

Rezumat izometriile planului Fie $(E, \vec{E}, \Phi)$ un plan euclidian orientat. Ne propunem să alcătuim o clasificare a izometriilor acestuia. Vom începe deci cu amintirea definiției unei izometrii:

Definiția 1. Se numește izometrie un morfism afin $f : E \rightarrow E$ pentru care aplicația liniară asociată este ortogonală. $\vec{f} \in \mathcal{O}(\vec{E})$.

În cele ce urmează voi reaminti clasificarea aplicațiilor ortogonale pentru $\vec{E}^2$.

Observația 1. Valorile proprii ale oricărei aplicații ortogonale ale unui spațiu liniar euclidian V sunt ± 1 .

1 Transformări ortogonale

Fie $B = \{\vec{i}, \vec{j}\}$ o bază ortonormată pozitivă în $\vec{E}$. Dat fiind faptul că $\vec{f}$ este ortogonală, rezultă că ea păstrează norma vectorilor și unghiul dintre vectori, deci $\{\vec{f}(\vec{i}), \vec{f}(\vec{j})\}$ este tot o bază ortonormată în $\vec{E}$.

1.1 Transformări ortogonale de specia întâi

Dacă $B' = \{\vec{f}(\vec{i}), \vec{f}(\vec{j})\}$ este o bază ortonormată pozitivă atunci matricea lui $\vec{f}$ în raport cu baza B este

$$A = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \in SO(2), \quad \theta = \widehat{(\vec{i}, \vec{f}(\vec{i}))} \quad (1)$$

1.2 Transformări ortogonale de specia a doua

Dacă $B' = \{\vec{f}(\vec{i}), \vec{f}(\vec{j})\}$ este o bază ortonormată negativă atunci matricea lui $\vec{f}$ în raport cu baza B este

$$A = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ \sin \theta & -\cos \theta \end{pmatrix} \in SO(2), \quad \theta = \widehat{(\vec{i}, \vec{f}(\vec{i}))} \quad (2)$$

2 Clasificarea izometriilor unui spațiu euclidian

Fie $f : E \rightarrow E$ o izometrie a planului euclidian orientat E și $R = \{O, \vec{i}, \vec{j}\}$ un reper cartezian ortonormat pozitiv în E . Amintim că în raport cu R ecuațiile izometriei f se scriu matricial:

$$X' = AX + B, \quad (3)$$

unde $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ sunt coordonatele unui punct arbitrar în raport cu R , $X' = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ sunt coordonatele lui $f(P)$ în raport cu R , $A \in \mathcal{O}(2)$ și $B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$.

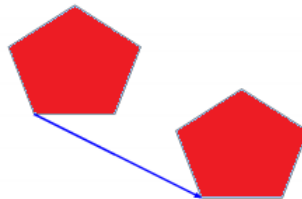
2.1 Translații

Vom începe cu deplasările, adică cu acele izometrii pentru care $\vec{f}$ este aplicație ortogonală de specia I. Dacă $\vec{f} = Id_{\vec{E}} \Leftrightarrow A = I_2$, atunci f este **translația de vector** $\vec{b} = (b_1, b_2)$.

Ecuațiile translației în raport cu R sunt:

$$\begin{cases} x' = x + b_1, \\ y' = y + b_2 \end{cases} \quad (4)$$

Observația 2. Translația $t_{\vec{b}}$ are puncte fixe dacă și numai dacă $\vec{b} = \vec{0} \Leftrightarrow f = Id_E$.



2.2 Rotații de centru Ω și unghi orientat θ

Dacă $\vec{f} = R_\theta$ este rotația lui $\vec{E}$ de unghi orientat $\theta \neq 0$ atunci matricea lui $\vec{f}$ în raport cu baza $\{\vec{i}, \vec{j}\}$ este:

$$A = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}, \quad (5)$$

deci ecuațiile lui f sunt

$$\begin{cases} x' = x \cos \theta - y \sin \theta + b_1, \\ y' = x \sin \theta + y \cos \theta + b_2. \end{cases} \quad (6)$$

În cele ce urmează studiem punctele fixe ale acestei aplicații. Puntem condițiile ca $x' = x$ și $y' = y$. Prin impunerea acestor condiții obținem:

$$(1 - \cos \theta)x + \sin \theta y = b_1, \quad -\sin \theta x + (1 - \cos \theta)y = b_2 \quad (7)$$

Determinantul matricii sistemului scris anterior este $2(1 - \cos \theta) \neq 0$ pentru $\theta \neq 0$. Deci sistemul este combatibil unic determinat având soluția unică (x_0, y_0) .

Rezultă

$$\begin{cases} (1 - \cos \theta)x_0 + \sin \theta y_0 = b_1 \\ -\sin \theta x_0 + (1 - \cos \theta)y_0 = b_2 \end{cases} \quad (8)$$

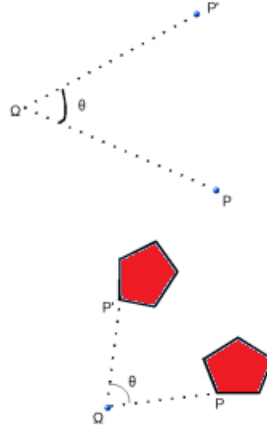
Deci ecuațiile lui f sunt:

$$\begin{cases} x' = (x - x_0) \cos \theta - (y - y_0) \sin \theta + x_0 \\ y' = (x - x_0) \sin \theta + (y - y_0) \cos \theta + y_0 \end{cases} \quad (9)$$

sau matricial

$$X' = A(X - X_0) + X_0, \quad (10)$$

unde X_0 este matricea coloană a coordonatelor punctului fix. Vom nota acest punct cu Ω . Izometria obținută astfel se numește rotația de centru Ω și unghi θ .



2.3 Simetria centrală

Observăm că rotația de centru Ω și unghi π coincide cu simetria față de punctul Ω :

$$S_\Omega = R_{\Omega, \pi}.$$

Dacă $\Omega(x_0, y_0)$ în raport cu reperul R rezultă ecuațiile simetriei centrale:

$$\begin{cases} x' = 2x_0 - x, \\ y' = 2y_0 - y \end{cases} \quad (11)$$

2.4 Simetria ortogonală

Dacă $\vec{f} = S_{\vec{u}}$ este simetria ortogonală a lui $\vec{E}$ față de $\vec{u}$ cu $\vec{f}(\vec{u}) = \vec{u}$ atunci este mai simplu să lucrăm cu baza $\{\vec{u}, \vec{v}\}$ unde $\vec{f}(\vec{v}) = -\vec{v}$. Prin urmare matricea lui $\vec{f}$ în raport cu baza $\{\vec{u}, \vec{v}\}$ este $A' = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$. În raport cu reperul $R' = \{O, \vec{u}, \vec{v}\}$ obținut printr-o rotație de unghi $\frac{\theta}{2}$ ecuațiile izometriei sunt:

$$x' = x + b_1, y' = -y + b_2 \quad (12)$$

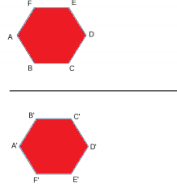
Studiem acum punctele fixe ale izometriei. Observăm că $x' = x$, $y' = y$ dacă și numai dacă

$$\begin{cases} b_1 = 0, \\ y = \frac{b_2}{2} \end{cases} \quad (13)$$

- Dacă $b_1 = 0$ atunci izometria f' are în raport cu R' ecuațiile:

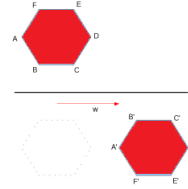
$$\begin{cases} x' = x, \\ y' = -y + b_2 \end{cases} \quad (14)$$

În acest caz dreapta d de ecuație $y = \frac{b_2}{2}$ (în raport cu R') este fixă punct cu punct. Deci $f = S_d$ este simetria ortogonală a planului $\mathcal{E}^2$ față de dreapta d .



