Seminarul 5 - Geometrie euclidiană
Izometrii
Georgeta Creţu

## 1. Definiţia şi legătura cu morfismele afine

**Definiţia 1.** Fie $\mathcal{E}_1 = \left(E_1, \overrightarrow{E_1}, \Phi_1\right)$ şi $\mathcal{E}_2 = \left(E_2, \overrightarrow{E_2}, \Phi_2\right)$ două spaţii afine euclidiene şi $d_1 : E_1 \times E_1 \to \mathbb{R}$, $d_2 : E_2 \times E_2 \to \mathbb{R}$ funcţiile distanţe corespunzătoare. O aplicaţie $f : E_1 \to E_2$ se numeşte izometrie dacă

$$d_1(A, B) = d_2\left(f(A), f(B)\right), \ \forall A, B \in E_1.$$

**Consecinţa1** Orice izometrie între două spaţii afine euclidiene este o aplicaţie injectivă.

**Consecinţa2** Urma $\overrightarrow{f} : \overrightarrow{E_1} \to \overrightarrow{E_2}$ a oricărei izometrii pastrează normele vectorilor: $\| \overrightarrow{u} \|_1 = \| \overrightarrow{f}(\bar{u}) \|_2, \ \forall \bar{u} \in \overrightarrow{E_1}$.
Ultima consecinţă ne sugerează să studiem legatura între izometrii şi morfismele afine cu aplicaţia liniară asociată ortogonală.

**Teorema 1.** *O aplicaţie $f : E_1 \to E_2$ între două spaţii afine euclidiene este izometrie dacă şi numai dacă $f$ este morfism afin cu aplicaţia liniară asociată $\overrightarrow{f} : \overrightarrow{E_1} \to \overrightarrow{E_2}$ ortogonală.*

**Propoziţia 1.** *Orice izometrie transformă subspaţii afine în subspaţii afine de aceeaşi dimensiune finită.*

**Corolar** O izometrie pastrează relaţia "a fi între" şi raportul simplu a trei puncte. Prin urmare orice izometrie transformă drepte afine în drepte afine, semidrepte în semidrepte, segmente în segmente, plane în plane, semiplane în semiplane, semispaţii în semispaţii.

**Definiţia 2.** Numim figură a unui spaţiu afin orice submulţime nevidă $\mathcal{F} \subset E$. Două figuri $\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2 \subset E$ se numesc congruente dacă există o izometrie $f : E \to E$ cu proprietatea $f(\mathcal{F}_1) = f(\mathcal{F}_2)$. Notam $\mathcal{F}_1 \equiv \mathcal{F}_2$.

Relaţia de congruenţă pe multimea figurilor unui spatiu afin este o relaţie de echivalenţă.

## 2. Exemple

Teorema de caracterizare a izometriilor ne oferă o serie de exemple, pornind de la aplicaţiile ortogonale cunoscute.

**Propoziţia 2.** *Orice* ***translaţie*** $t_{\bar{u}} : E \to E$ *este o izometrie, deoarece este morfism afin cu urma aplicaţia identitate* $Id_{\overrightarrow{E}}$ *care evident este aplicaţie ortogonală. Translaţiile nu au puncte fixe.*

**Definiţia 3.** Fie $\mathcal{E}^n = \left(E, \overrightarrow{E}, \Phi\right)$ un spaţiu afin euclidian şi $\mathcal{E}_1 = \left(E_1, \overrightarrow{E_1}, \Phi_{|E_1 \times E_1}\right)$ un subspaţiu a.e. al sau. Simetria lui $E$ faţă de $E_1$, paralelă cu $\left(\overrightarrow{E_1}\right)^{\perp}$ se numeşte simetria ortogonală a lui $\mathcal{E}$ faţă de $\mathcal{E}_1$.

Simetria ortogonală a lui $\mathcal{E}^n$ faţă de $\mathcal{E}_1$ are ca urma simetria ortogonală a spaţiului liniar $\overrightarrow{E}$ faţă de $\overrightarrow{E_1}$. Ştim că $S_{\overrightarrow{E_1}} : \overrightarrow{E_1} \to \overrightarrow{E_1}$ este o aplicaţie ortogonală, deci obţinem o izometrie.
Notăm simetria ortogonală a spaţiului a.e. $\mathcal{E}$ faţă de $\mathcal{E}_1$ prin $S_{E_1} : E \to E$. Ea asociază fiecarui punct $P \in E$ punctul $P'$, simetricul lui $P$ faţă de $E_1$, obţinut astfel. Se consideră $E_2$ subspaţiul afin normal prin $P$ la $E_1$ şi $\{Q\} = E_2 \cap E_1$. $Q$ se numeşte proiecţia ortogonală a lui $P$ pe $E_1$.
Punctul $P' \in E_2$ este unic determinat de condiţia ca punctul $Q$ să fie mijlocul segmentului $[PP']$.
În cazul în care $E_1$ este un hiperplan observăm că $E_1$ este hiperplanul mediator al segmentului $[PP']$.
Aplicaţia $Pr_{E_1} : E \to E_1 \subset E$ ce asociază fiecărui $P$ proiecţia sa ortogonală pe $E_1$ se numeşte proiecţia ortogonală a lui $\mathcal{E}$ pe $\mathcal{E}_1$.

Observăm că $S_{E_1} = 2Pr_{E_1} - Id_E$ şi că toate punctele lui $E_1$ sunt fixe pentru $S_{E_1}$.
Fie $A \in E_1$ fixat arbitrar. Atunci

$$S_{E_1}(P) = A + S_{\overrightarrow{E_1}}(\overrightarrow{AP}), \forall P \in E \Leftrightarrow \overrightarrow{S_{E_1}(P) S_{E_1}(R)} = S_{\overrightarrow{E_1}}(\overrightarrow{PR}), \forall P, R \in E.$$

Fie planul afin euclidian orientat $\mathcal{E}^2$, $\Omega$ un punct din $E$ şi $\alpha \in (-\pi, \pi]$.

