

Seminarul 14
Conice pe ecuații generale

Fie Γ o conică ce are în raport cu reperul ortonormat $\mathcal{R} = \{O; \vec{i}, \vec{j}\}$ ecuația:

$$(1) \quad \Gamma : H(x, y) := a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{10}x + 2a_{20}y + a_{00} = 0.$$

Amintim că $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \in \mathcal{S}_2(\mathbb{R})$, $B = (a_{10} \ a_{20})$, $D = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{10} \\ a_{21} & a_{22} & a_{20} \\ a_{10} & a_{20} & a_{00} \end{pmatrix} \in \mathcal{S}_3(\mathbb{R})$.

Mai mult, am demonstrat că $I := \text{Trace}A = a_{11} + a_{22}$, $\delta = \det A = a_{11}a_{22} - a_{12}^2$ și $\Delta = \det D$ sunt invarianti ortogonali ai conice.

Pe lângă invariantii ortogonali amintiți deja mai introducem și un invariant centro-ortogonal.

Numarul real $\Delta_1 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{10} \\ a_{10} & a_{00} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{22} & a_{20} \\ a_{20} & a_{00} \end{vmatrix}$, adică suma minorilor diagonali de ordinul 2 ai lui D , este un **invariant centro-ortogonal** al lui Γ , adică rămâne neschimbat la o rotație de repere carteziane ortonormate. Dacă în plus $\delta = \Delta = 0$, atunci Δ_1 este chiar un invariant ortogonal al conice.

În continuare vom clasifica conicele spațiului afin euclidian $\mathcal{E}^2$ în funcție de invariantii ortogonali și centro-ortogonali introduși.

TEOREMA 1. (Teorema de clasificare izometrică a conicelor) Invariantii ortogonali și centro-ortogonali ai unei conice permit determinarea naturii conice ca în tabelul următor:

Nr.	δ	Δ	$I\Delta$	Δ_1	Genul conice	Tipul conice	Denumirea conice
1	> 0	$\neq 0$	< 0		eliptic	nedegenerat	elipsa
2	> 0	$\neq 0$	> 0		eliptic	nedegenerat	elipsa imaginara
3	> 0	0			eliptic	degenerat	punct dublu
4	< 0	$\neq 0$			hiperbolic	nedegenerat	hiperbola
5	< 0	0			hiperbolic	degenerat	drepte concurente
6	0	$\neq 0$			parabolic	nedegenerat	parabola
7	0	0		< 0	parabolic	degenerat	drepte paralele
8	0	0		0	parabolic	degenerat	dreapta dubla
9	0	0		> 0	parabolic	degenerat	drepte imaginare paralele

Algoritm de aducere la forma canonică a conicelor date prin ecuații generale

- (1) Se precizează natura și genul conice Γ după valorile invariantilor metrici Δ, δ și I .
- (2) Se asociază conice Γ forma pătratică $\varphi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, definită prin

$$\varphi(x, y) = a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2$$

și se scrie matricea simetrică asociată

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix}.$$

- (3) Se calculează valorile proprii λ_1 și λ_2 ale matricii A ca rădăcini ale ecuației caracteristice

$$p(\lambda) = \det(A - \lambda I_2) = \lambda^2 - I\lambda + \delta = 0.$$

- (4) Se calculează subspațiile proprii:

$$U(\lambda_1) = \left\{ (x_1, x_2) \in \mathbb{R}, \begin{pmatrix} a_{11} - \lambda_1 & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} - \lambda_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

$$U(\lambda_2) = \left\{ (x_1, x_2) \in \mathbb{R}, \begin{pmatrix} a_{11} - \lambda_2 & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} - \lambda_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

- (5) Se face schimbarea de repere

$$\mathcal{R} = \{O, \vec{i}, \vec{j}\} \rightarrow \mathcal{R}' = \{O, \vec{i}', \vec{j}'\}, \vec{i}' \in U(\lambda_1), \vec{j}' \in U(\lambda_2), \|\vec{i}'\| = \|\vec{j}'\| = 1, \langle \vec{i}', \vec{j}' \rangle = 0, (\vec{i}, \vec{j})o(\vec{i}', \vec{j}').$$

Versorii $\bar{i}' = (m_1, m_2)$ și $\bar{j}' = (n_1, n_2)$ vor fi aleși astfel încât

$$\det S = \begin{vmatrix} m_1 & n_1 \\ m_2 & n_2 \end{vmatrix} = 1.$$

(6) Se efectuează rotația

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = S \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$$

în urma căreia ecuația conice Γ devine:

$$\Gamma : \lambda_1 x'^2 + \lambda_2 y'^2 + 2a'_{13}x' + 2a'_{23}y' + a'_{33} = 0.$$

