Seminar 4
Geometrie euclidiană
Georgeta Creţu

1 Ecuaţiile perpendicularei comune a două drepte necoplanare $\mathcal{E}^3$

Fie $d_1 = A_1 + [\bar{a}_1]$ si $d_2 = A_2 + [\bar{a}_2]$ două drepte **necoplanare** din spaţiul afin euclidian trei dimensional $\mathcal{E}^3$.

Perpendiculara comună celor două drepte este intersecţia planelor de mai jos. Deci, dacă A_1 are vectorul de poziţie $\bar{r}_1$ şi A_2 are vectorul de poziţie $\bar{r}_2$ (în raport cu un reper cartezian ortonormat fixat), ecuaţiile vectoriale ale perpendicularei comune sunt

$$\begin{cases} < \bar{r} - \bar{r}_1, \bar{a}_1 \times (\bar{a}_1 \times \bar{a}_2) > &= 0, \\ < \bar{r} - \bar{r}_2, \bar{a}_2 \times (\bar{a}_1 \times \bar{a}_2) > &= 0. \end{cases}$$

O metodă alternativă pentru a scrie ecuaţia perpendicularei comune a două drepte necoplanare
Considerăm următoarele drepte necoplanare:

$$d_1 : \frac{x - x_1^1}{a_1} = \frac{x - x_1^2}{a_2} = \frac{x - x_1^3}{a_3}$$

$$d_2 : \frac{x - x_2^1}{b_1} = \frac{x - x_2^2}{b_2} = \frac{x - x_2^3}{b_3}$$

Paşii pe care trebuie să îi parcurgem pentru a determina perpendiculara comună a celor două drepte sunt următorii:

1. Considerăm câte un punct de pe cele două drepte. Cele două puncte vor constitui intersecţia dintre perpendiculara comună şi cele două drepte. Spre exemplu fie $A(x_1^1 + ta^1, x_1^2 + ta^2, x_1^3 + ta^3)$ şi $B(x_2^1 + sb^1, x_2^2 + sb^2, x_2^3 + sb^3)$.

2. Determinăm vectorul director al dreptei AB. Prin urmare avem
$$\overrightarrow{AB} = \bar{r}_B - \bar{r}_A = (x_2^1 + sb^1 - (x_1^1 + ta^1), x_2^2 + sb^2 - (x_1^2 + ta^2), x_2^3 + sb^3 - (x_1^3 + ta^3)).$$

3. Identificăm vectorii directori ai dreptelor d_1 şi d_2. În cazul nostru, dreptele fiind date sub formă canonică avem următorii vectori directori
$$\bar{a} = (a_1, a_2, a_3) \text{ vectorul director pentru dreapta } d_1$$
$$\bar{b} = (b_1, b_2, b_3) \text{ vectorul director pentru dreapta } d_2$$

4. Găsim valoarea parametrilor s şi t impunând condiţia ca vectorul $\overrightarrow{AB}$ să fie perpendicular pe vectorii $\bar{a}$ şi $\bar{b}$
$$\begin{cases} \langle \overrightarrow{AB}, \bar{a} \rangle = 0 \\ \langle \overrightarrow{AB}, \bar{b} \rangle = 0 \end{cases}$$

5. Găsim coordonatele punctelor A şi B.

6. Dreapta unic determinată de punctele A şi B găsite anterior va fi perpendiculara comună dreptelor d_1 şi d_2.

1.1 Exerciţii rezolvate

Exerciţiul 1 *Scrieţi ecuaţiile perpendicularei comune a dreptelor (vom nota perpendiculara comună cu p).*

$$(d_1): \ \frac{x_1 - 7}{1} = \frac{x_2 - 3}{2} = \frac{x_3 - 9}{-1}, \quad (d_2): \ \frac{x_1 - 3}{-7} = \frac{x_2 - 1}{2} = \frac{x_3 - 1}{3};$$

$$(d_1): \begin{cases} x_1 &= 1 + 2t, \\ x_2 &= 3 + t, \\ x_3 &= -2 + t, \end{cases} \quad (d_2): \begin{cases} x_1 &= 4 + s, \\ x_2 &= -2 - 4s, \\ x_3 &= 9 + 2s; \end{cases}$$

Fie $A_1(7, 3, 9) \in d_1$ şi $A_2(3, 1, 1) \in d_2$. Fie $\bar{a}_{d_1} = (1, 2, -1)$ şi $\bar{a}_{d_2} = (-7, 2, 3)$.
Mai întâi să verificăm dacă dreptele d_1 şi d_2 sunt coplanare. Calculăm produsul mixt al vectorilor $\overrightarrow{A_1A_2}, \bar{a}_{d_1}, \bar{a}_{d_2}$:
$$(\overrightarrow{A_1A_2}, \bar{a}_{d_1}, \bar{a}_{d_2}) = \begin{vmatrix} -4 & 1 & -7 \\ -2 & 2 & 2 \\ -8 & -1 & 3 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 4 & -3 & -11 \\ 2 & 0 & 0 \\ 8 & -9 & -5 \end{vmatrix} = -2 \begin{vmatrix} 3 & 11 \\ 9 & 5 \end{vmatrix} = -168 \neq 0 \Rightarrow d_1, d_2 \text{ necoplanare.}$$
Calculăm produsul vectorial al vectorilor $\bar{a}_{d_1}, \bar{a}_{d_2}$:

$$\bar{a}_{d_1} \times \bar{a}_{d_2} = \begin{vmatrix} \bar{i} & 1 & -7 \\ \bar{j} & 2 & 2 \\ \bar{k} & -1 & 3 \end{vmatrix} = (8, 4, 16) = 4(2, 1, 4).$$

