Seminarul 3
Geometrie euclidiană
Georgeta Creţu

1. Breviar teoretic

Fie $\mathcal{E}^n = (X, \overrightarrow{X}, \Phi)$ un spaţiu afin euclidian real n-dimensional. Oricare ar fi $Y \subset X$, spaţiul vectorial poate fi descompus ca suma directă: $X = Y \oplus Y^{\perp}$, unde $Y^{\perp}$ este suplementul ortogonal al lui Y. Dacă $dimX = n$ şi $dimY = m$, atunci $dimY^{\perp} = n - m$.

Hiperplanul determinat de un punct şi o direcţie normală: Un hiperplan π este un subspaţiu afin de dimensiune $n-1$, prin urmare direcţia sa normală are dimensiune 1.

Deci $\pi = A + \overrightarrow{\pi}$, cu $\left(\overrightarrow{\pi}\right)^{\perp} = \bar{N},\ \bar{N} \neq \bar{0}$. Presupunem că $\bar{r}_0 = \overrightarrow{OA} = \sum\limits_{i=1}^{n} x_0^i \bar{e}_i,\ \bar{N} = \sum\limits_{i=1}^{n} a_i \bar{e}_i$. Atunci:

- **ecuaţia vectorială este:** $\langle \bar{r} - \bar{r}_0, \bar{N} \rangle = 0$.
- **ecuaţia generală este:** $\sum\limits_{i=1}^{n} a_i \left(x - x_0^i\right) = 0$.

  Observăm că în ecuaţia generală a hiperplanului, coeficienţii lui $x_1, x_2, \ldots, x_n$ sunt coordonatele unui vector normal hiperplanului.
- **ecuaţiile canonice ale normalei** la hiperplanul π care trece prin A sunt:

$$\frac{x^1 - x_0^1}{a_1} - \frac{x^2 - x_0^2}{a_2} = \ldots = \frac{x^n - x_0^n}{a_n}.$$

Cazul 3-dimensional. În cazul 3-dimensional, un hiperplan este un plan (subspaţiu afin de dimensiune 2). Fie $\pi = A + \overrightarrow{\pi}$, cu $\left(\overrightarrow{\pi}\right)^{\perp} = \bar{N},\ \bar{N} \neq \bar{0}$, unde $\bar{r}_0 = \overrightarrow{OA} = x_0^1 \bar{e}_1 + x_0^2 \bar{e}_2 + x_0^3 \bar{e}_3,\ \bar{N} = a_1 \bar{e}_1 + a_2 \bar{e}_2 + a_3 \bar{e}_3$. Ecuaţiile prezentate mai sus se rescriu astfel:

- **ecuaţia vectorială:** $\langle \bar{r} - \bar{r}_0, \bar{N} \rangle = 0$.
- **ecuaţia generală:** $a_1 \left(x^1 - x_0^1\right) + a_2 \left(x^2 - x_0^2\right) + a_3 \left(x^3 - x_0^3\right) = 0$.
- **ecuaţiile canonice ale normalei** la hiperplanul π prin punctul A sunt:

$$\frac{x^1 - x_0^1}{a_1} = \frac{x^2 - x_0^2}{a_2} = \frac{x^3 - x_0^3}{a_3}$$

2. Exerciţii rezolvate

Considerăm un spaţiu afin euclidian trei dimensional $\mathcal{E}^3$ şi reperul ortonormat $\mathcal{R} = \{O; \bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3\}$.

(1) Scrieţi ecuaţiile planului π in $\mathcal{E}^3$ ce trece prin $A(1,2,3)$ şi are direcţia normală $\left(\overrightarrow{\pi}\right)^{\perp} = [\bar{N}]$, cu $\bar{N}(3,-4,2)$.

Soluţie: Ţinând cont de faptul că este cunoscută direcţia normală la plan, putem scrie ecuaţia generală a planului π:

$$3(x^1 - 1) - 4(x^2 - 2) + 2(x^3 - 3) = 0 \Leftrightarrow 3x^1 - 4x^2 + 2x^3 - 1 = 0.$$

(2) Scrieţi ecuaţiile canonice ale **normalei** prin $B(1,4,1)$ la planul γ de ecuaţie generală $3x^1 - 2x^2 + 5x^3 = 0$.

Soluţie: Observăm că $\bar{N} \in (\overrightarrow{\pi})^{\perp},\ \bar{N} = (3,-2,5)$. Fie $d \perp \gamma,\ B \in d$. Deoarece dreapta este perpendiculară pe plan, aceasta va avea un vector director coliniar cu normala la plan, $\bar{d} \parallel \bar{N}$

$$d = B + [\bar{d}] : \frac{x^1 - 1}{3} = \frac{x^2 - 4}{-2} = \frac{x^3 - 1}{5} = 0.$$

3. Proiecţii şi simetrii

(1) **Proiecţia unui punct pe un plan:** Fie $A(a,b,c)$ şi planul (π) dat prin ecuaţia generală: $(\pi) : Ax + By + Cz + D = 0$.