(7) Forțând factorii comuni λ_1 și λ_2 (dacă este cazul) și restrângând pătratele descompuse, se rescrie ecuația conice Γ sub forma:

$$\Gamma : \lambda_1(x'^2 + x_0) + \lambda_2(y'^2 + y_0) + a = 0.$$

(8) Se efectuează treanslația de repere:

$$\mathcal{R}' = \{O, \bar{i}', \bar{j}'\}, \bar{i}' \rightarrow \mathcal{R}'' = \{C, \bar{i}'', \bar{j}''\}, \bar{i}'',$$

unde $C(x_0, y_0)$ reprezintă coordonatele originii noului sistem de coordonate obținut prin translația:

$$\begin{cases} x'' = x' + x_0 \\ y'' = y' + y_0 \end{cases}$$

(9) Ecuația canonică a conice devine:

$$\Gamma : \lambda_1 x''^2 + \lambda_2 y''^2 + a = 0.$$

(10) Se trasează sistemul inițial de axe xOy și se efectuează rotația acestuia în sistemul de axe xOy . Direcțiile și sensurile axelor Ox și Oy coincid cu direcțiile și sensurile vectorilor proprii ortonormați $\bar{i}'$ și $\bar{j}'$.

(11) Se efectuează translația sistemului de axe xOy în sistemul de axe $x''Cy''$, unde punctul C are coordonatele $C(x_0, y_0)$ în raport cu $\mathcal{R}''$.

(12) În funcție de tipul conice se identifică și celelalte elemente necesare reprezentării acesteia: asimptote, directoare, vârfuri, focare, intersecții cu axele de coordonate.

EXERCITIUL 1. Să se aducă la forma canonică și să se reprezinte grafic următoarele conice:

(1) $\Gamma : 9x^2 - 6xy + y^2 + 20x = 0$.

Soluție:

(a) Identificăm cele două matrici:

$$A = \begin{pmatrix} 9 & -3 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} 9 & -3 & 10 \\ -3 & 1 & 0 \\ 10 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(b) Invariantii necesari sunt:

$$\delta = \det A = 0 \rightarrow \text{tipul conice este parabolic}$$

$$I = \text{tr} A = 10, \Delta = \det A = -100.$$

Deoarece $\delta = 0$, $\Delta \neq 0$ rezultă Γ parabolă.

(c) Identificăm valorile proprii asociate matricei simetrice A . Acestea sunt soluțiile ecuației caracteristice

$$d(A - \lambda I_2) = 0 \rightarrow \begin{vmatrix} 9 - \lambda & -3 \\ -3 & 1 - \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 10\lambda = 0 \rightarrow \begin{cases} \lambda_1 = 0, \\ \lambda_2 = 10 \end{cases}$$

(d) Determinăm vectorii proprii corespunzători valorilor proprii de mai sus:

$$U(0) = \left\{ (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid \begin{pmatrix} 9 & -3 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} = \{\alpha(1, 3), \alpha \in \mathbb{R}\}$$

$$U(10) = \left\{ (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid \begin{pmatrix} -1 & -3 \\ -3 & -9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} = \{\beta(-3, 1), \beta \in \mathbb{R}\}$$

(e) Alegem $\bar{i}' \in U(0)$, $\bar{j}' \in U(10)$ astfel încât $\langle \bar{i}', \bar{j}' \rangle = 0$, $\|\bar{i}'\| = \|\bar{j}'\| = 1$, $(\bar{i}', \bar{j}') o(\bar{i}', \bar{j}')$. Așadar vom considera:

$$\bar{i}' = \frac{1}{\sqrt{10}}(1, 3), \bar{j}' = \frac{1}{\sqrt{10}}(-3, 1).$$

Observăm că

$$\det S = \frac{1}{\sqrt{10}} \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 1 \rightarrow S \text{ matrice de rotație.}$$

(f) Facem schimbarea de repere:

$$\mathcal{R} = \{O, \bar{i}, \bar{j}\} \rightarrow \mathcal{R}' = \{O, \bar{i}', \bar{j}'\}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{10}} \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} \rightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{\sqrt{10}}(x' - 3y') \\ y = \frac{1}{\sqrt{10}}(3x' + y') \end{cases}$$

(g) În noul reper ecuația conice devine:

$$\frac{9}{10}(x' - 3y')^2 - \frac{6}{10}(x' - 3y')(3x' + y') + \frac{1}{10}(3x' + y')^2 + \frac{20}{\sqrt{10}}(x' - 3y') = 0 \rightarrow 10y'^2 + \frac{20}{\sqrt{10}}x' - \frac{60}{\sqrt{10}}y' = 0.$$

(h) Rescriem ecuația astfel:

$$\Gamma : \left(y' - \frac{3}{\sqrt{10}}\right)^2 = -\frac{2}{\sqrt{10}}\left(x' - \frac{9}{2\sqrt{10}}\right).$$