- Dacă $b_1 \neq 0$ izometria nu are puncte fixe. Observăm că în acest caz $f = t_{\bar{w}} \circ S_d$ este compunerea dintre simetria ortogonală față de dreapta d și translația de vector $\bar{w} = b_1 \bar{u} \in \vec{d}$ (o vom numi simetrie alunecată):

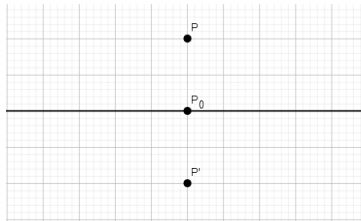
$$(x, y) \xrightarrow{S_d} (x, -y + b_2) \xrightarrow{t_{\bar{w}}} (x + b_1, -y + b_2) \quad (15)$$



2.5 Simetria ortogonală axială în raport cu R

De obicei vom dori să scriem ecuațiile simetriei ortogonale a planului $\mathcal{E}^2$ față de o dreaptă d de ecuație generală:

$$ax + by + c = 0, \quad a^2 + b^2 > 0. \quad (16)$$



Se observă că vectorul normal acestei drepte are coordonatele $\bar{N} = (a, b)$. Considerăm $P(x, y)$ un punct arbitrar și $P' = (x', y') = s_d P$. Impunem condiția ca $\overrightarrow{PP'} \parallel \bar{N}$ și $P_0(x_0, y_0) = pr_d P \in d$. Prin urmare P_0 va fi mijlocul segmentului ce are drept extremități punctul inițial și simetricul său: $P_0 = \frac{1}{2}P + \frac{1}{2}P'$.

Obținem următoarea ecuație pentru dreapta PP' : $\frac{x' - x}{a} = \frac{y' - y}{b} = t \rightarrow \begin{cases} x' = at + x \\ y' = bt + y \end{cases}$ Deoarece $P_0 \in d$ obținem:

$$\frac{a}{2}(x + x') + \frac{b}{2}(y + y') + c = 0 \quad (17)$$

Înlocuim în (2.5) și obținem:

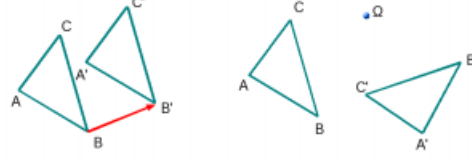
$$S_d : \begin{cases} x' = x - \frac{2a(ax + by + c)}{a^2 + b^2} \\ y' = y - \frac{2b(ax + by + c)}{a^2 + b^2} \end{cases} \quad (18)$$

Clasificarea izometriilor planului

Izometriile planului sunt clasificate astfel:

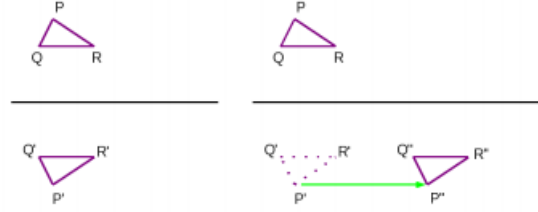
i) Deplasări $\det A = 1$

- Translația de vector $\bar{u}$
- Rotația de centru Ω și unghi orientat θ (un unic punct fix care este soluția sistemului $f(\Omega) = \Omega$ și este centrul rotației)



ii) Antideplasări $\det A = -1$

- Simetria ortogonală față de o dreaptă d . (avem o infinitate de puncte fixe, acestea formând dreapta d)
- Compunerea dintre simetria ortogonală față de o dreaptă d și o translație de vector cu aceeași direcție cu dreapta d (Nu există puncte fixe. Pentru determinarea simetriei și translației vom proceda astfel: Vom considera $P_1, P_2 \in E$ și vom calcula imaginile acestora prin izometrie: $P'_1 = f(P_1), P'_2 = f(P_2)$. Dreapta d va fi determinată în mod unic de mijloacele segmentelor $[P_1P'_1], [P_2P'_2]$. Vectorul cu care efectuăm translația este obținut utilizând un punct de pe dreapta identificată anterior și imaginea obținută prin izometria studiată: $P \in d, P' = f(d), \bar{u} = \overrightarrow{PP'}$.)



3 Exerciții rezolvate

Exercițiul 1. Fie $\mathcal{R} = \{O; \bar{i}, \bar{j}\}$ un reper ortonormat pozitiv în $\mathcal{E}^2$ și punctul $\Omega = (-\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{5}{2})$. Scrieți, în raport cu $\mathcal{R}$, ecuațiile rotației de centru Ω și unghi orientat $\phi = \frac{\pi}{3}$. Determinați ecuațiile imaginii dreptei $d : \frac{x-1}{2} = \frac{y-4}{3}$ prin această rotație. Reprezentați ambele drepte și punctul Ω într-un sistem de coordonate.

Soluție: Fie $P(x, y) \in E$. Au loc:

$$\begin{aligned}
 R_{\Omega, \frac{\pi}{3}}(P) &= \Omega + R_{\frac{\pi}{3}}(\overrightarrow{\Omega P}) \\
 &= \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{5}{2}\right) + R_{\frac{\pi}{3}}\left(x + \frac{\sqrt{3}}{2}, y - \frac{5}{2}\right) \\
 &= \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{5}{2}\right) + \begin{pmatrix} \cos \frac{\pi}{3} & -\sin \frac{\pi}{3} \\ \sin \frac{\pi}{3} & \cos \frac{\pi}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x + \frac{\sqrt{3}}{2} \\ y - \frac{5}{2} \end{pmatrix} \\
 &= \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{5}{2}\right) + \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x + \frac{\sqrt{3}}{2} \\ y - \frac{5}{2} \end{pmatrix} \\
 &= \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{5}{2}\right) + \begin{pmatrix} \frac{x}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}y + \frac{3\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2}x + \frac{1}{2}y - \frac{1}{2} \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} \frac{x}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}y + \sqrt{3} \\ \frac{\sqrt{3}}{2}x + \frac{1}{2}y + 2 \end{pmatrix}.
 \end{aligned}$$

Metoda I Am obținut:

$$R_{\Omega, \frac{\pi}{3}}(P) : \begin{cases} x' = \frac{x}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}y + \sqrt{3} \\ y' = \frac{\sqrt{3}}{2}x + \frac{1}{2}y + 2 \end{cases} \quad (19)$$