Dorim să aflăm proiecţia punctului A pe planul (π).

Avem de efectuat următorii paşi:

- Verificăm mai întâi dacă $A \in \pi$. Dacă punctul aparţine planului proiecţia $pr_{\pi} A = A$.
- Dacă $A \notin \pi$, proiecţia acestuia $A' = pr_{\pi} A = \pi \cap d$, unde $d : A + [\bar{N}],\ \bar{N} \in \bar{\pi}^{\perp}$. Mai exact vom scrie ecuaţia dreptei care trece prin A ce are drept vector director, direcţia normală planului π.

$$(d) : \frac{x - a}{A} = \frac{y - b}{B} = \frac{z - c}{C} \tag{1}$$

Proiecţia punctului A pe planul π va fi intersecţia dintre această dreaptă şi planul π:

$$d \cap \pi : \begin{cases} \frac{x-a}{A} = \frac{y-b}{B} = \frac{z-c}{C} \\ Ax + By + Cz + D = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = At + a \\ y = Bt + b \\ z = Ct + c \\ A(At + b) + B(Bt + b) + C(Ct + c) = 0 \end{cases} \tag{2}$$

Vom obţine rezolvând sistemul precedent $A' = d \cap \pi = pr_\pi A$.

(2) **Simetricul unui punct faţă de un plan:** Fie $A(a, b, c)$ şi planul (π) dat prin ecuaţia generală:

$$(\pi) : Ax + By + Cz + D = 0.$$

Dorim să aflăm simetricul punctului A faţă de planul (π).
Avem de efectuat următorii paşi:
- Verificăm mai întâi dacă $A \in \pi$. Dacă punctul aparţine planului simetricul $s_\pi A = A$.
- Dacă $A \notin \pi$, atunci avem de străbătut următorii paşi:
  - Vom găsi mai întâi proiecţia punctului pe plan. Fie $A' = pr_\pi A$.(vezi algortimul de la punctul precedent).
  - Vom considera proiecţia A' mijlocul segmentului $[AA'']$, unde $A'' = s_\pi A$ este simetricul pe care îl căutăm.

(3) **Proiecţia unui punct pe o dreaptă:** Fie $A(a, b, c)$ şi dreapta d dată prin ecuaţia canonică: $\frac{x-m}{A} = \frac{y-n}{B} = \frac{z-p}{C}$.
Dorim să determinăm proiecţia punctului A pe dreapta d. Avem următorii paşi:
- Verificăm mai întâi dacă $A \in d$. Dacă punctul aparţine dreptei proiecţia $pr_d A = A$.
- Dacă $A \notin d$, atunci $pr_d A = A' = d \cap \pi$, unde $\pi = A + [\bar{N}]$, $\bar{N} = \bar{d}$. Cu alte cuvinte proiecţia punctului A pe dreapta d va fi intersecţia dintre dreapta d şi planul care trece prin A şi este normal dreptei d.
  - Pornind de la ecuaţia dreptei d, vom găsi $\bar{d} = (A, B, C) \in d$.

  - Scriem ecuaţia planului π cunoscând punctul A şi o direcţie normală: $\bar{N}$. Avem:

  $$(\pi) : A(x - a) + B(y - b) + C(z - c) = 0.$$

  - Găsim proiecţia:

  $$A' = pr_d A = d \cap \pi : \begin{cases} \frac{x-m}{A} = \frac{y-n}{B} = \frac{z-p}{C} \\ A(x - a) + B(y - b) + C(z - c) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = At + m \\ y = Bt + n \\ z = Ct + p \\ A(At + m - a) + B(Bt + n - b) + C(Ct + p - c) = 0 \end{cases}$$

(4) **Simetricul unui punct faţă de o dreaptă:** Fie $A(a, b, c)$ şi dreapta d dată prin ecuaţia canonică:

$$(d) : \frac{x - m}{A} = \frac{y - n}{B} = \frac{z - p}{C}.$$

Dorim să determinăm simetricul punctului A faţă de dreapta d. Avem următorii paşi:
- Verificăm mai întâi dacă $A \in d$. Dacă punctul aparţine dreptei, simetricul punctului $s_d A = A$.
- Dacă $A \notin d$, atunci fie $s_d A = A''$. În continuare dorim să vedem cum ajungem la acest simetric. Avem de strabătut următorii paşi:
  - Vom calcula mai întâi proiecţia punctului A pe dreapta d, fie $A' = pr_d A$ (vezi pasul precedent).
  - Considerăm A' mijlocul segmentului $[AA'']$, unde $A'' = s_d A$. Deoarece proiecţia punctului este mijlocul segmentului ce are drept extremităţi punctul şi simetricul său, putem afla de aici coordonatele simetricului.

