

1 Hiperbola

Cadrul de lucru este un plan afin euclidian orientat $\mathcal{E}^2 = \left(E, \left(\vec{E}, \langle, \rangle\right), \Phi\right)$.

Definiția 1. Se consideră două puncte distincte $F, F' \in E$ cu $d(F, F') = 2c > 0$ și un număr real a astfel încât $0 < 2a < 2c$. Se numește **hiperbolă** locul geometric al punctelor planului E pentru care diferența distanțelor la punctele fixe F, F' este constantă și egală cu $2a$:

$$\mathcal{H} = \{P \in E \mid d(P, F) + d(P, F') = 2a\} \quad (1)$$

Punctele F, F' se numesc **focarele** hiperbolei, dreapta FF' **axa focală** și $2c$ **distanța focală**.

Pentru a ne convinge că locul geometric definit anterior este o mulțime nevidă, fie O mijlocul segmentului (FF') , fie $A, A' \in FF'$ astfel încât $d(O, A) = d(O, A') = a$ și $F' - A' - O - A - F$. Evident $A, A' \in \mathcal{H}$. Aceste două puncte A, A' se numesc **vârfurile hiperbolei**.

1.1 Ecuațiile hiperbolei

Pentru a putea determina ecuațiile hiperbolei vom fixa un reper ortonormat astfel: originea va fi punctul O , mijlocul segmentului (FF') , $\vec{i} = \frac{1}{\|F'F\|} \vec{F'F}$ și $\vec{j} \perp \vec{i}$, $\|\vec{j}\| = 1$ astfel încât $\{\vec{i}, \vec{j}\}$ e o bază pozitivă. Notăm cu Ox, Oy axele de coordonate.

În raport cu acest reper punctele construite până acum au coordonatele $F(c, 0), F'(-c, 0), A(a, 0), A'(-a, 0)$.

1.1.1 Ecuația canonică

Fie $P(x, y)$ un punct al hiperbolei. Atunci

$$\sqrt{(x-c)^2 + y^2} - \sqrt{(x+c)^2 + y^2} = \pm 2a.$$

Din calcule, obținem ecuația canonică a hiperbolei:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad (2)$$

unde

$$b = \sqrt{c^2 - a^2}. \quad (3)$$

Reciproc, putem să arătăm că orice punct ale cărui coordonate verifică ecuația (2) aparține hiperbolei.

Numărul **a** se numește **semiaxa mare**, iar **b** **semiaxa mică**. Observăm că nu avem neapărat $a > b$, denumirea datorându-se importanței lui a în definirea hiperbolei.

Din ecuația canonică a hiperbolei rezultă:

- dacă $Q(x, y) \in \mathcal{H} \Rightarrow Q_1(-x, y) \in \mathcal{H}$, deci Oy este **axă de simetrie** pentru hiperbolă;
- dacă $Q(x, y) \in \mathcal{H} \Rightarrow Q_2(x, -y) \in \mathcal{H}$, deci Ox este **axă de simetrie** pentru hiperbolă;
- dacă $Q(x, y) \in \mathcal{H} \Rightarrow Q_3(-x, -y) \in \mathcal{H}$, deci O este **centru de simetrie** pentru hiperbolă.

Definim interiorul hiperbolei

$$\mathcal{Int} \mathcal{H} = \left\{ P(x, y) \mid \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - 1 < 0 \right\}$$

și exteriorul hiperbolei

$$\mathcal{Ext} \mathcal{H} = \left\{ P(x, y) \mid \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - 1 > 0 \right\}.$$

Din ecuația canonică mai observăm că doar axa Ox taie hiperbola, nu și axa Oy . Deci, spre deosebire de elipsă, hiperbola are doar două vârfuri.

1.1.2 Ecuațiile explicite

Din (2) deducem că $y^2 = b^2 \left(\frac{x^2}{a^2} - 1 \right)$.

Observăm că pentru ca un punct $P(x, y)$ să aparțină hiperbolei de semiaxă mare a , este necesar ca $x \in (-\infty, -a] \cup [a, +\infty)$. În aceste condiții, extrăgând radicalul în egalitatea de mai sus, obținem

$$|y| = \frac{b}{a} \sqrt{x^2 - a^2}.$$

Astfel, pentru $y \geq 0$, avem $y = \frac{b}{a} \sqrt{x^2 - a^2}$, iar pentru $y < 0$, avem $y = -\frac{b}{a} \sqrt{x^2 - a^2}$.

Folosindu-ne de aceste ecuații putem reprezenta grafic hiperbola. Observăm că dreptele

$$(a_1)y = \frac{b}{a}x, \quad (a_2)y = -\frac{b}{a}x$$

sunt asimptote oblice pentru hiperbolă.

1.1.3 Ecuațiile parametrice

Reamintim definiția funcțiilor trigonometrice cosinus hiperbolic și sinus hiperbolic:

$$\cosh : \mathbb{R} \rightarrow [1, \infty), \quad \cosh(t) = \frac{e^t + e^{-t}}{2},$$

$$\sinh : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad \sinh(t) = \frac{e^t - e^{-t}}{2}.$$

Deoarece $\cosh^2(t) - \sinh^2(t) = 1$, $\forall t \in \mathbb{R}$, rezultă că putem parametriza ramura $x \leq -a$ a hiperbolei prin

$$\begin{cases} x = -a \cosh(t), \\ y = b \sinh(t), \end{cases} \quad t \in \mathbb{R},$$

iar ramura $x \geq a$ prin

$$\begin{cases} x = a \cosh(t), \\ y = b \sinh(t), \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}.$$

1.2 Directoarele hiperbolei

Să revenim la ecuația hiperbolei pe care o rescriem

$$\sqrt{(x-c)^2 + y^2} = \frac{c}{a} \left| x - \frac{a^2}{c} \right|, \quad x \in (-\infty, -a] \cup [a, \infty) \Leftrightarrow$$

$$d(P, F) = ed(P, \delta),$$

unde $P(x, y)$ e un punct arbitrar al hiperbolei, $e = \frac{c}{a}$ și $\delta : x = \frac{a^2}{c}$.

Orice punct P al elipsei are proprietatea că raportul dintre distanța de la P la punctul fix F' și distanța de la P la dreapta fixă δ' este constant și egal cu e .

Deci orice punct P al hiperbolei are proprietatea că raportul dintre distanța de la P la punctul fix F și distanța de la P la dreapta fixă δ este constant și egal cu e .

Analog se poate obține că $d(P, F') = ed(P, \delta')$, cu $\delta : x = -\frac{a^2}{c}$. Numim $e = \frac{c}{a} \in (0, 1)$ **excentricitatea** hiperbolei, iar dreptele δ, δ' **directoarele** hiperbolei.

1.3 Hiperbola conjugată unei hiperbole date

Fie hiperbola $(\mathcal{H}) \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$. Atunci hiperbola $(\mathcal{H}') \frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2} = 1$ se numește **hiperbola conjugată** lui $\mathcal{H}$. Observăm că axa transversă a lui $\mathcal{H}'$ este Oy . Dorim să reprezentăm grafic pe $\mathcal{H}'$. Fie S_d simetria ortogonală față de prima bisectoare $d : y = x$. Ea are ecuațiile $x' = y, y' = x$.

Atunci $S_d(\mathcal{H}')$ este o hiperbolă de ecuații $\frac{x^2}{b^2} - \frac{y^2}{a^2} = 1$.

Aceasta are focarele de coordonate $(c, 0), (-c, 0)$, unde $c^2 = a^2 + b^2$. Atunci hiperbola $\mathcal{H}'$ are focarele $F(0, c), F'(0, -c)$. Vârfului lui $\mathcal{H}'$ sunt $B(0, b), B'(0, -b)$. Analog ecuațiile asimptotelor lui $S_d(\mathcal{H}')$ sunt $y = \pm \frac{a}{b}x$, deci ecuațiile asimptotelor lui $\mathcal{H}'$ sunt $x = \pm \frac{a}{b}y \Leftrightarrow y = \pm \frac{b}{a}x$.

Deci $\mathcal{H}$ și $\mathcal{H}'$ au aceleași asimptote. Raționând analog determinăm directoarele hiperbolei conjugate: $y = \pm \frac{b^2}{c}$ și excentricitatea ei $e' = \frac{c}{b}$.

1.4 Intersecția dintre o dreaptă și o hiperbolă

În continuare vom studia intersecția dintre hiperbola $(\mathcal{H}) \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ și dreapta $(d) y = mx + n$. Pentru a găsi coordonatele eventualelor puncte comune rezolvăm sistemul format din cele două ecuații. Eliminând necunoscuta y , obținem ecuația

$$(a^2m^2 + b^2)x^2 + 2a^2mnx + a^2(n^2 - b^2) = 0. \quad (4)$$

Fie Δ discriminantul ecuației de mai sus.