Calculăm:

$$\bar{N}_1 = \bar{a}_{d_1} \times (\bar{a}_{d_1} \times \bar{a}_{d_2}) = 4 \begin{vmatrix} \bar{i} & 1 & 2 \\ \bar{j} & 2 & 1 \\ \bar{k} & -1 & 4 \end{vmatrix} = 4(9, -6, -3) = 12(3, -2, -1).$$

Calculăm:

$$\bar{N}_2 = \bar{a}_{d_2} \times (\bar{a}_{d_1} \times \bar{a}_{d_2}) = 4 \begin{vmatrix} \bar{i} & -7 & 2 \\ \bar{j} & 2 & 1 \\ \bar{k} & 3 & 4 \end{vmatrix} = 4(5, 34, -11).$$

Obţinem ecuaţia perpendicularei comune p ca intersecţie de hiperplane:

$$\begin{cases} \langle \bar{r}_p - \bar{r}_A, \bar{N}_1 \rangle = 0, \\ \langle \bar{r}_p - \bar{r}_B, \bar{N}_2 \rangle = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \langle (x_1^p - 7, x_2^p - 3, x_3^p - 9), (3, -2, -1) \rangle = 0, \\ \langle (x_1^p - 3, x_2^p - 1, x_3^p - 1), (5, 34, -11) \rangle = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3x_1^p - 2x_2^p - x_3^p - 6 = 0, \\ 5x_1^p + 34x_2^p - 11x_3^p - 38 = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 33x_1^p - 22x_2^p - 11x_3^p - 66 = 0, \\ 5x_1^p + 34x_2^p - 11x_3^p - 38 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 28x_1^p - 56x_2^p - 28 = 0, \\ 3x_1^p - 2x_2^p - x_3^p - 6 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1^p - 2x_2^p - 1 = 0, \\ 3x_1^p - 2x_2^p - x_3^p - 6 = 0 \end{cases}.$$

Obţinem ecuaţiile parametrice: $\begin{cases} x_1^p = 2t + 1, \\ x_2^p = t, \\ x_3^p = 4t - 3, \quad t \in \mathbb{R}. \end{cases}$

Metoda a II-a: Alternativ, fie $P_1 = p \cap d_1, P_2 = p \cap d_2$.

Deoarece $P_1 \in d_1 \Rightarrow \exists t_1 \in \mathbb{R}$ astfel încât $\begin{cases} x_1^{P_1} = t_1 + 7, \\ x_2^{P_1} = 2t_1 + 3, \\ x_3^{P_1} = -t_1 + 9. \end{cases}$

Analog, $P_2 \in d_2 \Rightarrow \exists t_2 \in \mathbb{R}$ astfel încât $\begin{cases} x_1^{P_2} = -7t_2 + 3, \\ x_2^{P_2} = 2t_2 + 1, \\ x_3^{P_2} = 3t_2 + 1. \end{cases}$ Obţinem $\overrightarrow{P_1P_2} = (-4 - t_1 - 7t_2, -2 - 2t_1 + 2t_2, -8 + t_1 + 3t_2)$.

Impunem condiţiile

$$\begin{cases} \langle \overrightarrow{P_1P_2}, \bar{a}_1 \rangle = 0 \\ \langle \overrightarrow{P_1P_2}, \bar{a}_2 \rangle = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t_1 + t_2 = 0 \\ 3t_1 + 31t_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow t_1 = 0, \ t_2 = 0$$

Obţinem punctele $P_1(7, 3, 9)$, $P_2(3, 1, 1)$. Scriem ecuaţiile canonice ale perpendicularei comune a dreptelor d_1 şi d_2.Aceasta dreaptă este determinată în mod unic de punctele P_1 şi P_2 determinate anterior $p := (P_1P_2) : \frac{x_1 - 7}{4} = \frac{x_2 - 3}{1} = \frac{x_3 - 9}{8}$.

2 Unghiuri. Distanţe . Volume

2.1 Unghiul unei drepte cu un subspaţiu afin

Fie dreapta d şi subspaţiul afin euclidian $Y \subset E$ de dimensiune $1 \le p \le n - 1$, considerate neorientate. Fie $\bar{a}$ un vector director al dreptei d. Unghiul dintre dreapta d şi subspaţiul Y este unghiul neorientat dintre $\bar{a}$ şi subspaţiul liniar euclidian $\overrightarrow{Y}$, adică numărul $\theta \in [0, \frac{\pi}{2}]$ definit prin:

$$\cos(\theta) = \frac{\|pr_{\overrightarrow{Y}} \bar{a}\|}{\|\bar{a}\|}, \tag{1}$$

unde $pr_{\overrightarrow{Y}} \bar{a}$ este proiecţia ortogonală a vectorului $\bar{a}$ pe subspaţiul liniar $\overrightarrow{Y}$.

