

Rezumat elipsă

Tipul ecuației	Axa focală	Vârfuri	Focare	Directoare	Grafic
$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \ a > b$	Axa focală Ox	$A(a, 0), A'(-a, 0), B(0, b), B'(0, -b)$	$F(c, 0), \ F'(-c, 0), c^2 = a^2 - b^2,$	$\delta_{1,2} : x = \pm \frac{a^2}{c}$	
$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \ a < b$	Axa focală Oy	$B(0, b), B'(0, -b), A(a, 0), A'(-a, 0)$	$F(0, c), \ F'(0, -c), c^2 = b^2 - a^2,$	$\delta_{1,2} : y = \pm \frac{b^2}{c}$	

Exerciții elipsă

EXERCITIUL 1. Pentru următoarele elipse, determinați coordonatele focarelor, vârfurilor, excentricitatea, ecuațiile directoarelor, apoi reprezentați-le grafic într-un sistem de coordonate ales convenabil.

- (1) (a) $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{4} - 1 = 0;$
 (b) $\frac{x^2}{25} + y^2 = 1$
 (c) $\frac{x^2}{9} + \frac{y^4}{4} - 1 = 0$
 (d) $\frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{25} - 1 = 0$
 (e) $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{25} - 1 = 0;$
 (f) $x^2 + \frac{y^2}{4} - 1 = 0;$
 (g) $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} - 1 = 0$
 (h) $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{36} - 1 = 0$
- (2) (a) $4x^2 + 9y^2 - 36 = 0;$
 (b) $9x^2 + 25y^2 - 1 = 0;$

EXERCITIUL 2. Fie elipsa $(\mathcal{E}) \frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{1} - 1 = 0$.

- (1) Determinați ecuațiile tangentei și normalei în punctul $M\left(3, \frac{\sqrt{7}}{4}\right)$ la elipsă.
- (2) Scrieți ecuațiile tangentelor la elipsă, paralele cu dreapta $y = 4x$.
- (3) Scrieți ecuațiile tangentelor la elipsă duse din punctul exterior $P(8, 1)$.

EXERCITIUL 3. Fie elipsa $(\mathcal{E}) \frac{x^2}{1} + \frac{y^2}{4} - 1 = 0$.

- (1) Determinați ecuațiile tangentei și normalei în punctul $M\left(\frac{1}{2}, \sqrt{3}\right)$ la elipsă.
- (2) Scrieți ecuațiile tangentelor la elipsă, paralele cu dreapta $y = x$.
- (3) Scrieți ecuațiile tangentelor la elipsă duse din punctul exterior $P(3, 1)$.

EXERCITIUL 4. Fie elipsa $(\mathcal{E}) \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} - 1 = 0$.

- (1) Determinați ecuațiile tangentei și normalei în punctul $M\left(\frac{2\sqrt{5}}{3}, 2\right)$ la elipsă.
- (2) Scrieți ecuațiile tangentelor la elipsă, paralele cu dreapta $y = 3x + 2$.
- (3) Scrieți ecuațiile tangentelor la elipsă duse din punctul exterior $P(4, 3)$.

EXERCITIUL 5. Scrieți ecuațiile elipselor cu axa focală Ox date prin elementele:

- (1) $F'(-1, 0)$, $F(1, 0)$ și semi-axa mare 5.
- (2) axa mare 10 și distanța dintre focare 8.
- (3) axa mică 16 și focarul $F(3, 0)$.
- (4) semi-axele 4 și 2.
- (5) distanța dintre focare 6 și semi-axa mare 5.
- (6) semi-axa mare 25 și excentricitatea 0.6.

EXERCITIUL 6. Să se determine semi-axele, focarele și excentricitatea elipselor, și să se scrie ecuațiile lor parametrice:

- (1) $\frac{x^2}{9} + y^2 = 1,$
- (2) $9x^2 + 25y^2 = 225,$
- (3) $3x^2 + 4y^2 = 12,$
- (4) $x^2 + 2y^2 - 6 = 0,$
- (5) $25x^2 + 169y^2 = 225.$

EXERCITIUL 7. Să se afle punctele de intersecție ale elipsei cu dreapta în cazurile

- (1) $\frac{x^2}{4} + y^2 - 1 = 0$ și $2x + 2y - 3 = 0,$
- (2) $5x^2 + 8y^2 - 77 = 0$ și $x + 2y - 7 = 0.$

EXERCITIUL 8. Să se scrie ecuațiile tangentelor la elipsa $2x^2 + y^2 - 6 = 0$ dusă din punctul $M(2, 3)$.

Rezumat hiperbolă

Tipul ecuației	Axa focală	Vârfuri	Focare	Directoare și asimptote	Grafic
$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$	Axa focală Ox	$A(a, 0), A'(-a, 0)$	$F(c, 0), F'(-c, 0)$, unde $c^2 = a^2 + b^2$	$\delta_{1,2} : x = \pm \frac{a^2}{c}, a_{1,2} : y = \pm \frac{b}{a}x$	
$\frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2} = 1$	axa focală Oy	$B(0, b), B'(0, -b)$	$F(0, c), F'(0, -c)$ unde $c^2 = a^2 + b^2$	$\delta_{1,2} : y = \pm \frac{b^2}{c}, a_{1,2} : x = \pm \frac{a}{b}y$	

Exerciții hiperbolă

EXERCITIUL 9. Pentru următoarele hiperbole, determinați coordonatele focarelor, vârfurilor, excentricitatea, ecuațiile direc-toarelor, ecuațiile asimptotelor apoi reprezentați-le grafic într-un sistem de coordonate ales convenabil.

- (1) (a) $\frac{x^2}{5} - \frac{y^2}{4} - 1 = 0$;
 (b) $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{4} - 1 = 0$;
 (c) $x^2 - 4y^2 - 1 = 0$;
- (2) (a) $\frac{y^2}{9} - \frac{x^2}{7} - 1 = 0$;
 (b) $\frac{y^2}{36} - \frac{x^2}{64} - 1 = 0$;
 (c) $y^2 - x^2 - 1 = 0$;

EXERCITIUL 10. Scrieți ecuațiile hiperbolelor determinate prin condițiile următoare, apoi reprezentați-le grafic:

- (1) hiperbola de vârfuri $A(4, 0)$, $A'(-4, 0)$, ce trece prin $M(2\sqrt{5}, 1)$;
- (2) hiperbola de focare $F(0, 4)$, $F'(0, -4)$, ce trece prin $M(1, \sqrt{15})$;
- (3) hiperbola ce trece prin punctele $M(2\sqrt{2}, 1)$, $N(2\sqrt{5}, 2)$, ce are ca axe de simetrie axele de coordonate și axa transversă xx' ;
- (4) hiperbola de focare $F(3, 0)$, $F'(-3, 0)$, tangentă dreptei (d) $x - y - 1 = 0$;
- (5) hiperbola ce trece prin $M(1, 3)$ și are asimptotele $2x - y = 0$ și $2x + y = 0$.

- (1) Fie $\mathcal{H}$ hiperbola cu $A, A', M \in \mathcal{H}$. Din faptul că $A, A' \in Ox \Rightarrow$ axa focală este Ox .

Ecuația canonică:: Fie ecuația hiperbolei: $\frac{x^2}{a} - \frac{y^2}{b} = 1$.

Deoarece $A \in \mathcal{E} \Rightarrow a = 4$. Ecuația hiperbolei devine: $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \xrightarrow{M \in \mathcal{E}} \frac{20}{16} - \frac{1}{b^2} = 1 \Rightarrow b^2 = \frac{4}{1} \Rightarrow b = 2$. Ecuația devine: $\frac{x^2}{4^2} - \frac{y^2}{2^2} = 1$.

Ecuațiile explicite:: Fie ecuația $|y| = \frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2}$. Deoarece $A \in \mathcal{H} \Rightarrow a = 4$. Ecuația hiperbolei devine: $|y| = \frac{b}{4}\sqrt{x^2 - 16} \xrightarrow{M \in \mathcal{E}} 1 = \frac{b}{4}\sqrt{20 - 16} \Rightarrow b = \frac{2}{1}$. Ecuația devine: $|y| = \frac{2}{4}\sqrt{x^2 - 16}$.