(i) Facem translația de repere:

$$\mathcal{R}' = \{O, \bar{i}, \bar{j}\} \rightarrow \mathcal{R}'' = \{V, \bar{i}', \bar{j}'\}, \begin{cases} x'' = x' - \frac{9}{2\sqrt{10}} \\ y'' = y' - \frac{3}{\sqrt{10}} \end{cases}$$

(j) Obținem

$$\Gamma : y''^2 = -\frac{2}{\sqrt{10}}x''.$$

(k) Identificăm originea noului sistem de coordonate $x''Vy''$. Avem:

$$\begin{cases} x''_V = 0 \\ y''_V = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x'_V = \frac{9}{2\sqrt{10}} \\ y'_V = \frac{3}{\sqrt{10}} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x_V = -\frac{9}{20} \\ y_V = \frac{33}{20} \end{cases}$$

(l) Identificăm axele reperului $x''Vy''$:

$$\begin{cases} Vx'' : V + [\bar{i}'] \rightarrow Vx'' : 3x - y + 3 = 0 \\ Vy'' : V + [\bar{j}'] \rightarrow Vy'' : x + 3y - \frac{9}{2} = 0 \end{cases}$$

(m) Studiem intersecția cu axele de coordonate:

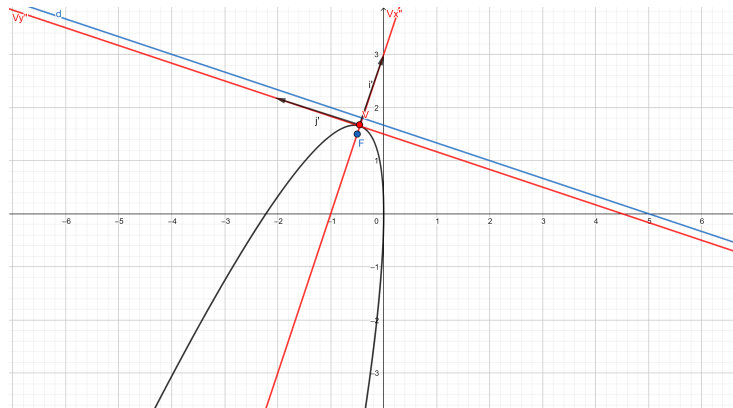
$$\begin{cases} \Gamma \cap Ox = \{O, P(-\frac{20}{9}, 0)\} \\ \Gamma \cap Oy = \{O\} \end{cases}$$

(n) Determinăm coordonatele focarului parabolei în $\mathcal{R}''$: Calculăm parametrul $p = \frac{1}{\sqrt{10}}$. Parabola este de tipul $y'' = -2px''$ deci axa focală este Vx'' . Focarul parabolei are în raport cu reperul canonic $\mathcal{R}''$ coordonatele $F\left(-\frac{1}{2\sqrt{10}}, 0\right)$.

În raport cu reperul $\mathcal{R}$ coordonatele sunt $F\left(-\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right)$.

(o) Determinăm ecuația directoarei: Ecuația directoarei în raport cu reperul canonic $\mathcal{R}''$ este $\delta : x'' = -\frac{1}{2\sqrt{10}}$ iar în raport cu reperul inițial : $x + 3y - 5 = 0$.

(p) Reprezentarea grafică:



(2)

$$G : 7x^2 - 50xy + 7y^2 - 4x - 68y + 124 = 0.$$

(a) **Identificăm cele două matrici:** $A = \begin{pmatrix} 7 & -25 \\ -25 & 7 \end{pmatrix}$

$$\text{și } D = \begin{pmatrix} 7 & -25 & -2 \\ -25 & 7 & -34 \\ -2 & -34 & 124 \end{pmatrix}.$$

Calculăm invariantii: $I = \text{tr}(A) = 7 + 7 = 14,$

$$\delta = \det(A) = 7 \cdot 7 - (-25) \cdot (-25) = 49 - 625 = -576,$$

$$\Delta = 7 \cdot 7 \cdot 124 + (-25) \cdot (-34) \cdot (-2) + (-2) \cdot (-25) \cdot (-34) - (-2) \cdot 7 \cdot (-2) - (-34) \cdot (-34) \cdot 7 - 124 \cdot (-25) \cdot (-25) = 6076 + (-1700) + (-1700) - 28 - 8092 - 77500 = -82944,$$

Identificăm conica: $\delta = -576 < 0 \Rightarrow$ Genul conicei este hiperbolic.

$$\Delta = -82944 \neq 0 \Rightarrow \text{Tipul conicei este nedegenerat}$$

$\Rightarrow$ Conica este hiperbolă.

