

Seminarul 7  
Izometriile spațiului afin euclidian  $\mathcal{E}^3$

Fie  $f : E \rightarrow E$  o izometrie a spațiului euclidian orientat  $E$  și  $\mathcal{R} = \{O; \bar{i}, \bar{j}, \bar{k}\}$  un reper cartezian ortonormat pozitiv în  $E$ . Amintim că în raport cu  $\mathcal{R}$  ecuațiile izometriei  $f$  se scriu matricial

$$Y = AX + B,$$

unde  $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$  sunt coordonatele unui punct arbitrar  $P$  în raport cu  $\mathcal{R}$ ,  $Y = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$  sunt coordonatele lui  $f(P)$  în raport cu  $\mathcal{R}$ ,  $A \in \mathcal{O}(3)$  și  $B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$ .

(A) Dacă  $\vec{f} = Id_{\vec{E}} \Leftrightarrow A = I_3$  rezultă că  $f = t_{\bar{b}}$ , unde  $\bar{b} = b_1\bar{i} + b_2\bar{j} + b_3\bar{k}$ . Ecuațiile **translației** în raport cu  $\mathcal{R}$  sunt:

$$\begin{cases} x' = x + b_1, \\ y' = y + b_2, \\ z' = z + b_3. \end{cases}$$

Translația  $t_{\bar{b}}$  are puncte fixe dacă și numai dacă  $\bar{b} = \bar{0}$ .

(B) Dacă există o bază ortonormată  $\{\bar{v}, \bar{u}_1, \bar{u}_2\}$  în raport cu care matricea aplicației liniare asociate să fie

$$A' = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

atunci  $\vec{f}$  este simetria ortogonală în raport cu  $U = [\bar{u}_1, \bar{u}_2]$  și ecuațiile lui  $f$  în raport cu  $\mathcal{R}' = \{O; \bar{v}, \bar{u}_1, \bar{u}_2\}$  sunt

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x' = -x + b_1, \\ y' = y + b_2, \\ z' = z + b_3. \end{cases}$$

Punctul  $P(x, y, z)$  este punct fix al lui  $f$  dacă și numai dacă

$$\begin{cases} x = \frac{b_1}{2}, \\ b_2 = 0, \\ b_3 = 0. \end{cases}$$

(B1) Dacă  $b_2 = b_3 = 0$ , atunci toate punctele planului  $\pi$  ce are în raport cu  $\mathcal{R}'$  ecuația  $x = \frac{b_1}{2}$  sunt fixe pentru  $f$ . În acest caz  $f$  este **simetria ortogonală față de**  $\pi$  și are în raport cu  $\mathcal{R}'$  ecuațiile

$$\begin{cases} x' = -x + b_1, \\ y' = y, \\ z' = z. \end{cases}$$

Observăm că  $\vec{\pi}$  este subspațiul vectorilor proprii ai lui  $A'$  corespunzători valorii proprii  $+1$ .

Dacă dorim să scriem ecuațiile simetriei ortogonale  $S_\pi$  în raport cu un reper ortonormat arbitrar  $\mathcal{R}$ , atunci când se dă ecuația generală a lui  $\pi$ , procedăm astfel.

Presupunem că planul are ecuația  $\pi : ax + by + cz + d = 0$ ,  $a^2 + b^2 + c^2 > 0$ . Rezultă că un vector normal lui  $\vec{\pi}$  este  $\vec{N}(a, b, c)$ . Dacă  $P(x, y, z)$  și  $S_\pi(P) = P'(x', y', z')$ , impunând condițiile  $\overrightarrow{PP'} \parallel \vec{N}$  și  $\frac{1}{2}P + \frac{1}{2}P' \in \pi$ , obținem

$$\frac{x' - x}{a} = \frac{y' - y}{b} = \frac{z' - z}{c},$$

$$\frac{a}{2}(x + x') + \frac{b}{2}(y + y') + \frac{c}{2}(z + z') + d = 0.$$

Din aceste condiții rezultă

$$S_\pi : \begin{cases} x' &= x - \frac{2a(ax+by+cz+d)}{a^2+b^2+c^2}, \\ y' &= y - \frac{2b(ax+by+cz+d)}{a^2+b^2+c^2}, \\ z' &= z - \frac{2c(ax+by+cz+d)}{a^2+b^2+c^2}. \end{cases}$$

De exemplu, ecuațiile simetriilor ortogonale față de planele de coordonate  $(xOy) = O + [\bar{i}, \bar{j}]$ ,  $(yOz) = O + [\bar{j}, \bar{k}]$ ,  $(xOz) = O + [\bar{i}, \bar{k}]$  sunt:

$$S_{(xOy)} : \begin{cases} x' &= x, \\ y' &= y, \\ z' &= -z, \end{cases} \quad S_{(yOz)} : \begin{cases} x' &= -x, \\ y' &= y, \\ z' &= z, \end{cases} \quad S_{(xOz)} : \begin{cases} x' &= x, \\ y' &= -y, \\ z' &= z. \end{cases}$$

(B2) Dacă  $b_2 \neq 0$  sau  $b_3 \neq 0$ , atunci izometria  $f$  este compunerea dintre simetria ortogonală față de un plan  $\pi$  și o translație de vector  $\bar{a} \in \vec{\pi}$ . Mai exact  $f = t_{\bar{a}} \circ S_\pi = S_\pi \circ t_{\bar{a}}$ , unde planul  $\pi$  are ecuația  $x = \frac{b_1}{2}$  și  $\bar{a} = b_2\bar{u}_1 + b_3\bar{u}_2$ :

$$S_\pi : \begin{cases} x' &= -x + b_1, \\ y' &= y, \\ z' &= z, \end{cases} \quad t_{\bar{a}} : \begin{cases} x'' &= x', \\ y'' &= y' + b_2, \\ z'' &= z' + b_3. \end{cases}$$

În acest caz  $f$  nu are puncte fixe. Putem să numim aceasta izometrie **simetrie ortogonală alunecată**.

(C) Dacă există o bază ortonormată  $\{\bar{u}, \bar{v}_1, \bar{v}_2\}$  în raport cu care matricea aplicației liniare asociate să fie

$$A' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & -\sin \theta \\ 0 & \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}, \quad \theta \neq 0,$$

atunci ecuațiile izometriei  $f$  în raport cu  $\mathcal{R}' = \{O; \bar{u}, \bar{v}_1, \bar{v}_2\}$  sunt

$$\begin{cases} x' &= x + b_1, \\ y' &= y \cos \theta - z \sin \theta + b_2, \\ z' &= y \sin \theta + z \cos \theta + b_3. \end{cases}$$

Punctul  $P(x, y, z)$  este fix pentru  $f$  dacă și numai dacă

$$\begin{cases} b_1 &= 0, \\ y \cos \theta - z \sin \theta + b_2 &= y, \\ y \sin \theta + z \cos \theta + b_3 &= z. \end{cases}$$

Sistemul format din ultimele două ecuații are soluție unică, fie aceasta  $(y_0, z_0)$  (sunt coordonatele centrului unei rotații de unghi  $\theta$  din planul  $O + [\bar{v}_1, \bar{v}_2]$ ).