Ecuațiile parametrice:: Ecuațiile devin: $\begin{cases} x = -4 \cosh t, \\ y = 2 \sinh t, \end{cases} \quad x \leq -4 \quad \text{și} \quad \begin{cases} x = 4 \cosh t, \\ y = 2 \sinh t, \end{cases} \quad x \geq 4.$

EXERCITIUL 11. Fie hiperbola ($\mathcal{H}$) $\frac{x^2}{3} - y^2 - 1 = 0$.

- (1) Determinați ecuațiile tangentei și normalei în punctul $M(\sqrt{6}, 1)$ la hiperbolă.
- (2) Scrieți ecuațiile tangentelor la hiperbolă, paralele cu dreapta $y = 2x$.
- (3) Scrieți ecuațiile tangentelor la hiperbolă duse din punctul exterior $P(1, 2)$.

EXERCITIUL 12. Determinați ecuațiile hiperbolei raportată la axele ei de simetrie, a cărei tangentă în $M(2\sqrt{3}, 2\sqrt{3})$ este $2\sqrt{3}x - \sqrt{3}y - 6 = 0$.

EXERCITIUL 13. Să se scrie ecuațiile hiperbolelor având focarele pe Ox pentru care se cunosc următoarele

- (1) semiaxele sunt $a = 4$ și $b = 3$.
- (2) $a = 6$ și $e = \frac{5}{4}$.
- (3) distanța dintre vârfuri 6 și cea dintre focare 10.

EXERCITIUL 14. Să se scrie ecuațiile tangentelor duse din $M(2, 1)$ la hiperbola $x^2 - 4y^2 - 1 = 0$.

Rezumat parabolă

Tipul ecuației	Semiplan	Focar	Directoare	Grafic
$y^2 = 2px$	$x \geq 0$	$F(\frac{p}{2}, 0)$	$\delta : x = -\frac{p}{2}$	
$y^2 = -2px$	$x \leq 0$	$F(-\frac{p}{2}, 0)$	$\delta : x = \frac{p}{2}$	
$x^2 = 2py$	$y \geq 0$	$F(0, \frac{p}{2})$	$\delta : y = -\frac{p}{2}$	
$x^2 = -2py$	$y \leq 0$	$F(0, -\frac{p}{2})$	$\delta : y = \frac{p}{2}$	

EXERCIȚIUL 15. Pentru următoarele parabole, determinați coordonatele focarelor, vârfurilor, excentricitatea, ecuațiile directoarelor apoi reprezentați-le grafic într-un sistem de coordonate ales convenabil.

- (1) (a) $y^2 = 4x$;
(b) $y^2 = 20x$;
(c) $y^2 = -6x$;
(d) $y^2 = -x$;
- (2) (a) $x^2 = 4y$;
(b) $x^2 = 5y$;
(c) $x^2 = -16y$;
(d) $x^2 = -3y$;

EXERCIȚIUL 16. Fie parabola ($\mathcal{P}$) $y^2 - 8x = 0$.

- (1) Scrieți ecuațiile tangentei și normalei în $M(2, 4)$ la parabolă.
- (2) Determinați ecuația tangentei la parabolă paralelă cu dreapta $y = 2x$.
- (3) Scrieți ecuațiile tangentelor la parabolă duse din punctul exterior $P(-1, 1)$.

EXERCIȚIUL 17. Să se scrie ecuația unei parabole cu vârful în originea reperului știind că

- (1) focarul este $F(1, 0)$.
- (2) focarul este $F(0, 2)$.
- (3) axa de simetrie este Ox , $p = 0.5$ și este situată în semiplanul stâng.

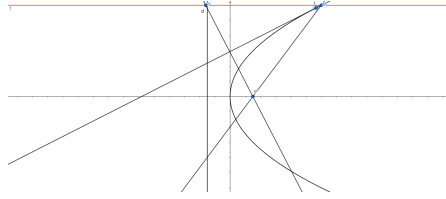
EXERCIȚIUL 18. Să se scrie ecuația tangentei și ecuația normalei la parabola $y^2 = 3x$ în punctul de abscisă $x = 3$ și ordonată $y = -3$.

Exerciții rezolvate:

EXERCITIUL 19. (Proprietatea optică a parabolei) Tangenta și normala la parabolă, într-un punct oarecare M al ei, sunt respectiv bisectoarea interioară și bisectoarea exterioară a unghiului $\widehat{FMN}$, cu $MN \perp \delta$, $N \in \delta$, δ fiind directoarea parabolei.

Fără a restrânge generalitatea, presupunem că parabola are ecuația: $y^2 = 2px$ și $M(x_0, y_0)$ are $y_0 > 0$. Directoarea are ecuație: $\delta : x = -\frac{p}{2}$.

Tangenta în M are ecuația $t_M; yy_0 = p(x + x_0)$.



Să identificăm coordonatele punctului $N = \delta \cap MN$, $MN \perp \delta$.

$$\begin{cases} x = -\frac{p}{2} \\ \frac{x - x_0}{1} = \frac{y - y_0}{0} \end{cases} \rightarrow N\left(-\frac{p}{2}, y_0\right).$$

Din definiția parabolei rezultă că triunghiul MNF este isoscel, deci pentru a demonstra că tangenta în M este bisectoarea unghiului $\widehat{FMN}$ este suficient să demonstrăm că tangenta este mediana corespunzătoare laturii NF . Mijlocul laturii NF are coordonatele $\left(0, \frac{y_0}{2}\right)$.

Să verificăm apartenența acestuia la tangentă:

$$\frac{y_0^2}{2} = px_0,$$

adevărat deoarece $M \in \mathcal{P}$. Deci tangenta este bisectoarea interioară. Dat fiind faptul că normala este perpendiculară pe tangentă aceasta va fi bisectoarea exterioară a unghiului studiat.

EXERCITIUL 20. Să se determine locul geometric al punctelor din plan care au proprietatea că tangentele la elipsa

$$\mathcal{E} : \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$$

prin aceste puncte, sunt perpendiculare.

Fie $M(\alpha, \beta)$ un punct arbitrar din plan care satisface condițiile menționate. Atunci dreptele care trec prin M de pantă m sunt:

$$\delta : y - \beta = m(x - \alpha).$$

Dreapta δ este tangentă la elipsă dacă și numai dacă intersecția dintre dreaptă și elipsă este un punct dublu:

$$(1) \quad d \cap \mathcal{E} : \begin{cases} \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1 \\ y - \beta = m(x - \alpha) \end{cases} \rightarrow \frac{x^2}{4} - \frac{m^2(x^2 - 2\alpha x + \alpha^2) + \beta^2 + 2\beta m(x - \alpha)}{9} = 1$$

Obținem următoarea ecuație:

$$x^2(9 - 4m^2) + x(8\alpha m^2 - 8\beta m) - 4m^2\alpha^2 - 4\beta^2 - 8\alpha\beta - 36 = 0$$

Obținem un punct dublu dacă discriminatul ecuației precedente este zero:

$$\Delta = 0 \rightarrow (4 - \alpha^2)m^2 + 2\alpha\beta m + 9 - \beta^2 = 0.$$

Privim ecuația de mai sus ca pe o ecuație de gradul doi în m cu discriminantul

$$\Delta_1 = 4\alpha^2\beta^2 - 4(4 - \alpha^2)(9 - \beta^2) = 4\alpha^2\beta^2 - 144 + 16\beta^2 - 4\alpha^2\beta^2 + 36\alpha^2 = 4(9\alpha^2 + 4\beta^2 - 36).$$

Este evident că acest ultim discriminant este pozitiv. Deci obținem două soluții distincte:

$$(2) \quad \begin{cases} m_1 = \frac{-\alpha\beta + \sqrt{9\alpha^2 + 4\beta^2 - 36}}{4 - \alpha^2} \\ m_2 = \frac{-\alpha\beta - \sqrt{9\alpha^2 + 4\beta^2 - 36}}{4 - \alpha^2} \end{cases}$$

Punem condiția ca cele două tangente să fie perpendiculare, deci:

$$m_1 m_2 = -1.$$

Folosind relațiile lui Viète obținem:

$$\frac{9 - \beta^2}{4 - \alpha^2} = -1 \rightarrow \alpha^2 + \beta^2 = 13,$$

deci locul geometric este cercul cu centrul în origine de rază $r = \sqrt{13}$.

