

1 Elipsa

Cadrul de lucru este un plan afin euclidian orientat $\mathcal{E}^2 = \left(E, \left(\vec{E}, \langle, \rangle\right), \Phi\right)$.

Definiția 1. Se consideră două puncte distincte $F, F' \in E$ cu $d(F, F') = 2c > 0$ și un număr real $2a > 2c$. Se numește **elipsă** locul geometric al punctelor planului E pentru care suma distanțelor la punctele fixe F, F' este constantă și egală cu $2a$:

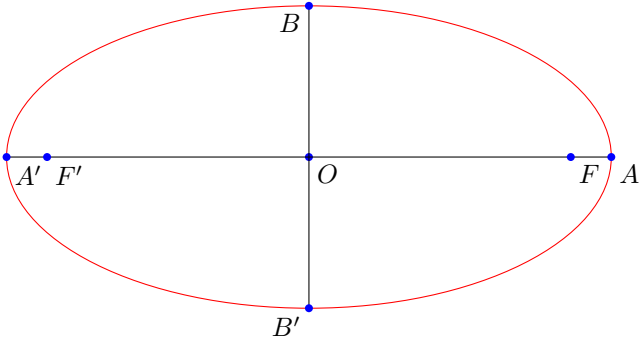
$$\mathcal{E} = \{P \in E \mid d(P, F) + d(P, F') = 2a\} \quad (1)$$

Punctele F, F' se numesc **focarele** elipsei, dreapta FF' **axa focală** și $2c$ **distanța focală**.

Pentru a ne convinge că locul geometric definit anterior este o mulțime nevidă, fie O mijlocul segmentului (FF') , fie $A, A' \in FF'$ astfel încât $d(O, A) = d(O, A') = a$ și $A' - F' - O - F - A$. Evident $A, A' \in \mathcal{E}$.

Putem să mai construim ușor alte două puncte ce aparțin elipsei: fie $\{B, B'\}$ intersecția dintre mediatoarea segmentului (FF') și cercul cu centrul în F , de rază a . Evident $B, B' \in \mathcal{E}$.

Aceste patru puncte A, A', B, B' se numesc **vârfurile elipsei**.



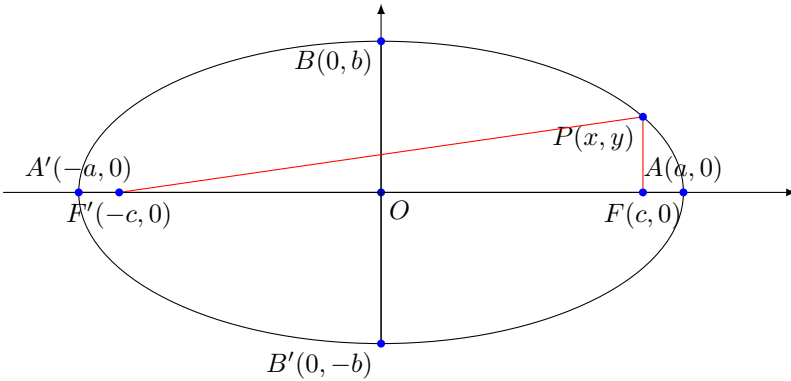
1.1 Ecuațiile elipsei

Pentru a putea determina ecuațiile elipsei vom fixa un reper ortonormat astfel: originea va fi punctul O , mijlocul segmentului (FF') , $\vec{i} = \frac{1}{\|F'F\|} \overrightarrow{F'F}$ și $\vec{j} \perp \vec{i}$, $\|\vec{j}\| = 1$ astfel încât $\{\vec{i}, \vec{j}\}$ e o bază pozitivă. Notăm cu Ox, Oy axele de coordonate.

În raport cu acest reper punctele construite până acum au coordonatele $F(c, 0)$, $F'(-c, 0)$, $A(a, 0)$, $A'(-a, 0)$, $B(0, b)$, $B'(0, -b)$, unde am notat

$$b = \sqrt{a^2 - c^2} \quad (2)$$

Numim **a** **semiaxa mare** a elipsei și **b** **semiaxa mică**.



1.1.1 Ecuația canonică

Fie $P(x, y)$ un punct al elipsei. Atunci

$$\sqrt{(x - c)^2 + y^2} + \sqrt{(x + c)^2 + y^2} = 2a.$$

Din calcule, obținem ecuația canonică a elipsei:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (3)$$

Reciproc, putem să arătăm că orice punct ale cărui coordonate verifică ecuația (3) aparține elipsei.

Din ecuația canonică a elipsei rezultă:

- dacă $Q(x, y) \in \mathcal{E} \Rightarrow Q_1(-x, y) \in \mathcal{E}$, deci Oy este **axă de simetrie** pentru elipsă;
- dacă $Q(x, y) \in \mathcal{E} \Rightarrow Q_2(x, -y) \in \mathcal{E}$, deci Ox este **axă de simetrie** pentru elipsă;
- dacă $Q(x, y) \in \mathcal{E} \Rightarrow Q_3(-x, -y) \in \mathcal{E}$, deci O este **centru de simetrie** pentru elipsă.

Definim interiorul elipsei

$$\text{Int } \mathcal{E} = \left\{ P(x, y) \mid \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 < 0 \right\}$$

și exteriorul elipsei

$$\text{Ext } \mathcal{E} = \left\{ P(x, y) \mid \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 > 0 \right\}.$$

1.1.2 Ecuațiile explicite

Din (3) deducem că $y^2 = b^2 \left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right)$. Observăm că pentru ca un punct $P(x, y)$ să aparțină elipsei de semiaxă mare a , este necesar ca $-a \leq x \leq a$. În aceste condiții, extrăgând radicalul în egalitatea de mai sus, obținem

$$|y| = \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x^2}.$$

Astfel, avem
$$\begin{cases} y = \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x^2}, & y \geq 0, \\ y = -\frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x^2}, & y < 0. \end{cases}$$

Am obținut ecuații explicite pentru cele două arce de elipsă, cel inclus în semiplanul superior și cel inclus în semiplanul inferior.