Dacă $\begin{cases} \Delta > 0, & d \cap \mathcal{H} = \{P_1, P_2\}. \text{ Spunem că dreapta } d \text{ este } \mathbf{secantă} \text{ hiperbolei.} \\ \Delta < 0, & d \cap \mathcal{H} = \emptyset. \text{ Spunem că dreapta } d \text{ este } \mathbf{exterioră} \text{ hiperbolei.} \\ \Delta = 0, & d \cap \mathcal{H} = \{T\} \text{ (punct dublu). În acest caz, dreapta } d \text{ este } \mathbf{tangentă} \text{ hiperbolei.} \end{cases}$

1.4.1 Ecuația magică a tangentelor de pantă dată la hiperbolă

Obținem $\Delta = 0 \Leftrightarrow n^2 = a^2m^2 - b^2$. Observăm deci că nu pentru orice pantă m , dreapta d poate fi tangentă hiperbolei. O condiție necesară pentru ca $d: y = mx + n$ să fie tangentă hiperbolei este $m \in (-\infty, -\frac{b}{a}) \cup (\frac{b}{a}, \infty)$.

$$\begin{aligned} (d_1)y &= mx + \sqrt{a^2m^2 - b^2}, \\ (d_2)y &= mx - \sqrt{a^2m^2 - b^2}. \end{aligned} \quad (5)$$

Dacă $m = \pm \frac{b}{a}$ și $n \neq 0$, ecuația (4) este o ecuație de grad I în x .

Rezultă că dreapta d taie hiperbola într-un singur punct. Observăm că d este paralelă cu una din asimptotele hiperbolei. Spunem că dreapta d este **secantă, de direcție asimptotică**.

Dacă $m = \pm \frac{b}{a}$ și $n = 0$ regăsim **asimptotele hiperbolei**.

În concluzie, dată o hiperbolă și o dreaptă, dreapta poate fi exterioră hiperbolei, secantă, tangentă, secantă de direcție asimptotică sau asimptotă.

1.4.2 Tangenta la hiperbolă într-un punct al ei

Dacă $P_0(x_0, y_0) \in \mathcal{H}$, ecuația tangentei la hiperbolă în punctul P_0 se obține din ecuația hiperbolei prin dedublare:

$$(d_0) \frac{xx_0}{a^2} - \frac{yy_0}{b^2} - 1 = 0. \quad (6)$$

Pentru a demonstra că dreapta de ecuație (13) este tangenta hiperbolei, rezolvăm sistemul format din ecuația hiperbolei și cea a dreptei d_0 . Folosind faptul că $\frac{x_0^2}{a^2} - \frac{y_0^2}{b^2} = 1$, rezultă că intersecția dintre dreaptă și hiperbolă este un punct dublu și anume P_0 .

1.4.3 Normala la hiperbolă într-un punct al ei

Fie $P_0(x_0, y_0) \in \mathcal{H}$. Normala în P_0 la hiperbola este perpendiculară în P_0 pe tangenta la hiperbolă în P_0 .

Din ecuația (13) deducem că panta tangentei la hiperbolă în P_0 este $\frac{b^2x_0}{a^2y_0}$, deci panta normalei la hiperbolă în P_0 este $-\frac{a^2y_0}{b^2x_0}$. Astfel, ecuația normalei în P_0 la hiperbolă este

$$y - y_0 = -\frac{a^2y_0}{b^2x_0}(x - x_0).$$

Exerciții

Exercițiul 1. Pentru următoarele hiperbole, determinați coordonatele focarelor, vârfurilor, excentricitatea, ecuațiile directoarelor, ecuațiile asimptotelor apoi reprezentați-le grafic într-un sistem de coordonate ales convenabil.

1. $\frac{x^2}{5} - \frac{y^2}{4} - 1 = 0;$

4. $\frac{y^2}{9} - \frac{x^2}{7} - 1 = 0;$

2. $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{4} - 1 = 0;$

5. $\frac{y^2}{36} - \frac{x^2}{64} - 1 = 0;$

3. $x^2 - 4y^2 - 1 = 0;$

6. $y^2 - x^2 - 1 = 0;$

Soluție:

1.

Facem următoarele identificări. $a = \sqrt{5}, b = \sqrt{4} = 2 \Rightarrow c = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{5 + 4} = \sqrt{9} = 3$. Vorbim despre o hiperbolă cu axa focală Ox .

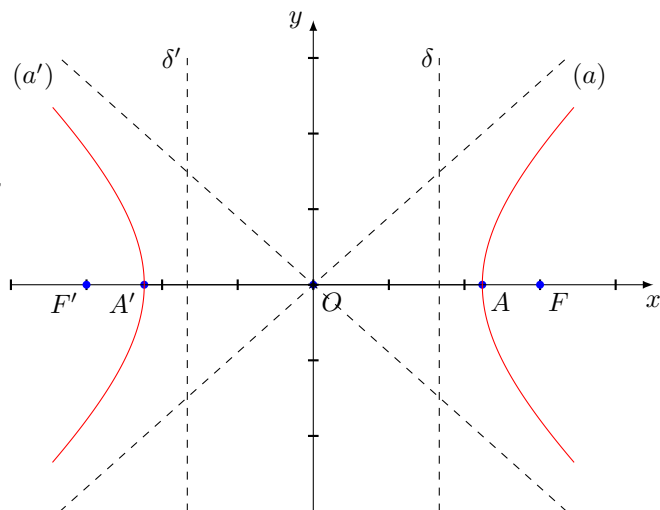
Focarele $F(3, 0), F'(-3, 0)$.

Vârfurile hiperbolei $A(a, 0) = A(\sqrt{5}, 0), A'(-a, 0) = A'(-\sqrt{5}, 0)$.

Excentricitatea $e = \frac{c}{a} = \frac{3}{\sqrt{5}}$.

Ecuatiile directoarelor $\begin{cases} \delta : x = \frac{a^2}{c} \iff \delta : x = \frac{5}{3} \\ \delta' : x = -\frac{a^2}{c} \iff \delta' : x = -\frac{5}{3}. \end{cases}$

Ecuatiile asimptotelor $\begin{cases} (a) : y = \frac{b}{a}x \iff (a) : y = \frac{2}{\sqrt{5}}x \\ (a') : y = -\frac{b}{a}x \iff (a') : y = -\frac{2}{\sqrt{5}}x. \end{cases}$



2.

Facem identificările $a = \sqrt{4} = 2, b = \sqrt{4} = 2 \Rightarrow c = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{4 + 4} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$. Axa focală este Ox .

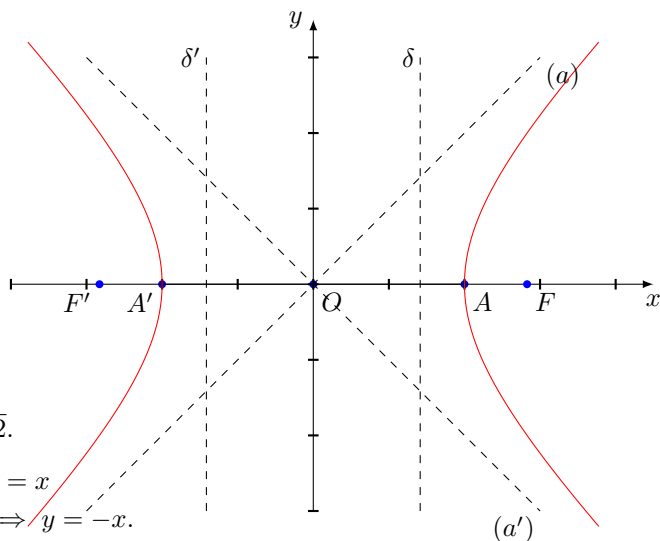
Focarele $F(2\sqrt{2}, 0), F'(-2\sqrt{2}, 0)$.

Vârfurile hiperbolei $A(a, 0) = A(2, 0), A'(-a, 0) = A'(-2, 0)$.

Excentricitatea $e = \frac{c}{a} = \frac{2\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}$.

Ecuatiile directoarelor $\begin{cases} \delta : x = \frac{a^2}{c} \iff \delta : x = \frac{4}{2\sqrt{2}} = \sqrt{2} \\ \delta' : x = -\frac{a^2}{c} \iff \delta' : x = -\frac{4}{2\sqrt{2}} = -\sqrt{2}. \end{cases}$

Ecuatiile asimptotelor $\begin{cases} (a) : y = \frac{b}{a}x \iff (a) : y = \frac{2}{2}x \iff y = x \\ (a') : y = -\frac{b}{a}x \iff (a') : y = -\frac{2}{2}x \iff y = -x. \end{cases}$



3.

