Seminar 2
Geometrie euclidiană - Recapitulare ecuaţii de drepte şi plane

Georgeta Creţu

Fixam un reper cartezian $\mathcal{R} = \{O, \bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3\}$.

Ecuaţiile dreptei afine în $\mathcal{A}^3$

Considerăm $d = A + \overrightarrow{d}$ o dreaptă afină. Presupunem că A are în raport cu $\mathcal{R}$ vectorul de poziţie $\bar{r}_0 = \overrightarrow{OA} = x_0^1\bar{e}_1 + x_0^2\bar{e}_2 + x_0^3\bar{e}_3$ şi $\bar{a} = a^1\bar{e}_1 + a^2\bar{e}_2 + a^3\bar{e}_3 \neq \bar{0}$ este un vector director al dreptei: $\overrightarrow{d} = [\bar{a}]$.

Fie un punct arbitrar $P(\bar{r}) \in X$ de vector de pozitie $\bar{r} = \overrightarrow{OP} = x^1\bar{e}_1 + x^2\bar{e}_2 + x^3\bar{e}_3$.

Punctul P aparţine dreptei d dacă şi numai dacă $\overrightarrow{AP} \in \overrightarrow{d} \Leftrightarrow \exists t \in \mathbb{R}\, a.i.\ \overrightarrow{AP} = t\bar{a} \Leftrightarrow$ vectorul de poziţie al lui P, respectiv coordonatele sale în raport cu $\mathcal{R}$ verifică unul din seturile de ecuaţii echivalente:

1. ecuaţia vectorială: $\bar{r} = \bar{r}_0 + t\bar{a},\ t \in \mathbb{R}$
2. ecuaţiile parametrice: $\begin{cases} x^1 &= x_0^1 + ta^1, \\ x^2 &= x_0^2 + ta^2, \\ x^3 &= x_0^3 + ta^3,\ t \in \mathbb{R}; \end{cases}$
3. ecuaţiile canonice: $\frac{x^1 - x_0^1}{a^1} = \frac{x^2 - x_0^2}{a^2} = \frac{x^3 - x_0^3}{a^3}$;
4. ecuaţiile dreptei ca intersecţie de (hiper)plane: $\begin{cases} a^2x^1 - a^1x^2 + (a^1x_0^2 - a^2x_0^1) &= 0, \\ a^3x^2 - a^2x^3 + (a^2x_0^3 - a^3x_0^2) &= 0. \end{cases}$

Ecuaţiile planului afin în $\mathcal{A}^3$

Fie planul afin $\pi = A + \overrightarrow{\pi}$ ce trece prin $A(\bar{r}_0)$, cu spaţiul liniar director $\overrightarrow{\pi} = [\bar{a}_1, \bar{a}_2]$, $\bar{a}_1, \bar{a}_2$ fiind vectorii unei baze în $\overrightarrow{\pi}$.

În raport cu reperul cartezian $\mathcal{R}$, presupunem că $\bar{r}_0 = x_0^1\bar{e}_1 + x_0^2\bar{e}_2 + x_0^3\bar{e}_3$,

$\bar{a}_1 = a_1^1\bar{e}_1 + a_1^2\bar{e}_2 + a_1^3\bar{e}_3 \neq \bar{0}$, $\bar{a}_2 = a_2^1\bar{e}_1 + a_2^2\bar{e}_2 + a_2^3\bar{e}_3 \neq \bar{0}$, $\bar{a}_1, \bar{a}_2$ necoliniari. Atunci un punct oarecare $P \in X$, ce are în raport cu $\mathcal{R}$ vectorul de poziţie $\bar{r} = x^1\bar{e}_1 + x^2\bar{e}_2 + x^3\bar{e}_3$, aparţine planului π dacă şi numai dacă $\overrightarrow{AP} \in \overrightarrow{\pi} \Leftrightarrow \exists t, s \in \mathbb{R}\, a.i.\ \overrightarrow{AP} = t\bar{a}_1 + s\bar{a}_2 \Leftrightarrow \left(\overrightarrow{AP}, \bar{a}_1, \bar{a}_2\right) = 0 \Leftrightarrow$ vectorul de pozitie al lui P, respectiv coordonatele sale în raport cu $\mathcal{R}$ verifică unul din seturile de ecuaţii echivalente:

- ecuaţia vectorială: $\bar{r} = \bar{r}_0 + t^1\bar{a}_1 + t^2\bar{a}_2,\ t_1, t_2 \in \mathbb{R}$;
- ecuaţiile parametrice: $\begin{cases} x^1 &= x_0^1 + t^1a_1^1 + t^2a_2^1, \\ x^2 &= x_0^2 + t^1a_1^2 + t^2a_2^2, \\ x^3 &= x_0^3 + t^1a_1^3 + t^2a_2^3,\ t^1, t^2 \in \mathbb{R}; \end{cases}$
- ecuaţia planului sub formă de determinant: $\begin{vmatrix} x^1 - x_0^1 & a_1^1 & a_2^1 \\ x^2 - x_0^2 & a_1^2 & a_2^2 \\ x^3 - x_0^3 & a_1^3 & a_2^3 \end{vmatrix} = 0$;
- ecuaţia generală a planului, obţinută din dezvoltarea determinantului anterior după prima coloană:

$$ax^1 + bx^2 + cx^3 + d = 0,\ a^2 + b^2 + c^2 > 0.$$

Exerciţii rezolvate

Exerciţiul 1. Fie $\mathcal{A}_3$ un spaţiu afin 3-dimensional raportat la un reper cartezian $\mathcal{R} = \{O, \overline{e_1}, \overline{e_2}, \overline{e_3}\}$.

1. Să se scrie ecuaţia vectorială şi sistemul ecuaţiilor parametrice ale dreptei ce trece prin $A_0(1, 0, 1)$ şi care are direcţia $\overline{u} = \overline{e_1} + 2\overline{e_2} + \overline{e_3}$.

   Soluţie: Ecuaţia vectorială a dreptei $(d) = A_0 + [\overline{u}]$ este $(d) : \overline{r} = (1, 0, 1) + t(1, 2, 1),\ t \in \mathbb{R}$. Sistemul ecuaţiilor parametrice ale dreptei de mai sus este: $\begin{cases} x = t + 1 \\ y = 2t \\ z = t + 1 \end{cases},\ t \in \mathbb{R}$.

2. Să se scrie ecuaţiile canonice ale dreptei ce trece prin punctul $A_1(0,1,0)$ şi are direcţia $\overline{u} = (1,1,4)$.
Soluţie: Ecuaţiile canonice ale dreptei determinate de punctul A_1 şi vectorul director $\overline{u}$ sunt:
$$(d) : \frac{x}{1} = \frac{y-1}{1} = \frac{z}{4}.$$

3. Să se scrie ecuaţiile canonice ale dreptei ce trece prin punctele $A_2(1,1,1)$ şi $A_3(2,3,-4)$.
Soluţie: Ecuaţiile canonice se obţin astfel: $(A_2A_3) : \dfrac{x - x_{A_2}}{x_{A_2} - x_{A_3}} = \dfrac{y - y_{A_2}}{y_{A_2} - y_{A_3}} = \dfrac{z - z_{A_2}}{z_{A_2} - z_{A_3}}$. După înlocuirea coordonatelor ecuaţiile devin:
$$(A_2A_3) : \frac{x-1}{1} = \frac{y-1}{2} = \frac{z-1}{-5}.$$

4. Ecuaţia planului care trece prin $M(1,1,1)$ şi are subspaţiul vectorial director generat de vectorii $\overline{u}_1 = \overline{e}_1 + 2\overline{e}_2 + \overline{e}_3$ şi $\overline{u}_2 = 3\overline{e}_1 + 2\overline{e}_2 + \overline{e}_3$.
Soluţie:
   - **ecuaţia vectorială:** $\overline{r} = (1,1,1) + t(1,2,1) + s(3,2,1),\ t,s \in \mathbb{R}$.
   - **ecuaţiile paramentrice:** $\begin{cases} x = 1 + t + 3s \\ y = 1 + 2t + 2s \\ z = 1 + t + s \end{cases},\ t,s \in \mathbb{R}$.
   - **ecuaţia sub formă de determinant:** $\begin{vmatrix} x-1 & 1 & 3 \\ y-1 & 2 & 2 \\ z-1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$.
   - **ecuaţia generală:** $y - 2z + 1 = 0$.