În cele ce urmează dorim să obținem exprimarea coordonatelor punctului inițial în funcție de punctul rotit pentru a înlocui în ecuația dreptei d . Înmulțim prima relație cu $-\sqrt{3}$ și le adunăm. Apoi înmulțim a doua relația cu $\sqrt{3}$ și adunăm. Obținem:

$$\begin{cases} x = \frac{x'}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}y' - \frac{3\sqrt{3}}{2} \\ y = -\frac{\sqrt{3}}{2}x' + \frac{y'}{2} - \frac{1}{2} \end{cases} \quad (20)$$

Înlocuim în ecuațiile dreptei d și obținem imaginea acesteia prin rotația analizată:

$$d' : \frac{\frac{x'}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}y' - \frac{3\sqrt{3}}{2} - 1}{2} = \frac{-\frac{\sqrt{3}}{2}x' + \frac{y'}{2} - \frac{1}{2} - 4}{3} \Rightarrow (d') : \frac{3+2\sqrt{3}}{2}x' + \frac{3\sqrt{3}+2}{2}y' - \frac{9\sqrt{3}}{2} + 6 = 0 \quad (21)$$

Metoda II Fie $A(1, 4), B(3, 7) \in d$. Deoarece rotația este morfism afin, rezultă că $d' = R_{\Omega, \phi}(d)$ este determinată de punctele $R_{\Omega, \phi}(A)$ și $R_{\Omega, \phi}(B)$.

$$R_{\Omega, \frac{\pi}{3}}(A) = \left(\frac{1}{2} - \frac{4\sqrt{3}}{2} + \sqrt{3}, \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{4}{2} + 2 \right) = \left(\frac{1}{2} - \sqrt{3}, \frac{\sqrt{3}}{2} + 4 \right),$$

$$R_{\Omega, \frac{\pi}{3}}(B) = \left(\frac{3}{2} - \frac{7\sqrt{3}}{2} + \sqrt{3}, \frac{3\sqrt{3}}{2} + \frac{7}{2} + 2 \right) = \left(\frac{3}{2} - \frac{5\sqrt{3}}{2}, \frac{3\sqrt{3}}{2} + \frac{11}{2} \right).$$

Obținem ecuația canonică:

$$(d') : \frac{x' - \frac{1}{2} + \sqrt{3}}{\frac{3}{2} - \frac{5\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2} + \sqrt{3}} = \frac{y' - \frac{\sqrt{3}}{2} - 4}{\frac{3\sqrt{3}}{2} + \frac{11}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} - 4} \Rightarrow \frac{x' - \frac{1}{2} + \sqrt{3}}{1 - \frac{3\sqrt{3}}{2}} = \frac{y' - \frac{\sqrt{3}}{2} - 4}{\sqrt{3} + \frac{3}{2}} \quad (22)$$

Metoda III Fie $\bar{a} = (2, 3)$ un vector director al dreptei d . Dreapta d' este determinată de punctul $R_{\Omega, \frac{\pi}{3}}(A)$ și vectorul director $R_{\frac{\pi}{3}}(\bar{a})$.

$$R_{\frac{\pi}{3}}(\bar{a}) = \begin{pmatrix} \cos \frac{\pi}{3} & -\sin \frac{\pi}{3} \\ \sin \frac{\pi}{3} & \cos \frac{\pi}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 - \frac{3\sqrt{3}}{2} \\ \sqrt{3} + \frac{3}{2} \end{pmatrix}. \text{ Deci } R_{\frac{\pi}{3}}(\bar{a}) = \left(1 - \frac{3\sqrt{3}}{2}, \sqrt{3} + \frac{3}{2} \right).$$

Obținem ecuațiile canonice ale dreptei d' :

$$(d') : R_{\Omega, \frac{\pi}{3}}(A) + [R_{\Omega}(\bar{a})] \Rightarrow \frac{x' - \frac{1}{2} + \sqrt{3}}{1 - \frac{3\sqrt{3}}{2}} = \frac{y' - \frac{\sqrt{3}}{2} - 4}{\sqrt{3} + \frac{3}{2}} \quad (23)$$

Exercițiul 2. Fie $\mathcal{R} = \{O; \vec{i}, \vec{j}\}$ un reper ortonormat pozitiv în $\mathcal{E}^2$ și dreapta $d : x + y - 2 = 0$. Scrieți ecuațiile simetriei ortogonale față de dreapta d și ecuațiile simetricii dreptei $\delta : x - y = 0$ față de dreapta d . Aceeași problema pentru $d : 2x - 3y - 1 = 0$ și $\delta : 4x - 6y + 1 = 0$. Reprezentați dreptele $d, \delta, \delta' = S_d(\delta)$ într-un sistem de axe ortogonale corespunzător reperului dat.

Soluție:

• **Metoda I**

Fie $\bar{a} = (1, -1)$ vectorul director al dreptei d . Fie $P(x, y)$ și $A(1, 1) \in d$. Are loc:

$$S_A(P) = A + S_{\bar{a}}(\overrightarrow{AP}) = A + 2Pr_{\bar{a}}(\overrightarrow{AP}) - \overrightarrow{AP} = (1, 1) + 2 \frac{\langle \overrightarrow{AP}, \bar{a} \rangle}{\|\bar{a}\|^2} \bar{a} - \overrightarrow{AP} = (1, 1) + 2 \frac{x - y}{2} (1, -1) - (x - 1, y - 1) = (1 + x - y, 1 - x + y) - (x - 1, y - 1) = (-y + 2, -x + 2).$$

Dacă $P \in \delta$ rezultă că $x = y$. Obținem $S_O(P) = (-x + 2, -x + 2)$. Obținem ecuațiile simetricii $\delta' : \begin{cases} x' = t, \\ y' = t \end{cases}$, deci

dreapta δ' este dreapta δ .

Metoda II Mai întâi determinăm dacă cele două drepte sunt ortogonale. Fie $\bar{\alpha} = (1, 1)$ vectorul director al dreptei δ . Deoarece $\langle \bar{a}, \bar{\alpha} \rangle = 0 \Rightarrow d \perp \delta$. În acest caz, $\delta' = \delta$.

Metoda III Vom considera ecuațiile simetriei ortogonale față de dreapta d , (18). (De fiecare dată va trebui să reluăm raționamentul, nu încurajez învățarea pe de rost a acestor formule) În acest caz $a = b = 1, c = -2$.

Ecuațiile devin:

$$S_d : \begin{cases} x' = x - \frac{2(x + y - 2)}{2} = -y + 2 \\ y' = y - \frac{2(x + y - 2)}{2} = -x + 2 \end{cases} \quad (24)$$

Observăm că $A(1, 1)$ și $B(2, 2)$ sunt două puncte ale dreptei δ . Vom determina imaginile acestora prin simetria ortogonală:

$$\begin{cases} A' = S_d(A) = (1, 1) \\ B' = S_d(B) = (0, 0) \end{cases} \quad (25)$$

Dreapta pe care o căutăm este determinată în mod unic de punctele A' și B' :

$$d' : \frac{x' - 1}{1} = \frac{y' - 1}{1} \rightarrow x' - y' = 0 \quad (26)$$

adică ecuația dreptei δ .