**Definiţia 4.** Se numeşte rotaţie de centru $\Omega$ şi unghi $\alpha$ aplicaţia $R_{\Omega,\alpha} : E \to E$ definita astfel: $R_{\Omega,\alpha}(\Omega) = \Omega$ şi pentru orice punct $P \in E$, $P \neq \Omega$, $R_{\Omega,\alpha}(P) = P'$, unde $P'$ este unic determinat de condiţiile $\begin{cases} d(\Omega, P) = d(\Omega, P'), \\ \angle_o\left(\overrightarrow{\Omega P}, \overrightarrow{\Omega P'}\right) = \alpha. \end{cases}$

Observăm că urma lui $R_{\Omega,\alpha}$ este rotaţia geometrică de unghi $\alpha$ în planul vectorial $\overrightarrow{E}$, $R_\alpha : \overrightarrow{E} \to \overrightarrow{E}$ şi aceasta este o aplicaţie ortogonală.

Singurul punct fix al unei rotaţii este centrul sau (atunci când $\alpha \neq 0$).

$$R_{\Omega,\alpha}(P) = \Omega + R_\alpha(\overrightarrow{\Omega P}),\ \forall P \in E \Leftrightarrow \overrightarrow{R_{\Omega,\alpha}(P) R_{\Omega,\alpha}(S)} = R_\alpha(\overrightarrow{PS}),\ \forall P, S \in E.$$

Într-un spaţiu a.e. trei dimensional orientat $\mathcal{E}^3$ se consideră o dreaptă afină orientată $d$ şi $\alpha \in (-\pi, \pi]$. Considerăm $\bar{a} \in \overrightarrow{d}$ orientat pozitiv, nenul. Definim **rotaţia în jurul dreptei $d$ de unghi** $\alpha$ aplicaţia $R_{d,\alpha} : E \to E$ definită prin

$$R_{d,\alpha}(A) = A,\ \forall A \in d,\ \ R_{d,\alpha}(P) = P',\ P \notin d,$$

unde $P'$ e unic determinat astfel: se consideră $\pi$ planul prin $P$ normal dreptei $d$ şi $\{\Omega\} = d \cap \pi$; fie $\bar{b} = \overrightarrow{\Omega P} \in \overrightarrow{\pi}$ şi $\bar{c} = \bar{a} \times \bar{b} \in \overrightarrow{\pi}$; se orientează planul $\pi$ astfel încât $\{\bar{b}, \bar{c}\}$ este o bază pozitivă în $\overrightarrow{\pi}$; în $\pi$ se aplică lui $P$ rotaţia de centru $\Omega$ şi unghi orientat $\alpha$, obţinându-se astfel punctul $P'$.

Urma rotaţiei $R_{d,\alpha}$ este rotaţia geometrică a lui $\overrightarrow{E}$ în jurul lui $\bar{a}$, de unghi orientat $\alpha$, studiata în primul semestru $R_{\bar{a},\alpha} : \overrightarrow{E} \to \overrightarrow{E}$.

$$R_{\Omega,\alpha}(P) = \Omega + R_{\bar{a},\alpha}(\overrightarrow{\Omega P}),\ \forall P \in E \Leftrightarrow \overrightarrow{R_{\Omega,\alpha}(P) R_{\Omega,\alpha}(S)} = R_{\bar{a},\alpha}(\overrightarrow{PS}),\ \forall P, S \in E.$$

Se observă că toate punctele fixe ale acestei izometrii sunt punctele dreptei $d$, numită şi axa de rotaţie.

## 3. Grupul izometriilor şi subgrupurile sale importante

**Propoziţia 3.** *O izometrie între două spaţii afine de aceeaşi dimensiune finită este o bijecţie.*

Deoarece mulţimea morfismelor afine bijective ale unui spaţiu afin are structură de grup, numit grupul afin $\mathcal{GA}(E)$, şi mulţimea aplicaţiilor ortogonale ale spaţiului liniar director $\overrightarrow{E}$ are tot structura de grup, $\mathcal{O}(\overrightarrow{E})$, se obţine:

**Teorema 2.** *Mulţimea izometriilor unui spaţiu afin euclidian finit dimensional $\mathcal{E}^n$ are structura de grup în raport cu compunerea functiilor. Notăm acest grup cu $\mathcal{GI}(\mathcal{E}^n)$ sau $\mathcal{I}zo(\mathcal{E}^n)$.*

Reformulând, am obţinut că mulţimea izometriilor unui spaţiu afin euclidian finit dimensional $\mathcal{E}^n$ este un subgrup al grupului afin $\mathcal{GA}(\mathcal{E}^n)$.

Putem enunţa un rezultat mai general, când nu impunem că dimensiunea spaţiului afin să fie finită. Mulţimea izometriilor bijective ale unui spaţiu afin este un subgrup al grupului afin.

Amintim că mulţimea aplicaţiilor liniare ortogonale ale unui spaţiu liniar de dimensiune $n$, de exemplu $\overrightarrow{E}$, formează un grup în raport cu compunerea funcţiilor, grup pe care îl vom nota $\mathcal{O}(\overrightarrow{E})$.

Acest grup este izomorf cu grupul matricilor ortogonale de ordin $n$, cu elemente reale, numit grupul ortogonal de ordin $n$.

$$O(n) = \left\{ A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})\ \mid\ AA^t = A^t A = I_n \right\}.$$

Izomorfismul este funçtia ce asociază fiecărei aplicaţii ortogonale matricea sa în raport cu o bază ortonormată fixată în $\overrightarrow{E}$.

Grupul $\mathcal{O}(\overrightarrow{E})$ are ca subgrup mulţimea rotaţiilor $\mathcal{SO}(\overrightarrow{E})$ (a aplicaţiilor ortogonale de specia I), subgrup izomorf cu grupul ortogonal special $\mathcal{SO}(n)$, unde

$$\mathcal{SO}(n) = \left\{ A \in \mathcal{O}(n)\ \mid\ detA = 1 \right\}.$$

**Definiţia 5.** O izometrie $f : E \to E$ ce admite un punct fix $\Omega \in E$ ( $f(\Omega) = \Omega$) se numeşte centro-izometrie de centru $\Omega$. Mulţimea centro-izometriilor cu centrul $\Omega$ se notează cu $\mathcal{GI}(\mathcal{E}^n, \Omega)$.

