăm Ω' mijlocul segmentului ce are drept extremități centrul sferei și simetricul acestuia Ω . Avem relațiile:

$$(34) \quad \begin{cases} x_{\Omega''} = 2x_{\Omega'} - x_{\Omega} = 0 \\ y_{\Omega''} = 2y_{\Omega'} - y_{\Omega} = 0 \\ z_{\Omega''} = 2z_{\Omega'} - z_{\Omega} = -1 \end{cases}$$

Deci sfera simetrică are ecuația

$$S' : x^2 + y^2 + (z + 1)^2 = 1.$$



Exercițiul 23. Să se determine imaginea sferei

$$x^2 + (y - 2)^2 + (z - 1)^2 = 4$$

prin simetria ortogonală față de dreapta $d : x = y = z$.

Soluție: Observăm că sfera are centrul $\Omega(0, 2, 1)$ și rază $r = 2$. Vom determina simetricul centrului față de dreapta d . Pentru aceasta vom determina mai întâi proiecția punctului pe dreaptă.

$$(35) \quad \Omega' = pr_d \Omega = d \cap \pi, \quad \pi \perp d, \quad \Omega \in \pi.$$

Deoarece $\pi \perp d \rightarrow \vec{N}_\pi = (1, 1, 1)$. Deci

$$\pi : x + y + z + d = 0.$$

Dar $\Omega \in \pi \rightarrow \pi : x + y + z - 3 = 0$. Determinăm acum proiecția menționată anterior:

$$(36) \quad d \cap \pi : \begin{cases} x + y + z - 3 = 0 \\ x = t \\ y = t \\ z = 3 \end{cases} \rightarrow t = 1$$

Obținem

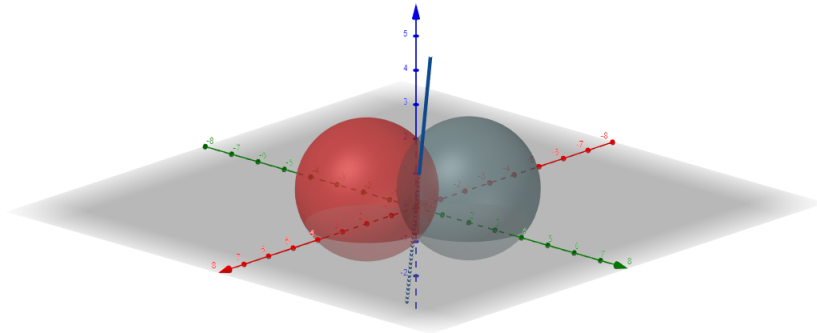
$$\Omega'(1, 1, 1).$$

Pentru determinarea simetricului vom considera Ω' mijlocul segmentului $[\Omega\Omega'']$, $\Omega'' = s_d \Omega$. Rezultă:

$$(37) \quad \begin{cases} x_{\Omega''} = 2x_{\Omega'} - x_{\Omega} = 2 \\ y_{\Omega''} = 2y_{\Omega'} - y_{\Omega} = 0 \\ z_{\Omega''} = 2z_{\Omega'} - z_{\Omega} = 1 \end{cases}$$

Imaginea sferei este:

$$S' : (x - 2)^2 + y^2 + (z - 1)^2 = 4.$$



Exercițiul 24. Să se studieze dacă există vreun punct de pe sfera $x^2 + y^2 + z^2 = 25$ în care normala la sferă să treacă prin punctul $A(1, 1, 1)$.