5. Ecuaţia planului care conţine dreapta afină $(d) : \frac{x-2}{1} = \frac{y}{1} = \frac{z-1}{2}$ şi este paralel cu dreapta afină $(d') : \frac{x+1}{0} = \frac{y-1}{2} = \frac{z}{1}$.
Soluţie: Vom considera spre exemplu punctul $A(2,0,1) \in d$, drepta care dorim să fie conţinută de plan. Subspaţiul vectorial director pentru plan va fi generat de vectorii $\overline{(u)} \in \overrightarrow{d},\ \overline{v} \in \overrightarrow{d'}$. Deci $\overline{u} = (1,1,2)$ şi $\overline{v} = (0,2,1)$.
Obţinem:
   - **ecuaţia vectorială:** $\overline{r} = (2,0,1) + t(1,1,2) + s(0,2,1),\ t,s \in \mathbb{R}$.
   - **ecuaţiile paramentrice:** $\begin{cases} x = 2 + t \\ y = t + 2s \\ z = 1 + 2t + s \end{cases},\ t,s \in \mathbb{R}$.
   - **ecuaţia sub formă de determinant:** $\begin{vmatrix} x-2 & 1 & 0 \\ y & 1 & 2 \\ z-1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 0$.
   - **ecuaţia generală:** $-3x - y + 2z + 4 = 0$.

Verificare: Să scriem acum ecuaţiile parametrice ale celor două drepte din enunţ:
$$(d) : \begin{cases} x = t + 2 \\ y = t \\ z = 2t + 1 \end{cases},\ t \in \mathbb{R} \text{ şi } (d') : \begin{cases} x = -1 \\ y = 2s + 1 \\ z = s \end{cases},\ s \in \mathbb{R}.$$
Calculăm acum intersecţia dintre cele două drepte şi planul $(\pi) : -3x - y + 2z + 4 = 0$.
$$d \cap \pi : \begin{cases} x = t + 2 \\ y = t \\ z = 2t + 1 \\ -3x - y + 2z + 4 = 0 \end{cases} \Rightarrow -3\,(t+2) - t + 2\,(2t+1) = 0 \to 0 = 0(A) \to d \subset \pi.$$
$$d' \cap \pi : \begin{cases} x = -1 \\ y = 2s + 1 \\ z = s \\ -3x - y + 2z + 4 = 0 \end{cases} \Rightarrow +3 - (2s+1) + 2s + 4 = 0 \to 6 = 0(F) \to d \parallel \pi.$$

6. Fie subspaţiile afine:
$$d : \frac{x}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z-1}{2}$$
şi planul $\pi : x + y - z + 4 = 0$. Să se determine poziţia relativă a lui d faţă de planul π.

Soluţie: Să analizăm ce se obţine atunci când intersectăm dreapta d cu planul π :
$$d \cap \pi \begin{cases} x = 2t \\ y = t \\ z = 2t + 1 \\ x + y - z + 4 = 0. \end{cases} \Rightarrow 2t + t - 2t - 1 + 4 = 0 \to t = -3.$$
Obţinem că $d \cap \pi = A$, unde punctul de intersecţie are coordonatele $(-6, -3, -5)$.

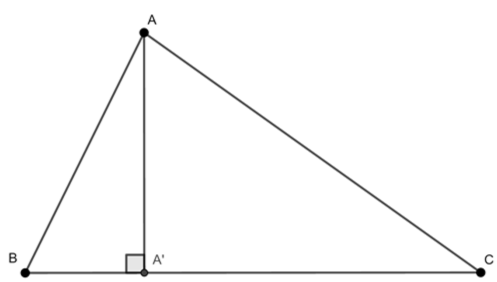
Exerciţiul 2. Cadrul de lucru pentru acest exerciţiu este un spaţiu afin doi dimensional. Să se determine ecuaţiile vectoriale, canonice, parametrice şi generale ale dreptei (d) care trece prin punctul $M_0(1, 2)$ şi are vectorul director $\vec{v} = (1, 5)$.