(5) **Proiecţia unei drepte pe un plan:** Dorim să determinăm proiecţia dreptei d dată prin ecuaţia:

$$(d) : \frac{x - m}{A} = \frac{y - n}{B} = \frac{z - p}{C}$$

pe planul

$$(\pi) : Nx + My + Pz + Q = 0.$$

Avem de realizat următorii paşi:
- Vrem să analizăm pentru început dacă $d \perp \pi$. În acest caz, proiecţia dreptei ar fi un singur punct, intersecţia dintre dreaptă şi plan. Fie $\bar{N}_\pi = (N, M, P)$ normala planului π. Fie $\bar{d} = (A, B, C)$ vectorul director al dreptei d. Dacă $\bar{N}_\pi \nparallel \bar{d}$, proiecţia dreptei $pr_\pi d$ este o dreaptă. În caz contrar, dacă $\bar{N}_\pi \parallel \bar{d}$ proiecţia dreptei va fi punctul de interseţie dintre dreaptă şi plan $A = d \cap \pi = pr_\pi d$.
- Analizăm aici cazul în care proiecţia este o dreaptă. Fie $d' = pr_\pi d$. Pentru a determina ecuaţia dreptei d' trebuie să determinăm ecuaţia planului proiector al dreptei d pe planul π. Vom nota acest plan cu ρ şi va fi planul care va trece prin $B(b_1, b_2, b_3) \in d$, de vector normal $\bar{d} \times \bar{N}_\pi$, unde $\bar{d}$ este vectorul director al dreptei

d şi $\bar{N}_\pi$ normala la planul π.

Aşadar planul ρ este determinat de $\rho = B + [\bar{d}, \bar{N}_\pi]$, deci ecuaţia sa sub formă de determinant este:

$$(\rho) : \begin{vmatrix} x - b_1 & A & M \\ y - b_2 & B & N \\ z - b_3 & C & P \end{vmatrix} = 0.$$

În final vom avea proiecţia dreptei d ca fiind intersecţia dintre planul proiector şi planul pe care dorim să o proiectăm, deci:

$$d' = pr_\pi d = \pi \cap \rho.$$

Observaţia 1. O altă metodă pentru a găsi proiecţia unei drepte pe un plan ar fi următoarea:

- Vom considera două puncte distincte $A, B \in d$.
- Vom căuta pe rând proiecţiile celor două puncte faţă de planul π. Fie $A' = pr_\pi A$ şi $B' = pr_\pi B$.
- În final $d' = pr_\pi d$ va fi dreapta determinată în mod unic de punctele A' şi B'.

(6) **Simetrica unei drepte faţă de un plan:** Dorim să determinăm simetrica dreptei d dată prin ecuaţia:

$$(d) : \frac{x - m}{A} = \frac{y - n}{B} = \frac{z - p}{C}$$

faţă de planul

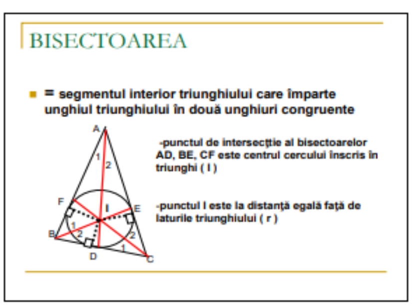
$$(\pi) : Nx + My + Pz + Q = 0.$$

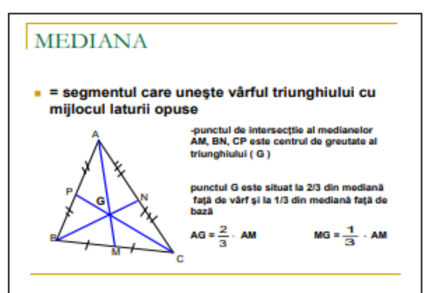
Avem de realizat următorii paşi:

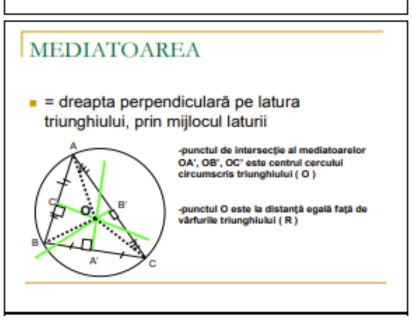
- Vrem să analizăm pentru început dacă $d \perp \pi$. În acest caz, simetrica dreptei ar fi chiar dreapta d, pe care o studiem. Deci pentru $d \perp \pi \Rightarrow s_\pi d = d$. Fie $\bar{N}_\pi = (N, M, P)$ normala planului π. Fie $\bar{d} = (A, B, C)$ vectorul director al dreptei d. Dacă $\bar{N}_\pi \nparallel \bar{d}$, simetrica dreptei $s_\pi d$ este o dreaptă.
- Analizăm aici cazul în care simetrica este o dreaptă.
  - Vom considera două puncte distincte $A, B \in d$.
  - Vom căuta pe rând proiecţiile celor două puncte faţă de planul π. Fie $A' = pr_\pi A$ şi $B' = pr_\pi B$.
  - Fie A' mijlocul segmentului $[AA'']$ şi B' mijlocul segmentului $[BB'']$ unde $A'' = s_\pi A$ şi $B'' = s_\pi B$. Din cele două relaţii scrise anterior vom obţine coordonatele simetricelor pentru cele două puncte. Dreapta simetrica $s_\pi d = d'$ va fi dreapta determinată în mod unic de punctele A'' şi B'' găsite anterior.