1. **Unghiul a două drepte**

   Definiţia 1 *Fie d_1 şi d_2 două drepte afine neorientate în $\mathcal{E}^n$. Unghiul dreptelor neorientate d_1 şi d_2 este numărul $\theta \in [0, \frac{\pi}{2}]$ unic determinat de formula*

   $$\cos\theta = \frac{|< \bar{a}_1, \bar{a}_2 >|}{\| \bar{a}_1 \| \| \bar{a}_2 \|}, \tag{2}$$

   unde $\bar{a}_1 \in \overrightarrow{d_1}$, $\bar{a}_2 \in \overrightarrow{d_2}$ sunt doi vectori directori nenuli arbitrari ai celor două drepte.

   Amintim că a orienta un (sub)spaţiu afin înseamnă a orienta spaţiul său liniar director.

   În cazul în care cele două drepte sunt orientate, considerând $\bar{a}_1 \in \overrightarrow{d_1}$ şi $\bar{a}_2 \in \overrightarrow{d_2}$ orientaţi pozitiv, unghiul (neorientat) dintre dreptele orientate d_1 şi d_2 este numărul $\theta \in [0, \pi]$ dat de

   $$\cos\theta = \frac{< \bar{a}_1, \bar{a}_2 >}{\| \bar{a}_1 \| \| \bar{a}_2 \|}.$$

   Daca ne situam intr-un **plan afin euclidian orientat $\mathcal{E}^2$, unghiul orientat al dreptelor orientate** d_1 **si** d_2 (in aceasta ordine) este numarul $\theta \in [-\pi, \pi]$, unic determinat de relatiile

   $$\cos\theta = \frac{< \bar{a}_1, \bar{a}_2 >}{\| \bar{a}_1 \| \| \bar{a}_2 \|}, \ \sin\theta = \frac{\bar{a}_1 \wedge \bar{a}_2}{\| \bar{a}_1 \| \| \bar{a}_2 \|},$$

2. **Unghiul dintre o dreaptă şi un hiperplan:** Fie dreapta $d = A + [\bar{a}]$, $\bar{a} \neq 0$ şi hiperplanul $H = B + \overrightarrow{H}$ de directie normală $\left(\overrightarrow{H}\right)^{\perp} = [\bar{N}]$, ambele neorientate. Observam că unghiul θ dintre dreapta d şi hiperplanul H poate fi exprimat în funcţie de unghiul $\varphi \in [0, \frac{\pi}{2}]$ dintre d şi normala la hiperplan: $\theta = \frac{\pi}{2} - \varphi$. Putem calcula acest unghi folosind formula

$$\sin\theta = \frac{|< \bar{a}, \bar{N} >|}{\| \bar{a} \| \| \bar{N} \|} \tag{3}$$

şi astfel nu mai determinăm proiecţia lui $\bar{a}$ pe $\overrightarrow{H}$.

3. **Unghiul a două hiperplane:** Unghiul a doua hiperplane (neorientate) este unghiul dintre normalele la cele doua hiperplane.

   Deci dacă H_1 e hiperplanul de direcţie normală $[\bar{N}_1]$ şi H_2 e hiperplanul de direcţie normală $[\bar{N}_2]$, atunci unghiul dintre H_1 şi H_2 este unghiul dintre normalele la cele două hiperplane, duse dintr-un punct arbitrar. Deci este numărul $\theta \in [0, \frac{\pi}{2}]$ definit de

$$\cos\theta = \frac{|< \bar{N}_1, \bar{N}_2 >|}{\| \bar{N}_1 \| \| \bar{N}_2 \|}.$$

4. **Distanţa de la un punct la un hiperplan:** Fie $A \in E$ un punct de coordonate $A(x_0^1, x_0^2, \cdots x_0^n)$ si H un hiperplan de ecuaţie

   $H: \ a_1x^1 + x_2x^2 + \cdots + a_nx^n + a_0 = 0$, $\sum_{i=1}^{n}(a_i)^2 > 0$. Atunci

$$d(A, H) = \frac{| \ a_1x_0^1 + x_2x_0^2 + \cdots + a_nx_0^n + a_0 \ |}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2}}. \tag{4}$$

5. **Distanţa dintre două drepte:** Fie $\delta_1 = A_1 + [\bar{a}_1]$ şi $\delta_2 = A_2 + [\bar{a}_2]$ doua drepte afine în $\mathcal{E}^n$, necoplanare, cu $\bar{a}_1, \bar{a}_2$ nenuli. Atunci

$$d(\delta_1, \delta_2) = \sqrt{\frac{G\left(\overrightarrow{A_1A_2}, \bar{a}_1, \bar{a}_2\right)}{G\left(\bar{a}_1, \bar{a}_2\right)}}.$$

6. **Distanţa de la un punct la o dreaptă**: Observam că daca spaţiul afin euclidian ambiant este trei dimensional, putem să ne folosim de produsul vectorial şi cel mixt pe $\overrightarrow{E}$. Vom folosi următoarele identităţi studiate:

$$G(\bar{a}) = \| \bar{a} \|, \ G(\bar{a}, \bar{b}) = \| \bar{a} \times \bar{b} \|^2, \ G(\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}) = \left(\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}\right)^2.$$