Soluţie:

- **Ecuaţia vectorială:** conform teoriei prezentate anterior obţinem $(d) : \overline{r}_d = \overline{r}_{M_0} + t \cdot \overline{v} = (1, 2) + t(1, 5),\ t \in \mathbb{R}$.
- **Ecuaţiile parametrice:** $(d) : \begin{cases} x = t + 1, \\ y = 5t + 2 \end{cases},\ t \in \mathbb{R}$.
- **Ecuaţiile canonice:** $\dfrac{x-1}{1} = \dfrac{y-2}{5}$.
- **Ecuaţia generală:** $(d) : 5x - y - 3 = 0$.

Exerciţiul 3. Cadrul de lucru pentru acest exerciţiu este un spaţiu afin euclidian doi dimensional, raportat la un reper cartezian ortonormat pozitiv. Se consideră $A(-6, 4),\ B(1, 2),\ C(2, 3)$. Să se găsească proiecţia ortogonală a punctului $A(-6, 4)$ pe dreapta (BC).

Soluţie: Proiecţia punctului A pe dreapta (BC) este piciorul perpendicularei duse din A pe dreapta (BC).



Fie deci $A' = pr_{BC}A$. Se observă că proiecţia este intersecţia dintre dreapta (BC) şi dreapta care trece prin A şi este perpendiculară pe BC: $A' = BC \cap AA'$.
Ecuaţia generală a dreptei $(BC) : x - y + 1 = 0$. În cele ce urmează vom încerca să scriem ecuaţia dreptei (AA'). Pentru aceasta vom utiliza faptul că $AA' \perp BC \Rightarrow \overrightarrow{AA'} \perp \overrightarrow{BC} \Leftrightarrow \langle \overrightarrow{AA'}, \overrightarrow{BC} \rangle = 0$. Vectorul director al dreptei (BC) este $\overrightarrow{BC} = (1, 1)$. Prin urmare, folosind pependicularitatea mai sus menţionată putem alege $\overrightarrow{AA'} = (1, -1)$. Vom scrie ecuaţia generală a dreptei $(AA') := A' + [\overrightarrow{AA'}] : x + y + 2 = 0$.
Identificăm acum coordonatele punctului A' din rezolvarea sistemului: $\begin{cases} x - y + 1 = 0 \\ x + y + 2 = 0 \end{cases}$.

Obţinem $A' = pr_{BC}A$ de coordonate $x = -\dfrac{3}{2}$ şi $y = -\dfrac{1}{2}$.

Exerciţii propuse spre rezolvare Cadrul de lucru pentru următoarele exerciţii este un spaţiu afin euclidian doi dimensional, raportat la un reper cartezian ortonormat pozitiv.

Exerciţiul 4. Să se determine ecuaţiile vectoriale, canonice, parametrice şi generale ale dreptei (d) care trece prin punctul $M_0(2,3)$ şi are vectorul director $\overline{v} = (-1,4)$.

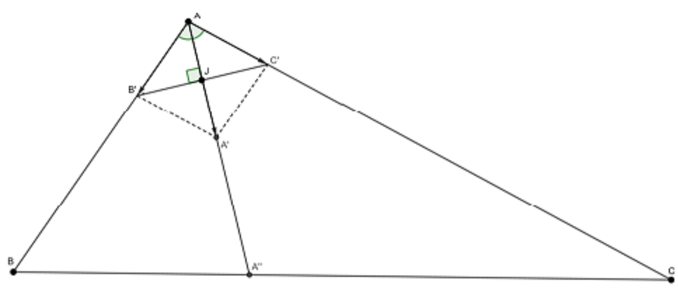
Exerciţiul 5. Să se găsească ecuaţia dreptei care trece prin punctele $M_0(a+1, a-1)$ şi $M_1(a-1, a+1)$.

Exerciţiul 6. Să se arate că punctele $M_0(a, b+c),\ M_1(b, c+a),\ M_2(c, a+b)$ sunt coliniare şi să se determine ecuaţia dreptei care le conţine.