1.1.3 Ecuațiile parametrice

Se poate verifica că punctele de coordonate $(a \cos t, b \sin t)$, cu $t \in [0, 2\pi]$ verifică ecuația canonică a elipsei, deci ecuațiile parametrice ale elipsei sunt

$$\begin{cases} x = a \cos t, \\ y = b \sin t, t \in [0, 2\pi]. \end{cases}$$

1.2 Directoarele elipsei

Să revenim la ecuația elipsei pe care o rescriem

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} = \frac{c}{a} \left| x + \frac{a^2}{c} \right|, \quad -a \leq x \leq a \Leftrightarrow$$

$$d(P, F') = ed(P, \delta'),$$

unde $P(x, y)$ e un punct arbitrar al elipsei, $e = \frac{c}{a}$ și $\delta' : x = -\frac{a^2}{c}$.

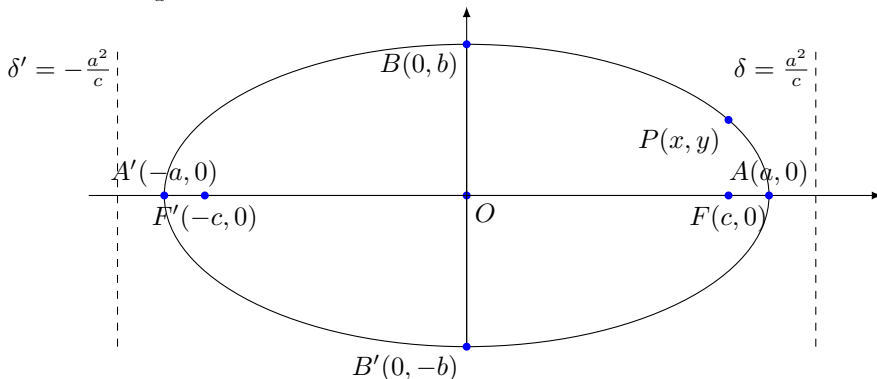
Orice punct P al elipsei are proprietatea că raportul dintre distanța de la P la punctul fix F' și distanța de la P la dreapta fixă δ' este constant și egal cu e .

Dacă atunci când am determinat ecuația canonică a elipsei am fi păstrat în membrul stâng al egalității celălalt radical, am fi obținut

$$a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} = \frac{c}{a} \left| x - \frac{a^2}{c} \right|,$$

adică $d(P, F) = ed(P, \delta)$, cu $\delta : x = \frac{a^2}{c}$.

Numim $e = \frac{c}{a} \in (0, 1)$ **excentricitatea** elipsei, iar dreptele δ, δ' **directoarele** elipsei.



Tipul ecuației	Axa focală	Vârfuri	Focare	Directoare	Grafic
$\begin{cases} \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \\ a > b \end{cases}$	Ox	$\begin{cases} A(a, 0), \\ A'(-a, 0), \\ B(0, b), \\ B'(0, -b) \end{cases}$	$\begin{cases} F(c, 0), \\ F'(-c, 0) \\ c^2 = a^2 - b^2 \end{cases}$	$\delta_{1,2} : x = \pm \frac{a^2}{c}$	
$\begin{cases} \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \\ a < b \end{cases}$	Oy	$\begin{cases} B(0, b), \\ B'(0, -b), \\ A(a, 0), \\ A'(-a, 0) \end{cases}$	$\begin{cases} F(0, c), \\ F'(0, -c), \\ c^2 = b^2 - a^2, \end{cases}$	$\delta_{1,2} : y = \pm \frac{b^2}{c}$	

1.3 Intersecția dintre o dreaptă și o elipsă

În continuare vom studia intersecția dintre elipsa $(\mathcal{E}) \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ și dreapta $(d) y = mx + n$. Pentru a găsi coordonatele eventualelor puncte comune rezolvăm sistemul format din cele două ecuații. Eliminând necunoscuta y , obținem ecuația

$$(a^2m^2 + b^2)x^2 + 2a^2mnx + a^2(n^2 - b^2) = 0. \quad (4)$$

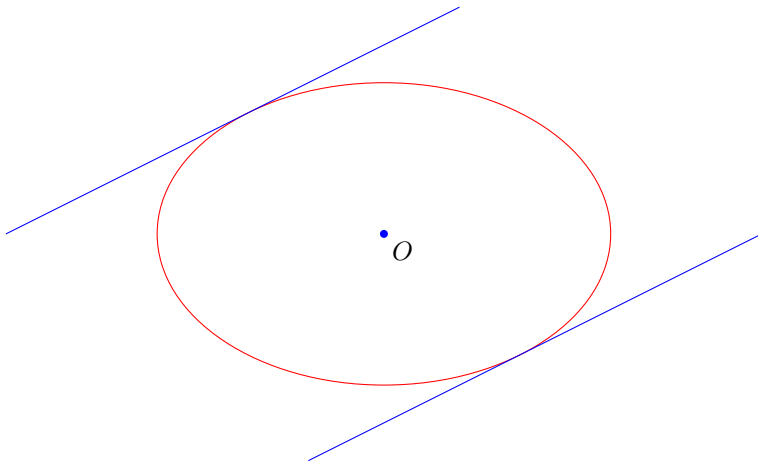
Fie Δ discriminantul ecuației de mai sus.

Dacă $\begin{cases} \Delta > 0, & d \cap \mathcal{E} = \{P_1, P_2\}. \text{ Spunem că dreapta } d \text{ este } \mathbf{secantă} \text{ elipsei.} \\ \Delta < 0, & d \cap \mathcal{E} = \emptyset. \text{ Spunem că dreapta } d \text{ este } \mathbf{exterioară} \text{ elipsei.} \\ \Delta = 0, & d \cap \mathcal{E} = \{T\} \text{ (punct dublu). În acest caz, dreapta } d \text{ este } \mathbf{tangentă} \text{ elipsei.} \end{cases}$

1.3.1 Ecuația magică a tangentelor de pantă dată la elipsă

Obținem $\Delta = 0 \Leftrightarrow n^2 = a^2m^2 + b^2 \Rightarrow |n| = \sqrt{a^2m^2 + b^2}$, deci există două tangente la elipsă de pantă m :

$$\begin{aligned} (d_1)y &= mx + \sqrt{a^2m^2 + b^2}, \\ (d_2)y &= mx - \sqrt{a^2m^2 + b^2}. \end{aligned} \quad (5)$$



1.3.2 Tangenta la elipsă într-un punct al ei

Dacă $P_0(x_0, y_0) \in \mathcal{E}$, ecuația tangentei la elipsa în punctul P_0 se obține din ecuația elipsei prin dedublare:

$$(d_0) \frac{xx_0}{a^2} + \frac{yy_0}{b^2} - 1 = 0. \quad (6)$$

Pentru a demonstra că dreapta de ecuație (6) este tangenta elipsei, rezolvăm sistemul format din ecuația elipsei și cea a dreptei d_0 . Folosind faptul că $\frac{x_0^2}{a^2} + \frac{y_0^2}{b^2} = 1$, rezultă că intersecția dintre dreaptă și elipsă este un punct dublu și anume P_0 .