De exemplu rotaţia în plan este o centro-izometrie.

**Propoziţia 4.** *Mulţimea centro-izometriilor $\mathcal{GI}(\mathcal{E}^n, \Omega)$ este un subgrup al lui $\mathcal{GI}(\mathcal{E}^n)$, grup izomorf cu $\mathcal{O}(n)$.*

Izomorfismul căutat este $\xi :\ \mathcal{GI}(\mathcal{E}^n, \Omega) \to \mathcal{O}(\overrightarrow{E})$, $\xi(f) = \overrightarrow{f}$, deci funcţia ce asociază fiecărei izometrii urma sa.

Aceasta funçtie ne oferă un morfism de grupuri între $\mathcal{GI}(\mathcal{E}^n)$ şi $\mathcal{O}(\overrightarrow{E})$, mai exact, pentru orice izometrii $f, g$ are loc $\overrightarrow{f \circ g} = \overrightarrow{f} \circ \overrightarrow{g}$. În plus compunerea a doua aplicaţii ortogonale este ortogonală. Dacă dorim să obţinem un izomorfism de grupuri, avem nevoie de condiţia suplimentara $f(\Omega) = \Omega$.

**Propoziţia 5.** *Pentru fiecare $\Omega \in E$, orice izometrie a lui $\mathcal{E}$ se descompune în mod unic în produsul dintre o centro-izometrie de centru $\Omega$ şi o translatie.*

**Definiţia 6.** Se numeşte deplasare (mişcare) o izometrie cu aplicaţia liniară asociată o aplicaţie ortogonală de specia I: $\overrightarrow{f} \in \mathcal{SO}(\overrightarrow{E})$.

Se numeşte antideplasare o izometrie cu aplicaţia liniară asociată o aplicaţie ortogonală de specia a II-a.

Notam mulţimea deplasărilor cu $\mathcal{D}(\mathcal{E}^n)$.

Translaţiile si rotaţiile (în planul $\mathcal{E}^2$ şi spaţiul $\mathcal{E}^3$) sunt deplasari, cât şi simetria ortogonală faţă de o dreaptă afină în $\mathcal{E}^3$. Simetria ortogonală faţă de un hiperplan este o antideplasare.

**Propoziţia 6.** *Mulţimea deplasărilor unui spaţiu afin este un subgrup al grupului izometriilor.*

*Multimea deplasarilor cu un punct fix este un subgrup al lui $\mathcal{D}(\mathcal{E}^n)$, izomorf cu $\mathcal{SO}(\overrightarrow{E})$.*

**Teorema 3.** *Fie $\mathcal{E}^n$ un spaţiu afin euclidian n dimensional şi o aplicaţie $f: E \to E$. O condiţie necesară şi suficientă pentru ca $f$ să fie o izometrie este existenţa unui reper ortonormat $\mathcal{R} = \{O; \bar{e}_1, \bar{e}_2, \cdots, \bar{e}_n\}$ astfel încât pentru un punct $P$ cu coordonatele $(x^1, x^2, \cdots, x^n)$ în reperul $\mathcal{R}$, coordonatele $(y^1, y^2, \cdots, y^n)$ ale lui $f(P)$ în acelaşi reper să fie de forma:*

$$y^i = \sum_{j=1}^{n} a^i_j x^j + b^i, \; i \in \overline{1,n}, \; si \; \sum_{k=1}^{n} a^k_i a^k_j = \delta_{ij}. \tag{1}$$

Reformulăm (1) în scriere matricială:

$$Y = AX + B, \; A \in \mathcal{O}(n),$$

unde $X = \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ \cdots \\ x^n \end{pmatrix}$, $Y = \begin{pmatrix} y^1 \\ y^2 \\ \cdots \\ y^n \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} b^1 \\ b^2 \\ \cdots \\ b^n \end{pmatrix}$, $A = \left(a^i_j\right) \in \mathcal{O}(n)$.

3.1. **Translaţii.** Fie $\mathcal{A} = (X, \overrightarrow{X}, \Phi)$ un $K$-spaţiu afin şi $\bar{u} \in \overrightarrow{X}$. **Translaţia** de vector $\bar{u}$ este aplicaţia definită prin:

$$t_{\bar{u}} : X \to X, \; t_{\bar{u}}(P) = P + \bar{u}, \forall P \in X.$$

Are loc: $t_{\bar{u}}(P) = Q \iff \overrightarrow{PQ} = \bar{u}$.

**Teorema 4.** *Orice translaţie a spaţiului afin $\mathcal{A} = (X, \overrightarrow{X}, \Phi)$ este un morfism afin cu urma egală cu aplicaţia identitate.*
*Reciproc, orice morfism afin cu urma egală cu aplicaţia identitate pe $\overrightarrow{X}$ este o translaţie.*

3.2. **Simetrii.** Fie spaţiul afin $\mathcal{A} = (X, \overrightarrow{X}, \Phi)$ peste $K$ şi $Y \neq \emptyset$ un subspaţiu afin al lui $\mathcal{A}$. Fie $V \subset \overrightarrow{X}$ astfel încât $\overrightarrow{X} = \overrightarrow{Y} \oplus V$. Deci V este suplementul lui $\overrightarrow{Y}$ în $\overrightarrow{X}$. Atunci, $\forall A \in X \; \exists! Y_A$ subspaţiu afin al lui $X$ ce trece prin $X$ şi are spaţiul liniar director $V$: $Y_A = A + V$. Deoarece $|Y \cap Y_A)| = 1$, definim **proiecţia afină** a spaţiului afin $X$ pe subspaţiul afin $Y$, paralelă cu $V$, prin:

$$p : X \to Y \subset X, p(A) = \text{punctul dat de } Y \cap Y_A, \forall A \in X.$$

**Teorema 5.** *Proiecţia afină $p : X \to X$ a lui $X$ pe $Y$, paralelă cu $V$, este un morfism afin idempotent ($p^2 = p \circ p = Id_X$), urma acestuia fiind proiecţia vectorială a spaţiului liniar $\overrightarrow{X}$ pe $\overrightarrow{Y}$ paralelă cu $V$.*
*Orice morfism afin idempotent $f : X \to X$ este proiecţia afină a lui $X$ pe $Imgf$, paralelă cu $\ker \overrightarrow{f}$.*