Exerciţiul 7. Se dă triunghiul cu vârfurile în punctele $A(-1,3),\ B(2,-1),\ C(3,6)$. Să se determine:

1. Ecuaţia dreptei (AC).
2. Ecuaţia paralelei prin B la dreapta (AC).
3. Ecuaţia mediatoarei laturii $[BC]$.
4. Ecuaţia medianei din C.
5. Ecuaţia înălţimii din C.
6. Ecuaţia bisectoarei unghiului $\widehat{BAC}$.

Indicaţie: Pentru scrierea vectorului director al bisectoarei vom utiliza o metodă diferită faţă de cea prezentată în seminarul precedent.



Este cunoscut faptul că rombul este paralelelogramul cu două laturi consecutive congurente. Mai mult de atât diagonalele acestuia reprezintă bisectoarele unghiurilor rombului. Prin urmare vom incerca să construim pe laturile unghiului analizat un romb, în care, o parte din bisectoarea unghiului să reprezinte diagonala rombului construit. Mai explicit, vom normaliza vectorii directori ai laturilor ce formează unghiul $\widehat{BAC}$. Vom construi rombul pe vectorii unitari obţinuţi şi aplicând regula paralelogramului obţinem: $\overrightarrow{AA''} = \dfrac{\overrightarrow{AB}}{||\overrightarrow{AB}||} + \dfrac{\overrightarrow{AC}}{||\overrightarrow{AC}||}$.

Exerciţiul 8. Să se găsească proiecţia ortogonală a punctului $M^*(-6,4)$ pe dreapta $(d): 4x - 5y + 3 = 0$.

Exerciţiul 9. Să se găsească simetricul punctului $M^*(2,1)$ faţă de dreapta $(d): 2x - y + 2 = 0$.

Exerciţiul 10. Să se afle distanţa de la punctul $M^*(2,1)$ la dreapta $(d): 4x - 3y + 5 = 0$.

Exerciţiul 11. Fie $\mathcal{A}_3$ un spaţiu afin 3-dimensional raportat la un reper cartezian $\mathcal{R} = \{O, \overline{e}_1, \overline{e}_2, \overline{e}_3\}$.

1. Să se scrie ecuaţia vectorială şi sistemul ecuaţiilor parametrice ale dreptei ce trece prin $A_0(1,-1,2)$ şi care are direcţia $\overline{u} = -\overline{e}_1 + 2\overline{e}_2 + 2\overline{e}_3$.
2. Să se scrie ecuaţiile canonice ale dreptei ce trece prin punctul $A_1(3,2,-2)$ şi are parametri directori $(-1,-2,4)$.
3. Să se scrie ecuaţiile canonice ale dreptei ce trece prin punctele $A_2(1,0,1)$ şi $A_3(0,2,-2)$.
4. Ecuaţia planului care trece prin O şi are subspaţiul vectorial director generat de vectorii $\overline{u}_1 = -\overline{e}_1 + 2\overline{e}_2 + \overline{e}_3$ şi $\overline{u}_2 = \overline{e}_1 - 2\overline{e}_2 + \overline{e}_3$.
5. Ecuaţia planului ce trece prin $Q_0(2,-4,5)$ şi are direcţia planară determinată de vectorii $\overline{v}_1 = 3\overline{e}_1 + 2\overline{e}_2 + \overline{e}_3$ şi $\overline{v}_2 = 2\overline{e}_1 - \overline{e}_2 - \overline{e}_3$.
6. Ecuaţia planului care conţine dreapta afină $\begin{cases} x^1 + x^2 + x^3 - 1 = 0 \\ 2x^1 - x^2 - 2 = 0 \end{cases}$ şi este paralel cu dreapta afină $\frac{x^1+1}{2} = \frac{x^2-4}{2} = \frac{x^3-1}{6}$
7. Fie subspaţiile afine: $d: \frac{x+3}{4} = \frac{y-2}{2} = \frac{z-1}{5}$ şi planul $\pi: x + 3y - 2z + 15 = 0$.
   - Să se determine poziţia relativă a lui d faţă de planul π.
   - Să se scrie ecuaţia planului ce conţine d şi este paralel cu planul π.