1.3.3 Tangentele la elipsă ce trec printr-un punct exterior acesteia

Fie acum $P(x_0, y_0) \in \mathcal{Ext} \mathcal{E}$ și $(d) y - y_0 = m(x - x_0)$ o dreaptă arbitrară prin P_0 . Impunem ca d să fie tangentă elipsei. Deci înlocuim $y = y_0 + mx - mx_0$ în ecuația elipsei obținând o ecuație de gradul doi în x . Discriminantul acesteia trebuie să fie zero, condiție echivalentă cu

$$m^2(a^2 - x_0^2) + 2mx_0y_0 + b^2 - y_0^2 = 0. \quad (7)$$

Deoarece P este exterior elipsei $\Leftrightarrow \frac{x_0^2}{a^2} + \frac{y_0^2}{b^2} - 1 > 0$, rezultă că ecuația (7) are discriminant strict pozitiv, deci are două soluții reale distincte, m_1 și m_2 .

Rezultă că există două tangente duse din P_0 la elipsă, de ecuații

$$y - y_0 - m_1(x - x_0) = 0, \quad y - y_0 - m_2(x - x_0) = 0. \quad (8)$$

1.3.4 Ecuația pătratică a tangentelor la elipsă dintr-un punct exterior ei

Înmulțind cele două ecuații (8) și înlocuind din (7) $m_1 + m_2 = -\frac{2x_0y_0}{a^2 - x_0^2}$ și $m_1m_2 = \frac{b^2 - y_0^2}{a^2 - x_0^2}$, obținem ecuația pătratică:

$$(a^2 - x_0^2)(y - y_0)^2 + 2x_0y_0(x - x_0)(y - y_0) + (b^2 - y_0^2)(x - x_0)^2 = 0.$$

1.3.5 Polara unui punct în raport cu o elipsă

Fie T_1, T_2 cele două puncte în care tangentele duse din $P(x_0, y_0) \in \mathcal{Ext}$ *mathcal{E}* la elipsă o taie pe aceasta. Vom demonstra că ecuația dreptei T_1T_2 se obține din ecuația elipsei prin dedublare în P .

Presupunem că $T_1(x_1, y_1)$ și $T_2(x_2, y_2)$. Deoarece PT_1 și PT_2 sunt tangente elipsei, iar $T_1, T_2 \in \mathcal{E}$, rezultă că ecuațiile celor două tangente sunt:

$$\frac{xx_1}{a^2} + \frac{yy_1}{b^2} - 1 = 0, \quad \frac{xx_2}{a^2} + \frac{yy_2}{b^2} - 1 = 0.$$

Fie dreapta de ecuație $(d_0) \frac{xx_0}{a^2} + \frac{yy_0}{b^2} - 1 = 0$. Din cele două relații anterioare, rezultă că $T_1, T_2 \in d_0$, deci $d_0 = T_1T_2$. Dreapta T_1T_2 se numește **polara lui P în raport cu elipsa**.

1.3.6 Normala la elipsă într-un punct al ei

Definiția 2. Fie $P_0(x_0, y_0) \in \mathcal{E}$. Normala în P_0 la elipsă este perpendiculară în P_0 pe tangenta la elipsă în P_0 .

Din ecuația (6) deducem că panta tangentei la elipsă în P_0 este $-\frac{b^2x_0}{a^2y_0}$, deci panta normalei la elipsă în P_0 este $\frac{a^2y_0}{b^2x_0}$. Astfel, ecuația normalei în P_0 la elipsă este

$$y - y_0 = \frac{a^2y_0}{b^2x_0}(x - x_0).$$

Exerciții

Exercițiul 1. Pentru următoarele elipse, determinați coordonatele focarelor, vârfurilor, excentricitatea, ecuațiile directoarelor, apoi reprezentați-le grafic într-un sistem de coordonate ales convenabil.

1. $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{4} - 1 = 0;$

3. $x^2 + \frac{y^2}{4} - 1 = 0;$

5. $9x^2 + 25y^2 - 1 = 0;$

2. $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{25} - 1 = 0;$

4. $4x^2 + 9y^2 - 36 = 0;$

6. $4x^2 + 6y^2 - 4 = 0.$

Soluție:

1. Elipsă

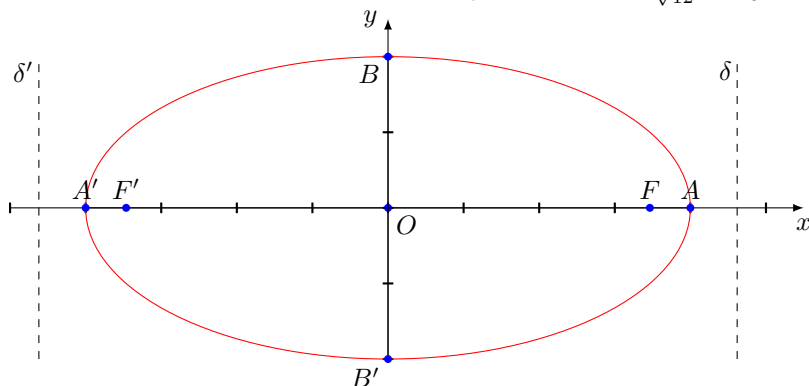
$$a = 4, b = 2 \Rightarrow c = \sqrt{a^2 - b^2} = \sqrt{16 - 4} = \sqrt{12} \Rightarrow$$

$$a > b \Rightarrow \text{Focarele sunt } F(\sqrt{12}, 0), F'(-\sqrt{12}, 0).$$

$$\text{Vârfurile elipsei sunt } A(a, 0) = A(4, 0), A'(-a, 0) = A'(-4, 0), B(0, b) = B(0, 2), B'(0, -b) = B'(0, -2).$$

$$\text{Excentricitatea este } e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{12}}{4}.$$

$$\text{Ecuațiile directoarelor sunt } \delta : x = \frac{a^2}{c} \iff \delta : x = \frac{16}{\sqrt{12}} = \frac{8\sqrt{3}}{3}, \delta' : x = -\frac{a^2}{c} \iff \delta' : x = -\frac{16}{\sqrt{12}} = -\frac{8\sqrt{3}}{3}.$$