(C1) Dacă  $b_1 = 0$  observăm că orice punct care în raport cu  $\mathcal{R}'$  are coordonatele  $P(x, y_0, z_0)$  este fix pentru  $f$ . Deci  $f$  are o dreaptă de puncte fixe, având direcția  $\bar{u}$ , care este un vector propriu al lui  $A'$  corespunzător valorii proprii  $+1$ .

Izometria  $f$  este în acest caz **rotația în jurul dreptei  $d$  de unghi orientat  $\theta$** , notată  $R_{d,\theta}$ . Ecuațiile lui  $d$  în raport

cu  $\mathcal{R}'$  sunt 
$$\begin{cases} y &= y_0, \\ z &= z_0. \end{cases}$$

Ecuațiile rotației  $R_{d,\theta}$  sunt

$$\begin{cases} x' &= x, \\ y' &= y \cos \theta - z \sin \theta + b_2, \\ z' &= y \sin \theta + z \cos \theta + b_3. \end{cases}$$

Observăm că rotația în jurul dreptei  $d$  de unghi orientat  $\pi$  este simetria ortogonală față de dreapta  $d$ . În raport cu  $\mathcal{R}'$  ea are ecuațiile

$$\begin{cases} x' &= x, \\ y' &= -y + b_2, \\ z' &= -z + b_3, \end{cases}$$

matricea aplicației liniare asociate în raport cu baza  $\{\bar{u}, \bar{v}_1, \bar{v}_2\}$  fiind  $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ .

De exemplu, vom scrie ecuațiile rotațiilor în jurul axelor reperului ortonormat considerat. Pentru  $\mathcal{R} = \{O; \bar{i}, \bar{j}, \bar{k}\}$ , notăm  $Ox = O + [\bar{i}]$ ,  $Oy = O + [\bar{j}]$ ,  $Oz = O + [\bar{k}]$ .

$$R_{Ox, \frac{\pi}{4}} : \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & -\sin \theta \\ 0 & \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix},$$

$$R_{Oy, -\frac{\pi}{6}} : \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & 0 & \sin \theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \theta & 0 & \cos \theta \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix},$$

$$R_{Oz, \frac{\pi}{2}} : \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$$

Simetriile ortogonale față de axele reperului au ecuațiile:

$$S_{Ox} = R_{Ox, \pi} : \begin{cases} x' = x, \\ y' = -y, \\ z' = -z, \end{cases} \quad S_{Oy} : \begin{cases} x' = -x, \\ y' = -y, \\ z' = -z, \end{cases} \quad S_{Oz} : \begin{cases} x' = -x, \\ y' = -y, \\ z' = z. \end{cases}$$

(C2) Dacă  $b_1 \neq 0$  izometria  $f$  nu are puncte fixe. Ea se poate scrie sub forma  $t_{\bar{a}} \circ R_{d, \theta} = R_{d, \theta} \circ t_{\bar{a}}$ , cu  $\bar{a} = b_1 \bar{u} \in \vec{d}$ , deci este compunerea între o rotație în jurul unei drepte  $d$ , de unghi  $\theta$  și o translație de vector paralel cu  $d$ :

$$R_{d, \theta} : \begin{cases} x' = x, \\ y' = y \cos \theta - z \sin \theta + b_2, \\ z' = y \sin \theta + z \cos \theta + b_3, \end{cases} \quad t_{\bar{a}} : \begin{cases} x'' = x' + b_1, \\ y'' = y', \\ z'' = z'. \end{cases}$$

Numim o astfel de izometrie **rototranslație** sau **deplasare elicoidală**.

De exemplu, ecuațiile izometriei  $t_{3\bar{i}} \circ R_{Ox, \frac{\pi}{4}}$  sunt

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

(D) Dacă există o bază ortonormată  $\{\bar{v}, \bar{w}_1, \bar{w}_2\}$  în raport cu care matricea aplicației liniare asociate să fie

$$A' = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & -\sin \theta \\ 0 & \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}, \quad \theta \neq 0,$$

atunci ecuațiile lui  $f$  în raport cu  $\mathcal{R}' = \{O; \bar{v}, \bar{w}_1, \bar{w}_2\}$  sunt

$$\begin{cases} x' = -x + b_1, \\ y' = y \cos \theta - z \sin \theta + b_2, \\ z' = y \sin \theta + z \cos \theta + b_3. \end{cases}$$

Aceasta izometrie are un singur punct fix, care are în raport cu  $\mathcal{R}'$  coordonatele  $P(\frac{b_1}{2}, y_0, z_0)$ , cu  $(y_0, z_0)$  centrul rotației din planul  $O + [\bar{w}_1, \bar{w}_2]$  dată de ultimele două ecuații ale sistemului de mai sus.

Aceasta izometrie este  $f = R_{\delta, \theta} \circ S_{\beta} = S_{\beta} \circ R_{\delta, \theta}$  deci compunerea dintre o simetrie ortogonală față de un plan  $\beta$  de ecuație  $x = \frac{b_1}{2}$  în raport cu  $\mathcal{R}'$  ( $\vec{\beta} = [\bar{w}_1, \bar{w}_2]$ ) și o rotație în jurul unei drepte  $\delta$ , ( $\vec{\delta} = [\bar{v}]$ ) de unghi  $\theta$ , cu  $\delta \perp \beta$ :

$$S_{\beta} : \begin{cases} x' = -x + b_1, \\ y' = y, \\ z' = z, \end{cases} \quad R_{\delta, \theta} : \begin{cases} x'' = x', \\ y'' = y' \cos \theta - z' \sin \theta + b_2, \\ z'' = y' \sin \theta + z' \cos \theta + b_3. \end{cases}$$

Numim această izometrie o **roto-simetrie**.

Obținem **simetria centrală** față de punctul  $\{\Omega\} = \delta \cap \beta$  în cazul particular  $\theta = \pi$ :  $S_\Omega = R_{\delta, \pi} \circ S_\beta$ .

De exemplu, simetria centrală față de  $\Omega(1, 2, 3)$  are ecuațiile: 
$$\begin{cases} x' = 2 - x, \\ y' = 4 - y, \\ z' = 6 - z. \end{cases}$$

În **concluzie**, am obținut următoarele izometrii ale lui  $\mathcal{E}^3$ :

- deplăsari:
  - translația
  - rotația în jurul unei drepte  $d$ , de unghi orientat  $\theta$ , cu cazul particular  $\theta = \pi$  cand obținem simetria ortogonală față de dreapta  $d$
  - rototranslația (miscare elicoidală):  $t_{\bar{a}} \circ R_{d, \theta}$ ,  $\bar{a} \in \vec{d}$
- antideplăsari:
  - simetria ortogonală față de un plan  $S_\pi$
  - simetria “alunecată”  $t_{\bar{a}} \circ S_\pi$ ,  $\bar{a} \in \vec{\pi}$ ,  $\bar{a} \neq \bar{0}$
  - roto-simetria  $R_{\delta, \theta} \circ S_\beta$ ,  $\delta \perp \beta$  (cu cazul particular al simetriei centrale)

#### EXERCIIȚII REZOLVATE

*Exercițiul 1.* În spațiul afin euclidian orientat  $\mathcal{E}^3$  se dau, în raport cu un reper ortonormat pozitiv  $\mathcal{R} = \{O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$ , dreptele  $d: \frac{X}{1} = \frac{Y-1}{2} = \frac{Z}{3}$ ,  $\delta: \frac{X-1}{2} = \frac{Y+1}{1} = \frac{Z}{-1}$  și planul  $\alpha: X + Y - Z + 1 = 0$ .