Identificăm $a = \sqrt{1} = 1, b = \sqrt{\frac{1}{4}} = \frac{1}{2} \Rightarrow c = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{1 + \frac{1}{4}} = \sqrt{\frac{5}{4}} = \frac{\sqrt{5}}{2}$. Axa focală este Ox .

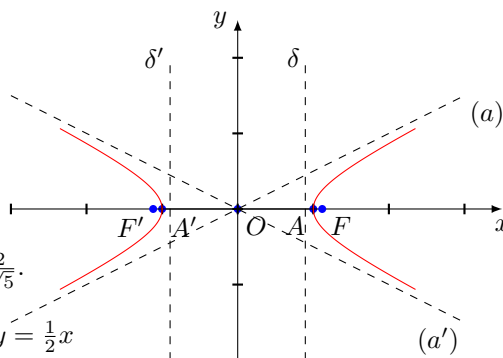
Focarele $F(\frac{\sqrt{5}}{2}, 0), F'(-\frac{\sqrt{5}}{2}, 0)$.

Vârfurile hiperbolei $A(a, 0) = A(1, 0), A'(-a, 0) = A'(-1, 0)$.

Excentricitatea $e = \frac{c}{a} = \frac{\frac{\sqrt{5}}{2}}{1} = \frac{\sqrt{5}}{2}$.

Ecuatiile directoarelor $\begin{cases} \delta : x = \frac{a^2}{c} \iff \delta : x = \frac{1}{\frac{\sqrt{5}}{2}} = \frac{2}{\sqrt{5}} \\ \delta' : x = -\frac{a^2}{c} \iff \delta' : x = -\frac{1}{\frac{\sqrt{5}}{2}} = -\frac{2}{\sqrt{5}}. \end{cases}$

Ecuatiile asimptotelor $\begin{cases} (a) : y = \frac{b}{a}x \iff (a) : y = \frac{1}{1}x \iff y = x \\ (a') : y = -\frac{b}{a}x \iff (a') : y = -\frac{1}{1}x \iff y = -x. \end{cases}$



4.

Identificăm $a = \sqrt{7}, b = \sqrt{9} = 3 \Rightarrow c = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{9 + 7} = \sqrt{16} = 4$. De această dată este vorba despre o hiperbolă conjugată deci axa focală este Oy .

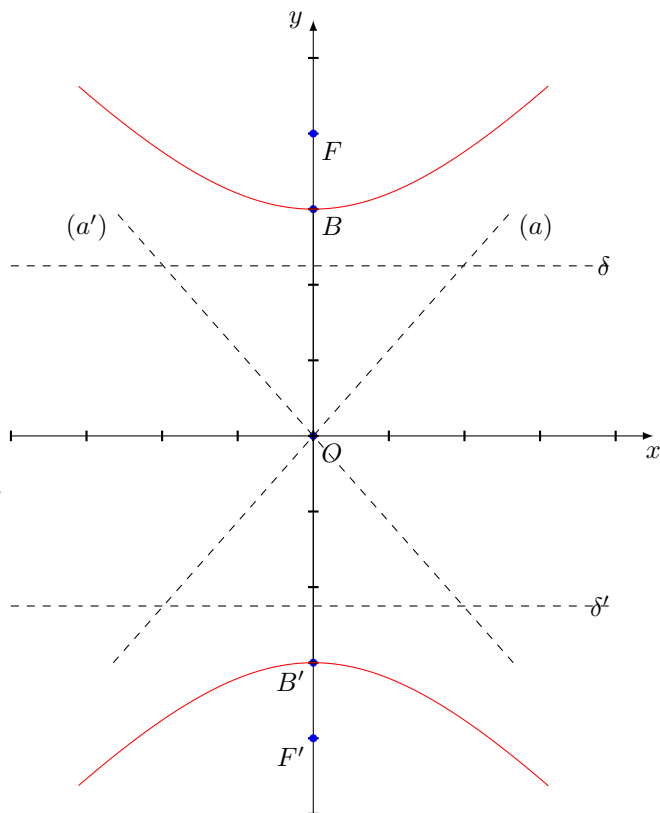
Focarele $F(0, 4), F'(0, -4)$.

Vârfurile hiperbolei $B(0, b) = B(0, 3), B'(0, -b) = B'(0, -3)$.

Excentricitatea $e = \frac{c}{b} = \frac{4}{3}$.

Ecuatiile directoarelor $\begin{cases} \delta : y = \frac{b^2}{c} \iff \delta : y = \frac{9}{4} \\ \delta' : y = -\frac{b^2}{c} \iff \delta' : y = -\frac{9}{4}. \end{cases}$

Ecuatiile asimptotelor $\begin{cases} (a) : y = \frac{b}{a}x \iff (a) : y = \frac{3}{\sqrt{7}}x \\ (a') : y = -\frac{b}{a}x \iff (a') : y = -\frac{3}{\sqrt{7}}x. \end{cases}$



5.

Identificăm $a = \sqrt{64} = 8, b = \sqrt{36} = 6 \Rightarrow c = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{36 + 64} = \sqrt{100} = 10$. Fiind o hiperbolă conjugată, axa focală este Oy .

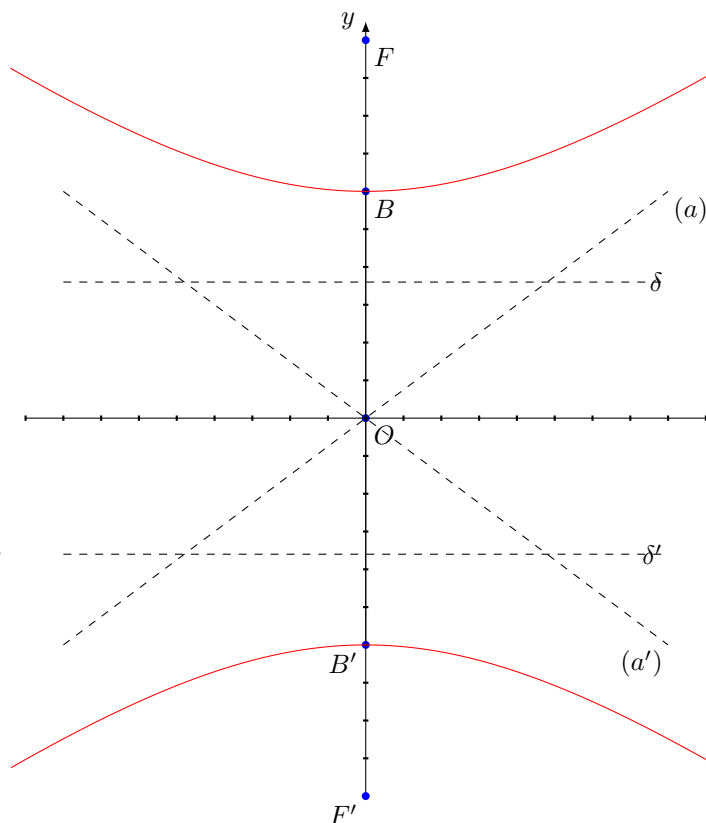
Focarele $F(0, 10), F'(0, -10)$.

Vârfurile hiperbolei $B(0, b) = B(0, 6), B'(0, -b) = B'(0, -6)$.

Excentricitatea $e = \frac{c}{b} = \frac{10}{6} = \frac{5}{3}$.

Ecuatiile directoarelor $\begin{cases} \delta : y = \frac{b^2}{c} \iff \delta : y = \frac{36}{10} = \frac{18}{5} \\ \delta' : y = -\frac{b^2}{c} \iff \delta' : y = -\frac{36}{10} = -\frac{18}{5}. \end{cases}$

Ecuatiile asimptotelor $\begin{cases} (a) : y = \frac{b}{a}x \iff (a) : y = \frac{6}{8}x \\ (a') : y = -\frac{b}{a}x \iff (a') : y = -\frac{6}{8}x. \end{cases}$



6.

Identificăm $a = \sqrt{1} = 1, b = \sqrt{1} = 1 \Rightarrow c = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{1 + 1} = \sqrt{2}$. Este o hiperbolă conjugată deci axa focală este Oy .