Metoda IV Vom porni de la ecuațiile simetriei ortogonale și folosind aceeași metoda ca la prima problemă vom încerca să eliminăm coordonatele vechiului reper. Avem:

$$S_d : \begin{cases} x' = x - \frac{2(x+y-2)}{2} = -y + 2 \\ y' = y - \frac{2(x+y-2)}{2} = -x + 2 \end{cases} \quad (27)$$

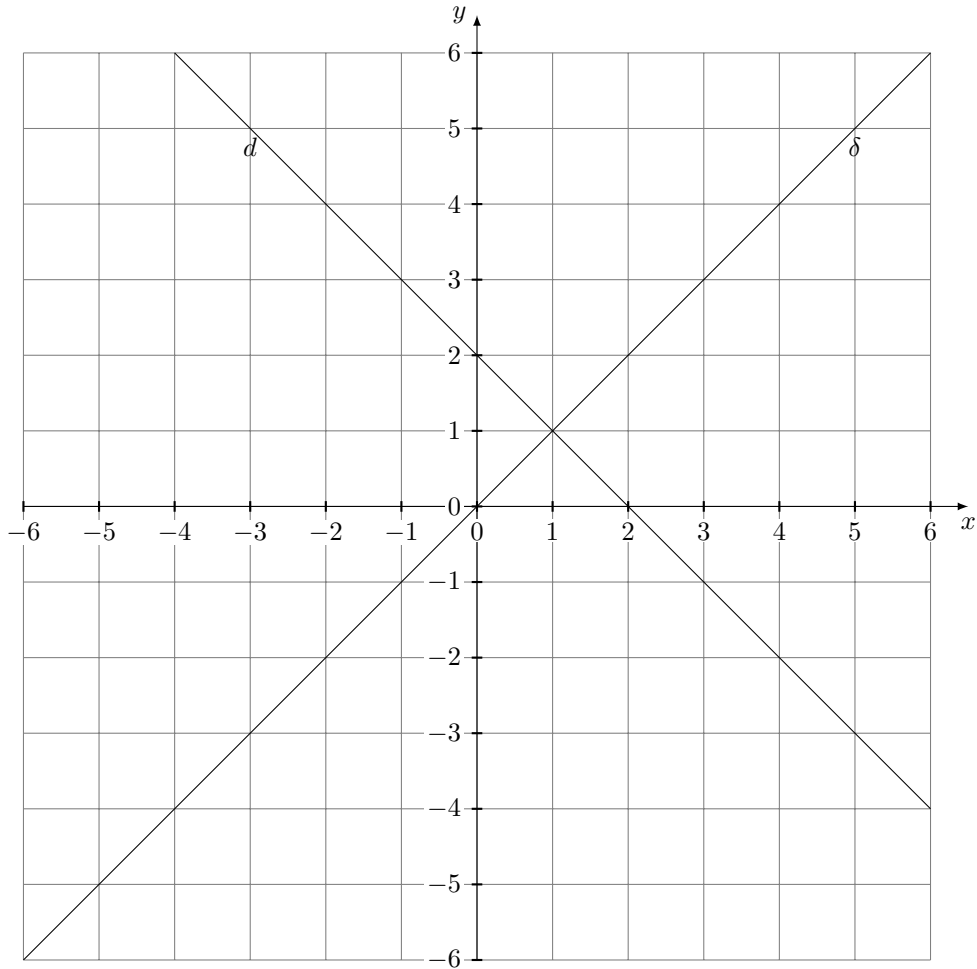
Dorim să identificăm simetrica dreptei $\delta : x - y = 0$ față de dreapta d . Mai întâi:

$$S_d : \begin{cases} x' = -y + 2 \\ y' = -x + 2 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = 2 - y' \\ y = 2 - x' \end{cases} \quad (28)$$

Înlocuim în ecuația dreptei δ și obținem:

$$\delta' : 2 - y' - 2 + x' = 0 \rightarrow x' - y' = 0,$$

adică ecuația dreptei δ .



- **Metoda I** Fie $\vec{a} = (3, 2)$ vectorul director al dreptei d . Fie $P(x, y)$ și $A(-1, -1) \in d$. Are loc:

$$\begin{aligned} S_A(P) &= A + S_{\vec{a}}(\overrightarrow{AP}) = A + 2Pr_{\vec{a}}(\overrightarrow{AP}) - \overrightarrow{AP} = A + 2 \frac{\langle \overrightarrow{AP}, \vec{a} \rangle}{\|\vec{a}\|^2} \vec{a} - \overrightarrow{AP} = (-1, -1) + 2 \frac{3x + 2y + 5}{13} (3, 2) - (x + 1, y + 1) \\ &= (-1, -1) + \left(\frac{18x + 12y + 30}{13}, \frac{12x + 8y + 20}{13} \right) - (x, y) = \left(\frac{5x + 12y + 4}{13}, \frac{12x - 5y - 6}{13} \right) \end{aligned}$$

Dacă $P \in \delta$ rezultă că $4x + 1 = 6y$. Obținem $S_O(P) = \left(\frac{13x + 6}{13}, \frac{12x - 5\frac{4x + 1}{6} - 6}{13} \right) = \left(\frac{13x + 6}{13}, \frac{52x - 41}{78} \right)$. Obținem

$$\text{ecuațiile parametrice ale simetricei } \delta' : \begin{cases} x' = t + \frac{6}{13}, \\ y' = \frac{2}{3}t - \frac{41}{78} \end{cases}.$$

Putem obține ecuația generală: $\frac{2}{3}x' - y' = \frac{4}{13} + \frac{41}{78} = \frac{65}{78} \Rightarrow \frac{2}{3}x' - y' - \frac{5}{6} = 0$.

Metoda II Observăm că cele două drepte sunt paralele. Așadar, vectorul director al dreptei δ' este $\alpha' = (3, 2)$. Este suficient să determinăm un punct. Fie $A(0, y_A) \in d$, $B(0, y_B) \in \delta$. Atunci $C(0, 2y_A - y_B) \in \delta'$. Determinăm coordonatele punctelor: $A(0, -\frac{1}{3})$, $B(0, \frac{1}{6})$, $C(0, -\frac{5}{6})$. Obținem ecuația canonică a dreptei:

$$\frac{x'}{3} = \frac{y' + \frac{5}{6}}{2}$$

și ecuația generală: $\frac{2}{3}x' - y' - \frac{5}{6} = 0$.