2. Elipsă

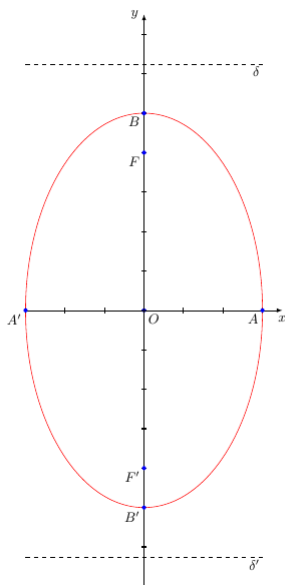
$$a = 3, b = 5 \Rightarrow c = \sqrt{b^2 - a^2} = \sqrt{25 - 9} = \sqrt{16} = 4 \Rightarrow$$

$$a < b \Rightarrow \text{Focarele sunt } F(0, 4), F'(0, -4).$$

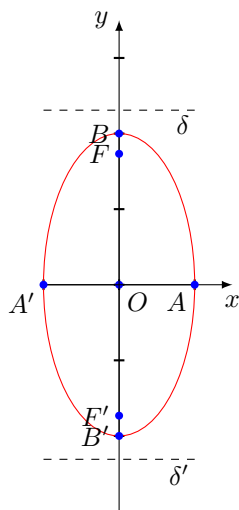
$$\text{Vârfurile elipsei sunt } A(a, 0) = A(3, 0), A'(-a, 0) = A'(-3, 0), B(0, b) = B(0, 5), B'(0, -b) = B(0, -5).$$

$$\text{Excentricitatea este } e = \frac{c}{b} = \frac{\sqrt{12}}{5}.$$

$$\text{Ecuațiile directoarelor sunt } \delta : y = \frac{b^2}{c} \iff \delta : y = \frac{25}{4}, \delta' : y = -\frac{b^2}{c} \iff \delta' : y = -\frac{25}{4}.$$



3. Elipsă



$$a = 1, b = 2 \Rightarrow c = \sqrt{b^2 - a^2} = \sqrt{4 - 1} = \sqrt{3} \Rightarrow$$

$a < b \Rightarrow$ **Focarele** sunt $F(0, \sqrt{3}), F'(0, -\sqrt{3})$.

Vârfurile elipsei sunt $A(a, 0) = A(1, 0), A(-a, 0) = A(-1, 0), B(0, b) = B(0, 2), B(0, -b) = B(0, -2)$.

Excentricitatea este $e = \frac{c}{b} = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Ecuatiile directoarelor sunt
$$\begin{cases} \delta : y = \frac{b^2}{c} \iff \delta : x = \frac{4}{\sqrt{3}} = \frac{4\sqrt{3}}{3} \\ \delta' : y = -\frac{b^2}{c} \iff \delta' : x = -\frac{4}{\sqrt{3}} = -\frac{4\sqrt{3}}{3} \end{cases}$$

Exercițiul 2. Scrieți ecuațiile elipselor determinate prin condițiile următoare, apoi reprezentați-le grafic:

1. elipsa cu vârfurile $A(5, 0), A'(-5, 0)$, ce trece prin punctul $M(3, 2)$;
2. elipsa cu focarele $F(3, 0), F'(-3, 0)$, ce trece prin $M(4, 1)$;
3. elipsa cu vârfurile $A(3, 0), A'(-3, 0)$, tangentă dreptei $(d) x + 2y - 6 = 0$;
4. elipsa de focare $F(2, 0), F'(-2, 0)$, tangentă dreptei $(d) 2x + 3y - 9 = 0$.

Soluție:

1. Fie $\mathcal{E}$ elipsa cu $A, A', M \in \mathcal{E}$.

Ecuția canonică: Fie ecuația elipsei: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.

Deoarece $A \in \mathcal{E} \Rightarrow a = 5$. Ecuația elipsei devine: $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \xrightarrow{M \in \mathcal{E}} \frac{9}{25} + \frac{4}{b^2} = 1 \Rightarrow b^2 = \frac{25}{4} \Rightarrow b = \frac{5}{2}$. Ecuația devine: $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{\frac{25}{4}} = 1$.

Ecuțiile explicite: Fie ecuația $|y| = \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x^2}$.

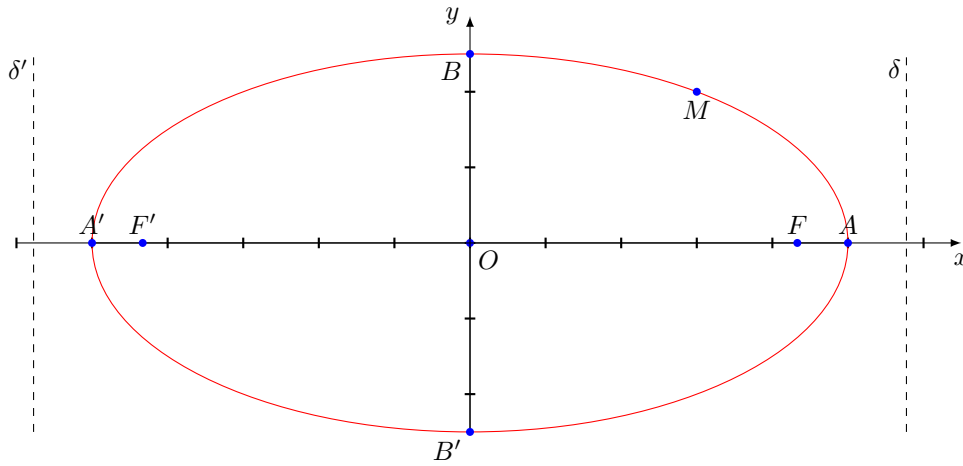
Deoarece $A \in \mathcal{E} \Rightarrow a = 5$. Ecuația elipsei devine: $|y| = \frac{b}{5} \sqrt{25 - x^2} \xrightarrow{M \in \mathcal{E}} 2 = \frac{b}{5} \sqrt{25 - 9} \Rightarrow b = \frac{5}{2}$. Ecuația devine: $|y| = \frac{1}{2} \sqrt{25 - x^2}$.