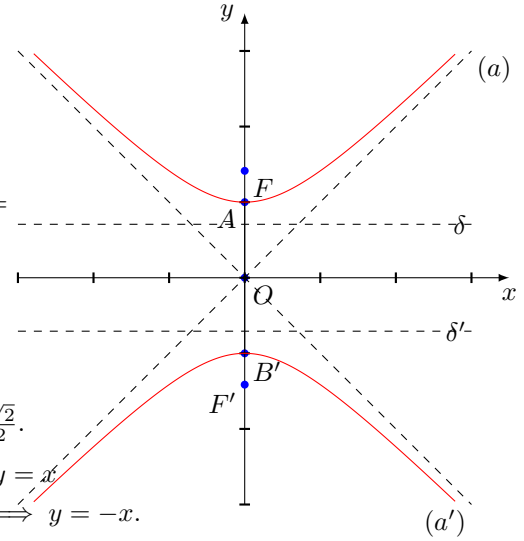
Focarele $F(0, \sqrt{2}), F'(0, -\sqrt{2})$.

Vârfurile hiperbolei $B(0, 1), B'(0, -1) = B'(0, -b)$.

Excentricitatea $e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{2}}{1} = \sqrt{2}$.

Ecuatiile directoarelor $\begin{cases} \delta : y = \frac{b^2}{c} \iff \delta : y = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \delta' : y = -\frac{b^2}{c} \iff \delta' : y = -\frac{1}{\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$

Ecuatiile asimptotelor $\begin{cases} (a) : y = \frac{b}{a}x \iff (a) : y = \frac{1}{1}x \iff y = x \\ (a') : y = -\frac{b}{a}x \iff (a') : y = -\frac{1}{1}x \iff y = -x \end{cases}$



Exercițiul 2. Scrieți ecuațiile hiperbolelor determinate prin condițiile următoare, apoi reprezentați-le grafic:

- hiperbola de vârfuri $A(4, 0), A'(-4, 0)$, ce trece prin $M(2\sqrt{5}, 1)$;
- hiperbola de focare $F(0, 4), F'(0, -4)$, ce trece prin $M(1, \sqrt{15})$;
- hiperbola ce trece prin punctele $M(2\sqrt{2}, 1), N(2\sqrt{5}, 2)$, ce are ca axe de simetrie axele de coordonate și axa transversă xx' ;
- hiperbola de focare $F(3, 0), F'(-3, 0)$, tangentă dreptei $(d) x - y - 1 = 0$;
- hiperbola ce trece prin $M(1, 3)$ și are asimptotele $2x - y = 0$ și $2x + y = 0$.

Soluție:

- Deoarece $A, A' \in Ox \Rightarrow$ axa focală este Ox .

Considerăm ecuația hiperbolei: $\mathcal{H} : \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$.

Deoarece $A \in \mathcal{E} \Rightarrow a = 4$. Ecuația hiperbolei devine: $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \xrightarrow{M \in \mathcal{E}} \frac{20}{16} - \frac{1}{b^2} = 1 \Rightarrow b^2 = \frac{4}{1} \Rightarrow b = 2$. Ecuația finală este:

$$\mathcal{H} : \frac{x^2}{4^2} - \frac{y^2}{2^2} = 1.$$

- Deoarece $F, F' \in Oy$ obținem că axa focală este Oy deci discutăm despre o hiperbolă conjugată.: $\frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2} = 1$.

Deoarece $F, F' \in Oy \Rightarrow c = 16 \Rightarrow a^2 + b^2 = 16$. Ecuația hiperbolei devine: $-\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{16-a^2} = 1 \xrightarrow{M \in \mathcal{H}} -\frac{1}{a^2} + \frac{15}{16-a^2} = 1 \Rightarrow -16 + a^2 + 15a^2 = (16 - a^2)a^2 \Rightarrow a^4 = 16 \Rightarrow a = 2 \Rightarrow b = 2\sqrt{3}$. Se obține

$$-\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{12} = 1.$$

- Deoarece axa transversă este xx' ecuația hiperbolei este de forma $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$. Obținem sistemul $\begin{cases} \frac{8}{a^2} - \frac{1}{b^2} = 1 \\ \frac{20}{a^2} - \frac{4}{b^2} = 1 \end{cases} \Rightarrow \frac{12}{a^2} = 3 \Rightarrow a = 2, b = 1$. Deci ecuația pe care o căutăm este:

$$\mathcal{H} : \frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{1} = 1.$$

- Observăm că în acest caz este vorba despre o hiperbolă cu axa focală Ox . Prin urmare

$$\mathcal{H} : \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1, a^2 + b^2 = 9.$$

Putem rescrie ecuația astfel:

$$\mathcal{H} : \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{9-a^2} = 1.$$

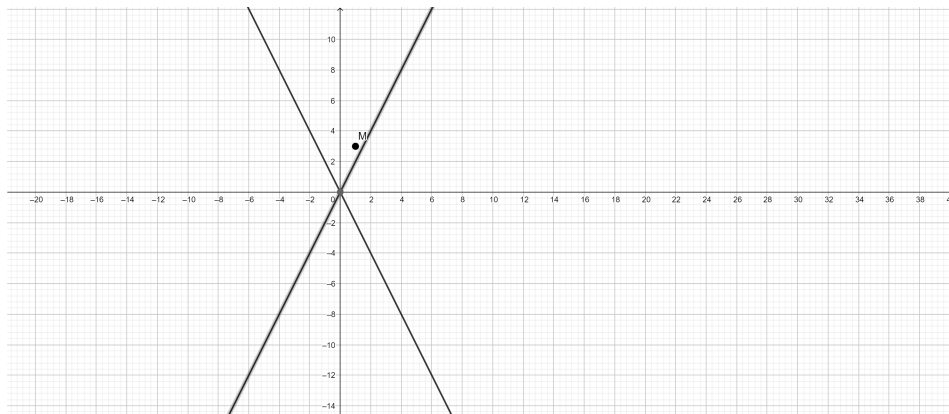
Știm că hiperbola este tangentă dreptei d , deci intersecția dintre dreaptă și hiperbolă este un punct dublu. Vom utiliza această informație: $d \cap \mathcal{H} : \begin{cases} \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{9-a^2} = 1 \\ x = y + 1 \end{cases} \rightarrow \frac{y^2 + 2y + 1}{a^2} - \frac{y^2}{9-a^2} = 1 \rightarrow y^2(9-2a^2) + y(18-2a^2) + 9-10a^2 + a^4 = 0$. Intersecția dintre dreaptă și hiperbolă este un punct dublu dacă și numai dacă discriminantul ecuației scrise anterior este zero. Obținem:

$$\Delta = 8a^6 - 112a^4 + 360a^2 = 0.$$

Deoarece $a \neq 0 \rightarrow a^4 - 14a^2 + 45 = 0 \rightarrow \begin{cases} a^2 = 5 \\ a^2 = 9 \end{cases}$ Vom alege doar $a^2 = 5 \rightarrow b^2 = 4$. Deci

$$\mathcal{H} : \frac{x^2}{5} - \frac{y^2}{4} = 1.$$

5.



Se observă din desen că este vorba despre o hiperbolă conjugată, prin urmare: $\mathcal{H} : \frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2} = 1$. Mai mult: $b = 2a$. Obținem:

$$\frac{y^2}{4a^2} - \frac{x^2}{a^2} = 1.$$

$$\text{Din } M \in \mathcal{H} \rightarrow \frac{9}{4a^2} - \frac{1}{a^2} = 1 \rightarrow \begin{cases} a^2 = \frac{5}{4} \\ b^2 = 5. \end{cases}$$

Exercițiul 3. Fie hiperbola $(\mathcal{H}) x^2 - 2y^2 - 2 = 0$.

1. Determinați ecuațiile tangentei și normalei în punctul $M(2, 1)$ la hiperbolă.
2. Scrieți ecuațiile tangentelor la hiperbolă, paralele cu dreapta $y = 3x - 1$.
3. Scrieți ecuațiile tangentelor la hiperbolă duse din punctul exterior $P(0, 1)$.

Soluție:

1. Să observăm că $M \in \mathcal{H}$.

Ecuația tangentei în punctul M se obține prin dedublare și este dată de: $t_M : 2x - 2y - 2 = 0 \iff t_M : x - y - 1 = 0$.

Normala în punctul M , n_M , este dată de: $\begin{cases} M \in n_M, \\ n_M \perp t_M \end{cases} \Rightarrow n_M : \frac{x-2}{1} = \frac{y-1}{-1} \iff n_M : -x + 2 = y - 1 \iff n_M : x + y - 3 = 0$.