EXERCITIUL 21. Să se arate că tangentele la o hiperbolă formează cu asimptotele triunghiuri de arie constantă.

Soluție: Fie $M(\operatorname{acosht}, \operatorname{bsinht})$, $t \in \mathbb{R}$, un punct mobil al hiperbolei de ecuație

$$\mathcal{H} : \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Ecuația tangentei în M la hiperbolă se obține prin dedublare

$$T_M : \frac{x \cdot \cosh t}{a} - \frac{y \cdot \sinh t}{b} = 1.$$

Punctele de intersecție ale acestei tangente cu asimptotele $y = \pm \frac{b}{a}x$ sunt

$$\begin{cases} M_1(ae^t, be^t) \\ M_2(ae^{-t}, -be^{-t}) \end{cases}$$

Aria triunghiului OM_1M_2 este:

$$(3) \quad A_{\Delta OM_1M_2} = \frac{1}{2} \left| \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ ae^t & be^t & 1 \\ ae^{-t} & -be^{-t} & 1 \end{vmatrix} \right| = ab = cst.$$

EXERCITIUL 22. Se consideră următoarea hiperbolă dată prin ecuația canonică $\mathcal{H} : \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$. Să se demonstreze că $d(O, P_1) = d(O, P_2) = d(O, P_3) = d(O, P_4) = a$, unde P_1, P_2, P_3, P_4 sunt punctele de intersecție dintre directoarele și asimptotele hiperbolei, iar O este originea sistemului de coordonate. Pentru cazul în care excentricitatea $e = 2$ determinați unghiul dintre asimptotele hiperbolei și calculați produsul distanțelor de la focare la tangenta la hiperbolă în punctul $P(\sqrt{2}, \sqrt{3})$ de pe hiperbolă.

Soluție: Amintim mai întâi formulele de calcul pentru directoare și asimptote:

- (1) directoarele $\delta_{1,2} : x = \pm \frac{a^2}{c}$
- (2) asimptotele $a_{1,2} : y = \pm \frac{b}{a}x$

Vom determina pe rând punctele de intersecție dintre directoare și asimptote:

$$(4) \quad P_1 = \delta_1 \cap a_1 : \begin{cases} x = \frac{a^2}{c} \\ y = \frac{b}{a}x \end{cases} \Rightarrow P_1 \left(\frac{a^2}{c}, \frac{ab}{c} \right)$$

și

$$(5) \quad P_2 = \delta_2 \cap a_2 : \begin{cases} x = -\frac{a^2}{c} \\ y = -\frac{b}{a}x \end{cases} \Rightarrow P_2 \left(-\frac{a^2}{c}, -\frac{ab}{c} \right)$$

Analog se obțin punctele $P_3 = \delta_1 \cap a_2$, $P_3 \left(\frac{a^2}{c}, -\frac{ab}{c} \right)$ și $P_4 = \delta_2 \cap a_1$, $P_4 \left(-\frac{a^2}{c}, \frac{ab}{c} \right)$. Folosind formula de calcul pentru distanța dintre două puncte vom avea:

$$d(O, P_1) = d(O, P_2) = d(O, P_3) = d(O, P_4) = \sqrt{\left(\left(\frac{a^2}{c} - 0 \right)^2 + \left(\frac{ab}{c} - 0 \right)^2 \right)} = \sqrt{\frac{a^4 + a^2b^2}{c^2}} = a$$

Pentru calcularea unghiului vom folosi mai întâi datele din enunț:

$$e = 2 \rightarrow \frac{c}{a} = 2 \rightarrow c = 2a \rightarrow a^2 + b^2 = 4a^2 \rightarrow b^2 = 3a^2 \Rightarrow \frac{b}{a} = \sqrt{3}.$$

Dacă $\frac{b}{a} = \sqrt{3}$ cele două asimptote sunt:

$$(a_1) : y = \frac{b}{a}x \rightarrow \sqrt{3}x - y = 0, \quad \overline{a_1} = (1, \sqrt{3})$$

$$(a_2) : y = -\frac{b}{a}x \rightarrow \sqrt{3}x + y = 0, \quad \overline{a_2} = (-1, \sqrt{3})$$

Vom calcula unghiul folosind formula de calcul pentru unghiul dintre două drepte:

$$\cos \theta = \frac{|\langle \overline{a_1}, \overline{a_2} \rangle|}{|\overline{a_1}| |\overline{a_2}|} \rightarrow \cos \theta = \frac{2}{4} = \frac{1}{2} \rightarrow \theta = \frac{\pi}{3}.$$

Pentru $e = 2$ am obținut ecuația hiperbolei de tipul

$$\mathcal{H} : \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{3a^2} = 1$$

Deoarece $P(\sqrt{2}, \sqrt{3}) \in \mathcal{H} \Rightarrow a = 1$, deci

$$\mathcal{H} : x^2 - \frac{y^2}{3} - 1 = 0$$

Putem scrie acum ecuația tangentei în punctul P:

$$t_P : \sqrt{2}x - \frac{\sqrt{3}}{3}y - 1 = 0.$$

Cele două focare vor avea coordonatele $F(2, 0)$, $F'(-2, 0)$.

Să calculăm acum distanțele de la cele două focare la tangenta în punctul P .

$$d(F, t_P) = \frac{|\sqrt{2} \cdot 2 - 1|}{\sqrt{2 + \frac{1}{3}}} = \frac{2\sqrt{2} - 1}{\sqrt{\frac{7}{3}}}$$

$$d(F', t_P) = \frac{|-\sqrt{2} \cdot 2 - 1|}{\sqrt{2 + \frac{1}{3}}} = \frac{2\sqrt{2} + 1}{\sqrt{\frac{7}{3}}}$$

Prin urmare produsul căutat este:

$$d(F, t_P) \cdot d(F', t_P) = \frac{2\sqrt{2} - 1}{\sqrt{\frac{7}{3}}} \cdot \frac{2\sqrt{2} + 1}{\sqrt{\frac{7}{3}}} = \frac{(2\sqrt{2} - 1)(2\sqrt{2} + 1)}{\frac{7}{3}} = 7 \cdot \frac{3}{7} = 3.$$

EXERCIȚIUL 23. Din punctul $M_0(x_0, y_0)$ se construiesc două tangente la parabola $y^2 = 2px$. Să se scrie ecuația dreptei care unește punctele de tangență.

Soluție: Fie $M_1(x_1, y_1)$, $M_2(x_2, y_2)$ punctele de tangență cu parabola a tangentelor duse din M_0 . Scriem ecuațiile tangentelor:

$$\begin{cases} M_0M_1 : yy_1 = p(x + x_1) \\ M_0M_2 : yy_2 = p(x + x_2) \end{cases}$$

Deoarece M_0 aparține celor două tangente scrise anterior obținem:

$$(6) \quad \begin{cases} y_0y_1 = p(x_0 + x_1) \\ y_0y_2 = p(x_0 + x_2) \end{cases}$$

Aceste două egalități arată că punctele $M_1(x_1, y_1)$, $M_2(x_2, y_2)$ aparțin dreptei

$$y_0y = p(x_0 + x).$$

Cum două puncte distincte determină o singură dreaptă, ecuația $y_0y = p(x_0 + x)$ este ecuația dreptei ce unește punctele de tangență.

EXERCIȚIUL 24. Din punctul $\left(\frac{9}{2}, -2\right)$ sunt duse tangentele la parabola $P : y^2 = 6x$. Să se calculeze lungimea coardei care unește punctele de tangență.