Metoda III Pornim din nou de la ecuațiile simetriei ortogonale (18). De această dată $a = 2$, $b = -3$, $c = -1$. Se obține:

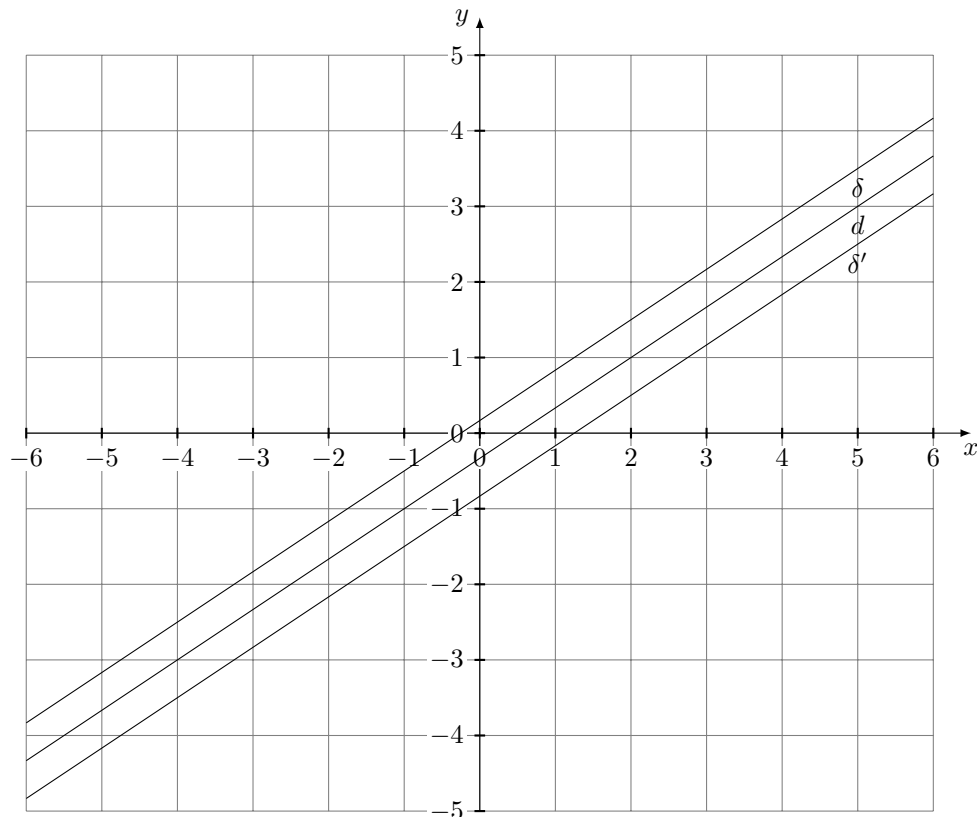
$$S_d : \begin{cases} x' = x - \frac{2(2x - 3y - 1)}{13} \\ y' = y + \frac{6(2x - 3y - 1)}{13} \end{cases} \quad (29)$$

Fie $A(0, \frac{1}{6})$, $B(-\frac{1}{4}, 0) \in \delta$. Calculăm imaginile acestor puncte prin simetria ortogonală

$$\begin{cases} A' = S_d(A) = \left(\frac{3}{13}, -\frac{41}{78} \right) \\ B' = S_d(B) = \left(-\frac{1}{52}, -\frac{9}{13} \right) \end{cases} \quad (30)$$

Obținem ecuația:

$$d' : \frac{x' - \frac{3}{13}}{-\frac{1}{52}} = \frac{y' + \frac{1}{52}}{-\frac{13}{78}} \quad (31)$$



Exercițiul 3. 1. Fie Ω un punct din plan și $\alpha, \beta \in (-\pi, \pi]$. Demonstrați că:

$$R_{\Omega, \beta} \circ R_{\Omega, \alpha} = R_{\Omega, \alpha + \beta}.$$

2. Fie $\Omega \neq \Omega'$ două puncte din plan și $\alpha, \beta \in (-\pi, \pi]$. Studiați:

$$R_{\Omega', \beta} \circ R_{\Omega, \alpha}.$$

Soluție:

1. Fie $P(x, y)$ un punct oarecare din plan. Fie $(x', y') = R_{\Omega, \alpha}(P)$ și $(x'', y'') = R_{\Omega, \beta}(R_{\Omega, \alpha}(P))$. Au loc:

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x - x_{\Omega} \\ y - y_{\Omega} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_{\Omega} \\ y_{\Omega} \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} x'' \\ y'' \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \cos \beta & -\sin \beta \\ \sin \beta & \cos \beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' - x_{\Omega} \\ y' - y_{\Omega} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_{\Omega} \\ y_{\Omega} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \beta & -\sin \beta \\ \sin \beta & \cos \beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x - x_{\Omega} \\ y - y_{\Omega} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_{\Omega} \\ y_{\Omega} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos(\beta + \alpha) & -\sin(\beta + \alpha) \\ \sin(\beta + \alpha) & \cos(\beta + \alpha) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x - x_{\Omega} \\ y - y_{\Omega} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_{\Omega} \\ y_{\Omega} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

2. Fie $P(x, y)$ un punct oarecare din plan. Pentru unghiul $\gamma \in (-\pi, \pi]$, fie $A_{\gamma} = \begin{pmatrix} \cos \gamma & -\sin \gamma \\ \sin \gamma & \cos \gamma \end{pmatrix}$. Fie $(x', y') = R_{\Omega, \alpha}(P)$ și $(x'', y'') = R_{\Omega', \beta}(R_{\Omega, \alpha}(P))$. Au loc:

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} &= A_{\alpha} \begin{pmatrix} x - x_{\Omega} \\ y - y_{\Omega} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_{\Omega} \\ y_{\Omega} \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} x'' \\ y'' \end{pmatrix} &= A_{\beta} \begin{pmatrix} x' - x_{\Omega'} \\ y' - y_{\Omega'} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_{\Omega'} \\ y_{\Omega'} \end{pmatrix} \\ &= A_{\beta} \left[A_{\alpha} \begin{pmatrix} x - x_{\Omega} \\ y - y_{\Omega} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_{\Omega} \\ y_{\Omega} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x_{\Omega'} \\ y_{\Omega'} \end{pmatrix} \right] + \begin{pmatrix} x_{\Omega'} \\ y_{\Omega'} \end{pmatrix} \\ &= A_{\beta + \alpha} \begin{pmatrix} x - x_{\Omega} \\ y - y_{\Omega} \end{pmatrix} + A_{\beta} \begin{pmatrix} x_{\Omega} - x_{\Omega'} \\ y_{\Omega} - y_{\Omega'} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_{\Omega} \\ y_{\Omega} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Exercițiul 4. În raport cu un reper ortonormat pozitiv în $\mathcal{E}^2$ se dau ecuațiile unei aplicații $f : E \rightarrow E$. Demonstrați că f este o izometrie, precizând specia ei. Determinați dacă f are puncte fixe, apoi precizați natura lui f , în cazurile:

1. $\begin{cases} x' = \frac{\sqrt{3}}{2}x - \frac{1}{2}y - 1 + \frac{\sqrt{3}}{2}, \\ y' = \frac{1}{2}x + \frac{\sqrt{3}}{2}y + \frac{1}{2}. \end{cases}$
2. $\begin{cases} x' = \frac{\sqrt{2}}{2}x - \frac{\sqrt{2}}{2}y + 1 + \frac{\sqrt{2}}{2}, \\ y' = \frac{\sqrt{2}}{2}x + \frac{\sqrt{2}}{2}y + 2 - \frac{3\sqrt{2}}{2}. \end{cases}$
3. $\begin{cases} x' = -y - 1, \\ y' = -x - 1. \end{cases}$
4. $\begin{cases} x' = \frac{3}{5}x + \frac{4}{5}y - \frac{12}{5}, \\ y' = \frac{4}{5}x - \frac{3}{5}y - \frac{1}{5}. \end{cases}$
5. $\begin{cases} x' = -\frac{3}{5}x + \frac{4}{5}y - \frac{4}{5}, \\ y' = \frac{4}{5}x + \frac{3}{5}y + \frac{2}{5}. \end{cases}$
6. $\begin{cases} x' = \frac{\sqrt{3}}{2}x + \frac{1}{2}y - \frac{\sqrt{3}+1}{2}, \\ y' = -\frac{1}{2}x + \frac{\sqrt{3}}{2}y + \frac{5-3\sqrt{3}}{2}. \end{cases}$