Ecuțiile parametrice: Fie ecuațiile:
$$\begin{cases} x = a \cos t, \\ y = b \sin t, \quad t \in [0, 2\pi]. \end{cases}$$

Deoarece $A \in \mathcal{E} \Rightarrow$ parametrul corespunzător este $a = 5$.

Ecuațiile elipsei devin:
$$\begin{cases} x = 5 \cos t, \\ y = b \sin t, \quad t \in [0, 2\pi] \end{cases} \xrightarrow{M \in \mathcal{E}} \cos t = \frac{3}{5} \Rightarrow \sin t = \frac{2}{5} \Rightarrow b = \frac{5}{2}.$$

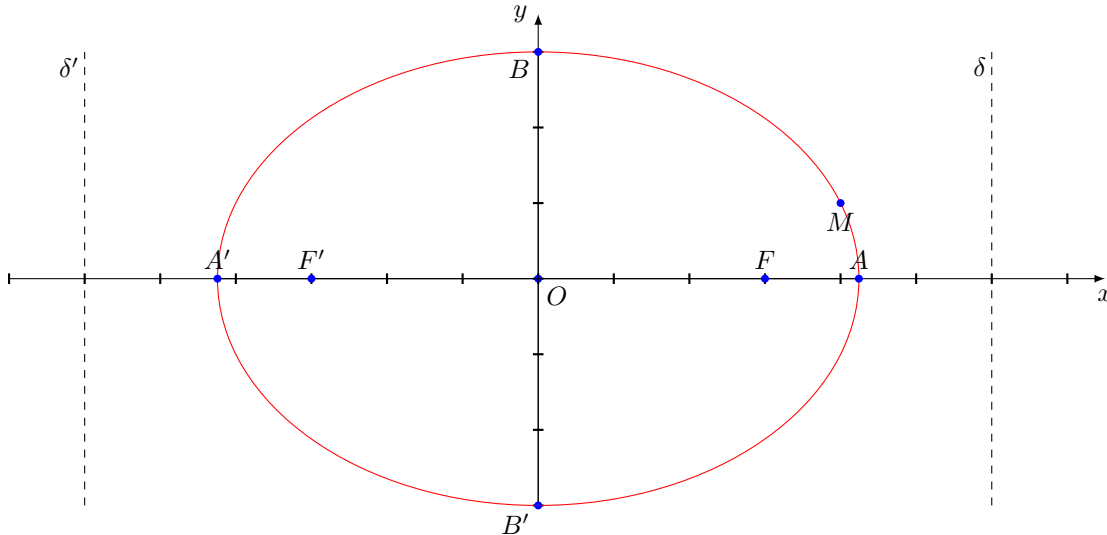
Ecuațiile devin:
$$\begin{cases} x = 5 \cos t, \\ y = \frac{5}{2} \sin t, \quad t \in [0, 2\pi]. \end{cases}$$



2. Fie $\mathcal{E}$ elipsa cu focarele F, F' și $M \in \mathcal{E}$.

Ecuția canonică: Fie ecuația elipsei: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.

Deoarece $F, F' \in Ox \Rightarrow (a > b) \wedge c = 3 \Rightarrow a^2 - b^2 = 9$. Ecuția elipsei devine: $\frac{x^2}{9+b^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \xrightarrow{M \in \mathcal{E}} \frac{16}{9+b^2} + \frac{1}{b^2} = 1 \Rightarrow 16b^2 + 9 + b^2 = (9+b^2)b^2 \Rightarrow b^4 - 8b^2 - 9 = 0 \Rightarrow b^2 = 9 \Rightarrow b = 3 \Rightarrow a = 3\sqrt{2}$. Ecuția devine: $\frac{x^2}{18} + \frac{y^2}{9} = 1$. Alternativ Deoarece $F, F' \in Ox \Rightarrow (a > b)$ și $c = 3$. Elipsa este locul geometric al punctelor M astfel încât $d(M, F) + d(M, F') = 2a \Rightarrow \sqrt{(x-c)^2 + y^2} + \sqrt{(x+c)^2 + y^2} = 2a \Rightarrow 2a = \sqrt{(4-3)^2 + 1^2} + \sqrt{(4+3)^2 + 1^2} \Rightarrow a = 3\sqrt{2} \Rightarrow b = 3$.



Exercițiul 3. Fie elipsa $(\mathcal{E}) \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} - 1 = 0$.

1. Determinați ecuațiile tangentei și normalei în punctul $M(\sqrt{2}, \frac{3\sqrt{2}}{2})$ la elipsă.
2. Scrieți ecuațiile tangentelor la elipsă, paralele cu dreapta $y = 2x + 3$.
3. Scrieți ecuațiile tangentelor la elipsă duse din punctul exterior $P(3, 1)$.

Soluție:

1. Să observăm că $M \in \mathcal{E}$.

Ecuția tangentei în punctul M este dată de: $t_M : \frac{x \cdot \sqrt{2}}{4} + \frac{y \cdot \frac{3\sqrt{2}}{2}}{9} - 1 = 0 \iff t_M : \frac{x}{4} + \frac{y}{6} - \frac{1}{\sqrt{2}} = 0 \iff t_M : 3x + 2y - 6\sqrt{2} = 0$.