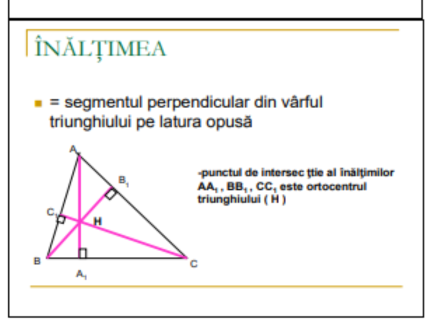
Observaţia 2. În cazul în care dreapta intersectează planul într-un punct, $B = \pi \cap d$, $pr_\pi B = B$ şi $s_\pi B = B$. Pe cale de consecinţă va trebui să mai găsim încă un punct pentru care să scriem proiecţia, apoi simetricul şi în final dreapta determinată de punctul de intersecţie şi de punctul determinat anterior.

4. Ecuaţiile liniilor importante într-un triunghi în spaţiul 3-dimensional









4.1. **Bisectoarea unui unghi în spaţiu.**

Teorema 1. *Bisectoarea unui unghi al unui triunghi determină pe latura opusă segmente proporţionale cu lungimile laturilor ce formează unghiul. Fie* $(AD$ *bisectoarea unghiului* $\widehat{BAC}$ *Atunci:*

$$(AD \textit{ bisectoare } \Leftrightarrow \frac{BD}{DC} = \frac{AB}{AC} \tag{3}$$

Teorema 2. $(AD$ *este bisectoarea unghiului* $\widehat{BAC}$ *dacă şi numai dacă* $\overrightarrow{AD} = \frac{b\overrightarrow{AB}+c\overrightarrow{AC}}{b+c}$, *unde* $b = \overrightarrow{AC},\ c = \overrightarrow{AB}$.

Demonstraţie. Observăm că punctul D împarte segmentul BC în raportul $\frac{BD}{DC} = k \in \mathbb{R}$. Obţinem de aici $\overrightarrow{BD} = k\overrightarrow{DC}$. Intercalând un A în relaţia precedentă obţinem:

$$\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AD} = k(\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AC}) \Leftrightarrow \overrightarrow{AD}(1+k) = \overrightarrow{AB} + k\overrightarrow{AC} \Leftrightarrow \overrightarrow{AD} = \frac{1}{1+k}\overrightarrow{AB} + \frac{k}{1+k}\overrightarrow{AC}. \tag{4}$$

Înlocuind k în (4) obţinem:

$$\overrightarrow{AD} = \frac{1}{1+\frac{BD}{DC}}\overrightarrow{AB} + \frac{\frac{BD}{DC}}{1+\frac{BD}{DC}}\overrightarrow{AC}. \tag{5}$$

Uilizând teorema bisectoarei în (5) obţinem:

$$\overrightarrow{AD} = \frac{1}{1+\frac{AB}{AC}}\overrightarrow{AB} + \frac{\frac{AB}{AC}}{1+\frac{AB}{AC}}\overrightarrow{AC} \Leftrightarrow \overrightarrow{AD} = \frac{AC}{AB+AC}\overrightarrow{AB} + \frac{AB}{AB+AC}\overrightarrow{AC}. \tag{6}$$

□

4.1.1. *Paşii pentru scrierea ecuaţiei bisectoarei unui unghi.* Considerăm ABC un triunghi pentru care se cunosc coordonatele tuturor vârfurilor. Ne propunem să scriem ecuaţia bisectoarei unghiului A. O vom nota pe aceasta cu $(AD$. Prin urmare cunoaştem un punct şi ar mai fi necesară determinarea unui vector director pentru a putea finaliza scrierea ecuaţiei. Vom străbate următorii paşi:

(1) Calculăm vectorii directori ai dreptelor care formează unghiul. În cazul de faţă vom calcula $\overrightarrow{AB}$ şi $\overrightarrow{AC}$.
(2) Calculăm normele celor doi vectori determinaţi anterior. Analog putem găsi lungimile laturilor triunghiului utilizând formula cunoscută pentru distanţa dintre două puncte:
$$AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2}$$
$$AC = \sqrt{x_C - x_A)^2 + (y_C - y_A)^2 + (z_C - z_A)^2}$$
(3) Găsim vectorul director al bisectoarei $(AD$ utilizând formula (6)
$$\overrightarrow{AD} = \frac{AC}{AB+AC}\overrightarrow{AB} + \frac{AB}{AB+AC}\overrightarrow{AC}. \tag{7}$$
(4) Scriem ecuaţia bisectoarei cunoscând un punct, vârful din care pleacă aceasta şi vectorul director determinat anterior.