Soluție: Folosind problema precedentă obținem că dreapta care unește punctele de tangență este:

$$d : -6y = 3\left(x + \frac{9}{2}\right) \rightarrow 2x + 4y - 9 = 0.$$

Intersectând dreapta cu parabola obținem:

$$d \cap P : \begin{cases} y^2 = 6x \\ 2x + 4y - 9 = 0 \end{cases} \rightarrow M\left(\frac{27}{2}, -9\right), N\left(\frac{3}{2}, 3\right).$$

Lungimea coardei căutate este

$$MN = 6\sqrt{5}.$$

Conice pe ecuații generale

Cadrul de lucru al acestei secțiuni este un spațiu afin euclidian de dimensiune 2. O hipercuadrică în $\mathcal{E}^2$ se numește **conică**. Fie Γ o conică ce are în raport cu reperul ortonormat $\mathcal{R} = \{O; \bar{i}, \bar{j}\}$ ecuația:

$$(7) \quad \Gamma : H(x, y) := a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{10}x + 2a_{20}y + a_{00} = 0.$$

Amintim că $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \in \mathcal{S}_2(\mathbb{R})$, $B = (a_{10} \ a_{20})$, $D = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{10} \\ a_{21} & a_{22} & a_{20} \\ a_{10} & a_{20} & a_{00} \end{pmatrix} \in \mathcal{S}_3(\mathbb{R})$.

Mai mult, am demonstrat că $I := \text{Trace}A = a_{11} + a_{22}$, $\delta = \det A = a_{11}a_{22} - a_{12}^2$ și $\Delta = \det D$ sunt invarianti ortogonali ai conicei.

Pe lângă invariantii ortogonali amintiți deja mai introducem și un invariant centro-ortogonal.

Numarul real $\Delta_1 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{10} \\ a_{10} & a_{00} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{22} & a_{20} \\ a_{20} & a_{00} \end{vmatrix}$, adică suma minorilor diagonali de ordinul 2 ai lui D , este un **invariant centro-ortogonal** al lui Γ , adică rămâne neschimbat la o rotație de repere carteziane ortonormate. Dacă în plus $\delta = \Delta = 0$, atunci Δ_1 este chiar un invariant ortogonal al conicei.

În continuare vom clasifica conicele spațiului afin euclidian $\mathcal{E}^2$ în funcție de invariantii ortogonali și centro-ortogonali introduși.

TEOREMA 1. (Teorema de clasificare izometrică a conicelor) *Invariantii ortogonali și centro-ortogonali ai unei conice permit determinarea naturii conicei ca în tabelul următor:*

Nr.	δ	Δ	$I\Delta$	Δ_1	Genul conicei	Tipul conicei	Denumirea conicei
1	> 0	$\neq 0$	< 0		eliptic	nede generat	elipsa
2	> 0	$\neq 0$	> 0		eliptic	nede generat	elipsa imaginara
3	> 0	0			eliptic	de generat	punct dublu
4	< 0	$\neq 0$			hiperbolic	nede generat	hiperbola
5	< 0	0			hiperbolic	de generat	drepte concurente
6	0	$\neq 0$			parabolic	nede generat	parabola
7	0	0		< 0	parabolic	de generat	drepte paralele
8	0	0		0	parabolic	de generat	dreapta dubla
9	0	0		> 0	parabolic	de generat	drepte imaginare paralele

EXERCITIUL 25. Fie E^2 un plan afin euclidian înzestrat cu un reper ortonormat $R = \{O, \bar{i}, \bar{j}\}$.

- Fie $\beta \subset E^2$ dată prin ecuația:

$$(\beta) : \frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$$

Identificați conica și elementele sale și reprezentați grafic.

- Scrieți ecuația cercului al cărui centru se află pe axa Ox și care trece prin punctele $O(0, 0)$ și $P(2, 2\sqrt{2})$.
- Fie hiperbola $\mathcal{G}$ dată prin ecuația generală

$$\mathcal{G} : -3x^2 + 4xy - 4x - 4 = 0$$

- 1 Calculați invariantii conicei și motivați că este o hiperbolă.
- 2 Determinați toate elementele reperului canonic și scrieți ecuațiile schimbării de coordonate la schimbarea de repere $R \rightarrow R_C$.
- 3 Scrieți ecuația canonică a acesteia și precizați toate elementele hiperbolei în raport cu reperul canonic R_C .
- 4 Scrieți ecuațiile axelor de simetrie și a asimptotelor hiperbolei în raport cu R .
- 5 Reprezentați grafic conica $\mathcal{G}$.

Soluție:

a Este vorba despre o elipsa cu axa focală Ox . Din ecuația canonică: $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$ deducem

$$a = 5, b = 3, c = \sqrt{a^2 - b^2} = 4, F(4, 0), F'(-4, 0), A(5, 0), A'(-5, 0), B(0, 3), B'(0, -3)$$

cele patru vârfuri.

Directoarele elipsei sunt perpendiculare pe Ox și au ecuațiile: $x = \pm \frac{a^2}{c} \rightarrow x = \frac{25}{4}$, respectiv $x = -\frac{25}{4}$. Excentricitate elipsei este $e = \frac{c}{a} = \frac{4}{5} \in (0, 1)$.

- Deoarece centrul cercului se află pe axa Ox putem presupune din start că $\Omega(x_0, 0)$. Ecuația generală a cercului este:

$$\mathcal{C}: (x - x_0)^2 + y^2 = R^2$$

Necunoscutele pe care dorim să le determinăm sunt x_0 respectiv R . Ele pot fi obținute impunând condiția ca $O, P \in \mathcal{C}$.

$$\begin{cases} x_0^2 = R^2 \\ (2 - x_0)^2 + 8 = R^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_0^2 = R^2 \\ (2 - x_0)^2 + 8 = x_0^2 \rightarrow x_0 = R = 3 \end{cases}$$

Deci ecuația cercului este

$$\mathcal{C}: (x - 3)^2 + y^2 = 9.$$

- b Determinăm mai întâi invariantii conice:

$$A = \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}, I = -3, \delta = -4$$

Matricea:

$$D = \begin{pmatrix} -3 & 2 & -2 \\ 2 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & -4 \end{pmatrix}$$

are determinantul $\Delta = \det D = -2(-8) = 16$.

Deoarece $\delta < 0$ și $\Delta \neq 0$ conica $\mathcal{G}$ este o **hiperbolă**. Vom identifica elementele necesare reprezentării acesteia:

- (1) Dorim să construim reperul $\mathcal{R}' = \{O, \bar{i}', \bar{j}'\}$, unde $\bar{i}'$, respectiv $\bar{j}'$ vectorii proprii ai matricii A .

- (2) **Vectorii și valorile proprii** Căutăm mai întâi valorile proprii asociate matricii A . Ele sunt soluții ale ecuației caracteristice $p(\lambda) = \det(A - \lambda I_2) = 0 \rightarrow \lambda^2 - I\lambda + \delta = 0$. În cazul de față ecuația precedentă devine: $\lambda^2 + 3\lambda - 4 = 0$ cu soluțiile $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = -4$.

Vectorii proprii asociați primei valori proprii vor fi obținuți din $(A - \lambda I_2)U = O$, unde

$$U = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Vom avea pentru $\lambda_1 = 1$ următoarele ecuații:

$$\begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -4 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow 2x - y = 0 \rightarrow y = 2x$$

Am obținut $U(1) = \{\alpha \bar{i} + 2\alpha \bar{j} \mid \alpha \in \mathbb{R}\}$. Alegem $\bar{i}' = \frac{1}{\sqrt{5}}(\bar{i} + 2\bar{j})$. Pentru $\bar{j}'$, fie calculăm $U(-4)$, fie îl alegem astfel încât $\langle \bar{i}', \bar{j}' \rangle = 0, \|\bar{j}'\| = 1, (\bar{i}', \bar{j}') \circ (\bar{i}, \bar{j})$. Fie deci:

$$\bar{j}' = \frac{1}{\sqrt{5}}(-2\bar{i} + \bar{j})$$

$$\text{Oservăm că } \det S = \frac{1}{5} \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 1.$$

- (3) Facem schimbarea de repere asociată rotației de mai sus:

$$\mathcal{R} = \{O, \bar{i}, \bar{j}\} \rightarrow \mathcal{R}' = \{O, \bar{i}', \bar{j}'\}$$