1. Se observă că f este morfism afin don forma ecuac tiilor sale. Scriem f matriceal $X' = AX + B \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + B$, obținem:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 + \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} \Rightarrow \quad (32)$$

f este morfism afin. Verificăm dacă aplicația liniară asociată $\vec{f}$ este ortogonală, adică dacă matricea A este ortogonală. Pentru aceasta calculăm

$$AA^t = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix} = I_2 \Rightarrow \vec{f} \text{ este ortogonală.} \quad (33)$$

Din (61) și (62), rezultă că f izometrie.

Deoarece:

$$\det A = \begin{vmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{vmatrix} = 1 > 0 \rightarrow f \text{ deplasare} \quad (34)$$

Observăm că $\vec{f} = R_\theta$, unde deoarece $\cos \theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$ și $\sin \theta = \frac{1}{2} \rightarrow \theta = \frac{\pi}{6} \in (-\pi, \pi]$.

Ω este singurul punct fix al izometriei. Vom determina coordonatele acestui din rezolvarea sistemului

$$f(\Omega) = \Omega \Leftrightarrow \begin{cases} x' = x \\ y' = y \end{cases} \quad (35)$$

$$\begin{cases} (1 - \cos \theta)x + \sin \theta y = -1 + \frac{\sqrt{3}}{2}, \\ -\sin \theta x + (1 - \cos \theta)y = \frac{1}{2}. \end{cases} \quad (36)$$

Obținem

$$\begin{cases} x = \frac{(-1 + \frac{\sqrt{3}}{2})(1 - \cos \theta) - \frac{1}{2} \sin \theta}{2(1 - \cos \theta)} = \frac{(-1 + \frac{\sqrt{3}}{2})(1 - \frac{\sqrt{3}}{2}) - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}}{2(1 - \frac{\sqrt{3}}{2})} = \frac{-1 + \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{3}{4} - \frac{1}{4}}{2(1 - \frac{\sqrt{3}}{2})} = -1, \\ y = \frac{\frac{1}{2}(1 - \cos \theta) + (-1 + \frac{\sqrt{3}}{2}) \sin \theta}{2(1 - \cos \theta)} = \frac{\frac{1}{2}(1 - \frac{\sqrt{3}}{2}) + (-1 + \frac{\sqrt{3}}{2}) \cdot \frac{1}{2}}{2(1 - \frac{\sqrt{3}}{2})} = \frac{-1 + \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{3}{4} - \frac{1}{4}}{2(1 - \frac{\sqrt{3}}{2})} = 0. \end{cases}$$

Deci f este rotația de unghi θ și centru $\Omega = (-1, 0)$. Obținem

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x + 1 \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (37)$$

2. Din nou, faptul că f este morfism este asigurat de forma ecuațiilor sale. Scriem f matriceal $X' = AX + B \Rightarrow \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + B$, obținem:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 + \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 2 - \frac{3\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} \Rightarrow \quad (38)$$

f este morfism afin. Verificăm dacă aplicația liniară asociată $\vec{f}$ este ortogonală, adică dacă matricea A este ortogonală:

$$AA^t = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} = I_2 \Rightarrow \vec{f} \text{ este ortogonală.} \quad (39)$$

Din (61) și (62), rezultă că f izometrie.

Mai mult deoarece:

$$\det A = \begin{vmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{vmatrix} = 1 > 0 \rightarrow f \text{ deplasare.} \quad (40)$$

Rezultă că $\vec{f} = R_\theta$. Deoarece $\cos \theta = \sin \theta \rightarrow \theta = \frac{\pi}{4} \in (-\pi, \pi]$.

Rotația are un unic punct fix care este soluție a sistemului:

$$f(\Omega) = \Omega \rightarrow \begin{cases} x' = x, \\ y' = y \end{cases} \quad (41)$$

Sistemul devine

$$\begin{cases} (1 - \cos \theta)x + \sin \theta y = 1 + \frac{\sqrt{2}}{2}, \\ -\sin \theta x + (1 - \cos \theta)y = 2 - \frac{3\sqrt{2}}{2}. \end{cases} \quad (42)$$

Obținem

$$\begin{cases} x = \frac{(1 + \frac{\sqrt{2}}{2})(1 - \cos \theta) - (2 - \frac{3\sqrt{2}}{2}) \sin \theta}{2(1 - \cos \theta)} = \frac{(1 + \frac{\sqrt{2}}{2})(1 - \frac{\sqrt{2}}{2}) - (2 - \frac{3\sqrt{2}}{2}) \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}}{2(1 - \frac{\sqrt{2}}{2})} = \frac{1 - \frac{1}{2} - \sqrt{2} + \frac{3}{2}}{2(1 - \frac{\sqrt{2}}{2})} = \frac{2 - \sqrt{2}}{2 - \sqrt{2}} = 1 \\ y = \frac{(2 - \frac{3\sqrt{2}}{2})(1 - \cos \theta) + (1 + \frac{\sqrt{2}}{2}) \sin \theta}{2(1 - \cos \theta)} = \frac{(2 - \frac{3\sqrt{2}}{2})(1 - \frac{\sqrt{2}}{2}) + (1 + \frac{\sqrt{2}}{2}) \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}}{2(1 - \frac{\sqrt{2}}{2})} = \frac{2 - \frac{3\sqrt{2}}{2} - \sqrt{2} + \frac{3}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{1}{2}}{2(1 - \frac{\sqrt{2}}{2})} = \frac{4 - 4\frac{\sqrt{2}}{2}}{2(1 - \frac{\sqrt{2}}{2})} = 2. \end{cases}$$

În concluzie f este rotația de unghi θ și centru $\Omega = (1, 2)$. Ecuațiile rotației sunt:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x-1 \\ y-2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \quad (43)$$

3. Scriem f matriceal $X' = AX + B \rightarrow \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + B$, obținem:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix} \Rightarrow \quad (44)$$

f este morfism afin.

În cele ce urmează verificăm dacă aplicația liniară asociată $\vec{f}$ este ortogonală, adică dacă matricea A este ortogonală:

$$AA^t = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = I_2 \Rightarrow \vec{f} \text{ este ortogonală.} \quad (45)$$

Din (61) și (62), rezultă că f izometrie.