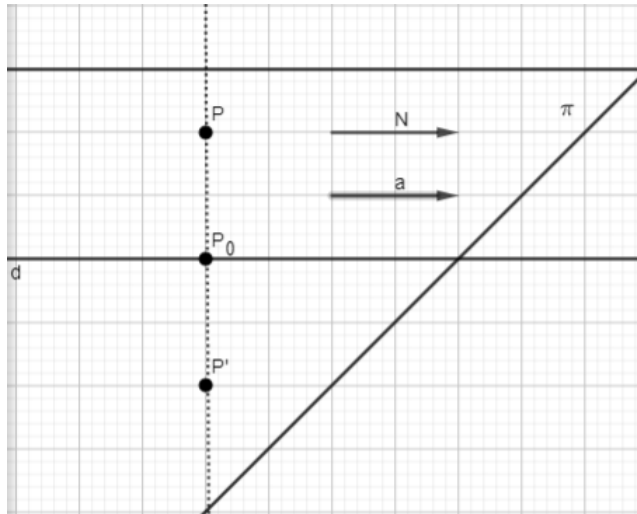
(1) Scrieți ecuațiile simetriei ortogonale  $S_d$  față de dreapta  $d$  și ecuațiile simetriei ortogonale  $S_\alpha$  față de planul  $\alpha$ .

(2) Verificați că cele două simetrii ortogonale sunt aplicații involutive.

(3) Apoi determinați ecuațiile lui  $S_d(\delta)$  și  $S_\alpha(\delta)$ .

(4) Aceeași problemă pentru  $d: \frac{X-1}{2} = \frac{Y}{1} = \frac{Z}{3}$ ,  $\delta: \frac{X}{-1} = \frac{Y}{2} = \frac{Z}{3}$  și  $\alpha: X - 2Y + 1 = 0$ .

(1) **Soluție:** Pentru a determina ecuațiile simetriei ortogonale față de dreapta  $d$  vom considera  $P(x, y, z) \in E$  un punct arbitrar. Vom fi interesați de găsirea coordonatelor simetricului punctului față de dreapta  $d$ :  $P' = s_d P$ :



Este cunoscut faptul că pentru a determina simetricul unui punct față de o dreaptă trebuie să determinăm mai întâi proiecția punctului pe dreaptă. Deoarece ne aflăm în spațiul 3-dimensional această proiecție va fi intersecția dintre dreaptă și planul perpendicular pe aceasta care trece prin punct.

Avem următoarele:

$$(1) \quad \begin{cases} P(x, y, z) \in E, P_0 = pr_d P = \pi \cap d, \text{ unde } \pi \perp d, P \in \pi. \\ \text{deoarece } \pi \perp d \rightarrow \vec{N}_\pi \parallel \vec{a}, \text{ unde } \vec{a} \in \vec{d}. \end{cases}$$

Se observă că vectorul director al dreptei  $d$  este  $\vec{a} = (1, 2, 3)$  deci planul  $\pi$  va avea același vector normal. Scriem acum ecuația planului  $\pi$  știind că trece prin  $P(x, y, z)$  și are direcția normală dată de  $\vec{a}$ .

$$(2) \quad (\pi) : 1(X - x) + 2(Y - y) + 3(Z - z) = 0$$

Determinăm acum coordonatele proiecției punctului  $P$  pe dreapta  $d$  rezolvând următorul sistem:

$$(3) \quad d \cap \pi : \begin{cases} X = t, \\ Y = 1 + 2t, \\ Z = 3t \\ 1(X - x) + 2(Y - y) + 3(Z - z) = 0 \end{cases} \Rightarrow t - x + 2 + 4t - 2y + 9t - 3z = 0 \rightarrow t = \frac{x + 2y + 3z - 2}{14}$$

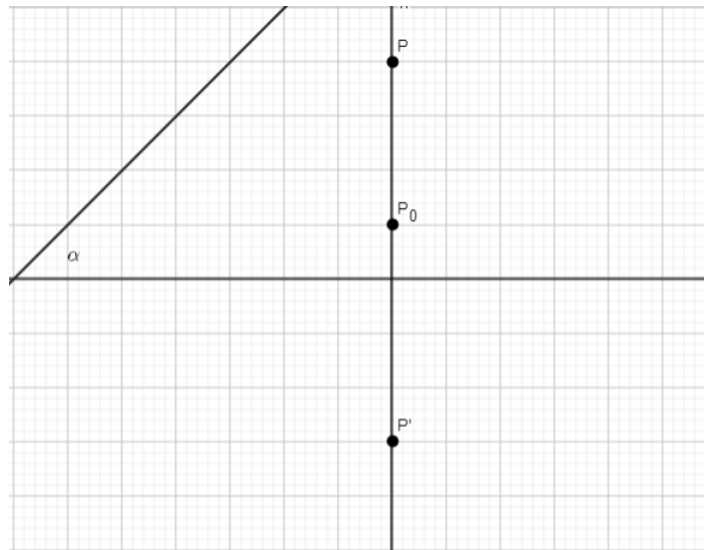
Înlocuim în ecuațiile parametrice ale dreptei  $d$  și obținem coordonatele proiecției:

$$(4) \quad P_0 = d \cap \pi : \begin{cases} X = \frac{x + 2y + 3z - 2}{14}, \\ Y = 1 - \frac{x + 2y + 3z - 2}{7} = \frac{2x + 2y + 6z + 10}{14} \\ Z = \frac{3x + 6y + 9z - 6}{14} \end{cases}$$

Vom considera  $P_0$  mijlocul segmentului ce are drept extremități punctul  $P$  și simetricul acestuia:  $P = 2P_0 - P'$ . Obținem astfel ecuațiile simetriei ortogonale față de dreapta  $d$ :

$$(5) \quad S_d : \begin{cases} x' = \frac{x + 2y + 3z - 2}{7} - x = \frac{-6x + 2y + 3z - 2}{7} \\ y' = \frac{2x + 2y + 6z + 10}{7} - y = \frac{2x - 3y + 6z + 10}{7} \\ z' = \frac{3x + 6y + 9z - 6}{7} - z = \frac{3x + 6y + 2z - 6}{7} \end{cases}$$

În cele ce urmează ne propunem să determinăm ecuațiile simetriei ortogonale față de planul  $\alpha$ . Fie  $P(x, y, z) \in E$ . Dorim să determinăm coordonatele simetricului punctului  $P$  față de planul  $\alpha$ :  $P' = s_\alpha P$ ,  $P'(x', y', z')$ .