Exerciţiul 1. Fie punctele $A(1,0,1), B(3,2,3),\ C(1,1,1)$. Scrieţi ecuaţia bisectoarei unghiului A.

Fie $(AD$ bisectoarea unghiului A. Vom calcula mai întâi directiile dreptelor care formează unghiul A. Avem deci:

$$\overrightarrow{AB} = 2\bar{i} + 2\bar{j} + 2\bar{k} = (2,2,2) \tag{8}$$

$$\overrightarrow{AC} = \bar{j} = (0,1,0) \tag{9}$$

Calculăm normele celor doi vectori:

$$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{4+4+4} = 2\sqrt{3} \tag{10}$$

$$|\overrightarrow{AC}| = \sqrt{1} = 1 \tag{11}$$

Folosind formula demonstrată mai sus (6), găsim vectorul director al bisectoarei unghiului A din triunghiul ABC.

$$\overrightarrow{AD} = \frac{1}{2\sqrt{3}+1}(2,2,2) + \frac{2\sqrt{3}}{2\sqrt{3}+1}(0,1,0) = \frac{1}{2\sqrt{3}+1}(2, 2+2\sqrt{3}, 2) = \frac{2}{2\sqrt{3}+1}(1, 1+\sqrt{3}, 1) \tag{12}$$

Observăm că vectorul din (12) are aceeaşi direţie cu $\bar{w} = (1, 1+\sqrt{3}, 1)$. Vom considera vectorul $\bar{w}$ vectorul director al bisectoarei $(AD$.
Ultimul pas constă în scrierea ecuaţiei bisectoarei $(AD$:

$$(AD : A + [\bar{w}] \tag{13}$$

$$(AD : \frac{x-1}{1} = \frac{y}{\sqrt{3}+1} = \frac{z-1}{1} \text{ am scris ecuaţiile canonice, pot fi scrise şi celelalte} \tag{14}$$

4.2. **Mediana într-un triunghi.** Pentru a scrie ecuaţia medianei unui triunghi vom folosi definiţia acestei linii importante din triunghi. Considerăm triunghiul ABC pentru care sunt cunoscute coordonatele tuturor vârfurilor. Dorim să scriem ecuaţia medianei din vârful A. Paşii pentru scrierea ecuaţiei medianei din vârful A sunt următorii.

4.2.1. *Paşii pentru scrierea ecuaţiei medianei unui triunghi.*

(1) Calculăm coorodonatele mijlocului laturii BC, latura opusă vârfului din care porneşte mediana. Notăm acest vârf cu M.
(2) Scriem ecuaţia dreptei deeterminată de punctele A şi M.

Exerciţiul 2. Fie punctele $A(2,3,1), B(1,2,0),\ C(1,0,0)$. Scrieţi ecuaţia medianei din vârful A al triunghiului ABC.

Pentru a scrie ecuaţia medianei din vârful A al triunghiului ABC vom parcurge paşii descrişi mai sus.

(1) Notăm cu M mijlocul laturii BC. Calculăm coordonatele punctului M astfel

$$\begin{cases} x_M = \frac{x_B+x_C}{2} = 1 \\ y_M = \frac{y_B+y_C}{2} = 1 \\ z_M = \frac{z_B+z_C}{2} = 0 \end{cases}$$

(2) Scriem ecuaţiile canonice ale dreptei AM care este mediana din vârful A al triunghiului ABC.

$$(AM): \frac{x-1}{1} = \frac{y-3}{2} = \frac{z-1}{1}.$$

4.3. **Înălţimea într-un triunghi.** Considerăm ABC un triunghi pentru care sunt cunoscute coordonatele celor trei vârfuri, $A(x_A, y_A, z_A),\ B(x_B, y_B, z_B),\ C(x_C, y_C, z_C)$. Ne propunem să scriem ecuaţia înălţimii din A a triunghiului ABC. Pentru aceasta avem de realizat următorii paşi:

4.3.1. *Paşii pentru scrierea ecuaţiei înălţimii unui triunghi.*

(1) Calculăm proiecţia punctului A pe latura BC a triunghiului (vezi algoritmul din seminarul precedent-amintim pe scurt aici).
   - Proiecţia punctului A pe dreapta BC va fi intersecţia dintre dreapta BC şi planul care trece prin A şi este normal dreptei BC.
   - Ecuaţiile dreptei (BC) sunt:

(15) $$(BC): \begin{cases} x = x_B + t(x_C - x_B) \\ y = y_B + t(y_C - y_B) \\ z = z_B + t(z_C - z_B) \end{cases}, t \in \mathbb{R}.$$

   - Scriem ecuaţia planului care trece prin A şi este normal dreptei BC

$$(\pi): (x_C - x_B)(x - x_A) + (y_C - y_B)(y - y_A) + (z_C - z_B)(z - z_A) = 0$$

   - Proiecţia punctului A pe dreapta BC se determină intersectând dreapta BC cu planul π.

$$pr_{BC}A = A' = BC \cap \pi$$

   În urma rezolvării sistemului se determină parametrul real t, ulterior se obţin coordonatele punctului A' din (15).