Normala în punctul M , n_M , este dată de: $\begin{cases} M \in n_M, \\ n_M \perp t_M \end{cases} \Rightarrow n_M : \frac{x - \sqrt{2}}{3} = \frac{y - \frac{3\sqrt{2}}{2}}{2} \iff n_M : 2x - 2\sqrt{2} = 3y - \frac{9\sqrt{2}}{2} \iff$

$$n_M : 2x - 3y + \frac{5\sqrt{2}}{2} = 0.$$

2. **Metoda I:** Vom căuta o dreaptă de tipul $t : y = 2x + m$ (are aceeași pantă cu dreapta propusă). Vom obține valoarea parametrului n punând condiția ca intersecția dintre punct și dreaptă să fie un punct dublu. Prin urmare:

$$t \cap \mathcal{E} : \begin{cases} \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1 \\ y = 2x + n \end{cases} \rightarrow 25x^2 + 16nmx + 4n^2 - 36 = 0 \quad (9)$$

$$t \cap \mathcal{E} = \text{punct dublu} \Leftrightarrow \Delta = 256n^2 - 100(4n^2 - 36) = 0 \rightarrow n = \pm 5. \quad (10)$$

Cele două tangente sunt: $\begin{cases} t_1 : y = 2x + 5 \\ t_2 : y = 2x - 5 \end{cases}$.

Metoda II: Ecuațiile magice ale tangentelor la elipsă de pantă m sunt date de $\begin{cases} (t_m^+) : y = mx + \sqrt{a^2m^2 + b^2} \\ (t_m^-) : y = mx - \sqrt{a^2m^2 + b^2} \end{cases}$. În cazul

nostru, acestea devin: $\begin{cases} (t_2^+) : y = 2x + \sqrt{16 + 9} = 2x + 5 \\ (t_2^-) : y = 2x - \sqrt{16 + 9} = 2x - 5. \end{cases}$

3. Considerăm o dreaptă care trece prin P : $y = mx + n \Rightarrow 1 = 3m + n \Rightarrow n = 1 - 3m$.

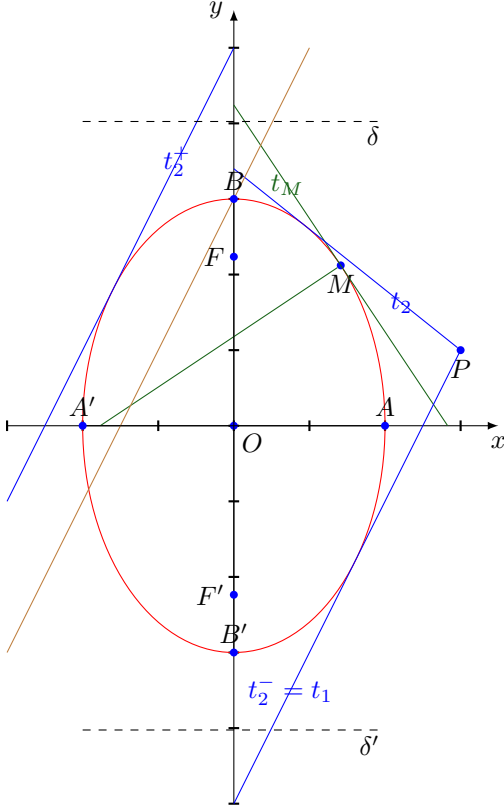
Punem condiția ca această dreaptă să fie tangentă elipsei, i.e. sistemul $\begin{cases} \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} - 1 = 0 \\ y = mx + n \end{cases}$ să aibă soluție unică,

$$\begin{cases} \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} - 1 = 0 \\ y = mx + (1 - 3m) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 9x^2 + 4y^2 - 36 = 0 \\ y = mx + (1 - 3m) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 9x^2 + 4(mx + (1 - 3m))^2 = 36 \\ y = mx + (1 - 3m) \end{cases} \Rightarrow$$

$(9 + 4m^2)x^2 + 8m(1 - 3m)x + 4(1 - 3m)^2 - 36 = 0$ să aibă soluție unică, i.e.

$$16m^2(3m - 1)^2 - 4(9 + 4m^2)[(3m - 1)^2 - 9] = 0 \Rightarrow 4m^2(3m - 1)^2 - (9 + 4m^2)[(3m - 1)^2 - 9] = 0 \Rightarrow -9(3m - 1)^2 + 9(9 + 4m^2) = 0 \Rightarrow 9 + 4m^2 - 9m^2 + 6m - 1 = 0 \Rightarrow -5m^2 + 6m + 8 = 0 \Rightarrow m_{1,2} = \frac{-3 \pm 7}{-5} \Rightarrow m_1 = 2, m_2 = -\frac{4}{5}.$$

Obținem ecuațiile tangentelor $t_1 = y = 2x - 5, t_2 = -\frac{4}{5}x + \frac{17}{5}$.



Exercițiul 4. Fie elipsa $(\mathcal{E}) x^2 + 4y^2 - 4 = 0$.

1. Determinați ecuațiile tangentei și normalei în punctul $M(1, \frac{\sqrt{3}}{2})$ la elipsă.
2. Scrieți ecuațiile tangentelor la elipsă, paralele cu normala în M la elipsă.
3. Scrieți ecuațiile tangentelor la elipsă duse din punctul exterior $P(\sqrt{3}, -1)$.

Soluție:

1. Să observăm că $M \in \mathcal{E}$.

Ecuația tangentei în punctul M este dată de: $t_M : x \cdot 1 + 2y \cdot \sqrt{3} - 4 = 0 \Leftrightarrow t_M : x + 2y\sqrt{3} - 4 = 0$.

Normala în punctul M , n_M , este dată de: $\begin{cases} M \in n_M, \\ n_M \perp t_M \end{cases} \Rightarrow n_M : \frac{x-1}{1} = \frac{y-\frac{\sqrt{3}}{2}}{2\sqrt{3}} \Leftrightarrow n_M : 2x\sqrt{3} - 2\sqrt{3} = y - \frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow$

$$n_M : 4x\sqrt{3} - 2y - 3\sqrt{3} = 0.$$

2. Ecuatiile magice ale tangentelor la elipsă de pantă m sunt date de $\begin{cases} (t_m^+) : y = mx + \sqrt{a^2m^2 + b^2} \\ (t_m^-) : y = mx - \sqrt{a^2m^2 + b^2} \end{cases}$. În cazul nostru,