Soluție: Să considerăm $P_0(x_0, y_0, z_0)$ punctul de pe sferă. Normala în acest punct aceasta este:

$$\Omega P_0 : \frac{x}{x_0} = \frac{y}{y_0} = \frac{z}{z_0}.$$

Dorim ca

$$A \in \Omega P_0 \rightarrow \frac{1}{x_0} = \frac{1}{y_0} = \frac{1}{z_0} = t \rightarrow \begin{cases} x_0 = \frac{1}{t}, \\ y_0 = \frac{1}{t}, \\ z_0 = \frac{1}{t} \end{cases}$$

Să determinăm acum intersecția cu sfera:

$$(38) \quad \frac{3}{t^2} = 25 \rightarrow t^2 = \frac{3}{25} \rightarrow t = \pm \frac{\sqrt{3}}{5}$$

Obținem astfel cele două puncte de pe sferă în care are loc proprietatea din enunț:

$$(39) \quad \begin{cases} P_1 \left(\frac{5\sqrt{3}}{3}, \frac{5\sqrt{3}}{3}, \frac{5\sqrt{3}}{3} \right) \\ P_2 \left(-\frac{5\sqrt{3}}{3}, -\frac{5\sqrt{3}}{3}, -\frac{5\sqrt{3}}{3} \right) \end{cases}$$

Exercițiul 25. Se considera sfera $S : x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 4y - 6z - 6 = 0$, planul $(P)x + y + z + 3 = 0$, dreapta $(d)x = y = z - 1$ și punctul $M(1, 1, 1)$. Se cer:

- (1) centrul și raza sferei S ;
- (2) ecuațiile planelor paralele cu planul P și tangente sferei S ;
- (3) ecuația sferei cu centrul în M și tangentă dreptei (d) .

Soluție:

$$(1) S : (x - 1)^2 + (y - 2)^2 + (z - 3)^2 = 20 \rightarrow \Omega(1, 2, 3), R = \sqrt{20}.$$

$$(2) \text{ Avem: } \begin{cases} \pi_1 : x + y + z + 2\sqrt{15} - 6 = 0 \\ \pi_2 : x + y + z - 2\sqrt{15} - 6 = 0 \end{cases}.$$

(3) Avem nevoie de rază. Pentru aceasta

$$R' = d(M, d) = \frac{||\overrightarrow{MM_0} \times \overrightarrow{d}||}{||\overrightarrow{d}||}, \quad M_0(0, 0, 1) \in d, \overrightarrow{d} = (1, 1, 1), \overrightarrow{MM_0} = (-1, -1, 0)$$

Se observă:

$$(40) \quad \overrightarrow{MM_0} \times \overrightarrow{d} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = (-1, 1, 0)$$

Deci:

$$R' = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}.$$

Se obține:

$$S' : (x - 1)^2 + (y - 1)^2 + (z - 1)^2 = \frac{2}{3}.$$

Exercițiul 26. Să se scrie ecuația sferei cu centrul pe dreapta

$$d : \frac{x}{1} = \frac{y - 1}{-1} = \frac{z + 2}{1},$$

având raza $\sqrt{5}$ care trece prin punctul $A(0, 2, -1)$.

Soluție: Dacă Ω centrul sferei se află pe dreapta d rezultă că $\exists t \in \mathbb{R}$ astfel încât $\Omega(t, -t + 1, t - 2)$. Aflăm valoarea parametrului utilizând faptul că $d(\Omega, A) = \sqrt{5}$.

$$(41) \quad d(\Omega, A) = \sqrt{t^2 + (-t - 1)^2 + (t - 1)^2} = \sqrt{t^2 + t^2 + 2t + 1 + t^2 - 2t + 1} = \sqrt{3t^2 + 2}$$

Obținem:

$$(42) \quad 3t^2 + 2 = 5 \rightarrow \begin{cases} t_1 = 1 \\ t_2 = -1 \end{cases}$$

Prin urmare avem două sfere de centre: $\Omega_1(1, 0, -1), \Omega_2(-1, 2, -3)$.

Exercițiul 27. Să se găsească ecuația sferei care este tangentă în punctul $M(2, 3, 4)$ la planul $P : x + y + z - 9 = 0$ și care are centrul în planul $P_1 : 7x - 4y + 5z - 14 = 0$.