2. Fie $t \parallel y = 3x - 1 \rightarrow m_t = 3$. Prin urmare vom căuta drepte de forma $t : y = 3x + n$ a căror intersecție cu hiperbola $\mathcal{H}$ să fie un punct dublu. $t \cap \mathcal{H} : \begin{cases} y = 3x + n \\ x^2 - 2y^2 - 2 = 0 \end{cases} \rightarrow 17x^2 + 12nx + 2n^2 + 2 = 0$. Avem că $t \cap \mathcal{H}$ = punct dublu dacă și numai dacă $\Delta = 8n^2 - 136 = 0 \rightarrow n = \pm\sqrt{17}$. Obținem:

$$t_{1,2} : \begin{cases} y = 3x + \sqrt{17} \\ y = 3x - \sqrt{17} \end{cases}.$$

3. Considerăm o dreaptă care trece prin P de pantă m : $\delta : y - 1 = mx \Rightarrow y = mx + 1$ Punem condiția ca această dreaptă să fie tangentă hiperbolei adică sistemul $\begin{cases} \frac{x^2}{2} - y^2 - 1 = 0 \\ y = mx + 1 \end{cases}$ să aibă soluție un punct dublu. $\begin{cases} \frac{x^2}{2} - (mx + 1)^2 - 1 = 0 \\ y = mx + 1 \end{cases} \Rightarrow$
- $$\begin{cases} x^2 - 2m^2x^2 - 4mx - 4 = 0 \\ y = mx + 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (1 - 2m^2)x^2 - 4mx - 4 = 0 \\ y = mx + 1 \end{cases} .$$
- Soluția dublă se obține dacă discriminantul ecuației de gradul 2 se anulează: $16m^2 + 16(1 - 2m^2) = 0 \Rightarrow m^2 = 1 \Rightarrow m_1 = -1, m_2 = 1$.
Obținem ecuațiile tangentelor $\delta_1 : y = x + 1, \delta_2 = -x + 1$.

Exercițiul 4. Fie hiperbola $(\mathcal{H}) \frac{x^2}{3} - y^2 - 1 = 0$.

1. Determinați ecuațiile tangentei și normalei în punctul $M(\sqrt{6}, 1)$ la hiperbolă.
2. Scrieți ecuațiile tangentelor la hiperbolă, paralele cu dreapta $y = 2x$.
3. Scrieți ecuațiile tangentelor la hiperbolă duse din punctul exterior $P(1, 2)$.

Soluție:

1. Să observăm că $M \in \mathcal{E}$.

Ecuația tangentei în punctul M se obține prin dedublare și este dată de: $t_M : x \cdot 1 + 2y \cdot \sqrt{3} - 4 = 0 \iff t_M : x + 2y\sqrt{3} - 4 = 0$.

Normala în punctul M , n_M , este dată de: $\begin{cases} M \in n_M, \\ n_M \perp t_M \end{cases} \Rightarrow n_M : \frac{x-1}{1} = \frac{y-\sqrt{3}}{2\sqrt{3}} \iff n_M : 2x\sqrt{3} - 2\sqrt{3} = y - \frac{\sqrt{3}}{2} \iff$

$$n_M : 4x\sqrt{3} - 2y - 3\sqrt{3} = 0.$$

2. Dreptele pe care le căutăm vor avea panta 2 deci vor fi de forma $t_{1,2} : y = 2x + n$. Dreptele menționate sunt tangente la hiperbolă dacă intersecția cu aceasta va fi un punct dublu:

$$t_{1,2} \cap \mathcal{H} : \begin{cases} \frac{x^2}{3} - y^2 - 1 = 0 \\ y = 2x + n \end{cases} \rightarrow 11x^2 + 12xn + 3n^2 + 3 = 0.$$

Intersecția dintre dreaptă și hiperbolă este un punct dublu dacă și numai dacă $\Delta = 12n^2 - 132 = 0 \rightarrow n = \pm\sqrt{11}$.
Obținem:

$$\begin{cases} t_1 : y = 2x + \sqrt{11} \\ t_2 : y = 2x - \sqrt{11} \end{cases} .$$

3. Scriem ecuația unei drepte care trece prin punctul P și are pantă m . Fie $\delta : y - 2 = m(x - 1)$. Delta este tangentă hiperbolei dacă intersecția dintre aceasta și hiperbolă este un punct dublu.

$$\delta \cap \mathcal{H} : \begin{cases} \frac{x^2}{3} - y^2 - 1 = 0 \\ y = m(x - 1) + 2 \end{cases} \rightarrow x^2(1 - 3m^2) + x(6m^2 - 6m) - 3m^2 + 6m - 15 = 0.$$

$$\text{Avem } \Delta = 0 \iff 11m^2 + 2m - 5 = 0 \rightarrow m_1 = \frac{-2 + 4\sqrt{14}}{11}, m_2 = \frac{-2 - 4\sqrt{14}}{11}.$$

Exercițiul 5. Determinați ecuațiile hiperbolei raportată la axele ei de simetrie, a cărei tangentă în $M(2\sqrt{3}, 2\sqrt{3})$ este $2\sqrt{3}x - \sqrt{3}y - 6 = 0$.

Soluție: Avem informația că M aparține hiperbolei, deci ecuația tangentei $t_M : \frac{\sqrt{3}}{3}x - \frac{\sqrt{3}}{6}y - 1 = 0$ în M a fost obținută prin dedublare.

$$t_M : x_M \cdot \frac{1}{2\sqrt{3}} \frac{\sqrt{3}}{3}x - y_M \frac{1}{2\sqrt{3}} \frac{\sqrt{3}}{6}y - 1 = 0 \rightarrow \mathcal{H} : \frac{x^2}{6} - \frac{y^2}{12} - 1 = 0. \quad (7)$$

Exercițiul 6. Se dă hiperbola $3x^2 - y^2 - 3 = 0$. Calculați unghiul dintre asimptotele sale.

Soluție: Avem asimptotele $a_1 : y = \sqrt{3}x$, $a_2 : y = -\sqrt{3}x$. Deci: $\bar{a}_1 = (1, \sqrt{3})$, $\bar{a}_2 = (1, -\sqrt{3})$. Fie $\theta = \widehat{a_1, a_2}$. Deci

$$\cos \theta = \frac{|\langle \bar{a}_1, \bar{a}_2 \rangle|}{\|\bar{a}_1\| \cdot \|\bar{a}_2\|} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2} \rightarrow \theta = \frac{\pi}{3}.$$

Exercițiul 7. (Proprietatea optică a hiperbolei) Tangenta și normala la hiperbolă, într-un punct oarecare M al ei, sunt respectiv bisectoarea interioară și bisectoarea exterioară a unghiului $\widehat{FMF'}$.

Temă:

Exercițiul 8. Dreptele $x + y - 1 = 0$, $5x - 4\sqrt{2}y - 2 = 0$ sunt tangente la hiperbola $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$. Să se scrie ecuația hiperbolei.

Soluție: Deoarece $y = -x + 1$ este tangentă la hiperbolă rezultă că intersecția dintre ea și hiperbolă este un punct dublu:

$$\begin{cases} y = -x + 1 \\ \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \end{cases} \rightarrow x^2(b^2 - a^2) + 2a^2x - a^2 - a^2b^2 = 0 \rightarrow \Delta = 0 \rightarrow a^2 - b^2 = 1. \quad (8)$$

Analog, deoarece $5x - 4\sqrt{2}y - 2 = 0$ este tangentă hiperbolei obținem $25a^2 - 32b^2 = 4$. Avem sistemul:

$$\begin{cases} a^2 - b^2 = 1 \\ 25a^2 - 32b^2 = 4 \end{cases} \rightarrow a^2 = 4, b^2 = 3 \rightarrow \mathcal{H} : \frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{3} = 1.$$

2 Parabola

Cadrul de lucru este un plan afin euclidian orientat $\mathcal{E}^2 = \left(E, \left(\vec{E}, \langle, \rangle\right), \Phi\right)$.

Definiția 2. În planul E se consideră o dreaptă δ și un punct $F \notin \delta$. Se numește **parabolă** locul geometric al punctelor din planul E situate la egală distanță de punctul F și de dreapta δ :

$$\mathcal{P} = \{P \in E \mid d(P, F) = d(P, \delta)\}. \quad (9)$$

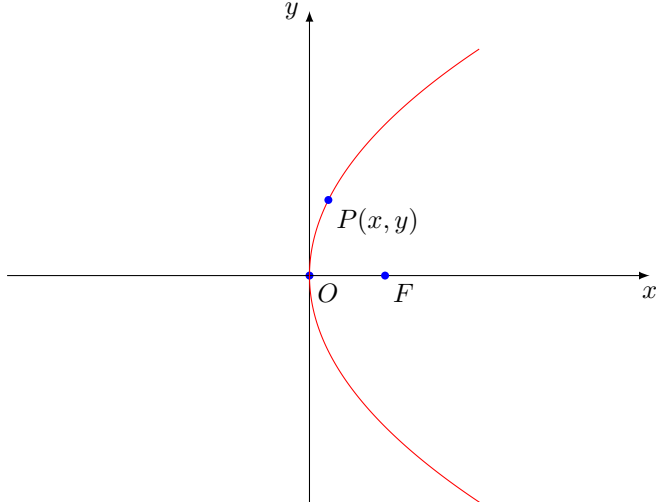
Punctul F se numește **focarul** parabolei și dreapta δ **directoarea** parabolei.