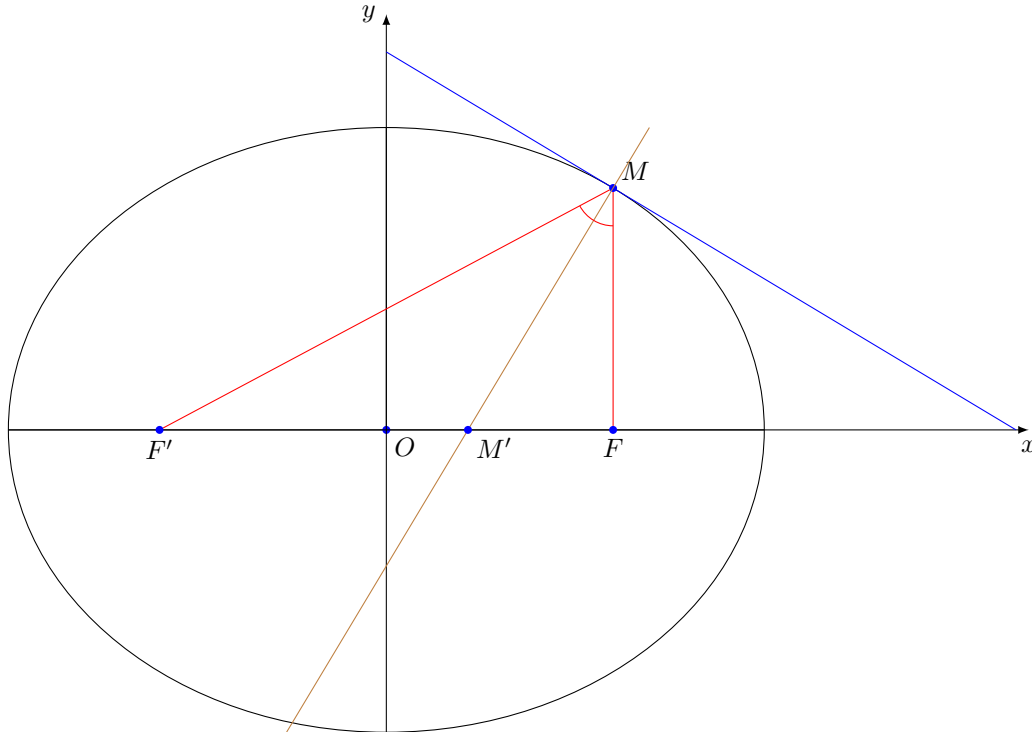
acestea devin: $\begin{cases} (t_{2\sqrt{3}}^+) : y = (2\sqrt{3})x + \sqrt{48 + 1} = 2x\sqrt{3} + 7 \\ (t_{2\sqrt{3}}^-) : y = (2\sqrt{3})x - \sqrt{48 + 1} = 2x\sqrt{3} - 7. \end{cases}$

3. Obținem $P \in Ext\mathcal{E} \rightarrow t_{1,2} : y - 1 = m(x - \sqrt{3})$. Avem ecuația pentru pantele tangentelor

$$m^2(4 - 3) - 2m\sqrt{3} = 0 \Rightarrow m^2 - 2m\sqrt{3} = 0 \Rightarrow m_1 = 0, m_2 = 2\sqrt{3}.$$

Obținem ecuațiile tangentelor $t_1 : y = -1, t_2 : y = 2\sqrt{3}x - 7$.

Exercițiul 5. (Proprietatea optică a elipsei) Tangenta și normala la elipsă, într-un punct oarecare M al ei, sunt respectiv bisectoarea exterioară și bisectoarea interioară a unghiului $\widehat{FMF'}$.



Demonstrație.

Fie ecuația canonică a elipsei $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, a > b$.

Dacă $M \in Ox$, problema este evidentă. În caz contrar vom folosi reciproca teoremei bisectoarei. Vom demonstra că normala este bisectoarea interioară unghiului menționat. Tangenta fiind perpendiculară pe aceasta se obține automat că aceasta este bisectoarea exterioară. Prin urmare vom dori să demonstrăm că un punct de pe normala MM' împarte latura opusă unghiului $\widehat{FMF'}$ în segmente proporționale cu lungimile laturilor ce formează unghiul. Astfel, ecuația normalei prin $M(x_0, y_0)$ este $y - y_0 = \frac{a^2 y_0}{b^2 x_0}(x - x_0)$. Pentru a obține coordonatele unui punct de pe normală intersectăm normala cu axa Ox .

$$\begin{cases} y - y_0 = \frac{a^2 y_0}{b^2 x_0}(x - x_0) \\ y = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = \frac{c^2}{a^2} x_0 \\ y = 0 \end{cases}$$

Obținem punctul $M' \left(\frac{c^2}{a^2} x_0, 0 \right)$. Prin urmare $\begin{cases} F'M' = \left| \frac{c^2}{a^2} x_0 + c \right| \\ FM' = \left| \frac{c^2}{a^2} x_0 - c \right| \end{cases}$. Pe de altă parte, $\begin{cases} MF = \sqrt{(x_0 - c)^2 + y_0^2} \\ MF' = \sqrt{(x_0 + c)^2 + y_0^2} \end{cases}$.

Amintim că

$$(MM' \text{ bisectoare pentru } \widehat{FMF'}) \Leftrightarrow \frac{M'F}{M'F'} = \frac{MF}{MF'}.$$

Să exprimăm:

$$\frac{MF}{MF'} = \sqrt{\frac{(x_0 - c)^2 + y_0^2}{(x_0 + c)^2 + y_0^2}} \quad (11)$$

Știm că $M \in \mathcal{E} \rightarrow y_0^2 = b^2 - \frac{b^2 x_0^2}{a^2}$. Deci (11) devine:

$$\frac{MF}{MF'} = \sqrt{\frac{x_0^2 - 2cx_0 + c^2 + b^2 - \frac{b^2 x_0^2}{a^2}}{x_0^2 + 2cx_0 + c^2 + b^2 - \frac{b^2 x_0^2}{a^2}}} = \sqrt{\frac{\frac{c^2 x_0^2}{a^2} - 2cx_0 + a^2}{\frac{c^2 x_0^2}{a^2} + 2cx_0 + a^2}} = \sqrt{\left(\frac{c^2 x_0 - a^2}{c^2 x_0 + a^2}\right)^2} = \left|\frac{c^2 x_0 - a^2}{c^2 x_0 + a^2}\right| = \frac{M'F}{M'F'}. \quad (12)$$

□

Exercițiul 6. Demonstrați că locul geometric al punctelor din care se pot duce tangente perpendiculare la o elipsă este cercul circumscris dreptunghiului circumscris elipsei: $x^2 + y^2 = a^2 + b^2$ (cercul lui Monge al elipsei).