Fie spaţiul afin $\mathcal{A} = (X, \overrightarrow{X}, \Phi)$ peste $K$ şi $Y \neq \emptyset$ un subspaţiu afin al lui $\mathcal{A}$. Fie $V \subset \overrightarrow{X}$ astfel încât $\overrightarrow{X} = \overrightarrow{Y} \oplus V$.
Pentru fiecare $A \in X$, considerăm $p(A) \in Y$ proiecţia afină a lui $A$ pe $Y$, paralelă cu $V$. Deoarece $\overrightarrow{Ap(A)} \in V$ şi $A \in Y_A = A + V$, rezultă că există un unic punct notat $s(A) \in Y_A$ astfel încât

$$\overrightarrow{Ap(A)} = \overrightarrow{p(A)s(A)}.$$

Simetria spaţiului afin $X$ faţă de subspaţiul afin $Y$, paralelă cu $V$ este aplicaţia $s : X \to X$ care asociază fiecărui punct $A \in X$ punctul $s(A)$ unic determinat ca mai sus ($s = 2p - Id_X$).

**Teorema 6.** *Simetria afină a lui $X$ faţă de $Y$, paralelă cu $V$ este un morfism afin involutiv ($s^2 = Id_X$), având urma egală cu simetria vectoriala a lui $\overrightarrow{X}$ faţă de $\overrightarrow{Y}$ paralelă cu $V$.*
*Reciproc, orice morfism afin involutiv $f : X \to X$ este simetria afină a lui $X$ faţă de subspaţiul afin format din toate punctele fixe ale lui $f$, paralelă cu $\ker(\overrightarrow{f} + Id_{\overrightarrow{X}})$.*

Fie $\mathcal{E}^n = (E, \overrightarrow{E}, \Phi)$ un spaţiu afin euclidian şi $\mathcal{E}_1 = (E_1, \overrightarrow{E}_1; \Phi_{|E_1 \times E_1})$ un subspaţiu a.e. al său.
Simetria lui $\mathcal{E}$ faţă de $\mathcal{E}_1$, paralelă cu $(\overrightarrow{E}_1)^\perp$ se numeşte **simetria ortogonala a lui $\mathcal{E}$ faţă de $\mathcal{E}_1$**. Simetria ortogonala a lui $\mathcal{E}^n$ faţă de $\mathcal{E}_1$ are ca urmă simetria ortogonala a spaţiului liniar $\overrightarrow{E}$ faţă de $\overrightarrow{E}_1$.

Dacă $\{\bar{b}_1, \ldots, \bar{b}_p\}$ este o bază ortogonală a lui $\overrightarrow{E}_1$, atunci

$$S_{\bar{E}_1}(\bar{v}) = 2Pr_{\overrightarrow{E}^1}(\bar{v}) - \bar{v}, \quad Pr_{\overrightarrow{E}_1}(\bar{v}) = \sum_{i=1}^{p} \frac{\langle \bar{v}, \bar{b}_i \rangle}{\|\bar{b}_i\|^2} \bar{b}_i. \tag{2}$$

3.3. **Rotaţii.** Fie planul afin euclidian orientat $\mathcal{E}^2$, $\Omega$ un punct din $E$ şi $\alpha \in (-\pi, \pi]$.
Se numeşte rotaţie de centru $\Omega$ şi unghi orientat $\alpha$ aplicaţia $R_{\Omega,\alpha} : E \to E$ definită astfel: $R_{\Omega,\alpha}(\Omega) = \Omega$ şi $\forall P \in E$, $P \neq \Omega$, $R_{\Omega,\alpha}(P) = P'$, unde $P'$ este unic determinat de condiţiile

$$\begin{cases} d(\Omega, P) = d(\Omega, P'), \\ \angle_o(\overrightarrow{\Omega P}, \overrightarrow{\Omega P'}) = \alpha. \end{cases}$$

Observăm că urma lui $R_{\Omega,\alpha}$ este rotaţia geometrică de unghi $\alpha$ în planul vectorial $\overrightarrow{E}$, $R_\alpha : \overrightarrow{E} \to \overrightarrow{E}$ şi aceasta este o aplicaţie ortogonală.

Singurul punct fix al unei rotaţii este centrul său (atunci cand $\alpha \neq 0$).

$$R_{\Omega,\alpha}(P) = \Omega + R_\alpha(\overrightarrow{\Omega P}), \forall \in E \iff \overrightarrow{R_{\Omega,\alpha}(P) R_{\Omega,\alpha}(S)} = R_\alpha(\overrightarrow{PS}), \forall P, S \in E.$$

Dacă $\{\bar{e}_1, \bar{e}_2\}$ este o bază ortonormata pozitivă în $\overrightarrow{E}$ şi $\bar{u} = u^1 \bar{e}_1 + u^2 \bar{e}_2$, atunci

$$R_\alpha(\bar{u}) = \bar{v} = v^1 \bar{e}_1 + v^2 \bar{e}_2,$$

unde

$$\begin{pmatrix} v^1 \\ v^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u^1 \\ u^2 \end{pmatrix}$$

## 4. Exerciţii

*Exerciţiul* 1. În $\mathcal{E}^2$ se consideră un reper ortonormat pozitiv $\mathcal{R} = \{O; \bar{i}, \bar{j}\}$ şi în raport cu acesta se dau punctele $A(1,3)$, $\Omega(2,-1)$, vectorul $\bar{u} = 2\bar{i} + \bar{j}$, dreapta $\delta:\ x - 2y + 1 = 0$. Scrieţi ecuaţiile următoarelor izometrii: $R_{\Omega,-\frac{\pi}{3}}$, $S_\delta$, $R_{\Omega,\frac{\pi}{4}} \circ t_{\bar{u}}$, $S_\delta \circ t_{\bar{u}}$.