Avem următoarele:

$$(6) \quad \begin{cases} P_0 = pr_\alpha P = PP' \cap \alpha \\ \text{deoarece } PP' \perp \alpha \rightarrow \overrightarrow{PP'} \parallel \vec{N}_\alpha \end{cases}$$

Din ecuația generală a planului se observă că direcția vectorului normal la plan are coordonatele  $\bar{N}_\alpha = (1, 1, -1)$ . Deci ecuația dreptei  $PP'$  este:

$$(7) \quad (PP') : \frac{x' - x}{1} = \frac{x' - y}{1} = \frac{x' - z}{-1} \rightarrow \begin{cases} x' = t + x, \\ y' = t + y \\ z' = -t + z \end{cases}, t \in \mathbb{R}.$$

Punctul  $P_0$  este mijlocul segmentului  $[PP']$  deci  $P_0 = \frac{1}{2}P + \frac{1}{2}P' = \left(\frac{2x+t}{2}, \frac{2y+t}{2}, \frac{2z-t}{2}\right)$ . Ne interesează valoarea parametrului  $t$ . Pentru determinarea aceasta vom folosi faptul că  $P_0 \in \alpha$ :

$$(8) \quad \frac{2x+t}{2} + \frac{2y+t}{2} - \frac{2z-t}{2} + 1 = 0 \rightarrow t = -\frac{2}{3}(x+y-z+1)$$

Înlocuim în ecuațiile parametrice ale dreptei  $PP'$  și găsim ecuațiile simetriei ortogonale față de planul  $\alpha$ :

$$(9) \quad S_\alpha : \begin{cases} x' = x - \frac{2}{3}(x+y-z+1) = \frac{x-2y+2z-2}{3} \\ y' = y - \frac{2}{3}(x+y-z+1) = \frac{-2x+y+2z-2}{3} \\ z' = z + \frac{2}{3}(x+y-z+1) = \frac{2x+2y+z+2}{3} \end{cases}$$

$$(10) \quad (2) \text{ Trebuie să verificăm dacă } S_d \circ S_d = Id \text{ și } S_\alpha \circ S_\alpha = Id$$

$$S_d \circ S_d : \begin{cases} x' = \frac{-6\left(\frac{-6x+2y+3z-2}{7}\right) + 2\left(\frac{2x-3y+6z+10}{7}\right) + 3\left(\frac{3x+6y+2z-6}{7}\right) - 2}{7} = x \\ y' = \frac{2\left(\frac{-6x+2y+3z-2}{7}\right) - 3\left(\frac{2x-3y+6z+10}{7}\right) + 6\left(\frac{3x+6y+2z-6}{7}\right) + 10}{7} = y \\ z' = \frac{3\left(\frac{-6x+2y+3z-2}{7}\right) + 6\left(\frac{2x-3y+6z+10}{7}\right) + 2\left(\frac{3x+6y+2z-6}{7}\right) - 6}{7} = z \end{cases} \rightarrow S_d \text{ aplicație involutivă.}$$

Analog:

$$(11) \quad S_\alpha \circ S_\alpha : \begin{cases} x' = \frac{\left(\frac{x-2y+2z-2}{3}\right) - 2\left(\frac{-2x+y+2z-2}{3}\right) + 2\left(\frac{2x+2y+z+2}{3}\right) - 2}{3} = x \\ y' = \frac{-2\left(\frac{x-2y+2z-2}{3}\right) + \left(\frac{-2x+y+2z-2}{3}\right) + 2\left(\frac{2x+2y+z+2}{3}\right) - 2}{3} = y \\ z' = \frac{2\left(\frac{x-2y+2z-2}{3}\right) + 2\left(\frac{-2x+y+2z-2}{3}\right) + \left(\frac{2x+2y+z+2}{3}\right) + 2}{3} = z \end{cases} \rightarrow S_\alpha \text{ aplicație involutivă.}$$

(3) Dorim să determinăm  $S_d\delta$ . Se observă că  $d$  și  $\delta$  nu sunt perpendiculare sau paralele. Prin urmare considerăm două puncte de pe dreapta  $\delta : A(1, -1, 0), B(3, 0, -1)$ . Determinăm imaginile acestor puncte prin legea de definire a simetriei ortogonale față de dreapta  $d$ :

$$(12) \quad \begin{cases} A' = s_d(A) = \left(-\frac{10}{7}, \frac{15}{7}, \frac{5}{7}\right) \\ B' = s_d(B) = \left(-\frac{23}{7}, \frac{10}{7}, \frac{1}{7}\right) \end{cases}$$

Dreapta pe care o căutăm este determinată în mod unic de punctele  $A'$  și  $B'$ .

$$(13) \quad S_d\delta = A'B' : \frac{X + \frac{10}{7}}{13} = \frac{Y - \frac{15}{7}}{5} = \frac{Z + \frac{9}{7}}{-10}$$

Pentru a determina  $S_\alpha \delta$  vom vedea mai întâi dacă dreapta intersectează planul:

$$(14) \quad \delta \cap \alpha : \begin{cases} X = 2t + 1 \\ Y = t - 1 \\ Z = -t \\ X + Y - Z + 1 = 0 \end{cases} \rightarrow 2t + 1 + t - 1 + t + 1 = 0 \rightarrow t = -\frac{1}{3}$$

Obținem  $\delta \cap \alpha = C$ ,  $C \left( \frac{1}{3}, -\frac{4}{3}, \frac{1}{3} \right)$ . Deci dreapta intersectează planul dar nu este perpendiculară pe acesta. Mai avem nevoie de încă un punct de pe  $\delta$  pe care să îl simetrizăm față de planul  $\alpha$ . Îl vom alege tot pe  $A(1, -1, 0)$ .

$$A'' = s_\alpha A = \left( \frac{1}{3}, -\frac{5}{3}, \frac{2}{3} \right)$$

Dreapta pe care o căutăm este:

$$(15) \quad A''C : \frac{X - \frac{1}{3}}{0} = \frac{Y + \frac{4}{3}}{-1} = \frac{Z - \frac{1}{3}}{3}.$$

(4) **Temă:**

*Exercițiul 2.* Determinați ecuațiile următoarelor izometrii în  $\mathcal{E}^3$ :

- (1) mișcarea elicoidală  $R_{Ox, -\frac{\pi}{6}} \circ t_{\bar{u}}$ ,  $\bar{u} = 2\bar{i}$ ;
- (2) rotosimetria  $S_\pi \circ R_{Oy, \frac{\pi}{3}}$ ,  $\pi : y - 2 = 0$ ;
- (3) alunecarea  $t_{\bar{a}} \circ S_\alpha$ ,  $\bar{a} = -2\bar{i} + \bar{j}$ ,  $\alpha : x + 2y - z + 1 = 0$ .

**Soluție:**

(1)

$$P(x, y, z) \xrightarrow{t_{\bar{u}}} P'(x', y', z') \xrightarrow{R_{Ox, -\frac{\pi}{6}}} P''(x'', y'', z'')$$

Scriem mai întâi ecuațiile translației:

$$(16) \quad t_{\bar{u}}(P) = P + \bar{u} : \begin{cases} x' = x + 2, \\ y' = y, \\ z' = z \end{cases}$$

Apoi:

$$(17) \quad P = O + \overrightarrow{OP'} \rightarrow R_{Ox, \theta}(P') = R_{Ox, \theta}(O) + R_{\bar{i}, \theta}(\overrightarrow{OP'}) = R_{\bar{i}, \theta}(\overrightarrow{OP'}).$$

Matricea lui  $R_{\bar{i}, \theta}$  în raport cu  $\{\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}\}$  este:

$$(18) \quad A_\theta = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & -\sin \theta \\ 0 & \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}, \quad R_{\bar{i}, \theta}(\overrightarrow{OP'}) = x''\bar{i} + y''\bar{j} + z''\bar{k}.$$

Deci:

$$(19) \quad \begin{pmatrix} x'' \\ y'' \\ z'' \end{pmatrix} = A_\theta \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} x'' \\ y'' \\ z'' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & -\sin \theta \\ 0 & \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$$