Deoarece

$$\det A = \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = -1 < 0 \rightarrow f \text{ antideplasare.} \quad (46)$$

Observăm că $\vec{f} = S_{\bar{u}} \rightarrow f = S_d$ sau $f = S_d \circ t_{\bar{u}}$, unde $\bar{u}$ este determinat de $\vec{f}(\bar{u}) = \bar{u}$, deci $\bar{u} = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, -1)$. Fie $\bar{v}$ determinat de $\vec{f}(\bar{v}) = -\bar{v} \Rightarrow \bar{v} = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 1)$. Trecem în sistemul $\{\bar{u}, \bar{v}\}$ și obținem ecuația

$$\begin{cases} x' = x + b'_1 \\ y' = -y + b'_2 \end{cases} \quad (47)$$

unde $\begin{pmatrix} b'_1 \\ b'_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$. Obținem $\begin{pmatrix} b'_1 \\ b'_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{2}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$. Deoarece $b'_1 = 0$ rezultă că $f = S_d$

unde dreapta d este $y = \frac{b'_2}{2}$ în noul reper, adică $\frac{1}{\sqrt{2}}(x+y) = -\frac{1}{\sqrt{2}} \rightarrow x+y+1=0$ în vechiul reper.

Punctele fixe sunt punctele dreptei d .

Analogue putem căuta soluțiile sistemului $f(\Omega) = \Omega$. Se obține că avem o infinitate de puncte fixe.

$$\begin{cases} x = -y - 1 \\ y = -x - 1 \end{cases} \rightarrow x + y + 1 = 0 \rightarrow \text{toate punctele fixe aparțin dreptei } x+y+1=0. \quad (48)$$

4. Scriem f matriceal $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + B$, obținem:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{5} & \frac{4}{5} \\ \frac{4}{5} & -\frac{3}{5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\frac{12}{5} \\ \frac{1}{5} \end{pmatrix} \Rightarrow \quad (49)$$

f este morfism afin.

Verificăm dacă aplicația liniară asociată $\vec{f}$ este ortogonală, adică dacă matricea A este ortogonală:

$$AA^t = \begin{pmatrix} \frac{3}{5} & \frac{4}{5} \\ \frac{4}{5} & -\frac{3}{5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{3}{5} & \frac{4}{5} \\ \frac{4}{5} & -\frac{3}{5} \end{pmatrix} = I_2 \Rightarrow \vec{f} \text{ este ortogonală.} \quad (50)$$

Din (61) și (62), rezultă că f izometrie.

Deoarece $\det(A) < 0$ rezultă că avem o antideplasare.

Metoda I: Dorim să vedem dacă există puncte fixe. (dacă există, acestea vor fi o infinitate deci avem o simetrie ortogonală, în caz contrar vom avea compunerea dintre o simetrie ortogonală și o translație de vector colinar cu vectorul dat).

Deci:

$$\begin{cases} x' = x \\ y' = y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{3}{5}x + \frac{4}{5}y - \frac{12}{5}, \\ y = \frac{4}{5}x - \frac{3}{5}y - \frac{1}{5} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} -\frac{2}{5}x + \frac{4}{5}y = \frac{12}{5}, \\ \frac{4}{5}x - \frac{8}{5}y = \frac{1}{5} \end{cases} \quad (51)$$

Sistemul de mai sus este un sistem neomogen. Pentru a studia compatibilitatea sa trebuie să calculăm rangul matricii sistemului și să îl comparăm cu rangul matricii extinse. Avem:

$$A = \begin{pmatrix} \frac{-2}{5} & \frac{4}{5} \\ \frac{4}{5} & \frac{-8}{5} \end{pmatrix}, \quad \bar{A} = \begin{pmatrix} \frac{-2}{5} & \frac{4}{5} & \frac{12}{5} \\ \frac{4}{5} & \frac{-8}{5} & \frac{1}{5} \end{pmatrix} \quad (52)$$

Se observă că $\det A = 0 \rightarrow \text{rang}(A) = 1$ în timp ce $\text{rang}(\bar{A}) = 2$. Obținem că sistemul este incompatibil deci ne aflăm în cazul compunerii dintre o simetrie ortogonală și o translație de vector colinar cu vectorul director al dreptei: $f = S_d \circ t_{\bar{u}}$. Pentru a determina ecuația dreptei vom considera două puncte oarecare pentru care vom calcula imaginea prin izometrie. Fie $A(0,0)$, $B(1,1)$.

$$\begin{cases} A' = f(A) = \left(-\frac{12}{5}, -\frac{1}{5}\right) \\ B' = f(B) = (-1, 0) \end{cases} \quad (53)$$

Dreapta d va fi determinată în mod unic de mijloacele segmentelor $[AA']$ și $[BB']$.

$$\begin{cases} M \text{ mijlocul lui } [AA'] \rightarrow M\left(-\frac{6}{5}, -\frac{1}{10}\right) \\ N \text{ mijlocul lui } [BB'] \rightarrow N\left(0, \frac{1}{2}\right) \end{cases} \quad (54)$$

Dreapta pe care o căutăm este:

$$d : (MN) : \frac{x}{-\frac{6}{5}} = \frac{y - \frac{1}{2}}{-\frac{1}{5}} \Leftrightarrow 2\left(y - \frac{1}{2}\right) = x \Leftrightarrow (d) : x - 2y + 1 = 0 \quad (55)$$

Identificăm vectorul astfel: considerăm $B'(-1,0) \in d$. Calculăm $B'' = f(B') = (-3, -1)$.

$$\bar{u} = \overrightarrow{B'B''} = (-2, -1) \parallel (2, 1), \text{ deci colinar cu vectorul director al dreptei } d. \quad (56)$$

Metoda II: Observăm că $\vec{f} = S_{\bar{u}}$, unde $\bar{u}$ este determinat de $\vec{f}(\bar{u}) = \bar{u}$, deci $\bar{u} = \frac{1}{\sqrt{5}}(2, 1)$. Fie $\bar{v}$ determinat de $\vec{f}(\bar{v}) = -\bar{v} \Rightarrow \bar{v} = \frac{1}{\sqrt{5}}(1, -2)$. Trecem în sistemul $\{\bar{u}, \bar{v}\}$ și obținem ecuația

$$\begin{cases} x' = x + b'_1 \\ y' = -y + b'_2 \end{cases} \quad (57)$$

unde $\begin{pmatrix} b'_1 \\ b'_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$. Obținem $\begin{pmatrix} b'_1 \\ b'_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{12}{5} \\ -\frac{1}{5} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{5}{\sqrt{5}} \\ -\frac{2}{\sqrt{5}} \end{pmatrix}$. Deoarece $b'_1 \neq 0$ rezultă că

$f = S_d \circ t_{\bar{w}}$ unde dreapta d este $y = \frac{b'_2}{2}$ în noul reper, i.e. $\frac{1}{\sqrt{5}}(x - 2y) = -\frac{1}{\sqrt{5}} \Leftrightarrow x - 2y + 1 = 0$ în vechiul reper și $\bar{w} = b'_1 \bar{u}$ i.e. $\bar{w} = -\frac{5}{\sqrt{5}} \frac{1}{\sqrt{5}}(2, 1) = (-2, -1)$.

Nu există puncte fixe.