(b) **Identificăm reperul canonic**

Determinarea valorilor proprii: Polinomul caracteristic este dat de:

$$p(\lambda) = \det(A - \lambda I_2) = \begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda \end{vmatrix} = (a_{11} - \lambda) \cdot (a_{22} - \lambda) - a_{12} \cdot a_{21} = \lambda^2 - (a_{11} + a_{22}) \cdot \lambda + (a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21}) = \lambda^2 - I \cdot \lambda + \delta = \lambda^2 - 14 \cdot \lambda - 576. \text{ Obținem valorile proprii: } \Rightarrow \lambda_1 = -18, \lambda_2 = 32.$$

Determinarea vectorilor proprii: Obținem vectorii proprii corespunzători.

$$(A - \lambda_1 I)U(\lambda_1) = 0 \Rightarrow (A + 18 \cdot I)U(-18) = 0 \Rightarrow$$

$$\begin{pmatrix} 7 + 18 & -25 \\ -25 & 7 + 18 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{-18}^1 \\ u_{-18}^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 25 & -25 \\ -25 & 25 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{-18}^1 \\ u_{-18}^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow U(-18) = \{\bar{u} = (a, a) | a \in \mathbb{R}\}.$$

$$(A - \lambda_2 I)U(\lambda_2) = 0 \Rightarrow (A - 32 \cdot I)U(32) = 0 \Rightarrow$$

$$\begin{pmatrix} 7 - 32 & -25 \\ -25 & 7 - 32 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{32}^1 \\ u_{32}^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} -25 & -25 \\ -25 & -25 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{32}^1 \\ u_{32}^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow U(32) = \{\bar{u} = (-a, a) | a \in \mathbb{R}\}.$$

$$\text{Alegem } \bar{i}' \in U(\lambda_1), \bar{j}' \in U(\lambda_2) \text{ ortonormați: } \bar{i}' = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 1), \bar{j}' = \frac{1}{\sqrt{2}}(-1, 1).$$

Verificăm că schimbarea de bază este ortonormată.

: **Facem rotația de repere** $R = \{O, \bar{i}, \bar{j}\} \rightarrow R' = \{O, \bar{i}', \bar{j}'\}$: Schimbarea de bază are matricea $S = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

cu determinantul 1.

$$\text{Obținem } \begin{cases} x = \frac{1}{\sqrt{2}}(x' - y') \\ y = \frac{1}{\sqrt{2}}(x' + y'). \end{cases}$$

În noul reper ecuația conicei devine:

$$\frac{7}{2}(x' - y')^2 - \frac{50}{2}(x' - y')(x' + y') + \frac{7}{2}(x' + y')^2 - 4\sqrt{2}(x' - y') - 68\sqrt{2}(x' + y') + 124 = 0 \iff$$

$$-18x'^2 + 32y'^2 - 36\sqrt{2}x' - 32\sqrt{2}y' + 124 = 0.$$

Determinarea centrului: Rescriem ecuația:

$$-18(x' + \sqrt{2})^2 + 32(y' - \frac{1}{\sqrt{2}})^2 + 144 = 0.$$

Facem translația de repere $R' = \{O, \bar{i}', \bar{j}'\} \rightarrow R'' = \{C, \bar{i}'', \bar{j}''\}$:

$$\begin{cases} x'' = x' + \sqrt{2} \\ y'' = y' - \frac{1}{\sqrt{2}} \end{cases} \iff \begin{cases} x' = x'' - \sqrt{2} \\ y' = y'' + \frac{1}{\sqrt{2}} \end{cases}.$$

În raport cu reperul $R'' = \{C, \bar{i}'', \bar{j}''\}$, hiperbola are ecuația:

$$-18(x'')^2 + 32(y'')^2 + 144 = 0, \text{ care dacă am făcut calculele corect, ar trebui să fie } \lambda_1(x'')^2 + \lambda_2(y'')^2 + \frac{\Delta}{\delta} = 0, \text{ i.e. } -18(x'')^2 + 32(y'')^2 + 144 = 0.$$

Determinăm coordonatele centrului: $x_C'' = 0, y_C'' = 0 \Rightarrow$

$$x_C' = -\sqrt{2}, y_C' = \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow x_C = -\frac{3}{2}, y_C = -\frac{1}{2},$$

$$\text{Alternativ, Coordonatele centrului ar trebui să fie soluțiile sistemului } \begin{cases} \frac{\partial H}{\partial x} = 0, \\ \frac{\partial H}{\partial y} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 14x - 50y - 4 = 0, \\ 14y - 50x - 68 = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$x_C = -\frac{3}{2}, y_C = -\frac{1}{2}.$$

(c) **Ecuația conicei în reperul canonic**

Ecuația: În raport cu reperul $R'' = \{C, \bar{i}'', \bar{j}''\}$, hiperbola are ecuația:

$$-18(x'')^2 + 32(y'')^2 + 144 = 0 \iff -\frac{(x'')^2}{8} + \frac{(y'')^2}{\frac{9}{2}} + 1 = 0 \iff -\frac{(x'')^2}{(2\sqrt{2})^2} + \frac{(y'')^2}{(\frac{3}{\sqrt{2}})^2} - 1 = 0.$$

Vârfurile: în reperul R'' sunt: $A(0, \frac{3}{\sqrt{2}}), A'(0, -\frac{3}{\sqrt{2}}).$

Focarele:: Coeficienții hiperbolei sunt $a = 2\sqrt{2}$, $b = \frac{3}{\sqrt{2}}$.