După înlocuirea lui  $\theta$  cu  $-\frac{\pi}{6}$  obținem:

$$(20) \quad R_{Ox, -\frac{\pi}{6}} : \begin{cases} x'' = x' \\ y'' = \frac{\sqrt{3}}{2}y' + \frac{1}{2}z' \\ z'' = -\frac{1}{2}y' + \frac{\sqrt{3}}{2}z'. \end{cases}$$

În final:

$$(21) \quad R_{Ox, -\frac{\pi}{6}} \circ t_{\bar{u}} : \begin{cases} x'' = x + 1 \\ y'' = \frac{\sqrt{3}}{2}y + \frac{1}{2}z \\ z'' = -\frac{1}{2}y + \frac{\sqrt{3}}{2}z \end{cases}$$

(2) Considerăm:

$$(22) \quad P(x, y, z) \xrightarrow{R_{Oy, \bar{j}}} P'(x', y', z') \xrightarrow{S_{\pi}} P''(x'', y'', z'').$$

Începem cu ecuațiile rotației:

$$(23) \quad P' = O + \overrightarrow{OP'} \rightarrow R_{Oy, \theta}(P') = R_{Oy, \theta}(O) + R_{\bar{j}, \theta}(\overrightarrow{OP'}) = R_{\bar{j}, \theta}(\overrightarrow{OP'}).$$

Matricea lui  $R_{\bar{j}, \theta}$  în raport cu  $\{\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}\}$  este:

$$(24) \quad A_{\theta} = \begin{pmatrix} \cos \theta & 0 & \sin \theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \theta & 0 & \cos \theta \end{pmatrix}, \quad R_{\bar{i}, \theta}(\overrightarrow{OP'}) = x' \bar{i} + y' \bar{j} + z' \bar{k}.$$

Deci:

$$(25) \quad \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = A_{\theta} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & 0 & \sin \theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \theta & 0 & \cos \theta \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

După efectuarea calculelor obținem:

$$(26) \quad R_{Oy, \frac{\pi}{3}} : \begin{cases} x' = x \cos \frac{\pi}{3} + z \sin \frac{\pi}{3} \\ y' = y \\ z' = -x \sin \frac{\pi}{3} + z \cos \frac{\pi}{3} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x' = \frac{1}{2}x + \frac{\sqrt{3}}{2}z \\ y' = y \\ z' = -\frac{\sqrt{3}}{2}x + \frac{1}{2}z \end{cases}$$

Mai avem de determinat ecuațiile simetriei ortogonale față de planul  $\pi$ . Pentru aceasta considerăm  $P''(x'', y'', z'') \in E$  și  $P''(x'', y'', z'') = s_{\pi}P'$ . Observăm următoarele:

$$(27) \quad \begin{cases} P'P'' \perp \pi \\ Oy \perp \pi \end{cases} \rightarrow P'P'' \parallel Oy \rightarrow \overrightarrow{P'P''} \parallel \bar{j}$$

Putem scrie ecuațiile dreptei  $P'P''$ :

$$(28) \quad P'P'' : \begin{cases} x'' = x' \\ y'' = y' + t \\ z'' = z' \end{cases}$$

Determinăm valoarea parametrului  $t$  folosind faptul că este mijlocul segmentului  $[P'P'']$  și se află în planul  $\pi$ . Din  $P_0$  mijlocul lui  $[P'P'']$  obținem  $P_0 \left( \frac{x' + x''}{2}, \frac{y' + y''}{2}, \frac{z' + z''}{2} \right) = \left( x', \frac{2y' + t}{2}, z' \right)$

Din  $P_0 \in \pi \rightarrow \frac{2y' + t}{2} - 2 = 0 \rightarrow 2y' + t = 4 \rightarrow t = 4 - 2y'$ .

Ecuațiile simetriei devin:

$$(29) \quad S_{\pi} : \begin{cases} x'' = x' \\ y'' = 4 - y' \\ z'' = z' \end{cases}$$

În final compunerea dintre cele două izometrii are ecuația:

$$(30) \quad S_{\pi} \circ R_{Oy, \frac{\pi}{3}} : \begin{cases} x'' = \frac{1}{2}x + \frac{\sqrt{3}}{2}z \\ y'' = -y + 4 \\ z'' = -\frac{\sqrt{3}}{2}x + \frac{1}{2}z \end{cases}$$



(3) Considerăm:

$$(31) \quad P(x, y, z) \xrightarrow{S_\alpha} P'(x', y', z') \xrightarrow{t_{\bar{a}}} P''(x'', y'', z'').$$

Începem cu ecuația simetriei ortogonale față de planul  $\alpha$ . Pentru aceasta observăm că

$$PP' \perp \alpha \rightarrow \overrightarrow{PP'} \parallel \bar{N}_\alpha = (1, 2, -1).$$

Scriem ecuația dreptei  $PP'$ :

$$(32) \quad (PP') : \frac{x' - x}{1} = \frac{y' - y}{2} = \frac{z' - z}{-1} = t \rightarrow \begin{cases} x' = 2 + x \\ y' = 2t + y \\ z' = -t + z \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}.$$

Punem condiția ca  $P_0 = \frac{1}{2}P + \frac{1}{2}P' \in \alpha$ . Obținem:

$$(33) \quad \frac{x' + x}{2} + 2\frac{y' + y}{2} - \frac{z' + z}{2} + 1 = 0 \rightarrow t = \frac{-x - 2y + z - 1}{3}.$$

Ecuațiile simetriei ortogonale sunt:

$$(34) \quad S_\alpha : \begin{cases} x' = \frac{2x - 2y + z - 1}{3} \\ y' = \frac{-2x - y + 2z - 2}{3} \\ z' = \frac{x + 2y + 2z + 1}{3} \end{cases}$$

Ecuațiile translației sunt:

$$(35) \quad t_{\bar{a}} : \begin{cases} x'' = x' - 2 \\ y'' = y' + 1 \\ z'' = z' \end{cases}$$

În final:

$$(36) \quad t_{\bar{a}} \circ S_\alpha : \begin{cases} x'' = \frac{2x - 2y + z - 7}{3} \\ y'' = \frac{-2x - y + 2z + 1}{3} \\ z'' = \frac{x + 2y + 2z + 1}{3} \end{cases}$$

**Exercițiul 3.** În raport cu un reper ortonormat pozitiv  $\mathcal{R} = \{O; \bar{i}, \bar{j}, \bar{k}\}$  în  $\mathcal{E}^3$  se consideră aplicația  $f : E \rightarrow E$  dată prin ecuațiile

$$\begin{cases} x' &= x, \\ y' &= \frac{\sqrt{3}}{2}y + \frac{1}{2}z, \\ z' &= \frac{1}{2}y - \frac{\sqrt{3}}{2}z. \end{cases}$$

Să se verifice că  $f$  este o izometrie și determinați izometria.