Soluție: Este evident că centrul aparține normalei la sferă în punctul M . Deci

$$\Omega(t+2, t+3, t+4), \quad t \in \mathbb{R}.$$

Dar $\Omega \in P_1 \rightarrow 7(t+2) - 4(t+3) + 5(t+4) - 14 = 0 \rightarrow t = -1$. Deci $\Omega(1, 2, 3)$. Raza sferei este $r = \sqrt{1+1+1} = \sqrt{3}$. Am obținut:

$$S : (x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-3)^2 = 3.$$

Exercițiul 28. Se considera sfera $S : x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 4y - 6z - 6 = 0$, planul $(P)x + y + z + 3 = 0$, dreapta $(d)x = y = z - 1$ și punctul $M(1, 1, 1)$. Se cer:

- (1) centrul și raza sferei S ;
- (2) ecuațiile planelor paralele cu planul P și tangente sferei S ;
- (3) ecuația sferei cu centrul în M și tangentă dreptei (d) .

Soluție:

$$(1) \quad S : (x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-3)^2 = 20 \rightarrow \Omega(1, 2, 3), \quad R = \sqrt{20}.$$

$$(2) \quad \text{Avem: } \begin{cases} \pi_1 : x + y + z + 2\sqrt{15} - 6 = 0 \\ \pi_2 : x + y + z - 2\sqrt{15} - 6 = 0 \end{cases}.$$

(3) Avem nevoie de rază. Pentru aceasta

$$R' = d(M, d) = \frac{||\overrightarrow{MM_0} \times \vec{d}||}{||\vec{d}||}, \quad M_0(0, 0, 1) \in d, \vec{d} = (1, 1, 1), \quad \overrightarrow{MM_0} = (-1, -1, 0)$$

Se observă:

$$(43) \quad \overrightarrow{MM_0} \times \vec{d} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = (-1, 1, 0)$$

Deci:

$$R' = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}.$$

Se obține:

$$S' : (x-1)^2 + (y-1)^2 + (z-1)^2 = \frac{2}{3}.$$

Exercițiul 29. Să se scrie ecuația sferei cu centrul pe dreapta

$$d : \frac{x}{1} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z+2}{1},$$

având raza $\sqrt{5}$ care trece prin punctul $A(0, 2, -1)$.

Soluție: Dacă Ω centrul sferei se află pe dreapta d rezultă că $\exists t \in \mathbb{R}$ astfel încât $\Omega(t, -t+1, t-2)$. Aflăm valoarea parametrului utilizând faptul că $d(\Omega, A) = \sqrt{5}$.

$$(44) \quad d(\Omega, A) = \sqrt{t^2 + (-t-1)^2 + (t-1)^2} = \sqrt{t^2 + t^2 + 2t + 1 + t^2 - 2t + 1} = \sqrt{3t^2 + 2}$$

Obținem:

$$(45) \quad 3t^2 + 2 = 5 \rightarrow \begin{cases} t_1 = 1 \\ t_2 = -1 \end{cases}$$

Prin urmare avem două sfere de centre: $\Omega_1(1, 0, -1)$, $\Omega_2(-1, 2, -3)$.

Exercițiul 30. Să se găsească ecuația sferei care este tangentă în punctul $M(2, 3, 4)$ la planul $P : x + y + z - 9 = 0$ și care are centrul în planul $P_1 : 7x - 4y + 5z - 14 = 0$.

Soluție: Este evident că centrul aparține normalei la sferă în punctul M . Deci

$$\Omega(t+2, t+3, t+4), \quad t \in \mathbb{R}.$$

Dar $\Omega \in P_1 \rightarrow 7(t+2) - 4(t+3) + 5(t+4) - 14 = 0 \rightarrow t = -1$. Deci $\Omega(1, 2, 3)$. Raza sferei este $r = \sqrt{1+1+1} = \sqrt{3}$. Am obținut:

$$S : (x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-3)^2 = 3.$$