Excentricitatea:: $e = \frac{5}{4}$. Focarele elipsei au în reperul canonic R'' ecuațiile $F(0, \sqrt{a^2 + b^2})$, $F'(0, -\sqrt{a^2 + b^2})$, adică $F(0, \frac{5}{\sqrt{2}})$, $F'(0, -\frac{5}{\sqrt{2}})$.

Asimptotele: au ecuațiile $a_1 : y'' = \frac{3}{4}x''$, $a_2 : y'' = -\frac{3}{4}x''$ în reperul R'' .

Directoarele: au ecuațiile $d_1 : x = \frac{a^2}{c} = \frac{8\sqrt{2}}{15}$, $d_2 : x = -\frac{a^2}{c} = -\frac{8\sqrt{2}}{15}$.

(d) Ecuațiile axelor: Cx'' este determinată de punctul C și vectorul $\vec{i}'$: $x - y + 1 = 0$.

Cy'' este determinată de punctul C și vectorul $\vec{j}'$: $x + y + 2 = 0$.

Alternativ, putem lucra cu diametri conjugăți

Alegem $\vec{u}_1 = (1, 1)$, $\vec{u}_2 = (-1, 1)$. Calculăm diametrii conjugăți: $\frac{\partial H}{\partial x} + \frac{\partial H}{\partial y} = 0 \Rightarrow 14x - 50y - 4 + 14y - 50x - 68 = 0 \Rightarrow -36x - 36y - 72 = 0 \Rightarrow x + y + 2 = 0$.

$-\frac{\partial H}{\partial x} + \frac{\partial H}{\partial y} = 0 \Rightarrow -14x + 50y + 4 + 14y - 50x - 68 = 0 \Rightarrow -64x + 64y - 64 = 0 \Rightarrow x - y + 1 = 0$.

(e) Asimptotele au ecuațiile $a_1 : y'' = \frac{3}{4}x''$, $a_2 : y'' = -\frac{3}{4}x''$ în reperul R'' . Trecând în reperul R' , obținem

$a_1 : y' - \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{3}{4}(x' + \sqrt{2})$, $a_2 : y' - \frac{1}{\sqrt{2}} = -\frac{3}{4}(x' + \sqrt{2})$. Trecând în reperul inițial $a_1 : -\frac{1}{\sqrt{2}}x + \frac{1}{\sqrt{2}}y - \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{3}{4}(\frac{1}{\sqrt{2}}x + \frac{1}{\sqrt{2}}y - \sqrt{2}) \iff 7x - y + 10 = 0$,

$a_2 : -\frac{1}{\sqrt{2}}x + \frac{1}{\sqrt{2}}y - \frac{1}{\sqrt{2}} = -\frac{3}{4}(\frac{1}{\sqrt{2}}x + \frac{1}{\sqrt{2}}y - \sqrt{2}) \iff x - 7y - 2 = 0$.

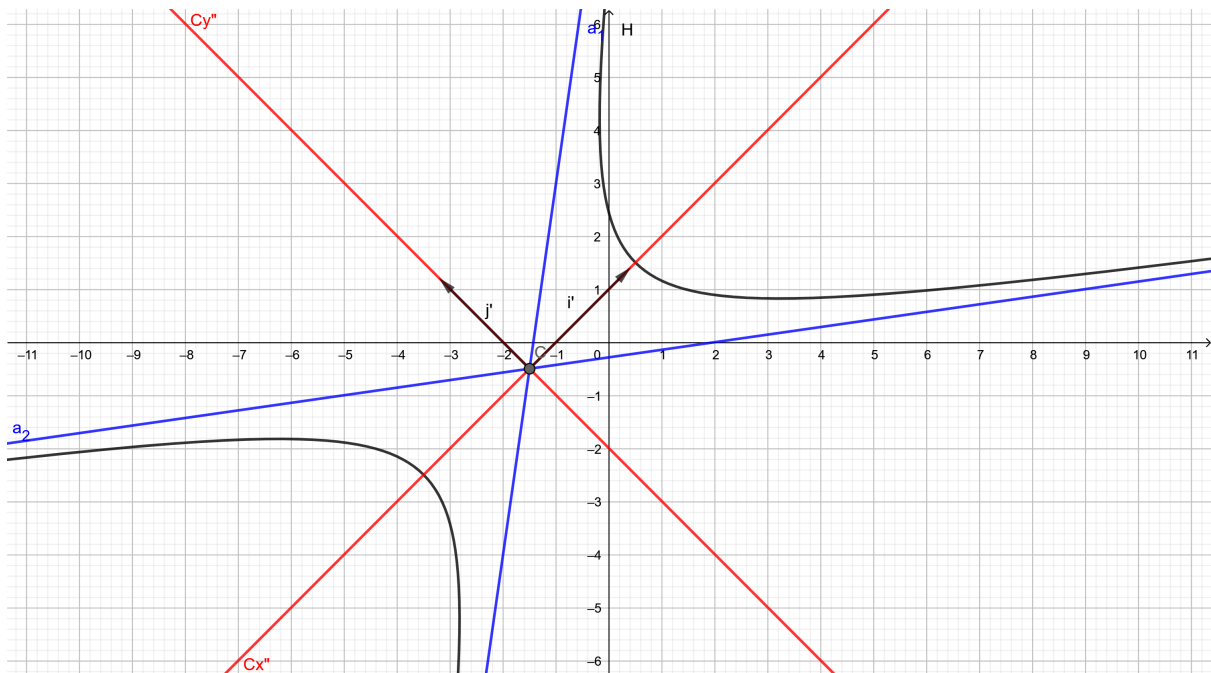
(f) **Intersecția cu axele::** $x = 0, y = \frac{34-12\sqrt{2}}{7}$