**Soluție:** Începem cu observația că ecuațiile aplicației pot fi scrise sub forma

$$X' = AX + B \rightarrow \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$$

Se observă că  $B = O_{3,1} \rightarrow$  nu avem termeni liberi. Am obținut că  $f$  este morfism. Verificăm dacă aplicația asociată este ortogonală:

$$(37) \quad A \cdot A^t = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix} = I_3 \rightarrow \vec{f} \text{ ortogonală, deci } f \text{ este izometrie.}$$

Calculăm valoarea determinantului pentru a stabili dacă avem o deplasare sau o antideplasare:

$$(38) \quad \det A = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \end{vmatrix} = -1 < 0 \rightarrow f \text{ antideplasare}$$

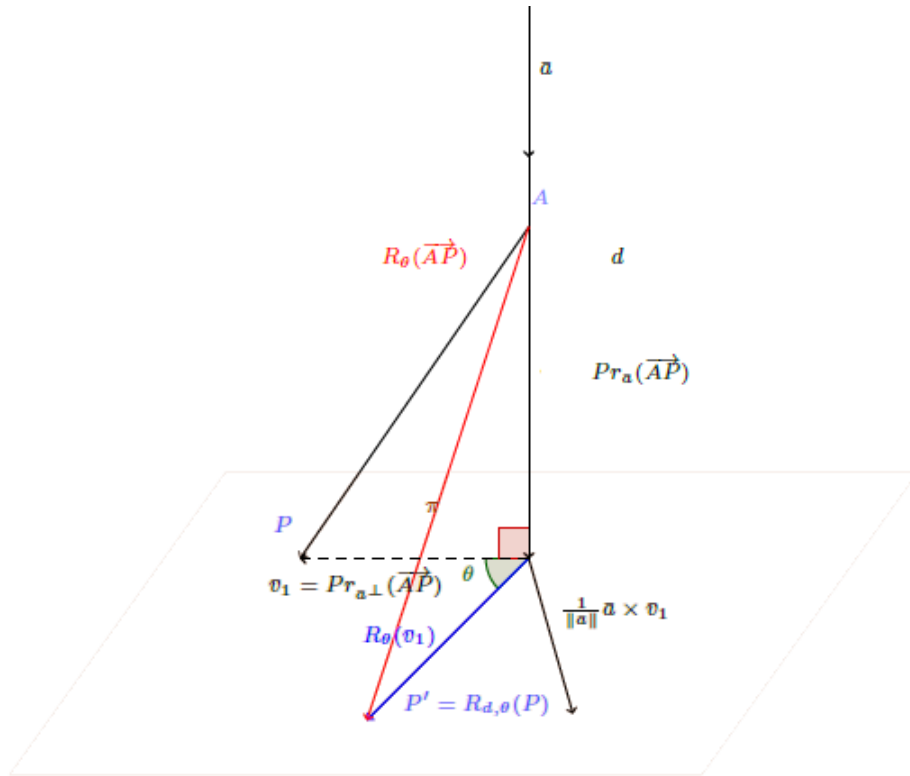
Determinăm mulțimea punctelor fixe:

$$(39) \quad f(\Omega) = \Omega \rightarrow \begin{cases} x = x, \\ y = \frac{\sqrt{3}}{2}y + \frac{1}{2}z, \\ z = \frac{1}{2}y - \frac{\sqrt{3}}{2}z \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = x, \\ y \left(1 - \frac{\sqrt{3}}{2}\right) + \frac{1}{2}z = 0, \\ \frac{1}{2}y + \left(-\frac{\sqrt{3}}{2} - 1\right)z = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 0 = 0 \\ y(\sqrt{3} - 2) + z = 0 \\ -y + (\sqrt{3} + 2)z = 0 \leftrightarrow y(\sqrt{3} - 2) + z = 0 \end{cases}$$

Deci obținem o infinitate de puncte fixe toate aparținând planului  $\alpha : y(\sqrt{3} - 2) + z = 0$ . Izometria obținută este simetria ortogonală față de planul  $\alpha : S_\alpha$ .

*Exercițiul 4.* Fie dreapta  $d : \frac{x}{1} = \frac{y}{1} = \frac{z-1}{0}$ . Scrieți ecuațiile rotației în jurul lui  $d$  de unghi orientat  $\frac{\pi}{4}$ .

**Soluție:** Observăm că  $A(0, 0, 1) \in d$  și  $\vec{a} = (1, 1, 0) \in \vec{d}$ . Fie  $P(x, y, z) \in E$ . Dorim să identificăm coordonatele rotației  $R_{d,\theta}$ ,  $\vec{r}_d = A + t\vec{a}$ ,  $t \in \mathbb{R}$ . Este evident că  $A$  reprezintă un punct fix pentru rotație.



Atunci:

$$(40) \quad P' = R_{d,\theta}(P) \rightarrow \overrightarrow{AP'} = R_{\vec{a},\theta}(\overrightarrow{AP}) \rightarrow P' = A + R_{\vec{a},\theta}(\overrightarrow{AP})$$

Amintim că  $Pr_{\vec{a}}\overrightarrow{AP} = \frac{\langle \overrightarrow{AP}, \vec{a} \rangle}{\|\vec{a}\|^2} \vec{a}$ . Considerăm

$$(41) \quad \vec{v}_1 = \overrightarrow{AP} - Pr_{\vec{a}}\overrightarrow{AP} = \overrightarrow{AP} - \frac{\langle \overrightarrow{AP}, \vec{a} \rangle}{\|\vec{a}\|^2} \vec{a}$$

Prin urmare

$$(42) \quad R_\theta(\vec{v}_1) = \cos \theta \vec{v}_1 + \frac{\sin \theta}{\|\vec{a}\|} (\vec{a} \times \vec{v}_1).$$

În final se obține:

$$(43) \quad R_{\bar{a},\theta}(\overrightarrow{AP}) = Pr_{\bar{a}}\overrightarrow{AP} + R_{\theta}(\bar{v}_1) \rightarrow R_{d,\theta}(P) = A + \cos\theta\overrightarrow{AP} + (1 - \cos\theta)\frac{\langle\overrightarrow{AP},\bar{a}\rangle}{\|\bar{a}\|^2}\bar{a} + \frac{\sin\theta}{\|\bar{a}\|}(\bar{a} \times \overrightarrow{AP})$$

Vom înlocui în formula scrisă anterior. Avem:

$$(44) \quad \begin{cases} \|\bar{a}\| = \sqrt{2}, \\ \overrightarrow{AP} = (x, y, z-1), \\ \langle\overrightarrow{AP},\bar{a}\rangle = x+y \\ \bar{a} \times \overrightarrow{AP} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 1 & 1 & 0 \\ x & y & z-1 \end{vmatrix} = (z-1, 1-z, y-x) \end{cases}$$

Deci:

$$(45) \quad R_{d,\frac{\pi}{4}} : \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{\sqrt{2}}{2} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z-1 \end{pmatrix} + \frac{2-\sqrt{2}}{4} (x+y) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} z-1 \\ 1-z \\ y-x \end{pmatrix}$$

*Exercițiul 5.* În raport cu un reper ortonormat pozitiv  $\mathcal{R} = \{O; \bar{i}, \bar{j}, \bar{k}\}$  în  $\mathcal{E}^3$  se consideră aplicația  $f : E \rightarrow E$  centro-afină de centru  $O$  și a cărei aplicație liniară indusă  $\vec{f} : \vec{E} \rightarrow \vec{E}$  are în raport cu baza reperului matricea

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}$$

Să se arate ca  $f$  este o rotație.