Soluție: Ecuația care dă pantele tangențelor la elipsă dintr-un punct exterior $M(x_0, y_0)$ este

$$m^2(a^2 - x_0^2) + 2mx_0y_0 + (b^2 - y_0^2) = 0.$$

Tangentele sunt perpendiculare dacă și numai dacă $\frac{b^2 - y_0^2}{a^2 - x_0^2} = 1 \iff x_0^2 + y_0^2 - (a^2 + b^2) = 0$.

Exercițiul 7. Dată o elipsă, se consideră triunghiurile $M_1M_2M_3$ înscrise în elipsa, astfel încât centrul lor de greutate să coincidă cu centrul de simetrie O al elipsei. Demonstrați că normalele în vârfurile triunghiului la elipsă sunt concurente (T. Steiner).

Soluție: Fie elipsa $\mathcal{E}$ de ecuație $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a, b \in \mathbb{R}_+^*$) și $M_1(x_1, y_1), M_2(x_2, y_2), M_3(x_3, y_3) \in \mathcal{E}$ astfel încât $G_{\triangle ABC} = O(0, 0)$. Au loc egalitățile

$$\begin{cases} \frac{x_1^2}{a^2} + \frac{y_1^2}{b^2} = 1 \\ \frac{x_2^2}{a^2} + \frac{y_2^2}{b^2} = 1 \\ \frac{x_3^2}{a^2} + \frac{y_3^2}{b^2} = 1 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ y_1 + y_2 + y_3 = 0. \end{cases} \quad (13)$$

Înlocuind din ultimele 2 ecuații coordonatele celui de-al treilea vârf, obținem:

$$\frac{(x_1 + x_2)^2}{a^2} + \frac{(y_1 + y_2)^2}{b^2} = 1 \Rightarrow \frac{2x_1x_2}{a^2} + \frac{2y_1y_2}{b^2} = -1 \Rightarrow 2(\cos t_1 \cos t_2 + \sin t_1 \sin t_2) = -1 \Rightarrow \cos(t_1 - t_2) = -\frac{1}{2}. \quad (14)$$

Ecuațiile normalelor în cele trei vârfuri sunt date de:

$$\begin{cases} y - y_1 = \frac{a^2 y_1}{b^2 x_1}(x - x_1) \\ y - y_2 = \frac{a^2 y_2}{b^2 x_2}(x - x_2) \\ y - y_3 = \frac{a^2 y_3}{b^2 x_3}(x - x_3) \end{cases} \iff \begin{cases} (y - y_1)b^2 x_1 = a^2 y_1(x - x_1) \\ (y - y_2)b^2 x_2 = a^2 y_2(x - x_2) \\ (y - y_3)b^2 x_3 = a^2 y_3(x - x_3) \end{cases} \iff \begin{cases} a^2 y_1 x - b^2 x_1 y + (b^2 - a^2)y_1 x_1 = 0 \\ a^2 y_2 x - b^2 x_2 y + (b^2 - a^2)y_2 x_2 = 0 \\ a^2 y_3 x - b^2 x_3 y + (b^2 - a^2)y_3 x_3 = 0. \end{cases} \quad (15)$$

Pentru ca cele trei normale să se intersecteze este suficient ca sistemul dat de ecuațiile celor trei drepte să aibă soluție. Știind că cele trei drepte nu sunt simultan paralele, este suficient să verificăm că determinantul sistemului este egal cu zero.

Determinantul sistemului egal cu 0 este echivalent cu:

$$\begin{vmatrix} a^2 y_1 & -b^2 x_1 & (b^2 - a^2)y_1 x_1 \\ a^2 y_2 & -b^2 x_2 & (b^2 - a^2)y_2 x_2 \\ a^2 y_3 & -b^2 x_3 & (b^2 - a^2)y_3 x_3 \end{vmatrix} = 0 \iff \begin{vmatrix} a^2 y_1 & -b^2 x_1 & (b^2 - a^2)y_1 x_1 \\ a^2 y_2 & -b^2 x_2 & (b^2 - a^2)y_2 x_2 \\ a^2 y_3 & -b^2 x_3 & (b^2 - a^2)y_3 x_3 \end{vmatrix} = 0 \iff \begin{vmatrix} y_1 & x_1 & y_1 x_1 \\ y_2 & x_2 & y_2 x_2 \\ y_3 & x_3 & y_3 x_3 \end{vmatrix} = 0 \iff$$

$$\begin{vmatrix} y_1 & x_1 & y_1 x_1 \\ y_2 & x_2 & y_2 x_2 \\ y_1 + y_2 + y_3 & x_1 + x_2 + x_3 & y_1 x_1 + y_2 x_2 + y_3 x_3 \end{vmatrix} = 0 \iff \begin{vmatrix} y_1 & x_1 & y_1 x_1 \\ y_2 & x_2 & y_2 x_2 \\ 0 & 0 & y_1 x_1 + y_2 x_2 + (y_1 + y_2)(x_1 + x_2) \end{vmatrix} = 0 \iff$$

$$[2(y_1 x_1 + y_2 x_2) + (x_1 y_2 + x_2 y_1)](x_2 y_1 - x_1 y_2) = 0$$

$$[2(\sin t_1 \cos t_1 + \sin t_2 \cos t_2) + (\cos t_1 \sin t_2 + \cos t_2 \sin t_1)](\cos t_2 \sin t_1 - \cos t_1 \sin t_2) = 0.$$

Vrem să demonstrăm că $2(\sin t_1 \cos t_1 + \sin t_2 \cos t_2) + (\cos t_1 \sin t_2 + \cos t_2 \sin t_1) = 0 \iff 2 \sin \frac{t_2 + t_1}{2} \cdot (2 \cos(t_2 - t_1) + 1) \cos \frac{t_2 + t_1}{2} = 0$, care este adevărat, din 14.

Alternativ, se poate demonstra că înălțimile triunghiului sunt normalele la elipsă în vârfuri.