$x = 0, y = \frac{34+12\sqrt{2}}{7}$

Nu există intersecții cu axa Ox .

Focare:: $F'(-4, -3)$, $F(1, 2)$

Vârfuri:: $A'(-3.5, -2.5)$, $A(0.5, 1.5)$



(3) În raport cu reperul ortonormat $\mathcal{R} = \{O; \vec{i}, \vec{j}\}$ se dă conica

$$\Gamma : 5x^2 + 4xy + 8y^2 - 32x - 56y + 80 = 0.$$

Aduceți această conică la forma canonică și reprezentați-o grafic.

Calculăm invariantii ortogonali necesari determinării conice.

(a) Avem $A = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 8 \end{pmatrix}$, deci $I = 13$ și $\delta = 36$. De asemenea $D = \begin{pmatrix} 5 & 2 & -16 \\ 2 & 8 & -28 \\ -16 & -28 & 80 \end{pmatrix}$, deci $\Delta = -1296$.

Deoarece $\delta > 0$ și $I\Delta < 0$, rezultă că Γ este o elipsă.

(b) Polinomul caracteristic al lui A este $p(\lambda) = \lambda^2 - I\lambda + \delta = \lambda^2 - 13\lambda + 36$, deci valorile proprii ale lui A sunt $\lambda_1 = 4$ și $\lambda_2 = 9$.

(c) Vectorii proprii corespunzători sunt

$$U(4) = \{\bar{u} = -2\alpha\bar{i} + \alpha\bar{j} \mid \alpha \in \mathbb{R}\}.$$

Alegem $\bar{i}' = \frac{\sqrt{5}}{5}(2\bar{i} - \bar{j})$. Știm că vectorii proprii corespunzători unor valori proprii distincte ale unei matrice simetrice sunt ortogonali, de aceea putem alege direct $\bar{j}' = \frac{\sqrt{5}}{5}(\bar{i} + 2\bar{j})$ un vector propriu corespunzător lui $\lambda_2 = 9$. Baza reperului canonic este deci $\{\bar{i}', \bar{j}'\}$.

(d) Facem rotația de repere $\mathcal{R} = \{O; \bar{i}, \bar{j}\} \rightarrow \mathcal{R}' = \{O; \bar{i}', \bar{j}'\}$, ce determină schimbarea de coordonate

$$(2) \quad S = \frac{\sqrt{5}}{5} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} X' \Leftrightarrow \begin{cases} x &= \frac{\sqrt{5}}{5}(2x' + y'), \\ y &= \frac{\sqrt{5}}{5}(-x' + 2y'). \end{cases}$$

(e) Obținem că ecuația conice în raport cu $\mathcal{R}'$ este

$$4(x')^2 + 9(y')^2 - \frac{8\sqrt{5}}{5}x' - \frac{144\sqrt{5}}{5}y' + 80 = 0 \Leftrightarrow$$

$$4\left(x' - \frac{\sqrt{5}}{5}\right)^2 + 9\left(y' - \frac{8\sqrt{5}}{5}\right)^2 - 36 = 0.$$

(f) Facem translația de repere $\mathcal{R}' = \{O; \bar{i}', \bar{j}'\} \rightarrow \mathcal{R}'' = \{C; \bar{i}'', \bar{j}''\}$,

$$(3) \quad \begin{cases} x'' &= x' - \frac{\sqrt{5}}{5}, \\ y'' &= y' - \frac{8\sqrt{5}}{5}. \end{cases}$$

(g) În raport cu reperul canonic $\mathcal{R}'' = \{C; \bar{i}'', \bar{j}''\}$ elipsa are ecuația

$$(4) \quad \frac{(x'')^2}{9} + \frac{(y'')^2}{4} - 1 = 0$$

(h) Centrul C are, în raport cu $\mathcal{R}''$, coordonatele

$$\begin{cases} x''_C = 0 \\ y''_C = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x'_C = \frac{\sqrt{5}}{5} \\ y'_C = \frac{8\sqrt{5}}{5} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x_C = 2 \\ y_C = 3 \end{cases}$$