Spunem că parabola are **excentricitatea** $e = 1$.

Pentru a ne convinge că locul geometric definit anterior este o mulțime nevidă, fie l perpendiculara din F pe δ și E piciorul acesteia.

Notăm cu O mijlocul segmentului (FE) . Evident O este un punct al parabolei, numit **vârful parabolei**.

Fie $p = d(F, \delta)$. Numim **p parametrul parabolei**.



2.1 Ecuațiile parabolei

Pentru a putea determina ecuațiile parabolei considerăm reperul cu originea în O , semiaxa pozitivă ($Ox = (OF$ și $Oy \perp Ox$ și orientată astfel încât să obținem un reper pozitiv. În raport cu acest reper focarul are coordonatele $F(\frac{p}{2}, 0)$ și directoarea are ecuația $\delta : x = -\frac{p}{2}$.

2.1.1 Ecuația canonică

Punctul $P(x, y)$ aparține parabolei dacă și numai dacă $\sqrt{(x - \frac{p}{2})^2 + y^2} = |x + \frac{p}{2}|$. Ridicând aceasta ecuație la patrat obținem

$$y^2 - 2px = 0. \quad (10)$$

Reciproc, putem să arătăm că orice punct ale cărui coordonate verifică ecuația (10) aparține parabolei.

Observăm din (10) că Ox este **axă de simetrie** pentru parabolă iar Oy este tangentă la parabolă în vârful ei. Definim interiorul parabolei

$$\mathcal{Int} \mathcal{P} = \left\{ P(x, y) \mid y^2 - 2px < 0 \right\}$$

și exteriorul elipsei

$$\mathcal{Ext} \mathcal{P} = \left\{ P(x, y) \mid y^2 - 2px > 0 \right\}.$$

2.1.2 Ecuațiile explicite

Pentru a reprezenta grafic parabola determinăm ecuațiile ei explicite.

În primul rând, pentru ca $P(x, y)$ să aparțină parabolei este necesar ca $x \geq 0$. În acest caz $|y| = \sqrt{2px}$.

2.1.3 Ecuațiile parametrice

O parametrizare simplă pentru parabolă se obține astfel:

$$\begin{cases} x = \frac{t^2}{2p}, \\ y = t, \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}.$$

2.2 Intersecția dintre o dreaptă și o parabolă

Punctele de intersecție dintre parabolă de ecuație $y^2 - 2px = 0$ și dreapta $(d) y = mx + n$ au abscisele soluții ale ecuației

$$m^2 x^2 + 2(mn - p)x + n^2 = 0.$$

În funcție de semnul discriminantului $\Delta = p^2 - 2pmn$ obținem că dreapta d este exterioară, tangentă sau secantă parabolei.

Mai exact, pentru $m \neq 0$ avem $\Delta = 0 \Leftrightarrow n = \frac{p}{2m}$.

Deci, dat m nenul, există o singură tangentă la parabolă, de panta m și aceasta are ecuația

$$y = mx + \frac{p}{2m}. \quad (11)$$

2.2.1 Ecuația tangentei de pantă dată la parabolă

Ecuația tangentei de pantă dată la hiperbolă este

$$y = mx + \frac{p}{2m}. \quad (12)$$

2.2.2 Tangenta la hiperbolă într-un punct al ei

Tangenta în $P_0(x_0, y_0) \in \mathcal{P}$ la parabolă se obține prin dedublare în P_0 din ecuația parabolei

$$yy_0 - p(x + x_0) = 0, \quad (13)$$

Pentru a demonstra că dreapta de ecuație (13) este tangenta parabolei, rezolvăm sistemul format din ecuația parabolei și cea a dreptei d_0 . Folosind faptul că $y^2 = 2px$, rezultă că intersecția dintre dreaptă și parabolă este un punct dublu și anume P_0 .

2.2.3 Normala la parabolă într-un punct al ei

Din ecuația (13) deducem că panta tangentei la parabolă în P_0 este $\frac{p}{y_0}$, deci panta normalei la parabolă în P_0 este $-\frac{y_0}{p}$. Astfel, ecuația normalei în $P_0(x_0, y_0) \in \mathcal{P}$ la parabolă are ecuația

$$y - y_0 = -\frac{y_0}{p}(x - x_0).$$

2.2.4 Tangentele la parabolă ce trec printr-un punct exterior acesteia

Fie acum $P(x_0, y_0) \in \text{Ext } \mathcal{P}$ și (d) $y - y_0 = m(x - x_0)$ o dreaptă arbitrară prin P_0 .

Impunem ca d să fie tangentă parabolei. Deci înlocuim $x = \frac{y - y_0 + mx_0}{m}$ în ecuația parabolei obținând o ecuație de gradul doi în y : $my^2 - 2py + (2py_0 - mx_0) = 0$. Discriminantul acesteia trebuie să fie zero, condiție echivalentă cu

$$2m^2x_0 - 2y_0m + p = 0. \quad (14)$$

Deoarece P este exterior elipsei $\Leftrightarrow y_0^2 - 2px_0 > 0$, rezultă că ecuația (14) are discriminant strict pozitiv, deci are două soluții reale distincte, m_1 și m_2 .

Rezultă că există două tangente duse din P_0 la parabolă, de ecuații

$$y - y_0 - m_1(x - x_0) = 0, \quad y - y_0 - m_2(x - x_0) = 0. \quad (15)$$

Exerciții

Exercițiul 9. Pentru următoarele parabole, determinați coordonatele focarelor, vârfurilor, excentricitatea, ecuațiile directoarelor apoi reprezentați-le grafic într-un sistem de coordonate ales convenabil.

1. $y^2 = 4x$;

5. $x^2 = 4y$;

9. $y^2 = 8x - 2$;

2. $y^2 = 20x$;

6. $x^2 = 5y$;

10. $y^2 = 6x + 4$.

3. $y^2 = -6x$;

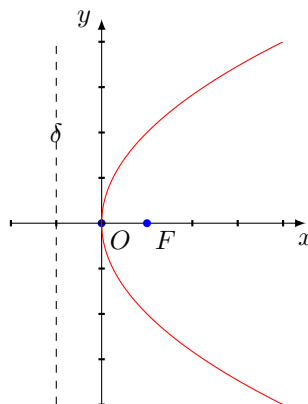
7. $x^2 = -16y$;

4. $y^2 = -x$;

8. $x^2 = -3y$;

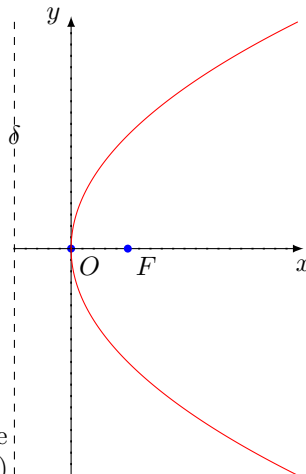
Soluție:

1. Parabolă



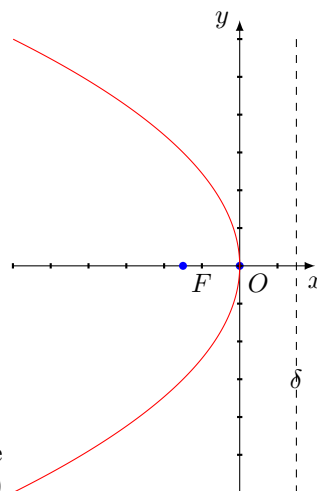
Se observă că este de tipul $y^2 = 2px$, $x \geq 0$ și are ca axă de simetrie Ox . Parametrul este $p = 2$, deci focarul este $F(p/2, 0) = F(1, 0)$ și directoarea: $\delta : x = -\frac{p}{2} = -1$. Punct $A(1, 2) \in \mathcal{P}$.

2.



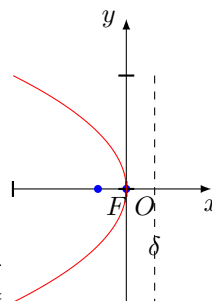
Parabola este de tipul $y^2 = 2px$, $x \geq 0$ și are ca axă de simetrie Ox . Parametrul este $p = 10$, deci focarul este $F(p/2, 0) = F(5, 0)$ și directoarea are ecuația: $\delta : x = -\frac{p}{2} = -5$.

3.