**Soluție:** Demonstrăm mai întâi că aplicația prezentată este un morfism. Este suficient să rescriem ecuațiile sub formă matriceală:

$$(46) \quad \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

Verificăm dacă matricea asociată este ortogonală:

$$(47) \quad AA^t = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} = I_3 \rightarrow f \text{ izometrie}$$

Calculăm valoarea determinantului matricii pentru a ne asigura că lucrăm cu o deplasare:

$$(48) \quad \det A = \begin{vmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{vmatrix} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1 > 0 \rightarrow f \text{ deplasare.}$$

Studiem mulțimea punctelor fixe ale acestei deplasări:

$$(49) \quad AX = X \rightarrow (A - I_3)X = O_3 \rightarrow \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} - 1 & -\frac{1}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} - 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Obținem următorul sistem omogen:

$$(50) \quad \begin{cases} -\frac{1}{2}x - \frac{\sqrt{2}}{2}y - \frac{1}{2}z = 0 \\ \frac{1}{2}x + \frac{\sqrt{2}-1}{2}y - \frac{1}{2}z = 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2}x + \frac{\sqrt{2}-1}{2}z = 0 \end{cases}$$

Deoarece  $\det(A - I_3) = 0$  rezultă că sistemul este compatibil nedeterminat. Alegem:

$$(51) \quad \delta = \begin{vmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} - 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} - 1 \end{vmatrix} = \left( \frac{\sqrt{2}}{2} - 1 \right)^2 \neq 0 \rightarrow \text{rang}(A - I_3) = 2 < 3$$

Avem  $y, z$  necunoscute principale și  $x = t$  necunoscuta secundară. Sistemul devine:

$$(52) \quad \begin{cases} \frac{\sqrt{2}-1}{2}y - \frac{1}{2}z = -\frac{1}{2}t \\ \frac{\sqrt{2}-1}{2}z = -\frac{\sqrt{2}}{2}t \rightarrow z = \frac{\sqrt{2}}{1-\sqrt{2}}t \end{cases}$$

Înlocuim în prima relație și obținem:

$$(53) \quad \frac{\sqrt{2}-1}{2}y = \frac{1}{2} \left( \frac{\sqrt{2}}{1-\sqrt{2}} - 1 \right) t \rightarrow y = -\frac{2\sqrt{2}-1}{(1-\sqrt{2})^2}t$$

Am obținut o infinitate de puncte fixe toate aparținând dreptei de ecuație:

$$(54) \quad d : \begin{cases} x = t, \\ y = -\frac{2\sqrt{2}-1}{(1-\sqrt{2})^2}t, \\ z = \frac{\sqrt{2}}{1-\sqrt{2}}t \end{cases}, t \in \mathbb{R}.$$

Mai avem de determinat unghiul rotației. Considerăm o schimbare ortonormată de baze astfel încât  $\bar{a} = \left( 1, -\frac{2\sqrt{2}-1}{(1-\sqrt{2})^2}, \frac{\sqrt{2}}{1-\sqrt{2}} \right)$ , vectorul director al lui  $d$ , să devină primul vector al noii baze și cele două baze să fie la fel orientate. Urma lui  $f$  are în raport cu noua bază matricea

$$(55) \quad A' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & -\sin \theta \\ 0 & \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$$

Cele două matrici sunt asemenea deci au același polinom caracteristic:

$$(56) \quad p_{A'}(\lambda) = \det(A' - \lambda I_3) = (1 - \lambda)(\lambda^2 - 2\lambda \cos \theta + 1),$$

deci avem valorile proprii  $1, \cos \theta \pm i \sin \theta$ .

Determinăm polinomul caracteristic pentru  $A$ . Acesta va avea valorile proprii  $1, a \pm ib$ . Determinăm valoarea unghiului din condițiile:

$$(57) \quad \begin{cases} \cos \theta = a \\ \sin \theta = b \end{cases}$$

În cazul de față

$$(58) \quad \det(A - \lambda I_3) = \begin{vmatrix} \frac{1}{2} - \lambda & -\frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} - \lambda & -\frac{1}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} - \lambda \end{vmatrix} = (\lambda - 1)(-2\lambda^2 + (-1 + 2\sqrt{2})\lambda - 2).$$

Se obține valoarea proprie 1 și încă două valori proprii care ne ajută să determinăm unghiul.

*Exercițiul 6.* În raport cu un reper ortonormat pozitiv  $\mathcal{R} = \{O; \bar{i}, \bar{j}, \bar{k}\}$  în  $\mathcal{E}^3$  se consideră aplicația  $f : E \rightarrow E$  centro-afină de centru  $O$  și a cărei aplicație liniară indusă  $\vec{f} : \vec{E} \rightarrow \vec{E}$  are în raport cu baza reperului matricea

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1-\sqrt{3}}{3} & \frac{1+\sqrt{3}}{3} \\ \frac{1+\sqrt{3}}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1-\sqrt{3}}{3} \\ \frac{1-\sqrt{3}}{3} & \frac{1+\sqrt{3}}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

Să se arate ca  $f$  este o rotație.

**Soluție:** Observăm că  $f$  se poate scrie matriceal sub forma:

$$(59) \quad X' = AX \rightarrow \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1-\sqrt{3}}{3} & \frac{1+\sqrt{3}}{3} \\ \frac{1+\sqrt{3}}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1-\sqrt{3}}{3} \\ \frac{1-\sqrt{3}}{3} & \frac{1+\sqrt{3}}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \rightarrow f \text{ morfism}$$

Mai avem de verificat dacă matricea  $A$  este ortogonală:

$$(60) \quad AA^T = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1-\sqrt{3}}{3} & \frac{1+\sqrt{3}}{3} \\ \frac{1+\sqrt{3}}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1-\sqrt{3}}{3} \\ \frac{1-\sqrt{3}}{3} & \frac{1+\sqrt{3}}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1+\sqrt{3}}{3} & \frac{1-\sqrt{3}}{3} \\ \frac{1-\sqrt{3}}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1+\sqrt{3}}{3} \\ \frac{1+\sqrt{3}}{3} & \frac{1-\sqrt{3}}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} = I_3 \rightarrow f \text{ izometrie.}$$

Studiem mulțimea punctelor fixe asociate izometriei:

$$(61) \quad f(x, y, z) = (x, y, z) \rightarrow (A - I_3)X = O_3 \rightarrow \begin{pmatrix} -\frac{2}{3} & \frac{1-\sqrt{3}}{3} & \frac{1+\sqrt{3}}{3} \\ \frac{1+\sqrt{3}}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{1-\sqrt{3}}{3} \\ \frac{1-\sqrt{3}}{3} & \frac{1+\sqrt{3}}{3} & -\frac{2}{3} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Se observă că  $\det(A - I_3) = 0$  deci sistemul este compatibil nedeterminat. Alegem

$$(62) \quad \delta = \begin{vmatrix} -\frac{2}{3} & \frac{1-\sqrt{3}}{3} \\ \frac{1+\sqrt{3}}{3} & -\frac{2}{3} \end{vmatrix} = \frac{2}{3} \neq 0 \rightarrow \text{rang}(A - I_3) = 2 < 3$$

Avem  $x, y$  necunoscute principale și  $z = t$  necunoscuta secundară. Sistemul devine:

$$(63) \quad \begin{cases} -\frac{2}{3}x + \frac{1-\sqrt{3}}{3}y = -\frac{1+\sqrt{3}}{3}t \\ \frac{1+\sqrt{3}}{3}x - \frac{2}{3}y = -\frac{1-\sqrt{3}}{3}t \end{cases}$$

Se obține  $x = y = t$  deci o infinitate de soluții toate aparținând dreptei ecuație:

$$(64) \quad d: \begin{cases} x = t, \\ y = t, \\ z = t \end{cases}$$

Mai avem de determinat unghiul rotației. Considerăm o schimbare ortonormată de baze astfel încât  $\bar{a} = (1, 1, 1)$ , vectorul director al lui  $d$ , să devină primul vector al noii baze și cele două baze să fie la fel orientate. Urma lui  $f$  are în raport cu noua bază matricea

$$(65) \quad A' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & -\sin \theta \\ 0 & \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$$

Cele două matrici sunt asemenea deci au același polinom caracteristic:

$$(66) \quad p_{A'}(\lambda) = \det(A' - \lambda I_3) = (1 - \lambda)(\lambda^2 - 2\lambda \cos \theta + 1),$$

deci avem valorile proprii  $1, \cos \theta \pm i \sin \theta$ .