(i) Axele reperului canonic

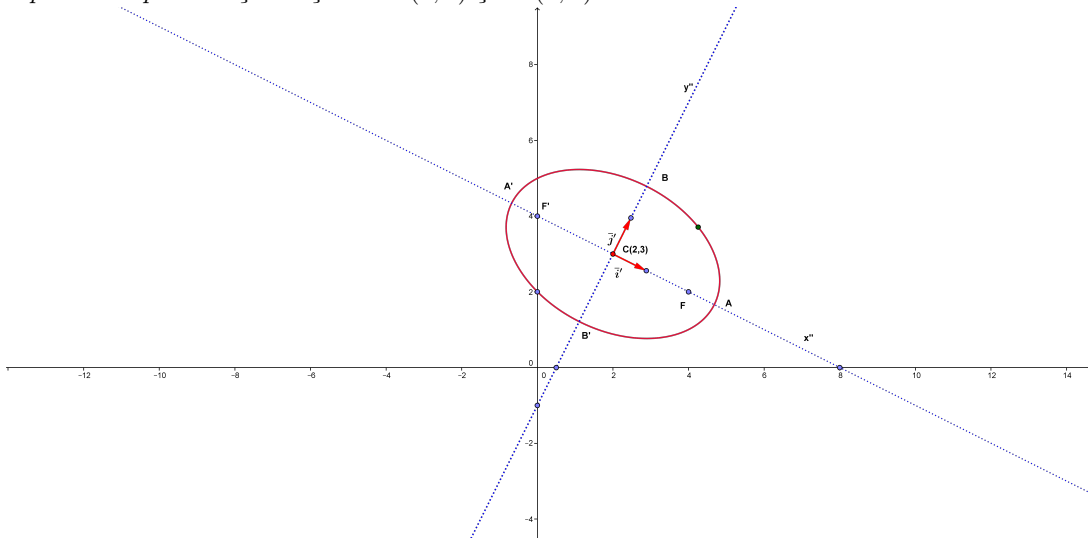
$$\begin{cases} Cx'' : C + [\bar{i}''] \\ Cy'' : C + [\bar{j}''] \end{cases} \rightarrow \begin{cases} Cx'' : x + 2y - 8 = 0 \\ Cy'' : 2x - y - 1 = 0. \end{cases}$$

(j) Intersecțiile elipsei cu axele reperului inițial, Ox și Oy . Obținem

$$\begin{cases} \Gamma \cap Oy = \{P(0, 2), Q(0, 5)\} \\ \Gamma \cap Ox = \emptyset \end{cases}$$

(k) Vârfurile $A(3, 0)$, $A'(-3, 0)$ și $B(0, 2)$, $B'(0, -2)$, în raport cu $\mathcal{R}''$. Obținem $x_A = 2 + \frac{6\sqrt{5}}{5}$ și $y_A = 3 - \frac{3\sqrt{5}}{5}$. Analog procedăm cu celelalte trei vârfuri ale elipsei.

Focarele elipsei au în raport cu reperul canonic coordonatele $x''_F = \sqrt{5}$, $y''_F = 0$ și $x''_{F'} = -\sqrt{5}$, $y''_{F'} = 0$, iar în raport cu reperul inițial obținem $F(4, 2)$ și $F'(0, 4)$.



(4) În raport cu reperul ortonormat $\mathcal{R} = \{O; \bar{i}, \bar{j}\}$ se dă conica

$$\Gamma : 6xy + 8y^2 - 12x - 26y + 11 = 0.$$

Aduceți această conică la forma canonică și reprezentați-o grafic.

(a) Determinăm $A = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 3 & 8 \end{pmatrix}$ și $D = \begin{pmatrix} 0 & 3 & -6 \\ 3 & 8 & -13 \\ -6 & -13 & 11 \end{pmatrix}$, deci $I = 8$, $\delta = -9$, $\Delta = 81$. Deoarece $\delta < 0$ și $\Delta \neq 0$

rezultă că Γ este o hiperbolă.

(b) Polinomul caracteristic al lui A este $p(\lambda) = \lambda^2 - 8\lambda - 9$, deci $\lambda_1 = -1$ și $\lambda_2 = 9$ sunt valorile proprii ale lui A .

(c) Obținem $U(-1) = \{-3\alpha\bar{i} + \alpha\bar{j} \mid \alpha \in \mathbb{R}\}$ și alegem $\bar{i}' = \frac{\sqrt{10}}{10}(3\bar{i} - \bar{j})$. Fie $\bar{j}' = \frac{\sqrt{10}}{10}(\bar{i} + 3\bar{j}) \perp \bar{i}'$ un vector propriu corespunzător lui $\lambda_2 = 9$.