   Atunci distanţa de la $A \in E$ la dreapta $\delta = A_0 + [\bar{a}]$ este

$$d(A, \delta) = \sqrt{\frac{G(\overrightarrow{AA_0}, \bar{a})}{G(\bar{a})}} = \frac{\| \overrightarrow{AA_0} \times \bar{a} \|}{\| \bar{a} \|}.$$

   Distanta dintre dreptele necoplanare $\delta_1 = A_1 + [\bar{a}_1]$ si $\delta_2 = A_2 + [\bar{a}_2]$ devine

$$d(\delta_1, \delta_2) = \sqrt{\frac{G\left(\overrightarrow{A_1A_2}, \bar{a}_1, \bar{a}_2\right)}{G\left(\bar{a}_1, \bar{a}_2\right)}} = \frac{\left|\left(\overrightarrow{A_1A_2}, \bar{a}_1, \bar{a}_2\right)\right|}{\| \bar{a}_1 \times \bar{a}_2 \|}.$$

   Dacă dreptele d_1 si d_2 sunt paralele, se alege un punct arbitrar A pe una dintre ele, d_1 şi $d(\delta_1, \delta_2) = d(A, \delta)$.

7. **Distanţa dintre două subspaţi afine** Fie $E_1 = A_1 + \overrightarrow{E_1}$ şi $E_2 = A_2 + \overrightarrow{E_2}$ două subspaţii afine ale lui $\mathcal{E}^n$ şi $\{\bar{a}_1, \bar{a}_2, \cdots, \bar{a}_r\}$ o baza în $\overrightarrow{E_1} + \overrightarrow{E_2}$, $1 \leq r \leq n$. Atunci

$$d(E_1, E_2) = \sqrt{\frac{G\left(\overrightarrow{A_1A_2}, \bar{a}_1, \cdots, \bar{a}_r\right)}{G\left(\bar{a}_1, \cdots, \bar{a}_r\right)}}, \tag{5}$$

   unde $G(\bar{v}_1, \cdots, \bar{v}_p) = \begin{vmatrix} < \bar{v}_1, \bar{v}_1 > & < \bar{v}_1, \bar{v}_2 > & \cdots & < \bar{v}_1, \bar{v}_p > \\ < \bar{v}_2, \bar{v}_1 > & < \bar{v}_2, \bar{v}_2 > & \cdots & < \bar{v}_2, \bar{v}_p > \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ < \bar{v}_p, \bar{v}_1 > & < \bar{v}_p, \bar{v}_2 > & \cdots & < \bar{v}_p, \bar{v}_p > \end{vmatrix}$ este determinantul Gramm al sistemului de vectori $\{\bar{v}_1, \cdots, \bar{v}_p\}$.

8. **Volumul unui simplex:**

   Definiţia 2 *Volumul p-simplexului* $< A_0; \bar{u}_1, \bar{u}_2, \cdots, \bar{u}_p >$ *este dat de formula* $\mathcal{V} = \frac{1}{p!}\sqrt{G(\bar{u}_1, \cdots, \bar{u}_p)}$.

   Pentru un 2*-paralelipiped in* $\mathcal{E}^3$*, volumul devine aria paralelogramului construit pe cei doi vectori, şi anume* $\mathcal{A} = \sqrt{G(\bar{u}_1, \bar{u}_2)} = \| \bar{u}_1 \times \bar{u}_2 \|$.

   Pentru volumul unui 3*-paralelipiped în* $\mathcal{E}^3$ *se obţine formula cunoscută* $\mathcal{V} = \sqrt{G(\bar{u}_1, \bar{u}_2, \bar{u}_3)} = | \ (\bar{u}_1, \bar{u}_2, \bar{u}_3) \ |$

Exerciţii

Exerciţiul 2 *Scrieţi ecuaţiile perpendicularei comune a dreptelor (vom nota perpendiculara comună cu p).*

$$(d_1): \ \frac{x+4}{0} = \frac{y-3}{2} = \frac{z-1}{0}, \quad (d_2): \ \frac{x-3}{-1} = \frac{y+1}{2} = \frac{z-1}{3};$$

Exerciţiul 3 *Calculaţi:*

a) unghiul dreptelor

$$d_1: \ \frac{x^1}{2} = \frac{x^2+1}{-3} = \frac{x^3-2}{4} \text{ şi } d_2: \ \frac{x^1+1}{1} = \frac{x^2}{2} = \frac{x^3}{3}.$$

b) unghiul dintre dreapta d şi (hiper)planul π, pentru

$$d: \ \frac{x^1-2}{1} = \frac{x^2+1}{-1} = \frac{x^3}{2} \text{ şi } \pi: \ x^1 + x^2 + 1 = 0.$$

c) unghiul dintre planele $\pi_1: \ 2x^1 + x^2 - x^3 = 0$ si $\pi_2: \ x^1 - x^2 + 3x^3 - 1 = 0$;

d) distanţa de la punctul $A(1,2,0)$ la planul π, respectiv la dreapta d date la (b);

e) distanţa dintre dreptele d_1 şi d_2 de la (a);

f) distanţa dintre dreapta d şi planul π de la (b);

g) volumul 2-simplexului BCD, cu $B(1,0,0)$, $C(1,2,3)$, $D(2,-1,1)$;

h) volumul 3-simplexului ABCD.