**Soluţie:**

(1) **Rotaţia de centru $\Omega$:** Vom introduce următoarele notaţii:

$$X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix},\ \text{cu } P(x,y) \text{ coordonatele unui punct oarecare, } Y = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix},\ \text{cu } P(x',y') \text{ coordonatele punctului rotit} \tag{3}$$

Determinarea coordonatelor punctului rotit se realizează după formula:

$$Y = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}(X - X_0) + X_0,\ \text{unde matricea } X_0 \text{ este o matrice coloană alcătuită din coordonatele centrului } \Omega \tag{4}$$

Cu alte cuvinte:

$$R_{\Omega,\theta}(P) = \Omega + R_0(\overrightarrow{\Omega P}) \tag{5}$$

Pentru cazul de faţă se obţine:

$$Y = \begin{pmatrix} \cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) & -\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right) \\ \sin\left(-\frac{\pi}{3}\right) & \cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x-2 \\ y+1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} \tag{6}$$

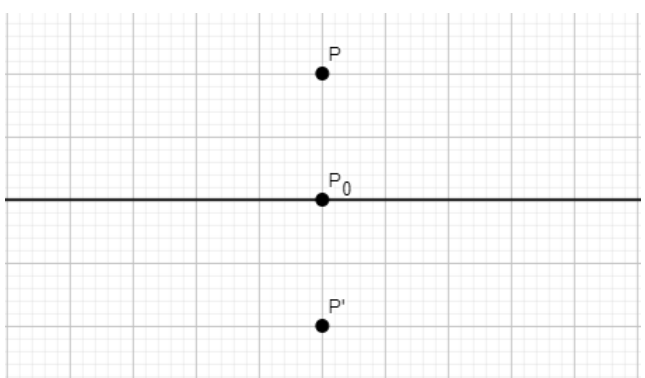
După înlocuirea valorilor funcţiilor trigonometrice se obţine:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x-2 \\ y+1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} \tag{7}$$

Obţinem:

$$R_{\Omega,-\frac{\pi}{3}}: \begin{cases} x' = \dfrac{1}{2}x + \dfrac{\sqrt{3}}{2}y + 1 + \dfrac{\sqrt{3}}{2} \\ y' = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}x + \dfrac{1}{2}y + \sqrt{3} - \dfrac{1}{2} \end{cases} \tag{8}$$

(2) **Simetria ortogonală:** Considerăm $\delta : ax + by + c = 0,\ a^2 + b^2 > 0$. Dorim să scriem ecuaţiile simetriei ortogonale pe această dreaptă. Pentru aceasta considerăm $P(x,y)$ şi dorim să identificăm coordonatele simetricului său faţă de dreapta $\delta$. Fie deci $P^{'}(x',y') = s_\delta P$.




Dorim să determinăm coordonatele simetricului în raport cu dreapta $\delta$. Pentru aceasta observăm că $\bar{N} \perp \overrightarrow{d},\ \bar{N} = (a,b)$. Mai mult,

$$PP' \perp \delta \Leftrightarrow PP' \parallel \bar{N} \tag{9}$$

Obţinem ecuaţia canonică a dreptei $PP' : \dfrac{x'-x}{a} = \dfrac{y'-y}{b}$. Egalând aceste ecuaţii cu $t \in \mathbb{R}$ obţinem ecuaţiile parametrice:

$$(PP'): \begin{cases} x' = x + at \\ y' = y + bt \end{cases},\ t \in \mathbb{R} \tag{10}$$

Se observă că $P_0$ este mijlocul segmenului ce are drept extremităţi punctul $P$ şi simetricul acestuia. Mai mult de atât punctul $P_0$ se află pe dreapta $\delta$, deci verifică ecuaţiile dreptei.

Din $P_0$ mijlocul segmentului $[PP']$ obţinem: $P_0\left(\dfrac{x+x'}{2},\dfrac{y+y'}{2}\right)$. Folosind informaţia că $P_0\in\delta$ obţinem:

$$\frac{a}{2}(2x+at)+\frac{b}{2}(2y+bt)+c=0\Leftrightarrow(a^2+b^2)t+2ax+2by+2c=0\Rightarrow t=-\frac{2}{a^2+b^2}\left(ax+by+c\right). \tag{11}$$

Înlocuim $t$ în (10) şi obţinem ecuaţiile simetriei ortogonale:

$$S_\delta:\begin{cases}x'=x-\dfrac{2a}{a^2+b^2}\left(ax+by+c\right)\\ y'=y-\dfrac{2b}{a^2+b^2}\left(ax+by+c\right)\end{cases} \tag{12}$$

În cazul problemei noastre: $a=1,\ b=-2$ şi $c=1$. Înlocuind aceste valori în (12) obţinem:

$$S_\delta:\begin{cases}x'=x-\dfrac{2}{5}(x-2y+1)\\ y'=y+\dfrac{4}{5}(x-2y+1)\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x'=\dfrac{3}{5}x+\dfrac{4}{5}y-\dfrac{2}{5}\\ y'=\dfrac{4}{5}x-\dfrac{3}{5}y+\dfrac{4}{5}\end{cases} \tag{13}$$

(3) **Compunerea dintre o rotaţie şi o translaţie**

$$P(x,y)\xmapsto{t_{\bar u}}P'(x',y')\xmapsto{R_{\Omega,\frac{\pi}{4}}}P''(x'',y'').$$

Vom începe cu ecuaţiei translaţiei de vector $\bar u$:

$$t_{\bar u}:\begin{cases}x'=x+2,\\ y'=y+1.\end{cases} \tag{14}$$

Prin analogie cu primul punct obţinem ecuaţiile rotaţiei de centru $\Omega$ şi unghi $\frac{\pi}{4}$.

$$R_{\Omega,\frac{\pi}{4}}:\begin{pmatrix}x''\\ y''\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\ -1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}\cos\frac{\pi}{4} & -\sin\frac{\pi}{4}\\ \sin\frac{\pi}{4} & \cos\frac{\pi}{4}\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}x'-2\\ y'+1\end{pmatrix} \tag{15}$$

Se obţine:

$$R_{\Omega,\frac{\pi}{4}}:\begin{cases}x''=\dfrac{\sqrt2}{2}x'-\dfrac{\sqrt2}{2}y'-\dfrac{3\sqrt2}{2}+2\\ y''=\dfrac{\sqrt2}{2}x'+\dfrac{\sqrt2}{2}y'-\dfrac{\sqrt2}{2}-1\end{cases} \tag{16}$$