Obținem:

$$X = SX' \rightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{\sqrt{5}}(x' - 2y') \\ y = \frac{1}{\sqrt{5}}(2x' + y') \end{cases}$$

În acest nou reper membrul stâng al ecuației conice noastre devine:

$$-3x^2 + 4xy - 4x - 4 = -\frac{3}{5}(x' - 2y')^2 + \frac{4}{5}(x' - 2y')(2x' + y') - \frac{4}{\sqrt{5}}(x' - 2y') - 4$$

(8)

$$\begin{aligned} &= x'^2 - 4y'^2 - \frac{4}{\sqrt{5}}(x' - 2y') - 4 \\ &= \left(x' - \frac{2}{\sqrt{5}}\right)^2 - 4\left(y' - \frac{1}{\sqrt{5}}\right)^2 - 4 \end{aligned}$$

Deci ecuația va fi:

$$\left(x' - \frac{2}{\sqrt{5}}\right)^2 - 4\left(y' - \frac{1}{\sqrt{5}}\right)^2 - 4 = 0$$

Considerăm acum translația de repere:

$$\mathcal{R}' = \{O, \bar{i}', \bar{j}'\} \rightarrow \mathcal{R}'' = \{C, \bar{i}', \bar{j}'\}.$$

$$\begin{cases} x'' = x' - \frac{2}{\sqrt{5}} \\ y'' = y' - \frac{1}{\sqrt{5}} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x' = x'' + \frac{2}{\sqrt{5}} \\ y' = y'' + \frac{1}{\sqrt{5}} \end{cases}$$

În raport cu reperul $\mathcal{R}'' = \{C, \bar{i}', \bar{j}'\}$ hiperbola va avea ecuația:

$$x'' - 4y'' - 4 = 0, \text{ care este } \lambda_1 (x'')^2 + \lambda_2 (y'')^2 + \frac{\Delta}{\delta} = 0.$$

Centrul rotației: Obținem:

$$\begin{cases} x''_C = 0 \\ y''_C = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x'_C = \frac{2}{\sqrt{5}} \\ y'_C = \frac{1}{\sqrt{5}} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x_C = 0 \\ y_C = 1 \end{cases}$$

Analog, centrul de simetrie este soluția sistemului:

$$\begin{cases} \frac{1}{2} \frac{\partial H}{\partial x}(x, y) = 0 \\ \frac{1}{2} \frac{\partial H}{\partial y}(x, y) = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 6x - 4y + 4 = 0 \\ 4x = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 1 \end{cases}$$

Am obținut $C(0, 1)$.

- (4) Scriem ecuațiile axelor reperului. Cele două axe vor avea ecuațiile:

$$\begin{cases} C_{x''} = C + [\bar{i}'] \\ C_{y''} = C + [\bar{j}'] \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \frac{x-0}{1} = \frac{y-1}{2} \\ \frac{x-0}{-2} = \frac{y-1}{1} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} C_{x''} : 2x - y + 1 = 0 \\ C_{y''} : x + 2y - 2 = 0 \end{cases}$$

- (5) Asimptotele hiperbolei $\bar{a} = x\bar{i} + y\bar{j}$ sunt drepte ce trec prin C , având vectorii directori $\bar{a}_1, \bar{a}_2$, unde $\bar{a}_1$, respectiv $\bar{a}_2$, se obțin din ecuație $U^t A U = 0$.

$$\begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 0 \rightarrow (-3x + 2y \quad 2x) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 0 \rightarrow -3x^2 + 2xy + 2xy = 0 \rightarrow 3x^2 - 4xy = 0$$

Dacă notăm $\frac{x}{y} = t$, ecuația precedentă devine $3t^2 - 4t = 0$, cu soluțiile $t_1 = 0$ și $t_2 = \frac{4}{3}$.

Pentru $t = 0 \rightarrow x = 0$, deci direcția asimptotei va fi $\bar{a}_1 = \bar{j}$.

Pentru $t_2 = \frac{4}{3} = \frac{x}{y} \rightarrow 3x - 4y = 0$ alegem $\bar{a}_2 = 4\bar{i} + 3\bar{j}$. **Ecuațiile asimptotelor:**

$$\begin{cases} a_1 = C + [\bar{a}_1] \\ a_2 = C + [\bar{a}_2] \end{cases} \rightarrow \begin{cases} a_1 : \frac{x-0}{0} = \frac{y-1}{1} \\ a_2 : \frac{x-0}{4} = \frac{y-1}{3} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ 3x - 4y + 4 = 0 \end{cases}$$

Alternativ scriem ecuațiile asimptotelor $y'' = \pm \frac{b}{a} x''$ care după înlocuire ne conduc către:

$$\begin{cases} x'' - 2y'' = 0 \\ x'' + 2y'' = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x' - 2y' = 0 \\ x' + 2y' - \frac{4}{\sqrt{5}} = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ 3x - 4y + 4 = 0 \end{cases}$$

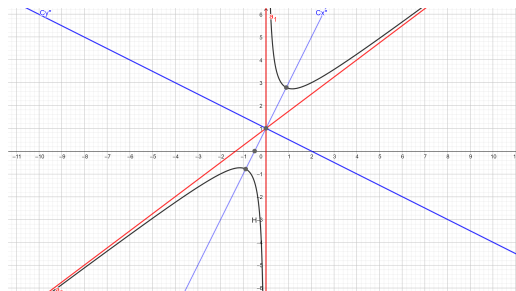
Axa focală este $C_{x''}$. În acest reper avem $A(2, 0)$, $A'(-2, 0)$, $F(\sqrt{5}, 0)$, $F'(-\sqrt{5}, 0)$.

- (6) **Intersecția cu axele de coordonate:**

$$\mathcal{G} \cap O_x : \begin{cases} y = 0 \\ -3x^2 + 4xy - 4x - 4 = 0 \end{cases} \rightarrow 3x^2 + 4x + 4 = 0, \Delta < 0 \rightarrow \mathcal{G} \cap O_x = \emptyset$$

$$\mathcal{G} \cap O_y : \begin{cases} x = 0 \\ -3x^2 + 4xy - 4x - 4 = 0 \end{cases} \rightarrow -4 = 0(F), \rightarrow \mathcal{G} \cap O_y = \emptyset$$

- (7) **Reprezentarea grafică:**



(1)

$$5x^2 + 6xy + 5y^2 - 16x - 16y - 1 = 0.$$

(a) Calculăm invariantii conicei pentru a determina tipul ei:

Identificăm: $A = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$ și $D = \begin{pmatrix} 5 & 3 & -8 \\ 3 & 5 & -8 \\ -8 & -8 & -1 \end{pmatrix}$.

Calculăm invariantii necesari identificării conicei:: $I = \text{tr}(A) = 5 + 5 = 10$,

$$\delta = \det(A) = 5 \cdot 5 - 3 \cdot 3 = 16,$$

$$\Delta = 5 \cdot 5 \cdot (-1) + 3 \cdot (-8) \cdot (-8) + (-8) \cdot 3 \cdot (-8) - (-8) \cdot 5 \cdot (-8) - (-8) \cdot (-8) \cdot 5 - (-1) \cdot 3 \cdot 3 = -25 + 192 + 192 - 320 - 320 - (-9) = -272,$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 5 & -8 \\ -8 & -1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 5 & -8 \\ -8 & -1 \end{vmatrix} = (5 \cdot 5 - 3 \cdot 3) + (5 \cdot (-1) - (-8) \cdot (-8)) + (5 \cdot (-1) - (-8) \cdot (-8)) = 16 - 138 = -122.$$

Identificăm conica:: $\delta = 16 > 0 \Rightarrow$ Genul conicei este eliptic.

$$\Delta = -272 \neq 0 \Rightarrow \text{Tipul conicei este nedegenerat.}$$

$$I \cdot \Delta = 10 \cdot (-272) = -2720 < 0 \Rightarrow \text{Conica este elipsă.}$$