Exerciţiul 4 *1. unghiul dreptelor* $d_1: \ \frac{x^1-1}{2} = \frac{x^2+1}{1} = \frac{x^3}{-1} = \frac{x^4-1}{1}$, $d_2: \ \frac{x^1+1}{1} = \frac{x^2-1}{2} = \frac{x^3}{1} = \frac{x^4}{-1}$;

2. unghiul dintre dreapta $d: \begin{cases} x^1 &= 2+t, \\ x^2 &= 1-t \\ x^3 &= t \\ x^4 &= -1+2t \end{cases}$ *şi hiperplanul* $\mathcal{H}: \ x^1 + 3x^2 - x^3 + x^4 + 1 = 0$;

3. unghiul dintre hiperplanele $\mathcal{H}_1: \ x^1 + 2x^2 - 3x^3 + x^4 - 1 = 0$ *si* $\mathcal{H}_2: \ x^1 + x^2 + x^3 - 1 = 0$.

Exerciţiul 5 *Calculaţi unghiul dintre dreapta d şi 2-planul π pentru:*

1. $d: \ \frac{x^1}{1} = \frac{x^2}{-1} = \frac{x^3}{1} = \frac{x^4}{-1}, \quad \pi: \begin{cases} x^1 - x^2 + 2x^3 + x^4 - 1 &= 0, \\ x^1 + x^2 - x^3 - x^4 + 1 &= 0; \end{cases}$

2. $d: \ \frac{x^1-1}{1} = \frac{x^2}{2} = \frac{x^3+1}{1} = \frac{x^4}{-1}, \ \pi: \begin{cases} x^1 &= -t+s+1, \\ x^2 &= t, \\ x^3 &= 2t-s+2, \\ x^4 &= s-1. \end{cases}$

Soluţie: Observăm că $\pi = \pi_1 \cap \pi_2$, cu $\overline{N}_{\pi_1} = (1,-1,2,1)$ şi $\overline{N}_{\pi_2} = (1,1,-1,-1)$. Deoarece $\overline{N}_{\pi_1}$ nu este coliniar cu $\overline{N}_{\pi_2}$ rezultă că sistemul analizat este un sistem neomogen compatibil dublu nedeterminat cu soluţia

$$(\pi); \begin{cases} x^1 = t, \\ x^2 = s, \\ x^3 = -2t, \\ x^4 = s+3t+1 \end{cases} \qquad t, \ s \in \mathbb{R}. \tag{6}$$

Ecuaţia vectorială a 2-planului π este:

$$\overline{r} = \overline{r}_A + t\overline{a}_1 + s\overline{a}_2, \tag{7}$$

unde $A(0,0,0,1)$, $\overline{a}_1 = (1,0,-2,3)$ şi $\overline{a}_2 = (0,1,0,1)$.
Deoarece baza directoare $B = \{\overline{a}_1, \ \overline{a}_2\}$ nu este ortogonală în cele ce urmează o vom ortogonaliza folosind procedeul din primul seminar. Vom construi $B' = \{\overline{b}_1, \overline{b}_2\}$ ortogonală:

1. Considerăm $\overline{b}_1 = \overline{a}_1 = (1,0,-2,3)$.
2. Al doilea vector din B' este:

$$\overline{b}_2 = \overline{a}_2 - \frac{\langle \overline{a}_1, \overline{a}_2 \rangle}{\langle \overline{a}_1, \overline{a}_2 \rangle} \overline{a}_1 = \left(-\frac{3}{14}, 1, \frac{6}{14}, \frac{5}{14} \right). \tag{8}$$

Vom determina proiecţia vectorul director al dreptei d: $\overline{a} = (1, -1, 1, -1)$ pe 2-planul π:

$$Pr_\pi \overline{a} = \frac{\langle \overline{a}, \overline{b}_1 \rangle}{||\overline{b}_1||^2}\overline{b}_1 + \frac{\langle \overline{a}, \overline{b}_2 \rangle}{||\overline{b}_2||^2}\overline{b}_2 = \frac{2}{19}(1, 8, 2, 11). \tag{9}$$

Putem aplica acum formula (1) şi obţinem:

$$\cos(\widehat{d, \pi}) = \frac{||Pr_\pi \overline{a}||}{||\overline{a}||} = \frac{1}{\sqrt{19}}. \tag{10}$$

Exerciţiul 6 *În $\mathbb{R}^n$ cu structura afina euclidiană canonică, se consideră hiperplanul $\mathcal{H}: x^1 + x^2 + \cdots + x^n - 2 = 0$ şi dreapta $d: \frac{x^1}{1} = \frac{x^2}{0} = \frac{x^3}{0} = \cdots = \frac{x^{n-1}}{0} = \frac{x^n}{1}$. Determinaţi n ştiind că măsura unghiului dintre dreapta d şi hiperplanul $\mathcal{H}$ este $\frac{\pi}{4}$.*