(2) Ultimul pas este scrierea ecuaţiei dreptei AA' care este înălţimea din vârful A pe latura BC.

$$(AA'): \frac{x - x_A}{x_{A'} - x_A} = \frac{y - y_A}{y_{A'} - y_A} = \frac{z - z_A}{z_{A'} - z_A}$$

Exerciţiul 3. Fie punctele $A(0,3,7), B(1,2,1),\ C(2,3,2)$. Scrieţi ecuaţia înălţimii din vârful A al triunghiului ABC.

(1) Scriem ecuaţiile parametrice ale dreptei BC, dreapta opusă vârfului din care porneşte înălţimea.

(16) $$(BC): \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2 + t \\ z = 1 + t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$$

(2) Scriem ecuaţia planului normal dreptei BC care trece prin punctul A. Deoarece acest plan este normal dreptei BC direcţia normalei planului va fi direcţia dreptei BC şi anume

$$\overrightarrow{BC} = (1,1,1)$$

Obţinem deci ecuaţia planului $\pi,\ A \in \pi,\ \pi \perp BC$:

$$(\pi): 1 \cdot (x - 0) + 1 \cdot (y - 3) + 1 \cdot (z - 7) = 0$$

$$(\pi) : x + y + z - 10 = 0 \tag{17}$$

(3) Găsim coordonatele proiecţiei punctului A pe latura BC intersectând dreapta BC cu planul π.

$$A' = \pi \cap BC : \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2 + t \\ z = 1 + t \\ x + y + z - 10 = 0 \end{cases} \Rightarrow t = 2 \Rightarrow A'(3, 5, 3). \tag{18}$$

(4) Încheiem cu ecuaţia înălţimii AA'.

$$(AA') : \frac{x}{3} = \frac{y-3}{2} = \frac{z-7}{-4}.$$

4.4. **Mediatoarea într-un triunghi.** Pentru a scrie ecuaţia mediatoarei unei laturi dintr-un triunghi vom folosi faptul că mediatoarea unei laturi dintr-un triunghi şi inălţimea care proneşte din vârful opus laturii respective sunt paralele, prin urmare au acelaşi vector director. Considerăm ABC un triunghi pentru care sunt cunoscute coordonatele celor trei vârfuri, $A(x_A, y_A, z_A)$, $B(x_B, y_B, z_B)$, $C(x_C, y_C, z_C)$. Ne propunem să scriem ecuaţia mediatoarei laturii BC a triunghiului ABC. Pentru aceasta avem următorii paşi:

4.4.1. *Paşii pentru scrierea ecuaţiei mediatoarei.*

(1) Calculăm coordonatele mijlocului laturii BC. Îl vom nota cu M.
(2) Determinăm vectorul director al înălţimii din varful A pe latura BC. (vezi secţiunea precedentă)
(3) Scriem ecuaţia mediatoare laturii BC cunoscând un punct şi o direcţie dată de direcţia înălţimii din vârful A, AA'.

$$m = M + [\overrightarrow{AA'}], \text{ unde m este mediatoarea căutată.}$$

Exerciţiul 4. Fie punctele $A(1, 1, 2), B(0, 2, 0),\ C(2, 0, 2)$. Scrieţi ecuaţia mediatoarei laturii BC a triunghiului ABC.

(1) Calculăm coordonatele mijlocului laturii BC. Îl vom nota cu M

$$\begin{cases} x_M = \frac{x_B + x_C}{2} = 1 \\ y_M = \frac{y_B + y_C}{2} = 1 \\ z_M = \frac{z_B + z_C}{2} = 1 \end{cases} \Rightarrow M(1, 1, 1)$$

(2) Determinăm vectorul director al înălţimii din A pe latura BC.
   (a) Scriem ecuaţiile parametrice ale dreptei BC, dreapta opusă vârfului din care porneşte înălţimea.

$$(BC) : \begin{cases} x = 2t \\ y = 2 - 2t \\ z = 2t \end{cases}, t \in \mathbb{R} \tag{19}$$

   (b) Scriem ecuaţia planului normal dreptei BC care trece prin punctul A. Deoarece acest plan este normal dreptei BC direcţia normalei planului va fi direcţia dreptei BC şi anume

$$\overrightarrow{BC} = (2, -2, 2)$$

   Obţinem deci ecuaţia planului π, $A \in \pi$, $\pi \perp BC$:

$$(\pi) : 2 \cdot (x - 1) - 2 \cdot (y - 1) + 2 \cdot (z - 2) = 0$$

$$(\pi) : 2x - 2y + 2z - 4 = 0 \tag{20}$$

   (c) Găsim coordonatele proiecţiei punctului A pe latura BC intersectând dreapta BC cu planul π.