(b) Identificăm reperul canonic

Determinăm valorile proprii ca fiind soluție a ecuației caracteristice asociate:: Polinomul caracteristic este dat de: $p(\lambda) = \det(A - \lambda I_2) = \lambda^2 - I \cdot \lambda + \delta = \lambda^2 - 10 \cdot \lambda + 16$.

$$\text{Obținem valorile proprii: } \Rightarrow \lambda_1 = 2, \lambda_2 = 8.$$

Determinarea vectorilor proprii:: Obținem vectorii proprii corespunzători.

$$: (A - \lambda_1 I) U(\lambda_1) = 0 \Rightarrow (A - 2 \cdot I) U(2) = 0.$$

$$U(2) = \{\bar{u} = (3 \cdot a, -3 \cdot a) \mid a \in \mathbb{R}\}.$$

$$: (A - \lambda_2 I) U(\lambda_2) = 0 \Rightarrow (A - 8 \cdot I) U(8) = 0.$$

$$U(8) = \{\bar{u} = (3 \cdot a, 3 \cdot a) \mid a \in \mathbb{R}\}.$$

Alegem $\bar{i}' \in U(\lambda_1), \bar{j}' \in U(\lambda_2)$ ortonormați astfel încât schimbarea de baze să fie una pozitiv orientată $\langle \bar{i}', \bar{j}' \rangle = 0, \|\bar{j}'\| = 1, (\bar{i}', \bar{j}') \circ (\bar{i}, \bar{j}) \cdot \bar{i}' = \frac{1}{\sqrt{18}}(3, -3) = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, -1)$.

$$\text{Alegem } \bar{j}' = \frac{1}{\sqrt{18}}(3, 3) = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 1).$$

Facem următoarea schimbare de repere asociată rotației de mai sus:

$$R = \{O, \bar{i}, \bar{j}\} \rightarrow R' = \{O, \bar{i}', \bar{j}'\} : S = \frac{1}{\sqrt{18}} \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ -3 & 3 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$\text{Obținem } X = SX' \rightarrow: \begin{cases} x = \frac{1}{\sqrt{2}}(x' + y') \\ y = \frac{1}{\sqrt{2}}(-x' + y') \end{cases}.$$

În noul reper ecuația conicei devine:

$$2 \cdot (x')^2 + 8 \cdot (y')^2 + 0 \cdot x' - \frac{32}{\sqrt{2}} \cdot y' + (-1) = 0.$$

Determinarea centrului rotației:: Rescriem ecuația precendată prin formarea de pătrate perfecte astfel

$$2 \cdot (x')^2 + 8 \cdot \left(y' - \frac{2}{\sqrt{2}}\right)^2 - 17 = 0.$$

Facem translația de repere $R' = \{O, \bar{i}', \bar{j}'\} \rightarrow R'' = \{C, \bar{i}', \bar{j}'\}$:

$$\begin{cases} x'' = x' \\ y'' = y' - \frac{2}{\sqrt{2}} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x' = x'' \\ y' = y'' + \frac{2}{\sqrt{2}} \end{cases}.$$

În raport cu reperul $R'' = \{C, \bar{i}', \bar{j}'\}$, elipsa are ecuația:

$$2(x'')^2 + 8(y'')^2 - 17 = 0, \text{ care este de fapt } \lambda_1 (x'')^2 + \lambda_2 (y'')^2 + \frac{\Delta}{\delta} = 0.$$

Determinăm coordonatele centrului: $x''_C = 0, y''_C = 0 \Rightarrow$

$$x'_C = 0, y'_C = \sqrt{2} \Rightarrow x_C = 1, y_C = 1, \text{ care este soluția sistemului } \begin{cases} \frac{\partial H}{\partial x} = 0, \\ \frac{\partial H}{\partial y} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 10x + 6y - 16 = 0, \\ 6x + 10y - 16 = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$x_C = 1, y_C = 1.$$

(c) Reprezentarea conicei

Ecuatiile axelor:: Cx'' este determinată de punctul C și vectorul $\vec{i}'$: $-3x - 3y + 6 = 0 \iff -x - y + 2 = 0$.

Cy'' este determinată de punctul C și vectorul $\vec{j}'$: $3x - 3y = 0 \iff x - y = 0$.

Intersecția cu axele:: Intersecțiile cu axa Oy sunt:

$$\left(0, \sqrt{69}/5 + 8/5\right), \left(0, 8/5 - \sqrt{69}/5\right).$$

Intersecțiile cu axa Ox sunt:

$$\left(\sqrt{69}/5 + 8/5, 0\right), \left(8/5 - \sqrt{69}/5, 0\right).$$

Vârfurile:: Ecuația conice devine:

$$\frac{(x'')^2}{\left(\sqrt{\frac{17}{2}}\right)^2} + \frac{(y'')^2}{\left(\sqrt{\frac{17}{8}}\right)^2} - 1 = 0.$$

Vârfurile în reperul R'' sunt: $A\left(\sqrt{\frac{17}{2}}, 0\right), A'\left(-\sqrt{\frac{17}{2}}, 0\right), B\left(0, \sqrt{\frac{17}{8}}\right), B'\left(0, -\sqrt{\frac{17}{8}}\right)$.

Trecând în reperul R' : $A\left(\sqrt{\frac{17}{2}}, \sqrt{2}\right), A'\left(-\sqrt{\frac{17}{2}}, \sqrt{2}\right),$

$B\left(0, \sqrt{\frac{17}{8}} + \sqrt{2}\right), B'\left(0, -\sqrt{\frac{17}{8}} + \sqrt{2}\right).$

$A'\left(-\frac{\sqrt{17}}{2} + 1, \frac{\sqrt{17}}{2} + 1\right), A\left(\frac{\sqrt{17}}{2} + 1, -\frac{\sqrt{17}}{2} + 1\right)$

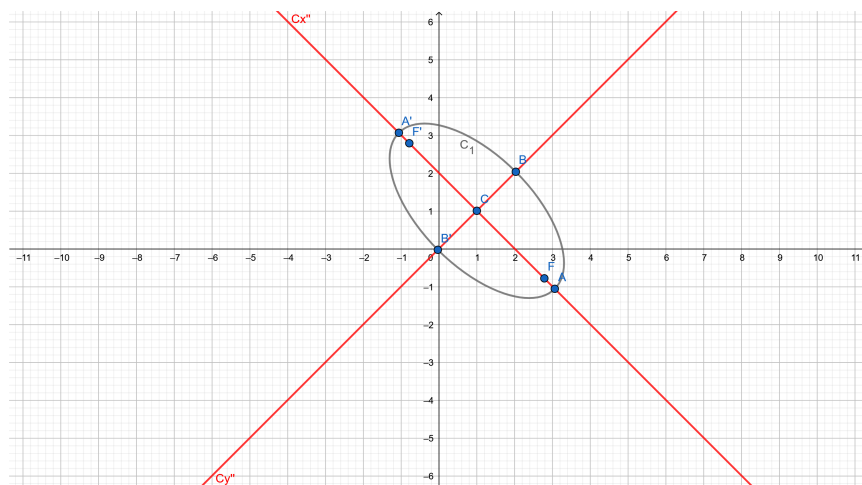
$B'\left(-\frac{\sqrt{17}}{4} + 1, -\frac{\sqrt{17}}{4} + 1\right), B\left(\frac{\sqrt{17}}{4} + 1, \frac{\sqrt{17}}{4} + 1\right).$

Coefficienții elipsei sunt $a = \sqrt{\frac{17}{2}} > b = \sqrt{\frac{17}{8}}.$

Focarele elipsei au în reperul canonic R'' ecuațiile $F\left(\sqrt{a^2 - b^2}, 0\right), F'\left(-\sqrt{a^2 - b^2}, 0\right)$, adică $F\left(\sqrt{\frac{51}{8}}, 0\right), F'\left(-\sqrt{\frac{51}{8}}, 0\right).$

Trecând în reperul R' , $F\left(\sqrt{\frac{51}{8}}, \sqrt{2}\right), F'\left(-\sqrt{\frac{51}{8}}, \sqrt{2}\right).$