Din compunerea celor două izometrii obţinem:

$$R_{\Omega,\frac{\pi}{4}}\circ t_{\bar u}:\begin{cases}x''=\dfrac{\sqrt2}{2}(x+2)-\dfrac{\sqrt2}{2}(y+1)-\dfrac{3\sqrt2}{2}+2\\ y''=\dfrac{\sqrt2}{2}(x+2)+\dfrac{\sqrt2}{2}(y+1)-\dfrac{\sqrt2}{2}-1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x''\dfrac{\sqrt2}{2}x-\dfrac{\sqrt2}{2}y-\dfrac{\sqrt2}{2}+2\\ y''=\dfrac{\sqrt2}{2}x+\dfrac{\sqrt2}{2}y+\sqrt2+1\end{cases} \tag{17}$$

(4) **Compunerea dintre simetria ortogonală şi o translaţie:**

$$P(x,y)\xmapsto{t_{\bar u}}P'(x',y')\xmapsto{S_\delta}P''(x'',y'').$$

Amintim ecuaţiile celor două izometrii:

$$t_{\bar u}:\begin{cases}x'=x+2,\\ y'=y+1.\end{cases},\ S_\delta:\begin{cases}x''=\dfrac{3}{5}x'+\dfrac{4}{5}y'-\dfrac{2}{5}\\ y''=\dfrac{4}{5}x'-\dfrac{3}{5}y'+\dfrac{4}{5}\end{cases} \tag{18}$$

Obţinem:

$$S_\delta\circ t_{\bar u}:\begin{cases}x''=\dfrac{3}{5}x+\dfrac{4}{5}y+\dfrac{8}{5}\\ y''=\dfrac{4}{5}x-\dfrac{3}{5}y+\dfrac{9}{5}\end{cases} \tag{19}$$

*Exerciţiul* 2. În $\mathcal{E}^2$ se consideră un reper ortonormat pozitiv $\mathcal{R}=\left\{O;\bar\imath,\bar\jmath\right\}$ şi în raport cu acesta se dau punctele $A(1,2)$, $B(3,-1)$, $C(0,4)$, $A'(2,-3)$, $B'(\frac{5\sqrt2}{2}+2,-\frac{\sqrt2}{2}-3)$ şi $C'(-\frac{3\sqrt2}{2}+2,\frac{\sqrt2}{2}-3)$. Verificaţi că $d(A,B)=d(A',B')$, $d(A,C)=d(A',C')$, $d(B,C)=d(B',C')$. Determinaţi izometria $f:E\to E$ cu proprietatea $f(A)=A'$, $f(B)=B'$, $f(C)=C'$.

**Soluţie:** Vom începe prin verificarea egalităţilor între distanţele menţionate.

(1) $\overrightarrow{AB}=(2,-3),\ \overrightarrow{A'B'}=\left(\dfrac{5\sqrt2}{2},-\dfrac{\sqrt2}{2}\right),\ \overrightarrow{AC}=(-1,2),\ \overrightarrow{A'C'}=\left(-\dfrac{3\sqrt2}{2},\dfrac{\sqrt2}{2}\right),\ \overrightarrow{BC}=(-3,5),\ \overrightarrow{B'C'}=(-4\sqrt2,\sqrt2)$.

(2) $d(A,B)=d(A',B')=\sqrt{13},\ d(A,C)=d(A',C')=\sqrt5,\ d(B,C)=d(B',C')=\sqrt{34}$.

În continuare dorim să determinăm izometria pentru care $f(A) = A',\ f(B) = B',\ f(C) = C'$.

Mai întâi trebuie să stabilim dacă lucrăm cu o deplasare sau cu o antideplasare. Considerăm $S_1 = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$ şi $S_2 = \begin{pmatrix} \frac{5\sqrt{2}}{2} & -\frac{3\sqrt{2}}{2} \\ \frac{-\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}$.

Matricele $S_1$ respectiv $S_2$ reprezintă matricele de schimbare de bază de la baza canonică la bazele $B = \{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\}$ respectiv $B' = \{\overrightarrow{A'B'}, \overrightarrow{A'C'}\}$. ( se observă că aceste baze sunt alcătuite din vectori ce au drept componente coordonatele pentru $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{A'B'}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{A'C'}$.)
Dacă determinantul matricei schimbării de bază de la $B$ la $B'$ va fi pozitiv vom obţine informaţia că $B$ şi $B'$ sunt la fel orientate deci $f$ va fi o deplasare. În caz contrar vom lucra cu o antideplasare.

(20)
$$B \xmapsto{S_1^{-1}} B_c \xmapsto{S_2} B'$$

Matricea schimbării de bază de la $B$ la $B'$ este:

$$S = S_1^{-1} \circ S_2 \to \det S = \det\left(S_1^{-1} \cdot S_2\right) = 1 \cdot 1 = 1 > 0 \to \text{ f deplasare }.$$

Vom căuta expresia acestei deplasări de forma:

(21)
$$f : \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}.$$

Obţinem următoarele seturi de relaţii:

(22)
$$f(A) = A' \to \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$$

(23)
$$f(B) = B' \to \begin{pmatrix} \frac{5\sqrt{2}}{2} + 2 \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} - 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$$

(24)
$$f(C) = C' \to \begin{pmatrix} -\frac{3\sqrt{2}}{2} + 2 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} - 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$$

Din cele şase relaţii obţinem următorul sistem neomogen cu şase ecuaţii şi 4 necunoscute:

(25)
$$\begin{cases} \cos\theta - 2\sin\theta + b_1 = 2 \\ 2\cos\theta + \sin\theta + b_2 = -3 \\ 3\cos\theta + \sin\theta + b_1 = \dfrac{5\sqrt{2}}{2} + 2 \\ 3\sin\theta - \cos\theta + b_2 = -\dfrac{\sqrt{2}}{2} - \sqrt{3} \\ -4\sin\theta + b_1 = -\dfrac{3\sqrt{2}}{2} + 2 \\ 4\cos\theta + b_2 = \dfrac{\sqrt{2}}{2} + 3 \end{cases}$$