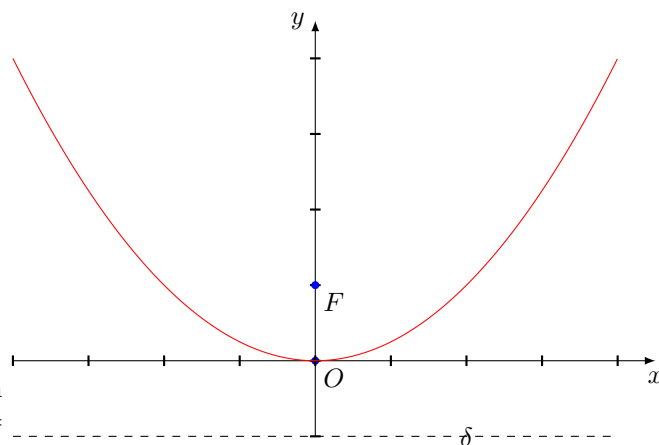
Parabola este de tipul $y^2 = -2px$, $x \leq 0$ și are ca axă de simetrie Ox . Parametrul este $p = 3$, deci focarul este $F(-\frac{p}{2}, 0) = F(-1.5, 0)$ și directoarea are ecuația: $\delta : x = \frac{p}{2} = 1.5$.

4.



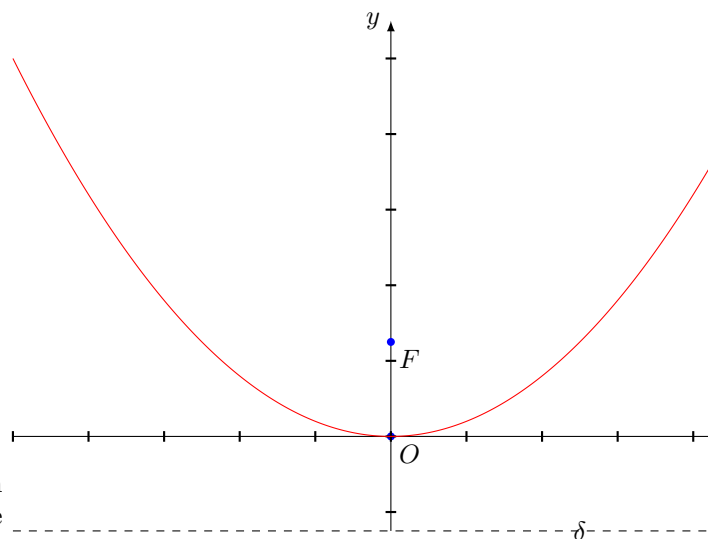
Parabola este de tipul $y^2 = -2px$, $x \leq 0$ și are ca axă de simetrie Ox . Parametrul este $p = \frac{1}{2}$, deci focarul este $F(-p/2, 0) = F(-0.25, 0)$ și directoarea are ecuația: $\delta : x = \frac{p}{2} = 0.25$.

5.



Parabola este de tipul $x^2 = 2py$, deci parabola este situată în semiplanul, $y \geq 0$ și are ca axă de simetrie Oy . Parametrul este $p = 2$, deci focarul este $F(0, p/2) = F(0, 1)$ și directoarea are ecuația: $\delta : y = \frac{p}{2} = -1$.

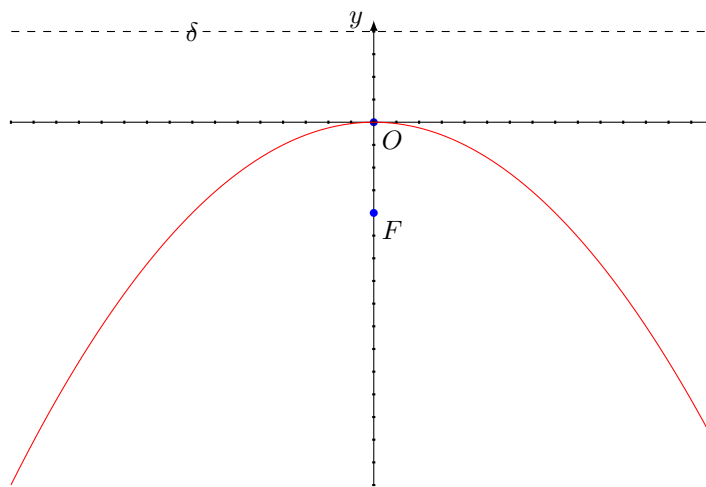
6.



Parabola este de tipul $x^2 = 2py$, deci parabola este situată în semiplanul, $y \geq 0$ și are ca axă de simetrie Oy . Parametrul este $p = 2.5$, deci focarul este $F(0, p/2) = F(0, 1.25)$ și directoarea are ecuația: $\delta : y = \frac{p}{2} = -1.25$.

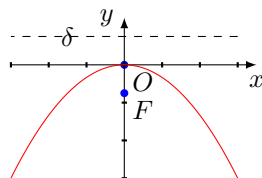
7.

Parabola este de tipul $x^2 = -2py$, $y \leq 0$ și are ca axă de simetrie Oy . Parametrul este $p = 8$, deci focarul este $F(0, -p/2) = F(0, -4)$ și directoarea are ecuația: $\delta : y = \frac{p}{2} = 4$.



8.

Parabola este de tipul $x^2 = -2py$, deci parabola este situată în semiplanul, $y \leq 0$ și are ca axă de simetrie Oy . Parametrul este $p = 1.5$, deci focarul este $F(0, -p/2) = F(0, -0.75)$ și directoarea are ecuația: $\delta : y = \frac{p}{2} = 0.75$.

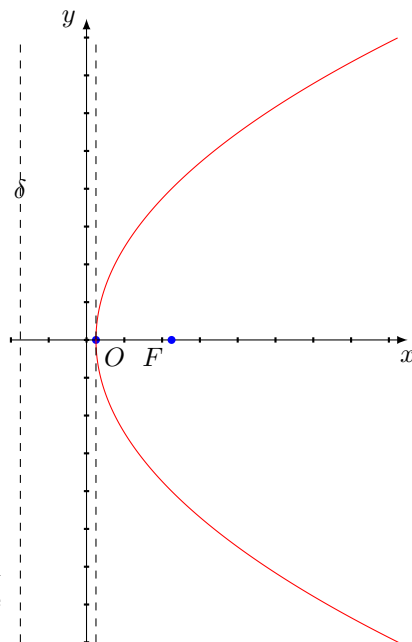


9.

Considerăm următoarea schimbare de reper $\begin{cases} x' = x - \frac{1}{4} \\ y' = y. \end{cases}$

Cu schimbările făcute anterior parabola devine $y'^2 = 8x'$. Acum noua parabolă este de tipul $y'^2 = 2px'$, $x' \geq 0$ și are ca axă de simetrie $O'x'$. Parametrul este $p = 4$, deci focarul este $F(p/2, 0) = F(2, 0)$ și directoarea are ecuația: $\delta : x' = -\frac{p}{2} = -2$.

Prin întoarcerea la coordonatele inițiale se obține $x \geq 0.25$ și are ca axă de simetrie Ox . Vârful este $O'(0.25, 0)$, focarul este $F(2 + 0.25, 0) = F(2.25, 0)$ și directoarea are ecuația: $\delta : x = -2 + 0.25 = -1.75$.

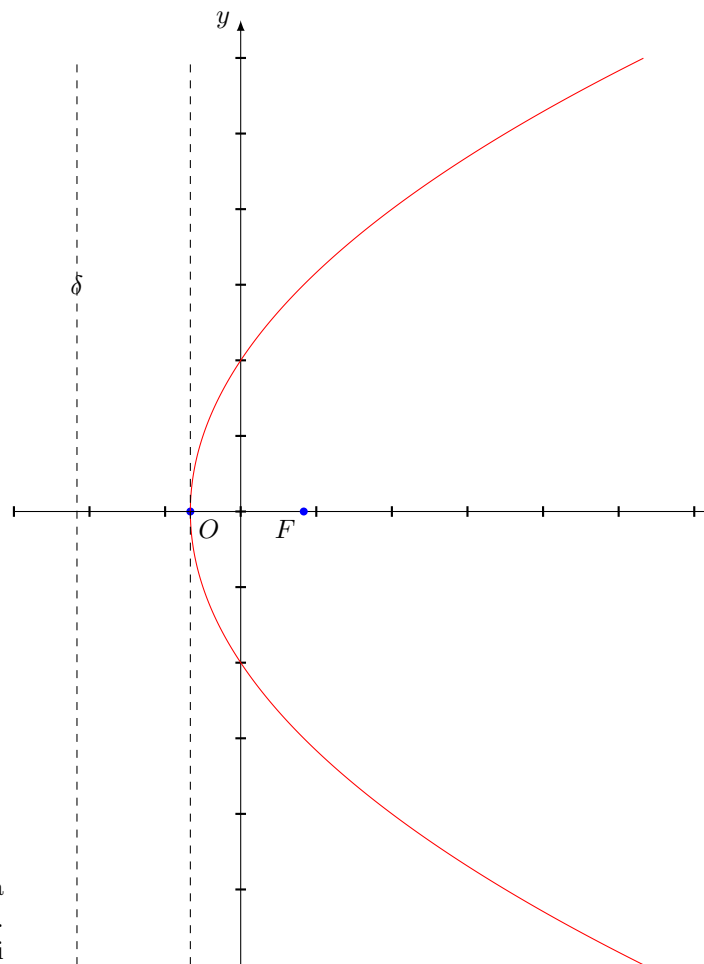


10.