Determinăm polinomul caracteristic pentru  $A$ . Acesta va avea valorile proprii  $1, a \pm ib$ . Determinăm valoarea unghiului din condițiile:

$$(67) \quad \begin{cases} \cos \theta = a \\ \sin \theta = b \end{cases}$$

Avem:

$$(68) \quad \det(A - \lambda I_3) = \begin{vmatrix} \frac{1}{3} - \lambda & \frac{1-\sqrt{3}}{3} & \frac{1+\sqrt{3}}{3} \\ \frac{1+\sqrt{3}}{3} & \frac{1}{3} - \lambda & \frac{1-\sqrt{3}}{3} \\ \frac{1-\sqrt{3}}{3} & \frac{1+\sqrt{3}}{3} & \frac{1}{3} - \lambda \end{vmatrix} = (\lambda - 1)(\lambda^2 + 1)$$

Obținem valorile proprii  $\lambda_1 = 1, \lambda_{2,3} = \pm i$ . Deci:

$$(69) \quad \begin{cases} \cos \theta = 0, \\ \sin \theta = 1 \end{cases} \rightarrow \theta = \frac{\pi}{2}.$$

**Exercițiul 7.** Determinați ecuația generală a planului

$$(70) \quad \pi' = R_{Oy, \frac{\pi}{4}}(\pi), \quad \pi: x + y + 2z + 1 = 0.$$

**Soluție:**

**Metoda I** Se observă că  $P(0, -1, 0) \in \pi$  și  $\bar{N}_\pi = (1, 1, 2)$ . Prin urmare planul  $\pi'$  va trece prin  $P' = R_{Oy, \frac{\pi}{4}}(P)$  (observăm că  $P$  aparține axei de rotație) și va avea direcția normală dată de  $\bar{N}_{\pi'} = R_{\bar{j}, \frac{\pi}{4}}(\bar{N}_\pi)$ .

$$(71) \quad R_{Oy, \frac{\pi}{4}}(P) : \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & 0 & \sin \theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \theta & 0 & \cos \theta \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow P'(0, -1, 0).$$

Analog:

$$(72) \quad R_{\bar{j}, \frac{\pi}{4}}(\bar{N}_\pi) = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \rightarrow \bar{N}_{\pi'} = \left( \frac{\sqrt{2}}{2} + \sqrt{2}, 1, -\frac{\sqrt{2}}{2} + \sqrt{2} \right).$$

Scriem ecuația generală a planului  $\pi'$  determinat de  $P$  și direcția normală  $\bar{N}_{\pi'}$ :

$$(73) \quad (\pi') : \left( \frac{\sqrt{2}}{2} + \sqrt{2} \right) x + y + \left( -\frac{\sqrt{2}}{2} + \sqrt{2} \right) z + 1 = 0.$$

**Metoda II:** Din ecuația generală a planului  $\pi$  scoatem ecuațiile parametrice:

$$(74) \quad \pi : \begin{cases} x = t \\ y = -t - 2s - 1 \\ z = s \end{cases}, \quad t, s \in \mathbb{R}.$$

Deci vectorii  $\bar{u} = (1, -1, 0)$ ,  $\bar{v} = (0, -2, 1)$  și  $P(0, -1, 0) \in Oy$  determină planul  $\pi$ . Calculăm:

$$(75) \quad \bar{u}' = R_{\bar{j}, \frac{\pi}{4}}(\bar{u}) = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ -1 \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}, \quad \bar{v}' = R_{\bar{j}, \frac{\pi}{4}}(\bar{v}) = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ -2 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}$$

Obținem ecuațiile parametrice ale planului  $(\pi')$

$$(76) \quad (\pi') : \begin{cases} x' = \frac{\sqrt{2}}{2}t + \frac{\sqrt{2}}{2}s \\ y' = -t - 2s - 1 \\ z' = -\frac{\sqrt{2}}{2}t + \frac{\sqrt{2}}{2}s \end{cases}, \quad t, s \in \mathbb{R}.$$

**Exercițiul 8.** În raport cu un reper ortonormat pozitiv  $\mathcal{R} = \{O; \bar{i}, \bar{j}, \bar{k}\}$  în  $\mathcal{E}^3$ , scrieți ecuațiile următoarelor rotații:

- (1) rotația în jurul axei  $Ox$ , de unghi orientat  $\alpha = \frac{\pi}{3}$ ,
- (2) rotația în jurul axei  $Oy$  de unghi orientat  $\beta = -\frac{\pi}{2}$ ,
- (3) rotația în jurul axei  $Oz$  de unghi orientat  $\gamma = \frac{\pi}{4}$ .

**Temă:**

**Exercițiul 9.** Determinați ecuațiile următoarelor izometrii în  $\mathcal{E}^3$ :

- (1) mișcarea elicoidală  $R_{Oy, \frac{\pi}{6}} \circ t_{\bar{u}}$ ,  $\bar{u} = 4\bar{j}$ ;
- (2) rotoșimetria  $S_\pi \circ R_{Ox, \frac{\pi}{4}}$ ,  $\pi : x - 4 = 0$ ;
- (3) alunecarea  $t_{\bar{a}} \circ S_\alpha$ ,  $\bar{a} = -\bar{i} + \bar{j}$ ,  $\alpha : x + y + 1 = 0$ .

**Temă:**

**Exercițiul 10.** În spațiul afin euclidian orientat  $\mathcal{E}^3$  se dau, în raport cu un reper ortonormat pozitiv  $\mathcal{R} = \{O; \bar{i}, \bar{j}, \bar{k}\}$ , drepte

$$d : \frac{X}{2} = \frac{Y-2}{2} = \frac{Z}{4}, \quad \delta : \frac{X}{4} = \frac{Y-1}{1} = \frac{Z}{-1}$$

și planul  $\alpha : X + 2Y - 2Z + 1 = 0$ .

- (1) Scrieți ecuațiile simetriei ortogonale  $S_d$  față de dreapta  $d$  și ecuațiile simetriei ortogonale  $S_\alpha$  față de planul  $\alpha$ .
- (2) Verificați că cele două simetrii ortogonale sunt aplicații involutive.
- (3) Apoi determinați ecuațiile lui  $S_d(\delta)$  și  $S_\alpha(\delta)$ .