(d) Facem rotația de repere $\mathcal{R} = \{O; \bar{i}, \bar{j}\} \rightarrow \mathcal{R}' = \{O; \bar{i}', \bar{j}'\}$, ce determină schimbarea de coordonate

$$(5) \quad X = \frac{\sqrt{10}}{10} \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} X' \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\sqrt{10}}{10}(3x' + y'), \\ y = \frac{\sqrt{10}}{10}(-x' + 3y'). \end{cases}$$

(e) În raport cu $\mathcal{R}'$, hiperbola are ecuația

$$\begin{aligned} -(x')^2 + 9(y')^2 - \sqrt{10}x' - 9\sqrt{10}y' + 11 &= 0 \Leftrightarrow \\ -\left(x' + \frac{\sqrt{10}}{2}\right)^2 + 9\left(y' - \frac{\sqrt{10}}{2}\right)^2 - 9 &= 0. \end{aligned}$$

(f) Considerăm acum translația de repere $\mathcal{R}' = \{O; \bar{i}', \bar{j}'\} \rightarrow \mathcal{R}'' = \{C; \bar{i}'', \bar{j}''\}$,

$$(6) \quad \begin{cases} x'' = x' + \frac{\sqrt{10}}{2}, \\ y'' = y' - \frac{\sqrt{10}}{2}. \end{cases}$$

(g) În raport cu reperul canonic $\mathcal{R}'' = \{C; \bar{i}'', \bar{j}''\}$ hiperbola are ecuația

$$(7) \quad \frac{-(x'')^2}{9} + \frac{(y'')^2}{1} - 1 = 0$$

(h) Observăm că hiperbola are focarele și vârfurile pe axa Cy'' . Obținem centrul de simetrie al hiperbolei $C(-1, 2)$ în raport cu $\mathcal{R}$.

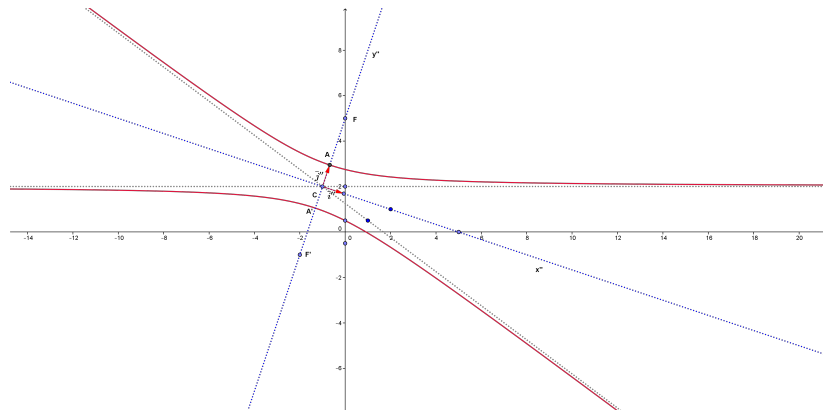
(i) Axele reperului canonic sunt $Cx'' = C + [\bar{i}'']$ și $Cy'' = C + [\bar{j}'']$, de ecuații

$$\begin{cases} Cx'' : x + 3y - 5 = 0 \\ Cy'' : 3x - y + 5 = 0. \end{cases}$$

(j) Asimptotele hiperbolei au, în raport cu reperul $\mathcal{R}''$, ecuațiile $a_1 : y'' = \frac{1}{3}x''$ și $a_2 : y'' = -\frac{1}{3}x''$. Aplicând formulele schimbărilor de repere obținem $a_1 : y = 2$, $a_2 : 3x + 4y - 5 = 0$.

(k) Intersecțiile hiperbolei cu axele Ox , Oy sunt $\Gamma \cap Ox = \{P(\frac{11}{12}, 0)\}$ și $\Gamma \cap Oy = \{Q(0, \frac{11}{4}), R(0, \frac{1}{2})\}$.

(l) Vârfurile hiperbolei, în raport cu reperul canonic $\mathcal{R}''$, au coordonatele $A(0, 1)$ și $A'(0, -1)$. Focarele hiperbolei au, în raport cu reperul inițial, coordonatele $F(0, 5)$ și $F'(-2, -1)$.



Determinați tipul conicelor următoare, identificați toate elementele necesare pentru reprezentarea lor și reprezentați-le grafic:

- $3x^2 + 2xy + y^2 + 6y - 2y - 5 = 0$
- $x^2 - 2xy + y^2 - 10x - 6y + 25 = 0$
- $3x^2 - 4xy - 2x + 4y - 3 = 0$.
- $x^2 - 2xy + y^2 - x + 5y + 1 = 0$
- $x^2 - 4xy + 4y^2 - 26x - 38y + 25 = 0$.
- $6xy + 8y^2 - 12x - 26y + 11 = 0$.