$$A' = \pi \cap BC : \begin{cases} x = 2t \\ y = 2 - 2t \\ z = 2t \\ 2x - 2y + 2z - 4 = 0 \end{cases} \Rightarrow t = \frac{2}{3} \Rightarrow A'\left(\frac{4}{3}, \frac{2}{3}, \frac{4}{3}\right). \tag{21}$$

   (d) Obţinem direţia înălţimii din vârful A pe latura BC

$$\overrightarrow{AA'} = A' - A = \left(\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}, -\frac{2}{3}\right)$$

(3) Scriem ecuaţia mediatoarei laturii BC:

$$m = M + [\overrightarrow{AA'}]$$
$$m : \frac{x-1}{\frac{1}{3}} = \frac{y-1}{-\frac{1}{3}} = \frac{z-1}{-\frac{2}{3}}.$$

5. Exerciţii

Cadrul de lucru: Un spaţiu afin euclidian trei dimensional, raportat la un reper cartezian ortonormat pozitiv.

Exerciţiul 5. Fie subspaţiile afine euclidiene:

$$d : \frac{x+3}{4} = \frac{y-2}{2} = \frac{z-1}{5}$$

şi planul $\pi : x + 3y - 2z + 15 = 0$.

- Să se determine poziţia relativă a lui d faţă de planul π.
- Să se scrie ecuaţia planului ce conţine d şi este paralel cu planul π.

Exerciţiul 6. Ce condiţii trebuie să satisfacă numerele reale a şi b astfel încât planul $\pi :\ ax^1 + bx^2 + 6x^3 - 7 = 0$ să fie normal dreptei $d :\ \frac{x^1-2}{2} = \frac{x^2+5}{-4} = \frac{x^3+1}{3}$?

Exerciţiul 7. Se dau punctele $A(1,-4,2), B(-2,1,-4), C(1,2,3)$, dreapta $(d) : \begin{cases} x+y-z=0 \\ 2x-y+z-1=0 \end{cases}$ şi planul (π) : $2x - 3y + 5z + 8 = 0$. Să se determine:
(a) trei puncte de pe (d) şi dreapta care trece prin A şi este paralelă cu (d);

(b) ecuaţia planului care trece prin A, B şi C;

(c) ecuaţia planului care trece prin A şi este perpendicular pe (d) şi apoi a dreptei care trece prin A şi este perpendiculară pe (d);

(d) dreapta prin B perpendiculară pe planul (π) şi apoi simetricul lui B faţă de (π).

Exerciţiul 8. Să se scrie ecuaţia planului care trece prin punctul $M_0(1,2,-3)$ şi este perpendicular pe segmentul orientat $\overrightarrow{M_1M_2}$, unde $M_1(1,-2,3)$ şi $M_2(-3,2,5)$.

Exerciţiul 9. Să se scrie ecuaţia planului care trece prin punctul $M_0(1,2,-3)$ şi este paralel cu planul $2x - y + 5 = 0$.

Exerciţiul 10. Să se scrie ecuaţia planului care este perpendicular pe segmentul orientat $\overrightarrow{M_1M_2}$ prin mijlocul lui (se numeşte plan mediator al segmentului orientat), unde $M_1(1,-2,3)$ şi $M_2(3,4,5)$.

Exerciţiul 11. Să se scrie ecuaţia planului care trece prin punctele $A_1(3,-1,0)$, $A_2(4,1,1)$, $A_3(2,0,1)$.

Exerciţiul 12. Să se scrie ecuaţia planului care trece prin punctul $M_0(1,-2,-3)$ şi este paralel cu planul xOy.

Exerciţiul 13. Să se scrie ecuaţia planelor care trec prin punctul $M_0(2,4,-3)$ şi sunt paralele cu planele $(P_1) : 3x-2y+1 = 0$ respectiv cu planul $(P_2) : 2x + z - 3 = 0$.

Exerciţiul 14. Să se scrie ecuaţia planului care trece prin punctele $M_0(1,0,-2)$, $M_1(4,5,1)$ şi este paralel cu vectorul $\bar{v}(0,6,-1)$.

Exerciţiul 15. Să se scrie ecuaţia planului care trece prin punctele $M_0(1,2,1)$, $M_1(2,3,4)$ şi este perpendicular pe planul $(P) : x - y + 3z + 5 = 0$.

Exerciţiul 16. Să se scrie ecuaţia planului:

(1) Paralel cu planul (xOz) şi care trece prin punctul $M_0(-2,-5,3)$;
(2) Perpendicular prin axa Oz şi prin punctul $M_0(-3,1,2)$.
(3) Paralel cu axa Ox şi care trece prin punctele $M_0(4,0,2)$ şi $M_1(5,1,7)$.