Matricea extinsă a acestui sistem este:

(26)
$$\bar{A} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 0 & 1 & -3 \\ 3 & 1 & 1 & 0 & \frac{5\sqrt{2}}{2} + 2 \\ 3 & -1 & 0 & 1 & -\frac{\sqrt{2}}{2} - \sqrt{3} \\ -4 & 0 & 1 & 0 & -\frac{3\sqrt{2}}{2} + 2 \\ 0 & 4 & 0 & 1 & \frac{\sqrt{2}}{2} + 3 \end{pmatrix}$$

Dorim să calculăm rangul acestei matrici. Vom alege următorul minor de ordin 4 pentru a verifica compatibilitatea sistemului:

(27)
$$\Delta_0 = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & 0 & 1 \\ -4 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 1 \end{vmatrix} \overline{L_2 = L_2 - L_4} \begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 & 0 \\ 3 & -5 & 0 & 0 \\ -4 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 3 & -5 & 0 \\ -4 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -38 \neq 0$$

Obţinem $rangA = rang\bar{A}$=4=numarul de decunoscute, deci sistemul este compatibil unic determinat. Ecuaţiile principale sunt:

$$\begin{cases} 3\cos\theta + \sin\theta + b_1 = \dfrac{5\sqrt{2}}{2} + 2 \\ 3\sin\theta - \cos\theta + b_2 = -\dfrac{\sqrt{2}}{2} - \sqrt{3} \\ -4\sin\theta + b_1 = -\dfrac{3\sqrt{2}}{2} + 2 \\ 4\cos\theta + b_2 = \dfrac{\sqrt{2}}{2} + 3 \end{cases} \tag{28}$$

Din ultimele două relaţii obţinem:

$$\begin{cases} \sin\theta = -\dfrac{-\frac{3\sqrt{3}}{2} + 2 - b_1}{-4} \Rightarrow \sin\theta = \dfrac{3\sqrt{2}}{8} - \dfrac{1}{2} + \dfrac{b_1}{4} \\ \cos\theta = \dfrac{\frac{\sqrt{2}}{2} - 3 - b_2}{4} \to \cos\theta = \dfrac{\sqrt{2}}{8} - \dfrac{3}{4} - \dfrac{b_2}{4} \end{cases} \tag{29}$$

Înlocuim aceste valori în primele două ecuaţii principale şi obţinem:

$$\begin{cases} 5b_1 - 3b_2 = 7\sqrt{2} + 19, \\ 3b_1 + 5b_2 = -6\sqrt{2} - 9 \end{cases} \tag{30}$$

Soluţiile sistemului precedent sunt:

$$\begin{cases} b_1 = \dfrac{\sqrt{2}}{2} + 2, \\ b_2 = -\dfrac{3\sqrt{2}}{2} - 3 \end{cases} \tag{31}$$

În final, din (**??**) obţinem:

$$\begin{cases} \sin\theta = \dfrac{3\sqrt{2}}{8} - \dfrac{1}{2} + \dfrac{\sqrt{2}}{8} + \dfrac{1}{2} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}. \\ \cos\theta = \dfrac{\sqrt{2}}{8} - \dfrac{3}{4} + \dfrac{3\sqrt{8}}{2} + \dfrac{3}{4} = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \end{cases} \tag{32}$$

Se verifică că soluţiile prezentate sunt soluţii şi pentru primele două ecuaţii din sistemul iniţial. Obţinem soluţia

$$\cos\theta = \frac{\sqrt{2}}{2},\ \sin\theta = \frac{\sqrt{2}}{2},\ b_1 = \frac{\sqrt{2}}{2} + 2,\ b_2 = -\frac{3\sqrt{2}}{2} - 3 \tag{33}$$

Rezultă $\theta = \dfrac{\pi}{4}$, de unde:

$$f : \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} + 2 \\ -\frac{3\sqrt{2}}{2} - 3 \end{pmatrix} \tag{34}$$

În cele ce urmează dorim să vedem dacă izometria studiată este o rotaţie. Vom folosi pentru aceasta ipoteza că rotaţia are un singur punct fix. Verificăm dacă următorul sistem are soluţii:

$$f(X) = X \to \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} + 2 \\ -\frac{3\sqrt{2}}{2} - 3 \end{pmatrix} \tag{35}$$

În cazul în care sistemul anterior are soluţii izometria prezentată este o rotaţie. În caz contrar va fi compunerea dintre o rotaţie şi o translaţie care urmează să fie identificate.

*Exerciţiul* 3. În $\mathcal{E}^2$ se consideră un reper ortonormat pozitiv $\mathcal{R} = \left\{O; \bar{i}, \bar{j}\right\}$ şi în raport cu acesta se dau punctele $A(1,-1)$, $B(2,0)$, $C(-1,3)$, $A'(-1,-1)$, $B'(-2,0)$ si $C'(1,3)$. Verificaţi că $d(A,B) = d(A',B')$, $d(A,C) = d(A',C')$, $d(B,C) = d(B',C')$. Determinaţi izometria $f : E \to E$ cu proprietatea $f(A) = A'$, $f(B) = B'$, $f(C) = C'$.

**Soluţie:** temă

*Exerciţiul* 4. Fie $\mathcal{R} = \left\{O; \bar{i}, \bar{j}\right\}$ un reper ortonormat pozitiv în $\mathcal{E}^2$ şi punctul $\Omega(1,2)$. Scrieţi, în raport cu $\mathcal{R}$, ecuaţiile rotaţiei de centru $\Omega$ şi unghi orientat $\alpha = \frac{\pi}{3}$. Determinaţi ecuaţiile imaginii dreptei $d :\ x + y - 2$ prin aceasta rotaţie. Determinaţi translaţia dreptei $d$ de vector $\bar{u} = 2\bar{i} + \bar{j}$.