Soluţie: Vom utiliza formula de calcul (3). Identificăm vectorul director al dreptei $\overline{a} = (1, 0, 0, \ldots, 0, 1)$ şi vectorul normal la hiperplan $\overline{N}_\mathcal{H} = (1, 1, 1, \ldots, 1, 1)$. Unghiul neorientat dintre dreapta d şi planul $\mathcal{H}$ este dat de:

$$\sin(\measuredangle d, \mathcal{H}) = \frac{\langle \overline{a}, \overline{N}_\mathcal{H} \rangle}{\|\overline{a}\| \|\overline{N}_\mathcal{H}\|} = \frac{(1, 0, 0, \ldots, 0, 1)(1, 1, 1, \ldots, 1, 1)}{\sqrt{1^2 + 0^2 + 0^2 + \cdots + 0^2 + 1^2}\sqrt{1^2 + 1^2 + 1^2 + \cdots + 1^2 + 1^2}} = \frac{2}{\sqrt{2}\sqrt{n}} = \frac{2}{\sqrt{2n}}. \tag{11}$$

Din ipoteza problemei avem $(\measuredangle d, \mathcal{H}) = \dfrac{\pi}{4}$. Din (11) obţinem $\frac{2}{\sqrt{2n}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow n = 4$.

Exerciţiul 7 *Calculaţi:*

1. *distanţa între dreptele*

$$d_1: \frac{x^1 - 1}{1} = \frac{x^2 - 2}{1} = \frac{x^3 + 1}{2} = \frac{x^4}{1}, \quad d_2: \begin{cases} x^1 + x^2 + 1 & = 0, \\ 3x^1 + x^3 + 4 & = 0, \\ x_1 + x_4 - 1 & = 0; \end{cases}$$

2. *distanţa de la punctul $A(1, -1, 0, 1)$ la hiperplanul $\mathcal{H}: x^1 + x^2 + 2x^3 - x^4 - 1 = 0$;*

Soluţie:

1. Dat fiind faptul că nu ne mai aflăm în cazul 3-dimensional vom aplica formula de calcul (5). Pentru aplicarea acesteia este necesară identificarea vectorilor directori ai dreptelor prezentate. Coordonatele vectorului director pentru dreapta d_2 vor fi furnizaţi de coeficienţii parametrului din ecuaţiile parametrice d_2: $\begin{cases} x^2_{d_2} = -x^1_{d_2} - 1, \\ x^3_{d_2} = -3x^1_{d_2} - 4, \\ x^4 = -x^1_{d_2} + 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^1 = t, \\ x^2_{d_2} = -t - 1, \\ x^3_{d_2} = -3t - 4, \\ x^4_{d_2} = -t + 1, \quad t \in \mathbb{R} \end{cases}$.

   Obţinem $\overline{a}_{d_1} = (1, 1, 2, 1), \overline{a}_{d_2} = (1, -1, -3, -1)$ şi $A_1(1, 2, -1, 0) \in d_1, A_2(0, 1, 4, -1) \in d_2$. În cele ce urmează calculăm coordonatele vectorului $\overrightarrow{A_1A_2} = (-1, -1, 5, -1)$.
   Distanţa dintre cele două drepte este dată de:

$$\mathrm{d}(d_1, d_2) = \sqrt{\frac{\mathcal{G}(\overrightarrow{A_1A_2}, \overline{a}_{d_1}, \overline{a}_{d_2})}{\mathcal{G}(\overline{a}_{d_1}, \overline{a}_{d_2})}}, \tag{12}$$

   unde

$$\mathcal{G}(\overrightarrow{A_1A_2}, \overline{a}_{d_1}, \overline{a}_{d_2}) = \begin{vmatrix} \langle \overrightarrow{A_1A_2}, \overrightarrow{A_1A_2} \rangle & \langle \overrightarrow{A_1A_2}, \overline{(a)}_{d_1} \rangle & \langle \overrightarrow{A_1A_2}, \overline{a}_{d_2} \rangle \\ \langle \overline{a}_{d_1}, \overrightarrow{A_1A_2} \rangle & \langle \overline{a}_{d_1}, \overline{a}_{d_1} \rangle & \langle \overline{a}_{d_1}, \overline{a}_{d_2} \rangle \\ \langle \overrightarrow{A_1A_2}, \overline{a}_{d_2} \rangle & \langle \overline{a}_{d_2}, \overline{a}_{d_1} \rangle & \langle \overline{a}_{d_2}, \overline{a}_{d_2} \rangle \end{vmatrix} \tag{13}$$

   şi

$$\mathcal{G}(\overline{a}_{d_1}, \overline{a}_{d_2}) = \begin{vmatrix} \langle \overline{a}_{d_1}, \overline{a}_{d_1} \rangle & \langle \overline{a}_{d_1}, \overline{a}_{d_2} \rangle \\ \langle \overline{a}_{d_2}, \overline{a}_{d_1} \rangle & \langle \overline{a}_{d_2}, \overline{a}_{d_2} \rangle \end{vmatrix} = \|\overline{a}_{d_1}\|^2 \|\overline{a}_{d_2}\|^2 - \langle \overline{a}_{d_1}, \overline{a}_{d_2} \rangle^2. \tag{14}$$