Considerăm $\begin{cases} x' = x + \frac{2}{3} \\ y' = y. \end{cases}$

Cu noile coordonate expresia parabolei este $y'^2 = 6x'$. Parabola este de tipul $y'^2 = 2px'$, $x' \geq 0$ și are ca axă de simetrie $O'x'$. Parametrul este $p = 3$, deci focarul este $F(p/2, 0) = F(1.5, 0)$ și directoarea are ecuația: $\delta : y' = -\frac{p}{2} = -1.5$.

În reperul inițial, parabola este situată în semiplanul, $x \geq -\frac{2}{3}$ și are ca axă de simetrie Ox . Vârful este $O'(-\frac{2}{3}, 0)$, focarul este $F(\frac{3}{2} - \frac{2}{3}, 0) = F(\frac{5}{6}, 0)$ și directoarea are ecuația: $\delta : x = -\frac{3}{2} - \frac{2}{3} = -\frac{13}{6}$.



Exercițiul 10. Scrieți ecuațiile parabolilor determinate prin condițiile următoare, apoi reprezentați-le grafic:

1. parabola cu focarul $F(3, 0)$ și directoarea $(\delta) x = -3$;
2. parabola cu focarul $F(-2, 0)$ și directoarea $(\delta) x = 2$;
3. parabola cu focarul $F(0, 4)$ și directoarea $(\delta) y = -4$;
4. parabola cu focarul $F(0, -1)$ și directoarea $(\delta) y = 1$;
5. parabola cu focarul $F(2, 1)$ și directoarea $(\delta) 3x + 4y - 1 = 0$;
6. parabola cu axa Ox ca axa de simetrie, tangenta în varf axa Oy , știind că e tangenta dreptei $y - 2x - 2 = 0$.

Soluție:

1. Fie $\mathcal{P}$ parabola dată. Din faptul că F focar și δ directoare, rezultă că parabola are ecuația de forma $y^2 = 2px$ cu parametrul $p = 6$. Obținem ecuația canonică: $y^2 = 12x$.
2. Fie $\mathcal{P}$ parabola dată. Din faptul că F focar și δ directoare, rezultă că parabola are ecuația de forma $y^2 = -2px$ cu parametrul $p = 4$. Obținem ecuația canonică: $y^2 = -8x$.
3. Fie $\mathcal{P}$ parabola dată. Din faptul că F focar și δ directoare, rezultă că parabola are ecuația de forma $x^2 = 2py$ cu parametrul $p = 8$. Obținem ecuația canonică: $x^2 = 16y$.
4. Fie $\mathcal{P}$ parabola dată. Din faptul că F focar și δ directoare, rezultă că parabola are ecuația de forma $x^2 = -2py$ cu parametrul $p = 2$. Obținem ecuația canonică: $x^2 = -4y$.

5. Conform definiției parabolei, $P \in \mathcal{P}$ dacă $d(P, F) = d(P, \delta)$. Obținem: $\sqrt{(x-2)^2 + (y-1)^2} = \frac{|3x+4y-1|}{\sqrt{9+16}} \Rightarrow 25(x^2 - 4x + 4 + y^2 - 2y + 1) = (3x + 4y - 1)^2 \Rightarrow 16x^2 + 9y^2 - 24xy - 94x - 42y + 124 = 0$.
6. Deoarece parabola are axa de simetrie, obținem că parabola poate fi de tipul $y^2 = 2px$ sau $y^2 = -2px$. Punem condiția ca dreapta să fie tangentă parabolei. Obținem că ecuația $(2x+2)^2 = \pm 2px$ trebuie să aibă soluție unică: $2x^2 + 4x + 2 = \pm px \Rightarrow 2x^2 + (4 \pm p)x + 2 = 0 \Rightarrow (4 \pm p)^2 - 16 = 0 \Rightarrow p_1 = 8, p_2 = p_3 = 0, p_4 = -8$.

Exercițiul 11. Fie parabola $(\mathcal{P}) y^2 - 8x = 0$.

1. Scrieți ecuațiile tangentei și normalei în $M(2, 4)$ la parabolă.
2. Determinați ecuația tangentei la parabolă paralelă cu dreapta $y = 2x$.
3. Scrieți ecuațiile tangentelor la parabolă duse din punctul exterior $P(-1, 1)$.

Soluție:

Parametrul este $p = 4$.

1. Să observăm că $M \in \mathcal{P}$.

Ecuația tangentei în punctul M se obține prin dedublare și este dată de: $t_M : y \cdot 4 - 4(x+2) = 0 \iff t_M : -4x + 4y - 8 = 0 \iff -x + y - 2 = 0$.

Normala în punctul M , n_M , este dată de: $\begin{cases} M \in n_M, \\ n_M \perp t_M \end{cases} \Rightarrow n_M : \frac{x-2}{-1} = \frac{y-4}{1} \iff n_M : x - 2 = -y + 4 \iff n_M : x + y - 6 = 0$.

2. Dorim să determinăm ecuația tangentelor paralele cu $y = 2x$. Aceste tangente vor avea aceeași pantă cu dreapta menționată anterior. Deci vom căuta drepte de forma $t : y = 2x + n$. Identificăm valoarea lui n punând condiția ca $t \cap \mathcal{P}$ să fie un punct dublu.

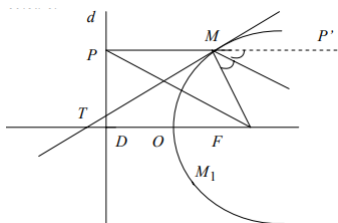
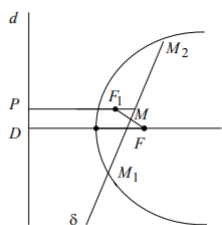
$$t \cap \mathcal{P} : \begin{cases} y = 2x + n \\ y^2 - 8x = 0 \end{cases} \rightarrow 4x^2 + (4n - 8)x + n^2 = 0 \quad (16)$$

Avem că $t \cap \mathcal{P} = \text{punct dublu}$ dacă și numai dacă $\Delta = (4n - 8)^2 - 16n^2 = 0 \rightarrow -64n + 64 = 0 \rightarrow n = 1 \rightarrow t : y = 2x + 1$.

3. Considerăm o dreaptă care trece prin P : $y - y_0 = m(x - x_0) \Rightarrow y - 1 = m(x + 1)$.

Obținem ecuația pantelor: $2m^2x_0 - 2y_0m + p = 0 \Rightarrow -2m^2(-1) + 2m + 8 = 0 \Rightarrow m_{1,2} = \frac{y_0 \pm \sqrt{y_0^2 - 2px_0}}{2x_0} = \frac{1 \pm \sqrt{1+8}}{-2} \Rightarrow m_1 = -2, m_2 = 1$. Obținem ecuațiile tangentelor $t_1 : y = -2x - 1, t_2 : y = x + 2$.

Exercițiul 12. (Proprietatea optică a a parabolei) Tangenta și normala la parabolă, într-un punct oarecare M al ei, sunt respectiv bisectoarea interioară și bisectoarea exterioară a unghiului $\widehat{FMP}$, cu $MP \perp \delta$, $P \in \delta$, δ fiind directoarea parabolei.



Fie o secantă δ care taie parabola în punctele M_1 și M_2 . Notăm cu F_1 simetricul lui F în raport cu δ . Perpendiculara din F_1 pe directoare intersectează δ într-un punct M care este interior segmentului M_1M_2 . Pentru a vedea acest lucru considerăm cercul cu centrul tangent directoarei. Acesta va trece prin F și F_1 . Deci este situat de aceeași parte a directoarei ca și focarul F și apoi avem în vedere că $MF = MF_1 < MP$. Presupunem că secanta devine tangentă. Atunci $M_1 = M_2 = M$ și F_1 coincide cu P . Putem deci conchide că simetricile focarului parabolei față de tangentele la parabolă se află pe directoare. Tangenta în M este bisectoarea unghiului $\widehat{FMP}$. Normala la parabolă în punctul M este bisectoarea unghiului $\widehat{FMP'}$.