**Soluţie:** Vom începe cu ecuaţiile rotaţiei de centru $\Omega$ şi unghi $\dfrac{\pi}{3}$:

$$R_{\Omega,\frac{\pi}{3}} : \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) & -\sin\left(\frac{\pi}{3}\right) \\ \sin\left(\frac{\pi}{3}\right) & \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x - 1 \\ y - 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x' = \dfrac{1}{2}x - \dfrac{\sqrt{3}}{2}y + \dfrac{1}{2} + \sqrt{3} \\ y' = \dfrac{\sqrt{3}}{2}x + \dfrac{1}{2}y - \dfrac{\sqrt{3}}{2} + 1 \end{cases} \tag{36}$$

În cele ce urmează dorim să determinăm ecuaţia imaginii dreptei $d$ prin rotaţia scrisă anterior. Vom prezenta trei metode pentru realizarea cerinţei:

(1) **Metoda I:** Vom alege două puncte de pe dreapta $d$ şi vom determina imaginile acestora prim rotaţia de centru $\Omega$ şi unghi $\frac{\pi}{3}$. Fie $A(1,1)$ şi $B(2,0)$ două puncte de pe $d$.
Obţinem:

$$A' = R_{\Omega,\frac{\pi}{3}}(A) : \begin{cases} x' = 1 + \dfrac{\sqrt{3}}{2}, \\ y' = \dfrac{3}{2} \end{cases} \tag{37}$$

$$B' = R_{\Omega,\frac{\pi}{3}}(B) : \begin{cases} x' = \dfrac{3}{2} + \sqrt{3}, \\ y' = \dfrac{\sqrt{3}}{2} + 1 \end{cases} \tag{38}$$

Dreapta pe care o căutăm este

$$d' = (A'B') : \frac{x' - 1 - \frac{\sqrt{3}}{2}}{\sqrt{3}+1} = \frac{y' - \frac{3}{2}}{\sqrt{3}-1}. \tag{39}$$

(2) **Metoda II:** De această dată vom identifica vectorul director al dreptei şi un punct de pe aceasta. Aşadar fie $A(1,1) \in d$ şi $\bar{N}(1,1) \perp d \to \bar{a} = (1,-1),\ d = A + [\bar{a}]$.
Obţinem:

$$d' = R_{\Omega,\frac{\pi}{3}}(A) + \left[R_{\frac{\pi}{3}}(\bar{a})\right] = A' + [\bar{a}'], \tag{40}$$

unde

$$A' = R_{\Omega,\frac{\pi}{3}}(A) : \begin{cases} x' = 1 + \dfrac{\sqrt{3}}{2}, \\ y' = \dfrac{3}{2} \end{cases} \tag{41}$$

şi

$$\bar{a}' = R_{\frac{\pi}{3}}(\bar{a}) = (x', y'), \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix} \tag{42}$$

Dreapta pe care o căutăm este

$$d' =: \frac{x' - 1 - \frac{\sqrt{3}}{2}}{\sqrt{3}+1} = \frac{y' - \frac{3}{2}}{\sqrt{3}-1}. \tag{43}$$

**Metoda III:** Vom porni de la ecuaţiile rotaţiei de centru $\Omega$ şi unghi $\frac{\pi}{3}$ şi vom încerca să scoatem coordonatele punctului iniţiale în funcţie de coordonatele punctului rotit. După obţinerea acestora vom înlocui în ecuaţia dreptei $d$. Pornim de la:

$$R_{\Omega,\frac{\pi}{3}} : \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) & -\sin\left(\frac{\pi}{3}\right) \\ \sin\left(\frac{\pi}{3}\right) & \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x-1 \\ y-2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x' = \dfrac{1}{2}x - \dfrac{\sqrt{3}}{2}y + \dfrac{1}{2} + \sqrt{3} \\ y' = \dfrac{\sqrt{3}}{2}x + \dfrac{1}{2}y - \dfrac{\sqrt{3}}{2} + 1 \end{cases} \tag{44}$$

Înmulţim prima relaţie cu $-\sqrt{3}$ şi le adumăm. Se obţine:

$$y = -\frac{\sqrt{3}}{2}x' + \frac{1}{2}y' + \frac{\sqrt{3}}{2} + 1 \tag{45}$$

Analog, vom înmulţi a doua relaţie cu $\sqrt{3}$ şi le vom aduna. Se obţine:

$$x = \frac{1}{2}x' + \frac{\sqrt{3}}{2}y' + \frac{1}{2} - \sqrt{3} \tag{46}$$

Noi vrem să determinăm imaginea dreptei $d : x + y - 2 = 0$ prin aceasă rotiaţie. Vom înlocui rezultatele din (37) şi (38) în ecuaţie dreptei şi obţinem:

$$(d') : \sqrt{3}x' + y' + \sqrt{3} - 2 = 0 \tag{47}$$

*Exerciţiul* 5. Fie $\mathcal{R} = \{O; \bar{i}, \bar{j}\}$ un reper ortonormat pozitiv în $\mathcal{E}^2$ şi dreapta $d:\ x + y - 2 = 0$. Scrieţi ecuaţiile simetriei ortogonale faţă de dreapta $d$ şi ecuaţiile simetricei dreptei $\delta:\ x - y = 0$ faţă de dreapta $d$. Aceeaşi problemă pentru $d:\ 2x - 3y - 1 = 0$ şi $\delta:\ 4x - 6y + 1 = 0$. Reprezentaţi dreptele $d$, $\delta, \delta' = S_d(\delta)$ într-un sistem de axe ortogonale corespunzator reperului dat.

**Soluţie:** temă

*Exerciţiul* 6. Fie $\mathcal{R} = \{O; \bar{i}, \bar{j}\}$ un reper ortonormat pozitiv in $\mathcal{E}^2$ , dreapta $d:\ x + 2y - 1 = 0$ şi vectorul $\bar{u} = -2\bar{i} + \bar{j}$. Scrieţi ecuaţiile compunerii dintre simetria ortogonală faţă de dreapta $d$ şi translaţia de vector $\bar{u}$, $S_d \circ t_{\bar{u}}$. Determinaţi imaginile punctelor $A(1,1)$, $B(1,0)$, $C(-1,2)$ prin această izometrie şi reprezentaţi-le grafic într-un sistem de axe ortogonale.

**Soluţie:** temă