   Vom calcula acum produsele care intervin în formula anterioară:

$$\|\overrightarrow{A_1A_2}\|^2 = (-1)^2 + (-1)^2 + 5^2 + (-1)^2 = 28, \tag{15}$$

$$\|\overline{a}_{d_1}\|^2 = 1^2 + 1^2 + 2^2 + 1^2 = 7, \tag{16}$$

$$\|\overline{a}_{d_2}\|^2 = 1^2 + (-1)^2 + (-3)^2 + (-1)^2 = 12, \tag{17}$$

$$\langle \overline{a}_{d_1}, \overline{a}_{d_2} \rangle = 1 \cdot 1 + 1 \cdot (-1) + 2 \cdot (-3) + 1 \cdot (-1) = -7, \tag{18}$$

$$\langle \overrightarrow{A_1A_2}, \overline{a}_{d_1} \rangle = (-1) \cdot 1 + (-1) \cdot 1 + 5 \cdot 2 + (-1) \cdot 1 = 7, \tag{19}$$

$$\langle \overrightarrow{A_1A_2}, \overline{a}_{d_2} \rangle = (-1) \cdot 1 + (-1) \cdot (-1) + 5 \cdot (-3) + (-1) \cdot (-1) = -14. \tag{20}$$

Obţinem:

$$\mathcal{G}(\overline{a}_{d_1}, \overline{a}_{d_2}) = 7 \cdot 12 - 7^2 = 35. \tag{21}$$

$$\mathcal{G}(\overrightarrow{A_1A_2}, \overline{a}_{d_1}, \overline{a}_{d_2}) = \begin{vmatrix} 28 & 7 & -14 \\ 7 & 7 & -7 \\ -14 & -7 & 12 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 14 & -7 & -14 \\ 0 & 0 & -7 \\ -2 & 5 & 12 \end{vmatrix} = 7 \begin{vmatrix} 14 & -7 \\ -2 & 5 \end{vmatrix} = 7 \cdot 56 = 392. \tag{22}$$

În concluzie distantţa dintre cele două drepte este: $\mathrm{d}(d_1, d_2) = \sqrt{\frac{392}{35}} = 2\sqrt{\frac{14}{5}}$.

2. Pentru calcularea distanţei vom utiliza formula (4). Identificăm $\overline{N}_{\mathcal{H}} = (1, 1, 2, -1)$. Distanţa de la punctul B la hiperplanul $\mathcal{H}$ este dată de:

$$d(A, \mathcal{H}) = \frac{|1 - 1 + 0 - 1 - 1}{\sqrt{1 + 1 + 4 + 1}} = \frac{2}{\sqrt{7}} = \frac{2\sqrt{7}}{7}. \tag{23}$$

Exerciţiul 8 *Fie punctele $A(2,2,1)$, $B(4,1,3)$, $C(-4,0,1)$, P mijlocul segmentului $[AC]$ şi V situat deasupra planului xOy, $(z > 0)$ astfel încât $VP \perp (ABC)$ şi $VP = 2\sqrt{65}$.*

1. *Aflaţi ecuaţia înălţimii din A a triunghiului ABC şi coordonatele punctului D pentru care $ABCD$ este paralelogram.*
2. *Calculaţi produsul vectorial $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}$ şi determinaţi ecuaţia planului (ABC).*
3. *Aflaţi ecuaţiile parametrice ale dreptei VP şi volumul piramidei $VABCD$.*
4. *Determinaţi coordonatele punctului V.*
5. *Calculaţi $sin(\widehat{AVB})$.*
6. *Aflaţi distanţa dintre dreptele VA şi BC.*
7. *Scrieţi ecuaţia simetricei dreptei AB faţă de dreapta BC.*

Soluţie:

1. Ecuaţia înălţimii din A este dreapta unic determinată de punctul A şi de proiecţia acestuia pe latura BC. Fie $A' = pr_{BC}A = BC \cap \pi$, unde $\pi \perp BC$, $A \in \pi$.

   Deoarece:

$$\pi \perp BC \to \overline{N}_\pi \parallel \overrightarrow{BC} = (-8, -1, -2). \tag{24}$$

   Deci ecuaţia genenerală a planului este

$$(\pi) : -8x - y - 2z + d = 0 \tag{25}$$

   Deoarece $A \in \pi \to d = 20$. Obţinem:

$$A' = BC \cap \pi : \begin{cases} x = 4 - 8t, \\ y = 1 - t, \\ z = 3 - 2t, \\ -8x - y - 2z + 20 = 0 \end{cases} \to t = \frac{19}{69} \tag{26}$$

   Obţinem $A'\left(\frac{124}{69}, \frac{50}{69}, \frac{169}{69}\right)$. Ecuaţia înălaţimii este:

$$(AA') : \frac{x-2}{7} = \frac{y-2}{44} = \frac{z-1}{50}. \tag{27}$$

   Pentru a determina coordonatele punctului D putem utiliza faptul că diagonalele paralelogramului se injumătaţesc. Fie $M = AC \cap BD$. Dacă M este mijlocul lui $[AC]$ obţinem $M(-1, 1, 1)$. Prin urmare M reprezintă mijlocul şi pentru $[BD]$:

$$\begin{cases} x_M = \dfrac{x_B + x_D}{2} \to x_D = 2x_M - x_B = -6, \\ y_M = \dfrac{y_B + y_D}{2} \to y_D = 2y_M - y_B = 1, \\ z_M = \dfrac{z_B + z_D}{2} \to z_D = 2z_M - z_B = -1 \end{cases} \tag{28}$$

   Am obţinut $D(-6, -1, 1)$.