Exerciţiul 17. Să se scrie ecuaţia planului care trece prin punctul $M_0(2,-7,3)$ şi este perpendicular pe vectorul $\bar{N}(4,5,-1)$.

Exerciţiul 18. Să se scrie ecuaţia planului care trece prin punctul $M_0(1,3,-2)$ şi este perpendicular pe dreapta (M_0M_1) cu $M_1(7,-4,4)$.

Exerciţiul 19. Să se scrie ecuaţia planului care trece prin punctul $M_0(-2,7,3)$ şi este paralel cu planul $(P): 2x-y+5z+3=0$.

Exerciţiul 20. Să se scrie ecuaţia planului care trece prin punctele $M_0(1,-3,2)$, $M_1(5,1,-4)$, $M_2(2,0,2)$.

Exerciţiul 21. Să se găsească ecuaţiile dreptei care trece prin punctul $M_0(-1,2,1)$ şi este paralelă cu dreapta

$$(d): \begin{cases} x+y-2z-1=0 \\ x+2y-z+1=0 \end{cases}.$$

Exerciţiul 22. Să se găsească ecuaţiile dreptei care trece prin punctul $M_0(1,1,-2)$ şi este perpendiculară pe dreapta:

$$(d): \begin{cases} x-y-3z+2=0 \\ 2x-y+2z-3=0. \end{cases}$$

Exerciţiul 23. Să se scrie ecuaţia planului care trece prin punctul $M_0(2,4,3)$ şi este perpendicular pe vectorul $\bar{N}=(2,3,-1)$.

Exerciţiul 24. Să se scrie diferitele tipuri de ecuaţii pentru planul unic determinat de condiţiile următoare:

(1) trece prin $P(1,2,3)$ şi este normal dreptei $d_2: \frac{x^1-1}{3}=\frac{x^2}{-2}=\frac{x^3+1}{4}$;
(2) trece prin punctele $A(1,0,1)$, $B(1,-1,2)$, $C(2,0,1)$ (verificaţi că punctele sunt necoliniare);
(3) trece prin P şi este paralel cu planul $\pi: x^1+x^2+2x^3-1=0$.

Exerciţiul 25. Scrieţi diferitele tipuri de ecuaţii pentru dreapta unic determinată de urmatoarele condiţii:

(1) trece prin $A(1,2,1)$ şi este normala planului $\pi: x^1+2x^2-x^3+1=0$;
(2) trece prin punctele A şi $B(3,3,2)$;
(3) trece prin B şi este paralelă cu dreapta de intersecţie a planelor $\pi: x^1+2x^2-x^3+1=0$ şi $\pi': 4x^1+3x^2-x^3+5=0$ (motivaţi de ce planele au ca intersecţie o dreaptă).

Exerciţiul 26. Scrieţi ecuaţia planului determinat de normalele coborâte din punctul $A(-3,2,5)$ respectiv pe planele

$$\alpha: 4x^1+x^2-3x^3+13=0,\ \beta: x^1-2x^2+x^3-11=0.$$

Exerciţiul 27. Scrieţi ecuaţiile perpendicularei din $A(3,1,2)$ pe dreapta $d: \frac{x^1-1}{3}=\frac{x^2}{-2}=\frac{x^3+1}{4}$;

Exerciţiul 28. Se dau varfurile unui triunghi $A(4,1,-2), B(2,0,0), C(-2,3,-5)$. Să se scrie ecuaţiile înălţimii din B a triunghiului.

Exerciţiul 29. Care din următoarele plane sunt perpendiculare?

$$(\alpha): 2x^1+3x^2-x^3+5=0,\ (\beta): 2x^1+x^2+7x^3-1=0,\ (\gamma): 4x^1-2x^2+2x^3-3=0.$$

Exerciţiul 30. Scrieţi ecuaţiile perpendicularei comune a dreptelor

$$(d_1): \begin{cases} x^1 &= 1+2t, \\ x^2 &= 3+t, \\ x^3 &= -2+t, \end{cases} \qquad (d_2): \begin{cases} x^1 &= 4+s, \\ x^2 &= -2-4s, \\ x^3 &= 9+2s; \end{cases}$$

Exerciţiul 31. Să se găsească proiecţia (ortogonală a) punctului A pe planul π pentru cazul: $A(4,-3,1)$ şi $\pi: x^1+2x^2-x^3-3=0$.

Exerciţiul 32. Aflaţi coordonatele simetricelor punctului A faţă de planul π, respectiv dreapta d, în cazurile următoare:

(1) $A(-1,2,0)$, $\pi: x^1+2x^2-x^3=0$;
(2) $A(-1,2,0)$, $d: \frac{x^1+2}{1}=\frac{x^2+1}{0}=\frac{x^3-1}{-1}$;
(3) $A(3,1,2)$ si $d: \frac{x^1-2}{2}=\frac{x^2}{2}=\frac{x^3+1}{1}$;
(4) $A(1,2,3)$ si $\pi: 2x^1+x^2+x^3-1=0$.