Trecând în reperul R , $F\left(\frac{\sqrt{51}}{4} + 1, -\frac{\sqrt{51}}{4} + 1\right), F'\left(-\frac{\sqrt{51}}{4} + 1, \frac{\sqrt{51}}{4} + 1\right).$



(2)

$$x^2 + 10xy + y^2 - 12x - 12y + 16 = 0.$$

(a) Calculăm invariantii necesari pentru identificarea tipului conice:

Avem următoarele matrici:: $A = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}$ și $D = \begin{pmatrix} 1 & 5 & -6 \\ 5 & 1 & -6 \\ -6 & -6 & 16 \end{pmatrix}.$

Calculăm invariantii:: $I = \text{tr}(A) = 1 + 1 = 2,$

$$\delta = \det(A) = 1 \cdot 1 - 5 \cdot 5 = -24,$$

$$\Delta = 1 \cdot 1 \cdot 16 + 5 \cdot (-6) \cdot (-6) + (-6) \cdot 5 \cdot (-6) - (-6) \cdot 1 \cdot (-6) - (-6) \cdot (-6) \cdot 1 - 16 \cdot 5 \cdot 5 = 16 + 180 + 180 - 36 - 36 - 400 = -96,$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 5 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & -6 \\ -6 & 16 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & -6 \\ -6 & 16 \end{vmatrix} = (1 \cdot 1 - 5 \cdot 5) + (1 \cdot 16 - (-6) \cdot (-6)) + (1 \cdot 16 - (-6) \cdot (-6)) =$$

$$-24 - 20 - 20 = -64.$$

Identificăm conica: $\delta = -24 < 0 \Rightarrow$ Genul conicei este hiperbolic.

$\Delta = -64 \neq 0 \Rightarrow$ Tipul conicei este nedegenerat $\Rightarrow$ Conica este hiperbolă.

(b) Identificăm reperul canonic

Determinarea valorilor proprii ca fiind soluțiile ecuației caracteristice: Polinomul caracteristic este dat

de: $p(\lambda) = \det(A - \lambda I_2) = \lambda^2 - I \cdot \lambda + \delta = \lambda^2 - 2 \cdot \lambda - 24.$

Obținem valorile proprii: $\Rightarrow \lambda_1 = -4, \lambda_2 = 6.$

Determinarea vectorilor proprii: Obținem vectorii proprii corespunzători.

$$: (A - \lambda_1 I) U(\lambda_1) = 0 \Rightarrow (A + 4 \cdot I) U(-4) = 0.$$

$$U(-4) = \{\bar{u} = (a, -a) \mid a \in \mathbb{R}\}.$$

$$: (A - \lambda_2 I) U(\lambda_2) = 0 \Rightarrow (A - 6 \cdot I) U(6) = 0.$$

$$U(6) = \{\bar{u} = (a, a) \mid a \in \mathbb{R}\}.$$

Alegem $\bar{i}' \in U(\lambda_1), \bar{j}' \in U(\lambda_2)$ ortonormați astfel încât $\langle \bar{i}', \bar{j}' \rangle = 0, \|\bar{j}'\| = 1, (\bar{i}', \bar{j}') \circ (\bar{i}, \bar{j}) : \bar{i}' = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, -1).$

Alegem $\bar{j}' = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 1).$

$$\text{Facem rotația de repere } R = \{O, \bar{i}, \bar{j}\} \rightarrow R' = \{O, \bar{i}', \bar{j}'\}: S = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$\text{Obținem: } \begin{cases} x = \frac{1}{\sqrt{2}}(x' + y') \\ y = \frac{1}{\sqrt{2}}(-x' + y') \end{cases}.$$

În noul reper ecuația conicei noastre devine:

$$\frac{1}{2}(x' + y')^2 + \frac{10}{2}(x' + y')(-x' + y') + \frac{1}{2}(-x' + y')^2 - 6\sqrt{2}(x' + y') - 6\sqrt{2}(-x' + y') + 16 = 0 \iff$$

$$-4x'^2 + 6y'^2 - 12\sqrt{2}y' + 16 = 0.$$

Determinarea centrului rotației: Rescriem ecuația precedentă prin formarea de pătrate perfecte astfel:

$$-4x'^2 + 6(y' - \sqrt{2})^2 + 4 = 0.$$

Facem translația de repere

$$R' = \{O, \bar{i}', \bar{j}'\} \rightarrow R'' = \{C, \bar{i}'', \bar{j}''\}: \begin{cases} x' = x'' \\ y' = y'' + \sqrt{2} \end{cases}.$$

În raport cu reperul $R'' = \{C, \bar{i}'', \bar{j}''\}$, hiperbola are ecuația:

$$-4(x'')^2 + 6(y'')^2 + 4 = 0, \text{ care se observă că este chiar } \lambda_1(x'')^2 + \lambda_2(y'')^2 + \frac{\Delta}{\delta} = 0.$$

Determinăm coordonatele centrului: $x''_C = 0, y''_C = 0 \Rightarrow$

$$x'_C = 0, y'_C = \sqrt{2} \Rightarrow x_C = 1, y_C = 1, \text{ care sunt soluțiile sistemului } \begin{cases} \frac{\partial H}{\partial x} = 0, \\ \frac{\partial H}{\partial y} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x + 10y - 12 = 0, \\ 10x + 2y - 12 = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$x_C = 1, y_C = 1.$$

(c) Reprezentarea conicei

Ecuațiile axelor: Cx'' este determinată de punctul C și vectorul $\bar{i}'$: $x + y - 2 = 0.$

Cy'' este determinată de punctul C și vectorul $\bar{j}'$: $x - y = 0.$ alternativ am putea lucra cu diametri conjugati pentru determinarea axelor de simetrie. Alegem $\bar{u}_1 = (1, -1), \bar{u}_2 = (1, 1).$ Calculăm diametrii conjugate:

$$\frac{\partial H}{\partial x} - \frac{\partial H}{\partial y} = 0 \Rightarrow 2x + 10y - 12 - 10x - 2y + 12 = 0 \Rightarrow x = y$$

$$\frac{\partial H}{\partial x} + \frac{\partial H}{\partial y} = 0 \Rightarrow 2x + 10y - 12 + 10x + 2y - 12 = 0 \Rightarrow x + y - 2 = 0.$$

Intersecția cu axele: Intersecțiile cu axa Oy sunt date de:

$$\begin{cases} H = 0 \\ x = 0 \end{cases} \Rightarrow y^2 - 12y + 16 = 0 \quad M(0, 2 * \sqrt{5} + 6), \quad N(0, -2 * \sqrt{5} + 6).$$

Intersecțiile cu axa Ox sunt date de:

$$\begin{cases} H = 0 \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow x^2 - 12x + 16 = 0 \quad P(2 * \sqrt{5} + 6, 0), \quad Q(-2 * \sqrt{5} + 6, 0).$$

Vârfurile: Ecuația conicei devine:

$$(x'')^2 - \frac{(y'')^2}{\frac{6}{4}} - 1 = 0 \iff (x'')^2 - \frac{y''^2}{\left(\sqrt{\frac{2}{3}}\right)^2} - 1 = 0.$$

Vârfurile în reperul nou R'' sunt: $A(1, 0), A'(-1, 0)$.

Trecând în reperul R' : $A(1, \sqrt{2}), A'(-1, \sqrt{2})$.

Trecând în reperul inițial R : $A'(-\frac{1}{\sqrt{2}} + 1, \frac{1}{\sqrt{2}} + 1), A(\frac{1}{\sqrt{2}} + 1, -\frac{1}{\sqrt{2}} + 1)$.