2. Pentru a calcula produsul vectorial vom determina mai întâi coordonatele vectorilor implicaţi:

$$\overrightarrow{AB} = (2, -1, 2),\ \overrightarrow{AC} = (-6, -2, 0) \tag{29}$$

   Deci:

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} \overline{i} & 2 & -6 \\ \overline{j} & -1 & -2 \\ \overline{k} & 2 & 0 \end{vmatrix} = 4\overline{i} - 12\overline{j} - 10\overline{k} \parallel (2, -6, -5) \tag{30}$$

Vom folosi faptul că $(\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}) \perp (ABC) \to \overline{N}_{ABC} = (2, -6, -5)$. Prin urmare ecuaţia planului are forma:

$$2x - 6y - 5z + d = 0 \tag{31}$$

Impunem condiţia ca $A \in (ABC) \to d = 13$. Se obţine ecuaţia generală a planului $(ABC) : 2x - 6y - 5z + +13 = 0$.

3. Pentru a scrie ecuaţiile parametrice ale dreptei este suficient să identificăm vectorul director. Identificarea acestuia este posibilă datorită faptului că $VP \perp (ABC) \to \overrightarrow{VP} \parallel \overline{N}_{ABC} = (2, -6, -5)$.
Deci $VP = P + [\overrightarrow{VP}]$ unde $P(-1, 1, 1)$ deoarece este mijlocul segmenului $[AC]$. Obţinem:

$$(VP) : \begin{cases} x = -1 + 2t \\ y = 1 - 6t \\ z = 1 - 5t \end{cases}, t \in \mathbb{R}. \tag{32}$$

Calcularea volumului se face după formula:

$$V_{piramida} = \frac{A_{baza} \cdot h}{3}. \tag{33}$$

Observăm că aria bazei reprezintă aria paralelogramului $ABCD$ care poate fi calculată cu ajutorul produsului vectorial $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}$ astfel:

$$A_{ABCD} = ||\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}|| = \sqrt{16 + 144 + 100} = 2\sqrt{65}. \tag{34}$$

Deoarece $VP \perp (ABC)$ înseamnă că VP reprezintă înălţimea piramidei $ABCD$. Prin urmare:

$$V_{VABCD} = \frac{260}{3}.$$

4. Pentru determinarea coordonatelor punctului $V(x_V, y_V, z_V)$ vom utiliza faptul că se află deasupra planului xOy la distanţa de $2\sqrt{65}$ faţă de planul (ABC). Mai mult punctul V aparţine şi dreptei VP. Din primul set de informaţii avem:

$$VP \perp (ABC) \to d(V, (ABC)) = 2\sqrt{65} \tag{35}$$

Pe de altă parte:

$$d(V, (ABC)) = \frac{|2x_V - 6y_V - 5z_V + 13|}{\sqrt{4 + 36 + 25}} = \frac{|2x_V - 6y_V - 5z_V + 13|}{\sqrt{65}} \tag{36}$$

Din (35) şi (36) obţinem:

$$|2x_V - 6y_V - 5z_V + 13| = 130. \tag{37}$$

Am menţionat anterior că $V \in VP$, deci $\exists t \in \mathbb{R}$ astfel încât $V(-1 + 2t\ \ 1 - 6t,\ 1 - 5t)$. Cu această informaţie relaţia precedentă devine:

$$|2(-1 + 2t) - 6(1 - 6t) - 5(1 - 5t) + 13| = 130 \to |65t| = 130 \to 65t = \pm 130 \to t = \pm 2. \tag{38}$$

Reamintim că V este situat deasupra planului xOy, $z > 0$ deci vom alege varianta $t = -2$ care ne conduce către $V(-5, 13, 11)$.

5. Vom utiliza formula

$$\sin(\widehat{AVB}) = \frac{||\overrightarrow{AV} \times \overrightarrow{VB}||}{||\overrightarrow{AV}|| \cdot ||\overrightarrow{VB}||}. \tag{39}$$

Avem:

$$\overrightarrow{AV} = (-7, 11, 10),\ \overrightarrow{VB} = (9, -12, -8). \tag{40}$$

Deci:

$$\overrightarrow{AV} \times \overrightarrow{VB} = \begin{vmatrix} \bar{i} & -7 & 9 \\ \bar{j} & 11 & -12 \\ \bar{k} & 10 & -8 \end{vmatrix} = (32, -34, -15). \tag{41}$$

În concluzie:

$$\sin(\widehat{AVB}) = \frac{\sqrt{2405}}{\sqrt{80920}} = 0.17 \tag{42}$$

6.

$$d(VA, BC) = \frac{|(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{VA}, \overrightarrow{BC})|}{||\overrightarrow{VA} \times \overrightarrow{BC}||} \tag{43}$$

$$(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{VA}, \overrightarrow{BC}) = -210,\ \overrightarrow{VA} \times \overrightarrow{BC} = (-32, 94, -95). \tag{44}$$

În final, după efectuarea calculelor se obţine:

$$d(VA, BC) = 1.52$$