5. Scriem f matriceal și obținem:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{3}{5} & \frac{4}{5} \\ \frac{4}{5} & \frac{3}{5} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\frac{4}{5} \\ \frac{2}{5} \end{pmatrix} \rightarrow f \text{ morfism} \quad (58)$$

Verificăm dacă aplicația liniară asociată $\vec{f}$ este ortogonală, adică dacă matricea A este ortogonală:

$$AA^t = \begin{pmatrix} -\frac{3}{5} & \frac{4}{5} \\ \frac{4}{5} & \frac{3}{5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{3}{5} & \frac{4}{5} \\ \frac{4}{5} & \frac{3}{5} \end{pmatrix} = I_2 \Rightarrow \vec{f} \text{ este ortogonală.} \quad (59)$$

Din (61) și (62), rezultă că f izometrie.

Deoarece $\det(A) < 0$ rezultă că avem o antideplasare. Studiem existența punctelor fixe:

$$\begin{cases} x = -\frac{3}{5}x + \frac{4}{5}y - \frac{4}{5}, \\ y = \frac{4}{5}x + \frac{3}{5}y + \frac{2}{5}. \end{cases} \rightarrow \begin{cases} -\frac{8}{5}x + \frac{4}{5}y - \frac{4}{5} = 0, \\ \frac{4}{5}x - \frac{2}{5}y + \frac{2}{5} = 0. \end{cases} \rightarrow \text{o infinitate de puncte fixe aparținând dreptei } d : 2x - y + 1 = 0. \quad (60)$$

Deci izometria este simetria ortogonală față de dreapta d .

6. Scriem f matriceal $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + B$, obținem:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{3}+1}{2} \\ \frac{5-3\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix} \Rightarrow \quad (61)$$

f este morfism afin. Verificăm dacă aplicația liniară asociată $\vec{f}$ este ortogonală, adică dacă matricea A este ortogonală:

$$AA^t = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix} = I_2 \Rightarrow \vec{f} \text{ este ortogonală.} \quad (62)$$

Din (61) și (62), rezultă că f izometrie.

Observăm că $\vec{f} = R_\theta$, unde $\theta = -\frac{\pi}{6} \in (-\pi, \pi]$.

Pentru a determina punctele fixe, rezolvăm sistemul:

$$\begin{cases} (1 - \cos \theta)x + \sin \theta y = B_1, \\ -\sin \theta x + (1 - \cos \theta)y = B_2. \end{cases} \quad (63)$$

$$\text{Obținem } x = \frac{B_1(1 - \cos \theta) - B_2 \sin \theta}{2(1 - \cos \theta)} = \frac{-(\frac{1+\sqrt{3}}{2})(1 - \frac{\sqrt{3}}{2}) + \frac{5-3\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{1}{2}}{2(1 - \frac{\sqrt{3}}{2})} = -\frac{\sqrt{3}}{2},$$

$$y = \frac{B_2(1 - \cos \theta) + B_1 \sin \theta}{2(1 - \cos \theta)} = \frac{\frac{5-3\sqrt{3}}{2}(1 - \frac{\sqrt{3}}{2}) + (\frac{1+\sqrt{3}}{2}) \cdot \frac{1}{2}}{2(1 - \frac{\sqrt{3}}{2})} = \frac{5}{2}.$$

Obținem că f este rotația de unghi θ și centru $\Omega = (-\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{5}{2})$. Obținem

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x + \frac{\sqrt{3}}{2} \\ y - \frac{5}{2} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{5}{2} \end{pmatrix} \quad (64)$$

Exercițiul 5. În $\mathcal{E}^2$ se consideră un reper ortonormat pozitiv $\mathcal{R} = \{O; \vec{i}, \vec{j}\}$ și în raport cu acesta se dau vectorul $\vec{u} = 2\vec{i} + \vec{j}$ și dreapta $\delta : x - 2y + 1 = 0$. Scrieți ecuațiile translației $t_{\vec{u}}$ și ecuațiile dreptei $\delta' = t_{\vec{u}}(\delta)$. Aceeași problemă pentru $\gamma : x - y = 0$.

Soluție: Fie $P(x, y) \in E$ un punct oarecare și $P'(x', y')$ coordonatele punctului traslat:

$$t_{\vec{u}} : \begin{cases} x' = x + 2 \\ y' = y + 1 \end{cases} \quad (65)$$

Considerăm $A(-1, 0)$, $B(1, 1) \in d$. Calculăm:

$$A' = t_{\vec{u}}(A) : \begin{cases} x' = 1, \\ y' = 1 \end{cases} \quad (66)$$

$$B' = t_{\vec{u}}(B) : \begin{cases} x' = 3, \\ y' = 2 \end{cases} \quad (67)$$

Atunci:

$$\delta' = t_{\vec{u}}(\delta) : \frac{x' - 1}{2} = \frac{y' - 1}{1} \quad (68)$$

Pentru $\gamma' = t_{\vec{u}}(\gamma)$ considerăm:

$$\begin{cases} C(1, 1) \in \delta \rightarrow C' = t_{\vec{u}}(C) = (3, 2) \\ D(2, 2) \in \delta \rightarrow D' = t_{\vec{u}}(D) = (4, 3) \end{cases} \quad (69)$$

Obținem:

$$\gamma' = t_{\vec{u}}(\gamma) : \frac{x' - 3}{1} = \frac{y' - 2}{1} \quad (70)$$

Alternativ observăm că putem scrie coordonatele punctului inițial în funcție de coordonatele punctului traslat astfel:

$$\begin{cases} x = x' - 2, \\ y = y' - 1 \end{cases} \quad (71)$$

Înlocuim în ecuația dreptei δ și obținem:

$$\gamma' = t_{\vec{u}}(\gamma) : x' - 2 = y' - 1 \rightarrow x' - y' - 1 = 0. \quad (72)$$

Exercițiul 6. Fie $\mathcal{R} = \{O; \vec{i}, \vec{j}\}$ un reper ortonormat pozitiv în $\mathcal{E}^2$ și punctul $\Omega(1, 2)$. Scrieți, în raport cu $\mathcal{R}$, ecuațiile rotației de centru Ω și unghi orientat $\alpha = \frac{\pi}{6}$. Determinați ecuațiile imaginii dreptei $d : x + y = 0$ prin această rotație. Aceeași problemă pentru $\Omega(-1, 1)$, $\alpha = -\frac{\pi}{4}$ și $d : x - y + 2 = 0$.

Temă:

Exercițiul 7. Temă obligatorie: În $\mathcal{E}^2$ se consideră un reper ortonormat pozitiv $\mathcal{R} = \{O; \vec{i}, \vec{j}\}$ și în raport cu acesta se dau punctele $A(1, 1)$, $\Omega(1, 0)$, vectorul $\vec{u} = 3\vec{i} + 2\vec{j}$, dreapta $\delta : x - y + 2 = 0$. Scrieți ecuațiile următoarelor izometrii: $R_{\Omega, -\frac{\pi}{6}}$, S_δ , $R_{\Omega, \frac{\pi}{3}} \circ t_{\vec{u}}$, $S_\delta \circ t_{\vec{u}}$.

Determinați imaginea punctului A prin $S_\delta \circ t_{\vec{u}}$.