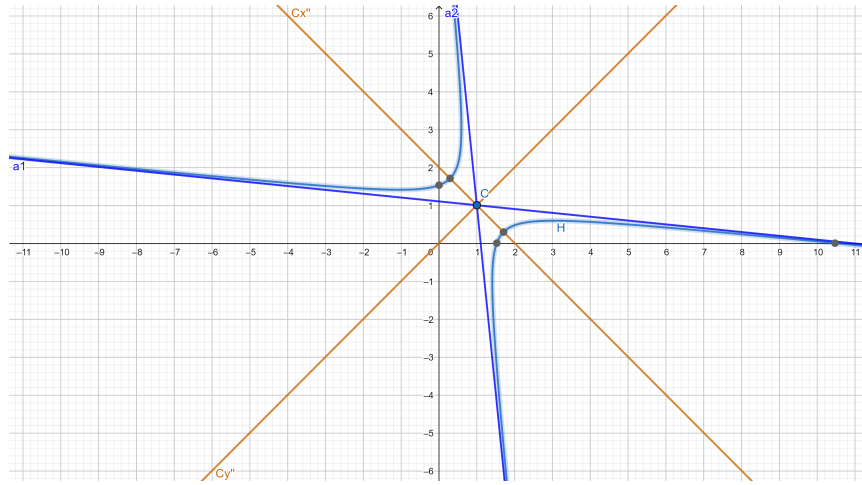
Coefficienții hiperbolei sunt $a = 1, b = \sqrt{\frac{2}{3}}$.

Focarele hiperbolei au în reperul canonic R'' ecuațiile $F(\sqrt{a^2 + b^2}, 0), F'(-\sqrt{a^2 + b^2}, 0)$, adică $F(\sqrt{\frac{5}{3}}, 0), F'(-\sqrt{\frac{5}{3}}, 0)$.

Trecând în reperul R' , $F(\sqrt{\frac{5}{3}}, \sqrt{2}), F'(-\sqrt{\frac{5}{3}}, \sqrt{2})$.

Trecând în reperul R , $F(\sqrt{\frac{5}{6}} + 1, \sqrt{\frac{5}{6}} + 1), F'(-\frac{\sqrt{5}}{2} + 1, \frac{\sqrt{5}}{2} + 1)$.

Asimptotele au ecuațiile $a_1 : x'' = \sqrt{\frac{3}{2}}y'', a_2 : x'' = -\sqrt{\frac{3}{2}}y''$ în reperul R'' . Trecând în reperul R' , obținem $x' = \sqrt{\frac{3}{2}}(y' - \sqrt{2}), x' = -\sqrt{\frac{3}{2}}(y' - \sqrt{2})$. Trecând în reperul inițial $a_1 : x - y = \sqrt{\frac{3}{2}}(x + y - 2) \iff x(\sqrt{3} - \sqrt{2}) + y(\sqrt{3} + \sqrt{2}) - 2\sqrt{3} = 0, a_2 : x - y = -\sqrt{\frac{3}{2}}(x + y - 2), x(\sqrt{3} + \sqrt{2}) + y(\sqrt{3} - \sqrt{2}) - 2\sqrt{3} = 0$.



(3)

$$x^2 - 6xy + y^2 + 4x + 4y - 4 = 0$$

(a) Calculăm invariantii conice pentru a determina tipul ei:

Identificăm cele două matrici: $A = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$ și $D = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ -3 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & -4 \end{pmatrix}$.

Calculăm invariantii: $I = \text{tr}(A) = 1 + 1 = 2$,

$$\delta = \det(A) = 1 \cdot 1 - (-3) \cdot (-3) = -8,$$

$$\Delta = 1 \cdot 1 \cdot (-4) + (-3) \cdot 2 \cdot 2 + (-3) \cdot 2 \cdot 2 - 2 \cdot 1 \cdot 2 - 2 \cdot 2 \cdot 1 - (-3) \cdot (-3) \cdot (-4) = -4 - 12 - 12 - 4 - 4 + 36 = 0,$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ -3 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -4 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -4 \end{vmatrix} = (1 \cdot 1 - (-3) \cdot (-3)) + (1 \cdot (-4) - 2 \cdot 2) + (1 \cdot (-4) - 2 \cdot 2) = -8 - 4 - 4 = -16.$$

Identificăm conica: $\delta = -8 < 0 \Rightarrow$ Genul conice este hiperbolic.

$\Delta = 0 \Rightarrow$ Tipul conice este degenerat $\Rightarrow$ Conica este o pereche de drepte concurente.

(b) Identificăm reperul canonic

Determinarea valorilor proprii: Polinomul caracteristic este dat de: $p(\lambda) = \det(A - \lambda I_2) = \lambda^2 - 2 \cdot \lambda - 8$.

Obținem valorile proprii: $\Rightarrow \lambda_1 = -2, \lambda_2 = 4$.

Determinarea vectorilor proprii: Obținem vectorii proprii corespunzători celor două valori proprii menționate anterior.

$$: (A - \lambda_1 I)U(\lambda_1) = 0 \Rightarrow (A + 2 \cdot I)U(-2) = 0.$$

$$U(-4) = \{\bar{u} = (a, a) | a \in \mathbb{R}\}.$$

$$: (A - \lambda_2 I)U(\lambda_2) = 0 \Rightarrow (A - 4 \cdot I)U(4) = 0.$$

$$U(4) = \{\bar{u} = (-a, a) | a \in \mathbb{R}\}.$$

Alegem $\bar{i}' \in U(\lambda_1), \bar{j}' \in U(\lambda_2)$ ortonormați $\bar{i}' = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 1)$.

Alegem $\bar{j}' = \frac{1}{\sqrt{2}}(-1, 1)$.

Facem rotația de repere $R = \{O, \bar{i}, \bar{j}\} \rightarrow R' = \{O, \bar{i}', \bar{j}'\}$: $X = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Obținem legătura dintre coordonate: $\begin{cases} x = \frac{1}{\sqrt{2}}(x' - y') \\ y = \frac{1}{\sqrt{2}}(x' + y') \end{cases}$.

În noul reper ecuația conice devine:

$$\frac{1}{2}(x' - y')^2 - \frac{6}{2}(x' - y')(x' + y') + \frac{1}{2}(x' + y')^2 + 2\sqrt{2}(x' - y') + 2\sqrt{2}(x' + y') - 4 = 0 \iff$$

$$4 - 2x'^2 + 4y'^2 + 8\sqrt{2}x' - 4 = 0.$$

Determinarea centrului:: Rescriem ecuația:

$$-2\left(x'^2 - \frac{4}{\sqrt{2}}x' + 2\right) + 4y'^2 = 0 \rightarrow -2\left(x' - \sqrt{2}\right)^2 + 4y'^2 = 0$$

Facem translația de repere $R' = \{O, \bar{i}', \bar{j}'\} \rightarrow R'' = \{C, \bar{i}'', \bar{j}''\}$:

$$\begin{cases} x' = x'' + \sqrt{2} \\ y' = y'' \end{cases}$$

În raport cu reperul $R'' = \{C, \bar{i}'', \bar{j}''\}$, hiperbola are ecuația:

$$-2(x'')^2 + 4(y'')^2 = 0$$

care este $\lambda_1(x'')^2 + \lambda_2(y'')^2 + \frac{\Delta}{\delta} = 0$.

Determinăm coordonatele centrului: $x''_C = 0, y''_C = 0 \Rightarrow$

$x'_C = \sqrt{2}, y'_C = 0 \Rightarrow x_C = 1, y_C = 1$, care dacă am făcut calculele corect, ar trebui să fie soluțiile sistemului

$$\begin{cases} \frac{\partial H}{\partial x} = 0, \\ \frac{\partial H}{\partial y} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x + 10y - 12 = 0, \\ 10x + 2y - 12 = 0 \end{cases} \Rightarrow x_C = 1, y_C = 1.$$

(c) Reprezentarea dreptelor

Ecuațiile axelor:: Cx'' este determinată de punctul C și vectorul $\bar{i}'$: $x + y - 2 = 0$.

Cy'' este determinată de punctul C și vectorul $\bar{j}'$: $x - y = 0$.

Intersecția cu axele:: Intersecțiile cu axa Oy sunt date de:

$$\begin{cases} H = 0 \\ x = 0 \end{cases} \Rightarrow y^2 + 4y - 4 = 0 \rightarrow (0, 2 \pm 2\sqrt{2}) \text{ Intersecțiile cu axa } Ox \text{ sunt date de:}$$

$$\begin{cases} H = 0 \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow x^2 + 4x - 4 = 0 \rightarrow (2 \pm 2\sqrt{2}, 0).$$

